F 2557

1
TOMUL 31
1972

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

Comitetul de redacţie

Acad. E. **CARAFOLI** — *redactor responsabil.*
Acad. D. **DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*
Prof. I. **ANTON**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. **CONSTANTIN AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ŞTEFAN BĂLAN**,
Prof. **CR. MATEESCU**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **GH. MANEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. **PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU C. BOGDAN**,
Conf. **DAN PAVELESCU**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacţie.*

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea de comerţ exterior LIBRI, Căsuţa poştală 134 — 135 (Calea Victoriei 126), Bucureşti, România, sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă, se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei.

EA

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacţia: Bucureşti,

Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 31, nr. 1 — 1972

SUMAR

STUDII

Pag.

N.N. PATRAULEA, Metode iterative pentru calculul aerodinamic al aripii subţiri în regim subsonic 3

T. OROVEANU, I. SPULBER, Asupra unor probleme de scurgere a lichidelor miscibile prin tuburi de secţiune circulară 15

MIHAIL POPESCU, PETER NOVOTNY, Model matematic pentru studiul stabilităţii castelelor şi sistemelor de castele de echilibru 27

L. DRAGOŞ, Asupra principiilor mecanicii newtoniene 51

CHIRIAC VASILIU, Influenţa variaţiei coeficientului de aderenţă asupra parametrilor capacităţii de frînare a automobilului 67

N. I. MANOLESCU, De la grinzile Baranov prin grafizare la lanţurile şi mecanismele plane articulate 85

IOSIF TEMPEA, Sinteza structurală a lanţurilor cinematice plane generale cu $N = 1,2,3$ contururi deformabile şi grad de libertate $L_3 = 4$ 117

CESAR BUDA, ŞTEFAN POPESCU, Calculul de rezistenţă mecanică al camerelor spirale metalice 135

V.V. GHEORGHIŢĂ, Torsiunea barelor ortotrope compuse, cu axa uşor curbată . . . 157

VALERIU PETCU, Compatibilitatea rotirilor articulaţiilor plastice în teoria redistribuţiei minime de momente a structurilor continue de beton armat 165

VIRGIL BOGDAN, Consideraţii asupra determinării coeficienţilor de influenţă ai unei bare în consolă 179

TRAIAN ONEŢ, Influenţa armăturii comprimate asupra rigidităţii elementelor încovoiate din beton uşor 199

GH. ZGURĂ, AL. DORIN, Unele aspecte privind optimizarea prelucrării pe maşinile de găurit cu comandă numerică 215

RECENZII 229

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 1, 1972, p. 1—232

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratleltár
5/13/1973

METODE ITERATIVE PENTRU CALCULUL AERODINAMIC AL ARIPII SUBȚIRI ÎN REGIM SUBSONIC

de N. N. PATRAULEA
I.M.F.C.A.

Se prezintă metode de calcul numeric pentru aripile de avion subțiri în regim subsonic bazate pe o rezolvare iterativă a ecuației integrale de bază.
Se arată că procedeul este convergent atît în cazul reprezentării mișcării de perturbație prin surse așezate pe două plane apropiate, cît și în cazul singularităților turbionare formate din ochiuri de linii de vîrtejuri, adiacente.
În ambele cazuri necunoscutele considerate sînt potențialele.
Presupunînd rețelele cu ochiuri egale (sau egale pe anumite porțiuni ale aripii) se obține o programare ușoară, memorie necesară mică și durate rezonabile de lucru la calculator.

1. După cum se știe în teoria liniară a aripii subțiri în regim subsonic, compresibil, potențialul vitezei de perturbație Φ trebuie să satisfacă ecuația

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{1.1}$$

unde Ox este paralelă și în sensul vitezei relative la infinit, Oy în lungul anvergurii, iar coeficientul β este

$$\beta = \sqrt{1 - M^2}, \tag{1.2}$$

M, fiind numărul Mach la infinit. Operînd transformarea lui Glauert,

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \beta y, \\ z' &= \beta z, \\ \Phi' &= \Phi, \end{aligned} \tag{1.3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 1, 1972, P. 3–14

se obține în noile variabile ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Phi'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Phi'}{\partial z'^2}=0, \tag{1.4}$$

aceeași deci ca și într-un fluid incompresibil cu deosebirea că se scriu condițiile la limită pe o aripă avînd o formă în plan transformată prin (1.3).

De aceea în cele de mai jos ne vom referi, fără a restrînge generalitatea, la problema aripii subțiri date, în fluid incompresibil.

2. Considerăm că mișcarea de perturbație este indusă de un strat de surse așezat pe planul xOz și de un strat de surse de sens contrar așezat pe un plan apropiaz $z=-h$. Aceste singularități sînt situate în domeniul A, proiecția aripii pe aceste plane și pe domeniul vîrtejurilor libere Σ (fig. 2.1).

Condițiile la limită se vor scrie pe planul superior, și din motive de simetrie vor fi satisfăcute și pe planul inferior. Condiția principală constă în egalitatea dintre vitezele normale, cunoscute în funcție de panta aripii în punctul curent, și vitezele normale de perturbație, induse de sursa

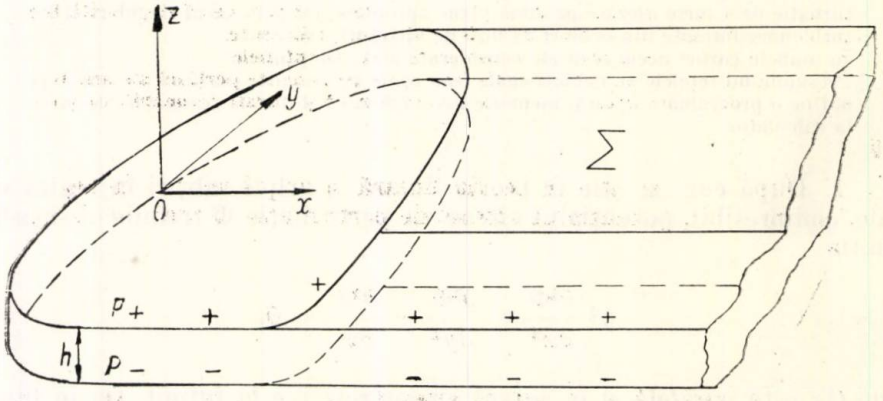


Fig. 2.1

locală de densitate σ_p de pe partea superioară [1]) și de totalitatea surselor de semn contrar de pe aripă și pînza de vîrtejuri de pe planul inferior, adică

$$2\pi\sigma_P-h\int_{A+\Sigma}\frac{\sigma_R}{r^3_{R,P}}\cdot dS_R=W_P,\ P\in A. \tag{2.1}$$

Condiția lui Jucovski la bordul de fugă va fi respectată automat dacă impunem ca în aval de bordul de fugă și pe aceeași dreaptă paralelă cu viteza de la infinit, densitatea σ să aibă o valoare constantă, egală cu valoarea sa la bordul de fugă a profilului corespunzător.

[1]) De fapt condițiile se scriu corespunzător unei distanțe $+0$ de planul superior.

După cum se vede, ecuația integrală (2.1) are nucleul finit r, fiind diferit de zero în tot domeniul. Pentru rezolvarea numerică a ecuației (2.1) se împarte domeniul A într-un număr mare de elemente de suprafață și se transformă (2.1) într-un sistem de ecuații liniare. Vom avea pentru un element oarecare P,

$$(2\pi - N_{PP})\ \sigma_P - \sum_{Q \neq P} \cdot N_{PQ}\sigma_Q = W_P S_P. \tag{2.2}$$

Nucleul N_{PQ} reprezintă fluxul indus în elementul S_P de pe planul superior de către surse unitare așezate în fiecare element S_Q pe planul inferior. În cazul cînd elementul S_Q este vecin bordului de fugă se va înțelege prin N_{PQ} viteza indusă în P atît de Q, cît și de toate sursele unitare de pe banda de aceeași lățime ca a elementului S_Q și care se întinde pînă la infinit aval.

Același lucru este valabil și pentru N_{PP}, cînd P este în elementul vecin bordului de fugă. Este important să arătăm că

$$\sum_{Q \neq P} N_{PQ} < 2\pi - N_{PP}, \tag{2.3}$$

deoarece acesta duce la posibilitatea de a rezolva sistemul de ecuații (2.2) prin aproximații succesive, iar rapiditatea convergenței este cu atît mai mare cu cît rapoartele

$$\mu_P = \frac{\sum_{Q \neq P} N_{PQ}}{2\pi - N_{PP}}, \tag{2.4}$$

referitoare la fiecare ecuație P, sînt mai mici.

Pentru demonstrație să observăm mai întîi că

$$\sum_{Q \neq P} N_{PQ} + N_{PP} = \sum_{Q} N_{QP}, \tag{2.5}$$

primul membru reprezentînd fluxul indus de sursele de pe planul inferior, pe elementul S_P de pe planul superior, iar membrul doi fluxul indus de sursele de pe elementul S_P al planului superior pe elementele de pe planul inferior, cuprinse în $A + \Sigma$. Dar este clar că

$$\sum_{Q} N_{QP} = 2\pi - \omega_{LP}, \tag{2.6}$$

unde prin ω_L am notat fluxul trimis de sursele de pe S_P prin „lumina" dintre cele două plane, de contur L. Comparînd (2.6) cu (2.5), se deduce că

$$\sum_{Q \neq P} N_{PQ} = 2\pi - N_{PP} - \omega_{LP} \tag{2.7}$$

și deci

$$\mu_P = 1 - \frac{\omega_L}{2\pi - N_{PP}} < 1, \tag{2.8}$$

ceea ce era de arătat.

Se pot considera două configurații extreme, și anume: i) h foarte mic în raport cu o dimensiune caracteristică D_P a elemenetlor S_P și ii) h foarte mare în raport cu D_P.

În primul caz, acțiunea celor două planuri cu surse devine la limită identică cu acțiunea unor dubleți sau cu aceea a unei spire de vîrtej avînd forma contururilor L_P. În acest caz însă, fluxul N_{PP} devine infinit și studiul respectiv se va face mai departe sub o formă modificată.

În al doilea caz, este evident că

$$N_{PP} \approx \frac{S_P}{h^2} \approx 0,$$

și atunci expresia (2.8) se simplifică astfel:

$$\mu_P \approx 1 - \frac{\omega_L}{2\pi}, \tag{2.9}$$

adică μ_P nu mai depind de mărimea dimensiunilor S_P, ci numai de h (conținut în unghiul solid ω_L). Desigur convergența este cu atît mai bună cu cît h este mai mare în raport cu dimensiunile aripii. Ținînd seama că în realitate aripa nu este infinit subțire, profilele putînd avea o grosime relativă și de 10% s-ar părea că nu vor interveni erori importante, din acest punct de vedere, dacă h este mai mic de 10% în raport cu coarda medie a aripii.

Pe de altă parte, cînd h este mare în raport cu dimensiunile liniare ale elementelor S_P, este convenabil să scriem ecuația (2.2) sub forma

$$(2\pi - n_{PP} S_P)\sigma_P - \sum_{Q \neq P} n_{PQ} \sigma_Q S_Q = w_P, \tag{2.10}$$

necunoscutele fiind densitățile surselor și nu suma lor pe elementul respectiv Nucleul n_{PQ} are, evident, semnificația unei viteze normale induse în P de către o sursă unitară așezată în Q. Pentru un h fixat, n_{PQ} va fi funcție numai de diferențele celor două coordonate x, y,

$$n_{PQ} = n_{PQ}\{(x_P - x_Q), (y_P - y_Q)\},$$

lucru foarte important, deoarece înregistrarea nucleului n_{PQ} ocupă în acest caz o memorie mică în calculatorul electronic.

Pentru adimensionalizare, se poate pune:

$$n_{PP}h^2 = \overline{n}_{PP}; \quad \overline{w}_P = \frac{w_P}{V_\infty},$$
$$\frac{\sigma_P}{V_\infty} = \overline{\sigma}_P; \quad \frac{S_Q}{h^2} = \overline{S}_Q \tag{2.11}$$

și în loc de (2.10) avem

$$(2\pi - \overline{n}_{PP}\overline{S}_P)\,\overline{\sigma}_P - \sum_{Q\neq P} \overline{n}_{PQ}\,\overline{\sigma}_Q\,S_Q = \overline{w}_P. \tag{2.12}$$

3. În vederea trecerii la limită pentru $h \to 0$, vom interpreta sistemul de ecuații,

$$(2\pi - n_{PP}S_P)\,\sigma_P - \sum_{Q\neq P} n_{PQ}\sigma_Q S_Q = w_P, \tag{3.1}$$

în felul următor. Prin n_{PQ} vom înțelege viteza normală indusă în P de către o sursă de densitate unitară întinsă uniform pe S_Q, P fiind un punct caracteristic, interior părții S_P de pe planul superior (de exemplu, dacă S_P sînt dreptunghiuri P va putea fi centrul lor), iar Q definește elementul S_Q considerat pe planul inferior. De notat că în cazul de față distanța h poate fi arbitrar de mare.

S-au înlocuit astfel fluxurile cu vitezele în anumite puncte particulare alese în fiecare element S_Q. În aceste condiții se poate face trecerea la limită pentru $h \to 0$.

Într-adevăr, să notăm cu $v_{PQ}(z)$ viteza normală indusă de stratul inferior S_Q într-un punct de cotă z, situat pe normala lui P, și să admitem că pentru z și h mic, putem scrie

$$n_{PQ}\,S_Q \approx \left(\frac{\mathrm{d}v_{PQ}}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} \cdot h \tag{3.2}$$

și asemănător

$$(2\pi - n_{PP}S_P) \approx \left(\frac{\mathrm{d}v_{PP}}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} \cdot h. \tag{3.3}$$

Punînd

$$\left(\frac{\mathrm{d}v_{PQ}}{\mathrm{d}z_P}\right)_{z=0} = \nu(P,\ Q);\ \delta_Q = \sigma_Q \cdot h, \tag{3.4}$$

ecuația (2.1) se va scrie

$$\nu(P,\ P)\,\delta_P - \sum_{P\neq Q} \nu_{P,Q}\,\delta_Q = W_P. \tag{3.5}$$

Observăm că la limită cînd $h \to 0$ δ_Q tind către densităţi de dublete ale căror valori trebuie să fie deduse din rezolvarea sistemului (3.5). În procesul de trecere la limită se înţelege că pe măsură ce $h \to 0$, $\sigma \to \infty$, astfel încît δ_P, δ_Q rămîn finite.

4. Să revenim la reprezentarea mişcării de perturbaţie prin densităţile de surse, întinse pe cele două planuri apropiate, şi fie o configuraţie elementară cilindrică dreaptă cu suprafeţele de bază limitate de curbe închise L_Q, oarecare. Cum pe suprafeţele de bază s-a presupus că densităţile de surse sînt egale dar de sens contrar, mişcarea indusă de acestea în exteriorul cilindrului considerat este echivalentă [1] cu aceia indusă de o bobină de vîrtejuri înfăşurate pe cilindrul respectiv şi avînd o densitate turbionară[1]) [1],

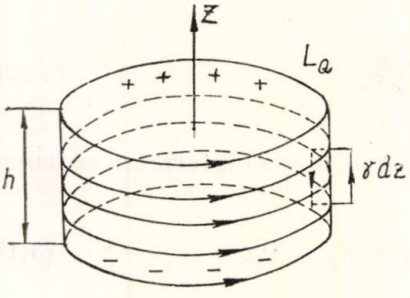


Fig. 4.1

$$\gamma = 4\pi\sigma. \tag{4.1}$$

Prin densitatea turbionară înţelegem circulaţia în jurul spirelor de vîrtej pe o lungime unitară de generatoare (fig. 4.1). Cînd $h \to 0$, $\sigma h \to \delta < \infty$ şi deci putem să reprezentăm mişcarea la limită atît prin dubleţii δ, cît şi prin liniile închise de vîrtejuri L_Q a căror intensitate Γ_Q limită este

$$\lim_{h \to 0} (\gamma h) = \Gamma_Q = 4\pi\delta_Q. \tag{4.2}$$

5. Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei se poate considera deci că mişcarea de perturbaţie este indusă de o reţea de ochiuri de vîrtejuri

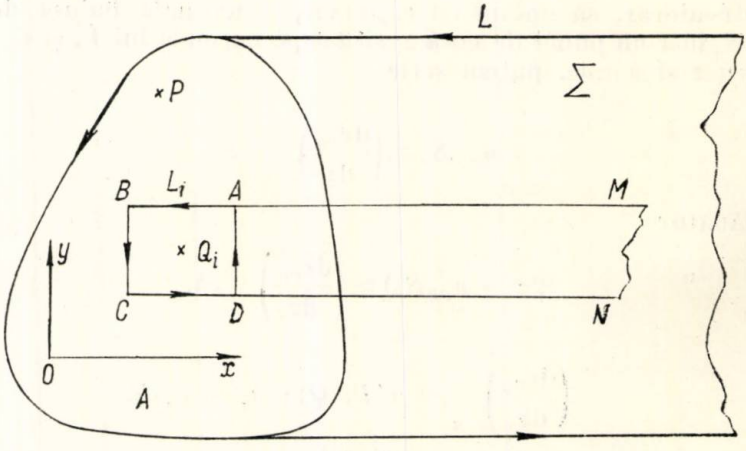


Fig. 5.1

întinse pe domeniul A al planului, care reprezintă aripa şi pe domeniul Σ corespunzător căii de vîrtejuri libere (fig. 5.1). Schema turbionară a fost aplicată şi de alţi autori [2], [3], dar aceştia consideră în loc de ochiuri

de vîrtejuri potcoave elementare de vîrtejuri, care se întind pînă la infinit aval, ceea ce revine la alegerea unor alte necunoscute în ecuațiile care trebuie să fie verificate (viteze axiale în loc de potențiale). Practic vom avea de verificat că în centrul fiecărui ochi de vîrtej sau în alt punct caracteristic din domeniul A, viteza de perturbație normală w este cea cunoscută din considerarea vitezei de la infinit amonte V_∞ și din panta α a scheletului profilului în perimetrul considerat, adică

$$\frac{w}{V_\infty} = -\alpha. \tag{5.1}$$

Necunoscutele problemei sînt intensitățile ochiurilor de vîrtejuri Γ_P. Condiția lui Jucovski la bordul de fugă al aripii va fi automat satisfăcută dacă se consideră că pe calea de vîrtejuri, ochiurile de vîrtejuri, corespunzătoare aceleiași paralele la viteza de la infinit au aceeași intensitate, egală cu aceea de la bordul de fugă al aripii.

Noi am considerat o rețea de ochiuri dreptunghiulare, care oferă importante avantaje de calcul.

Vom considera aici o rețea cu ochiuri egale, deși se poate generaliza metoda la rețele formate din ochiuri de dimensiuni diferite. De exemplu, în partea centrală a aripii se pot lua ochiuri mai mari decît în regiunile de capăt ale aripii.

6. Fie C_{PQ} viteza indusă de o potcoavă semiinfinită, Q, de intensitate unitară și de lățime BC unitară, în punctul P din același plan și C_{QQ} viteza indusă de aceeași potcoavă în punctul Q, centrul unui ochi dreptunghiular $ABCD$ așezat în interiorul potcoavei ca în fig. (5.1), unde s-a marcat și sensul pozitiv al liniei de vîrtej.

Este evident că viteza indusă în P de ochiul $ABCD$ va fi egală cu viteza indusă de potcoava $MBCN$ mai puțin viteza indusă în același punct de potcoava $MAPN$. De aceea vom considera ca matrice fundamentală de calcul aceea formată din elementele C_{PQ}. Este vizibil, pe baza celor cunoscute din electromagnetism și a analogiei dintre intensitatea de vîrtejuri și curent electric, pe de o parte, și dintre cîmpul magnetic indus de spira $MBCN$ și viteză, pe de altă parte, că elementele C_{PQ} definite mai sus vor fi pozitive dacă P este interior potcoavei și negative pentru P exterior, dacă se convine să se considere sensul pozitiv pentru vitezele normale către în sus.

Ecuațiile liniare în Γ_P care trebuie să fie verificate în punctele P ale ochiurilor turbionare P sînt

$$(C'_{\overline{P}\,\overline{P}} + \varepsilon C'_{\overline{P},\,\overline{P}S})\frac{\Gamma_P}{E} + \sum_{Q \neq P} (C'_{\overline{P}\,\overline{Q}} + \varepsilon C'_{\overline{P},\,QS}) \cdot \frac{\Gamma_Q}{E} = w_P, \tag{6.1}$$

unde $Q,\ P \in A'$

$$\overline{P} = \frac{\overline{r}_P}{E}; \quad \overline{Q} = \frac{\overline{r}_Q}{E}; \quad C'_{\overline{P},\,\overline{P}} = C_{PP},$$

dacă P este punctul caracteristic al elementului cel mai aptopiat de bordul de fugă dintre acelea care au același y. Vom spune pe scurt în această situație că P este punct de bord de fugă

$$C'_{\overline{PP}} = C_{\overline{PP}} - C_{\overline{PP'}},$$

dacă P nu este punct de bord de fugă, iar P' este centrul următorului dreptunghi către aval de P,

$$C'_{\overline{PQ}} = C_{\overline{PQ}},$$

dacă Q este punct de bord de fugă și, în sfîrșit,

$$C'_{\overline{PQ}} = C_{\overline{PQ}} - C_{\overline{PQ'}}$$

dacă Q nu este punct de bord de fugă.

Prin A' s-a notat semiaripa, condițiile la limită putînd fi scrise pe semiaripa în cazul aripii simetrice cu condiții la limită fie simetrice, fie antisimetrice.

Prin QS s-a notat simetricul punctului Q față de axa de simetrie longitudinală, iar ε se ia $+$ sau -1 după cum problema este simetrică sau antisimetrică.

Folosind mărimile adimensionale,

$$\overline{W}_P = \frac{W_P}{V_\infty}; \quad \overline{\Gamma}_P = \frac{\Gamma_P}{V_\infty B}, \tag{6.2}$$

unde B este o lungime caracteristică a aripii, de exemplu semianvergura sa, iar V_∞ viteza la infinit ecuațiile (6.1), generalizate pentru cazul diviziunilor neegale ale aripii (dar totuși dreptunghiulari asemenea), se vor scrie sub forma

$$\frac{B}{E_P}\overline{\Gamma}_P\left(C'_{\overline{PP}} + \varepsilon C'\left(\frac{\vec{P} - \vec{PS}}{EP}\right)\right) + \sum_Q \frac{B}{E_Q}\left(C'\left(\frac{\vec{P} - \vec{Q}}{E_Q}\right) + \varepsilon C'\left(\frac{\vec{P} - \vec{QS}}{E_Q}\right)\right)\overline{\Gamma}_Q -$$

$$-\left(C'_{\overline{PP}} + \varepsilon C'\left(\frac{\vec{P} - \vec{PS}}{E_P}\right)\right)\frac{B}{E_P}\overline{\Gamma}_P = \overline{W}_P. \tag{6.3}$$

7. Matricea acestor ecuații are proprietatea importantă că termenii diagonali sînt predominanți. Acest fapt ne dă posibilitatea rezolvării ecuațiilor prin iterații, și anume la fiecare iterație se scot valorile $\overline{\Gamma}_P$ din ecuația referitoare la punctul P, considerînd în suma $\sum_Q$ valorile Γ_Q calculate în iterația precedentă.

Vom arăta că valoarea unui coeficient diagonal este mai mare decît suma coeficienților celorlalte necunoscute ai ecuației respective. Aceasta se demonstrează ușor în felul următor (ne vom referi pentru simplificare la o aripă oarecare simetrică sau nu).

Să remarcăm mai întîi că coeficientul termenului diagonal reprezintă viteza v_i indusă de ochiul turbionar L_i, respectiv în el însuși, iar suma celorlalți coeficienți reprezintă viteza indusă v_1, de către toate celelalte ochiuri turbionare de pe aripa și de pe Σ. În cazul cînd ochiul turibonar este vecin cu bordul de fugă (vom spune ochi de bord de fugă), ochiul ecuației respective (a cărui viteză indusă în el însuși este chiar coeficientul diagonal) este o potcoavă turbionară în loc de dreptunghi. Acest fapt nu schimbă cu nimic raționamentele care urmează și în care ne referim spre simplificare la un ochi turbionar dreptunghiular interior aripii. Este clar însă, că acțiunea tuturor ochiurilor turbionare *unitare* de pe aripa și pînza de jet este identică cu acțiunea unei linii extremale de vîrtejuri în formă de potcoavă și a cărei parte amonte coincide cu bordul de atac (fig. 5.1). Într-adevăr, laturile ochiurilor se distrug dacă cîte două cu excepția celor periferice care formează astfel linia L (cu aproximarea implicată de rețea finită). Avem deci

$$v_i = \text{viteza indusă de } L_i. \tag{7.1}$$

$$v_i + v_1 = \text{viteza indusă de } L, \tag{7.2}$$

$$\text{și deci } v_1 = \text{viteza indusă de } L - L_i. \tag{7.3}$$

Viteza v_1 este de sens contrar vitezei v_i ceea ce se vede și din (7.3), ținînd seama în același timp de faptul că acțiunea ochiului L_i este mai puternică în interiorul său decît acțiunea liniei L.

Ceea ce este important de reținut este faptul că în valoare absolută

$$|v_1| < |v_i| \tag{7.4}$$

deoarece prima este indusă de $L_i - L$ în timp ce v_i este indusă de L_i.

Așadar în fiecare ecuație, marcată printr-un indice $1 \leqslant i \leqslant N$, avem

$$\sum_{j \neq i} - a_{ij} < a_{ii}. \tag{7.5}$$

Vom pune

$$\mu_i = \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{a_{ii}}. \tag{7.6}$$

Să scriem aceeași ecuație corespunzătoare iteraților succesive $k-1$, k,

$$\begin{aligned} a_{ii}\, x_i^{(k-1)} + \sum_{j \neq i} a_{ij}\, x_j^{(k-2)} &= w_i, \\ a_{ii}\, x_i^{(k)} + \sum_{j \neq i} a_{ij}\, x_j^{(k-1)} &= w_i. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Scăzînd membru cu membru, obținem cu notații evidente

$$a_{ii}\,\Delta\, x_i^{(k)} + \sum_{j\neq i} a_{ij}\cdot \Delta\, x_j^{(k-1)} = 0, \tag{7.8}$$

. . . . . .

$$i = 1, \ldots, N$$

$$j = 1, \ldots, N.$$

Fie la iterația $(k-1)$ (de fapt de la $(k-2)$ la $(k-1)$) $\Delta x_M^{(k-1)}$ cea mai mare creștere în valoare absolută din cele N creșteri $\Delta x_j^{(k-1)}$. Substituind în fiecare din ecuațiile (7.8) $\Delta x_j^{(k-1)}$ prin $\Delta x_M^{(k-1)}$, obținem inegalitățile

$$\Delta x_i^{(k)} < \mu_i\, \Delta x_M^{(k-1)}, \tag{7.9}$$

$$\Delta x_i^{(k+1)} < \mu_i\, \Delta x_M^{(k-1)}. \tag{7.10}$$

Dar din (7.9) se deduce că

$$\Delta x_M^{(k)} < \frac{\sum_{j\neq i} a_{ij}}{a_{ii}} \cdot \Delta x_M^{(k-1)}$$

și deci (7.10) devine

$$\Delta x_i^{(k+1)} < \mu_i^2 \cdot \Delta x_M^{(k-1)}, \tag{7.11}$$

și mai departe

$$\Delta x_i^{(k+n)} < (\mu_i)^{n-1} \cdot \Delta x_M^{(k-1)}, \tag{7.12}$$

adică seria $\sum_n \Delta x^{(k+n)}$ referitoare la fiecare necunoscută x_i este majorată de progresia geometrică din partea dreaptă a inegalității (7.12) avînd rația subunitară μ_i. Aceasta demonstrează convergența procedeului iterativ. În ceea ce privește rapiditatea convergenței, după cum s-a arătat mai sus, rațiile μ_i depind de raporturile între vitezele induse de ochiurile L_i în centrul lor și vitezele induse în aceleași centre de către linia L. Astfel, din expresia formulei lui Biot-Savart se deduce cu ușurință că rațiile μ_i sînt mici în cazul ochiurilor mari și tind către uunitate în cazul ochiurilor mici și deci numeroase. Tot din formula lui Biot-Savart rezultă însă că rațiile μ_i depind de rapoartele între două lungimi caracteristice, dintre care una se referă la ochiuri și cealaltă dimensiune la linia L, deci la aripa întreagă. Se observă mai departe că vitezele induse de liniile L sau L_i sînt caracterizate, în ceea ce privește ordinul de mărime, de dimensiunile mici ale figurilor, deoarece în expresia lui Biot-Savart figurează o distanță la numitor. În particular este clar că în ceea ce privește linia L, o coardă medie caracterizează acceptabil mărimea vitezei induse medii (în orice caz nu dimensiunea infinită a domensiului infinit închis de L).

8. Fie p eroarea finală relativă. Vom avea evident

$$p \approx \mu^I, \tag{8.1}$$

unde I este numărul de iterații după care eroarea relativă este mai mică decît valoarea p impusă. Rezultă

$$I \approx \frac{\ln p}{\ln \mu}. \tag{8.2}$$

Vom pune mai departe

$$\mu = 1 - \varepsilon, \tag{8.3}$$

așa încît avem aproximativ $\ln \mu \approx -\varepsilon$. Ținînd seama de faptul că în baza celor discutate în paragraful anterior

$$\varepsilon \approx \frac{v_G}{v_{Gi}} \approx \frac{E}{C}, \tag{8.4}$$

E fiind pasul mediu al rețelei, iar C coarda medie aerodinamică, estimația (8.2) devine

$$I \approx \frac{C}{E} \ln \frac{1}{p} \approx \frac{C}{E} \cdot 2{,}3 \log_{10} \frac{1}{p}. \tag{8.5}$$

Astfel dacă se acceptă o eroare de 0,1% ($p = 1/1000$)

$$I \approx 7 \frac{C}{E}. \tag{8.6}$$

Cum numărul de operații pe o iterație este de ordinul $\left(\frac{C}{E}\right)^4$, rezultă că pentru o precizie impusă p, numărul de operații N la calculator este de ordinul

$$N \approx 2{,}3 \left(\frac{C}{E}\right)^5 \log_{10} \frac{1}{p}. \tag{8.7}$$

De notat că numărul de operații corespunzător rezolvării neiterative a sistemului de ecuații (de exemplu, prin metoda eliminărilor) este de ordinul $\frac{1}{4}\left(\frac{C}{E}\right)^8$, de unde se deduce avantajul important al metodei propuse, în special în cazul ecuațiilor numeroase.

9. După obținerea valorilor $\bar{\Gamma}(P) = \dfrac{\Gamma_P}{V_\infty B}$, unde B este semianvergura, coeficientul de portanță va fi obținut prin integrarea în planul lui Treftz, adică

$$\frac{\rho}{2} V_\infty^2 C_z S = \rho V_\infty \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \Gamma_{B,F}\, dy, \tag{9.1}$$

de unde

$$C_z = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} \bar{\Gamma}_{B,F} d\bar{y};\ \bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{V_\infty B};\ \bar{y} = \frac{y}{B};\ \lambda = \frac{4B^2}{S}. \tag{9.1'}$$

Prin λ s-a notat alungirea aripii, iar $B.F$ înseamnă bordul de fugă.

Dacă aripa calculată este o transformată a aripii reale, pe baza teoriei lui Glauert, formula (9.1) rămîne valabilă cu condiția ca prin λ să se înțeleagă alungirea aripii reale.

La efectuarea cuadraturilor se va ține seama că la $y = \pm B$ circulația Γ se anulează și pentru o bună aproximare se va interpreta că valoarea calculată pentru Γ la primul ochi al rețelei se obține nu în centrul ochiului, ci la un pas E de capătul aripii ș.a.m.d. pentru celelalte valori $\bar{\Gamma}(\bar{y})$.

Abscisa X_p a centrului de presiune într-o acțiune, va fi

$$\frac{X_p(y)}{B} = \frac{1}{\bar{\Gamma}_{B,F}(y)}\int_{B,A}^{B,F} \frac{x}{B}\, d\Gamma = \frac{1}{\bar{\Gamma}_{B,F}}\left[\left|\bar{\Gamma}\,\bar{x}\right|_{B,A}^{B,F} - \int_{B,A}^{B,F} \bar{\Gamma}\, d\bar{x}\right]. \tag{9.2}$$

În general, acțiunea presiunilor pe o porțiune oarecare a aripii se poate calcula constatînd cu ușurință că coeficientul de presiune are expresia, cu notațiile noastre,

$$C_p = \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \bar{x}}. \tag{9.3}$$

Primită la redacție la 23 aprilie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. N.N. Patraulea, *Studii de aerodinamica hipersustentației*, Edit. Academiei, 1962, p. 14.
2. A.F. Donovan și H.R. Lawrence, *Aerodynamic components of Aircraft at High Speed*,
3. M.S. Belotsekovskii, *The Theory of the wings in subsonic flow*, New York, 1967.

ASUPRA UNOR PROBLEME DE SCURGERE A LICHIDELOR MISCIBILE PRIN TUBURI DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

de T. OROVEANU și I. SPULBER
Institutul de petrol Ploiești
Centrul de mecanica solidelor

Se consideră problema scurgerii a două lichide miscibile care vin în contact, într-un tub de secțiune circulară. Se studiază cazul regimului staționar, în care concentrația nu depinde de timp. Deși pentru aplicațiile practice și în special pentru transportul succesiv al produselor petroliere prin conducte această situație prezintă o importanță mai redusă, soluțiile permit să se ajungă la unele concluzii care nu sînt lipsite de interes.
Pentru o problemă simplă, cunoscută de altfel în literatura de specialitate, se arată mai precis în ce condiții difuzia longitudinală este neglijabilă față de difuzia convectivă în aceeași direcție. Pentru această problemă, se studiază și efectul condiției pe care o satisface concentrația la intrarea în tub.
Luîndu-se în considerație și o problemă cu condiții la limită care corespund transportului succesiv, se arată că pentru regimul staționar aceasta nu are soluție.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [4], am studiat cu unele ipoteze simplificatoare, difuzia convectivă în tuburi de secțiune circulară, fenomen care intervine în cadrul transportului succesiv al produselor petroliere prin conducte. După cum se știe, în cazul general, care corespunde situației reale, concentrația volumului de amestec dintre cele două lichide depinde de timp, circumstanță care face foarte dificilă rezolvarea riguroasă a problemei. Din acest motiv, toate soluțiile cunoscute în literatura de specialitate se bazează pe anumite aproximații, referitoare fie la termenii din ecuația diferențială a problemei, fie la metoda de rezolvare.Există, evident, și soluții numerice care, printre altele, precizează domeniile de valabilitate ale unor soluții aproximative.

Chiar și în cazul regimului laminar, care a fost cel mai studiat, nu s-a ajuns la soluții pe care le-am putea numai definitive. Această situație permite să se încerce găsirea unor noi căi de rezolvare a problemei, fie chiar și prin introducerea unor aproximații. Pentru justificarea acestora

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31 · NR. 1, 1972, P. 15–26

din urmă, avîndu-se în vedere faptul că ele se referă la unii termeni din ecuația diferențială a problemei, așa cum am procedat în lucrarea menționată mai sus, apare necesar să se întreprindă un studiu prealabil. Acesta poate poate fi efectuat cu mai multă ușurință dacă ne referim la cazul regimului staționar, deși din punct de vedere practic interesul lui este destul de redus. Totuși, ecuația diferențială a concentrației fiind mai simplă în acest din urmă caz, aprecierea importanței relative a unor termeni este posibilă fără prea mari dificultăți.

În cele ce urmează, vom pleca deci de la situațiile cele mai simple, urmărind să stabilim, pe de o parte, importanța termenilor de difuzie propriu-zisă, în raport cu difuzia prin convecție, iar pe de altă să precizăm în ce măsură este posibilă utilizarea unei ecuații în care termenul de difuzie convectivă este scris sub o formă mai simplă.

2. DIFUZIA CONVECTIVĂ CU VITEZĂ CONSTANTĂ ÎN REGIM STAȚIONAR

În cazul în care concentrația nu depinde de timp iar regimul de mișcare din tub este laminar, ecuația diferențială a problemei pe care o studiem are forma

$$v_0\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial c}{\partial x}=D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right), \tag{1}$$

scrisă în coordonatele cilindrice r, θ, x, simetria axială făcînd să nu apară unghiul θ. În această ecuație, c este concentrația, v_0 viteza maximă, r_0 raza tubului și D coeficientul de difuzie moleculară.

Cu variabilele adimensionale

$$\xi=\frac{x}{r_0}, \qquad \rho=\frac{r}{r_0}, \tag{2}$$

ecuația (1) devine

$$P(1-\rho^2)\frac{\partial c}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \rho}, \tag{3}$$

unde

$$P=\frac{r_0 v_0}{D} \tag{4}$$

este numărul lui Péclet de difuzie moleculară.

Cazul cel mai simplu care se poate imagina, cunoscut de altfel din literatura de specialitate [3] este acela în care se consideră transportul convectiv cu viteză constantă. Dacă aceasta este viteza medie, ecuația precedentă devine

$$\frac{P}{2}\frac{\partial c}{\partial \xi}=\frac{\partial c^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \rho}, \tag{5}$$

iar soluția ei trebuie să satisfacă următoarele condiții :

$$\xi = 0, \quad c = f(\rho); \qquad \xi \to \infty, \quad c = 0, \tag{6}$$

respectiv

$$\rho = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \rho} = 0; \qquad \rho = 1, \quad c = 0. \tag{7}$$

Prima dintre condițiile (7) exprimă faptul, evident din punct de vedere fizic, că în axa tubului concentrația are un maxim. Cea de a doua condiție (7) este aceea utilizată în [3] și, evident, nu corespunde situației din transportul succesiv.

Problema astfel formulată are, așa cum am precizat, soluția cunoscută ; vom prezenta însă, pe scurt, un alt procedeu pentru găsirea acesteia, pe care îl vom întrebuința și în continuare.

Aplicăm astfel ecuației (5) tranformata finită a lui Hankel [5]

$$c_H = \int_0^1 \rho c J_0(\lambda_n \rho)\, \mathrm{d}\rho, \tag{8}$$

λ_n fiind rădăcinile pozitive ale ecuației

$$J_0(\lambda_n) = 0. \tag{9}$$

Se poate arăta [5] că în acest caz, dacă este satisfăcută a doua condiție (7), avem

$$\int_0^1 \rho \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right) J_0(\lambda_n \rho)\, \mathrm{d}\rho = -\lambda_n^2 c_H, \tag{10}$$

astfel că ecuația (5) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2 c_H}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{P}{2} \frac{\mathrm{d}c_H}{\mathrm{d}\xi} - \lambda_n^2 c_H = 0. \tag{11}$$

Soluția acestei ecuații cu condițiile

$$\xi = 0, \quad c_H = f_H; \qquad \xi \to \infty, \quad c_H = 0, \tag{12}$$

unde

$$f_H = \int_0^1 \rho(\rho)\, J_0(\lambda_n \rho)\, \mathrm{d}\rho \tag{13}$$

este

$$c_H = f_H \mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi} \tag{14}$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ A ACADEMIEI MILITARE 1848

și pentru precizarea formei acestei soluții trebuie stabilită efectiv funcția $f(\rho)$ care apare în prima condiție (6). Dacă admitem, ca în [3], că la intrarea în tub concentrația este constantă și are valoarea c_0, rezultă condiția

$$\xi = 0, \qquad c = c_0, \tag{15}$$

respectiv

$$f_H = c_0 \int_0^1 \rho J_0(\lambda_n \rho)\, \mathrm{d}\rho = c_0 \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n}, \tag{16}$$

iar soluția (14) devine

$$c_H = c_0 \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n} \mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}. \tag{17}$$

Teorema de inversiune pentru transformata lui Hankel utilizată ne dă imediat

$$c = 2c_0 \sum_n \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}. \tag{18}$$

Este interesant de constatat ce se întîmplă atunci cînd difuzia convectivă este mult mai importantă decît difuzia axială propriu-zisă, respectiv dacă numărul lui Péclet are valori mari. În acest caz, în ecuația (5) termenul $\frac{\partial c^2}{\partial \xi^2}$ poate fi neglijat deoarece este mic în raport cu $\frac{P}{2}\frac{\partial c}{\partial \xi}$. Fără să mai insistăm asupra calculelor, care sînt absolut similare cu cele de mai sus, ajungem la soluția

$$c = 2c_0 \sum_n \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \mathrm{e}^{-\frac{2\lambda_n^2}{P}\xi}. \tag{19}$$

De altfel, în [3] se afirmă că atunci cînd $\frac{16\lambda_n^2}{P^2} \ll 1$, expresia (18) a concentrației se poate înlocui cu (19). Această observație, bazată pe utilizarea dezvoltării cunoscute

$$\sqrt{1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}} = 1 + \frac{8\lambda_n^2}{P^2} - \frac{32\lambda_n^4}{P^4} + \frac{256\lambda_n^6}{P^6} - \frac{2560\lambda_n^8}{P^8} + \frac{28672\lambda_n^{10}}{P^{10}} - \frac{344064\lambda_n^{12}}{P^{12}} + \cdots \tag{20}$$

din care sînt reținuți numai primii doi termeni, necesită o analiză mai amănunțită. După cum se știe, eroarea este cu atît mai neînsemnată cu

cît $\frac{16\lambda_n^2}{P^2}$ este mai mic, convergența seriei fiind asigurată numai pentru $\frac{16\lambda_n^2}{P^2} < 1$. Zerourile λ_n ale funcției J_0 formează însă un șir crescător, astfel că de la o anumită valoare a lui n dezvoltarea (20) nu mai este valabilă. De exemplu, dacă avem $P = 10$ rezultă $n < 2$ deoarece în acest caz $\lambda_n < 2{,}5$ pentru ca seria (20) să fie convergentă; pentru $P = 50$, obținem $n < 5$ corespunzător la $\lambda_n < 12{,}5$. Urmărind acest calcul, găsim în continuare, pentru $P = 100$, $n < 9$, condiția de convergență fiind îndeplinită dacă $\lambda_n < 25$, iar dacă avem $P = 500$ rezultă $n < 41$, respectiv $\lambda_n < 125$. Deci, pentru o valoare dată a numărului lui Péclet, aproximarea termenilor din soluția (18) cu aceea corespunzătoare din (19) nu este posibilă decît pînă la un anumit indice n, determinat așa cum am arătat. Mai precizăm că aceste valori ale lui n asigură pentru fiecare caz în parte convergența seriei (20) dar nu și o precizie bună a soluției aproximative deoarece pentru valori apropiate de unitate ale raportului $\frac{16\lambda_n^2}{P^2}$ convergența dezvoltării (20) este slabă.

Dacă $P = 10$, aproximația este valabilă numai pentru prima rădăcină a ecuației (9) și anume $\lambda_1 = 2{,}4048$; în acest caz, eroarea care se face prin limitarea dezvoltării (20) la primii doi termeni este de $+5{,}5\%$. De asemenea, dacă $P = 500$, dezvoltarea (20) fiind posibilă pînă la $\lambda_{40} = 124{,}8793$, pentru această rădăcină a ecuației (9) eroarea este de $+6\%$; în schimb, la aceeași valoare a numărului lui Péclet, pentru $n = 1$ eroarea este de $+ 2 \times 10^{-8}\%$.

Rezultă de aci că soluția aproximativă (19) nu poate fi utilizată decît dacă numărul lui Péclet este suficient de mare; altfel spus, la valori mici ale acestui parametru, efectul difuziei longitudinale nu poate fi neglijat.

Chiar în cazul în care numărul lui Péclet este mare, soluția aproximativă corespunzătoare (19) presupune că de la un anumit rang n înainte termenii din soluția exactă (18) sînt neglijabili; valoarea lui n este, evident, aceea pentru care dezvoltarea (20) nu mai este valabilă.

Pentru a stabili dacă această condiție este îndeplinită, vom examina soluția exactă (18) și anume termenii din aceasta în care $\frac{16\lambda_n^2}{P^2} \geqslant 1$. Este evident că, dacă se consideră pentru ξ valori mai mari decît unitatea, ceea ce nu reprezintă o restricție importantă, deoarece se exclude numai porțiunea din tub situată imediat lîngă intrare, factorul

$$e^{\frac{P}{4}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}$$

tinde către zero cu atît mai repede cu cît numărul lui Péclet este mai mare. Rămîne deci să constatăm ce se întîmplă cu factorul

$$\frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_1 J_1(\lambda_n)},$$

a cărui valoare maximă este

$$\frac{1}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

pentru $\rho = 0$, respectiv în axa tubului.

După cum se știe, pentru λ_n mare, funcția $J_1(\lambda_n)$ are expresia asimptotică

$$J_1(\lambda_n) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n}} \cos\left(\lambda_n + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right]. \tag{21}$$

Pentru n suficient de mare, zerourile pozitive ale funcției $J_0(\lambda_n)$ au însă expresia aproximativă [1]

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi \tag{22}$$

și prin urmare

$$\cos\left(\lambda_n + \frac{\pi}{4}\right) = \cos n\pi. \tag{23}$$

Rezultă de aci că atunci cînd λ_n este mare, factorul $\cos\left(\lambda_n + \frac{\pi}{4}\right)$ din formula (21) are valori apropiate de ± 1 și putem deci scrie, în valoarea absolută

$$|\lambda_n J_1(\lambda_n)| = O(\lambda_n), \tag{24}$$

respectiv

$$\frac{1}{|\lambda_n J_1(\lambda_n)|} = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right). \tag{25}$$

Întrucît factorul examinat scade atunci cînd λ_n crește, considerațiile precedente ne îndreptățesc să afirmăm că neglijarea termenilor de rang n suficient de mare din soluția (18) este permisă. Așa dar, soluția (19) reprezintă o bună aproximație atunci cînd numărul lui Péclet este mare și efectul difuziei longitudinale nu este semnificativ.

Ar mai rămîne de studiat soluția acestei probleme în cazul în care la intrarea în tub se impune concentrației o altă condiție decît (15). De exemplu, se poate admite că la $\xi = 0$ nu se produce încă amestectul dintre cele două lichide, datorit difuziei, astfel că pentru concentrație trebuie considerat numai transportul convectiv. Dacă ținem seama de repartiția reală a vitezei în secțiunea transversală a tubului, găsim pentru funcția $f(\rho)$ din prima condiție (6) expresia

$$f(\rho) = c_0(1 - \rho^2), \tag{26}$$

şi cu ajutorul unui rezultat cunoscut [5], obţinem

$$\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\, J_0(\lambda_n \rho)\, \mathrm{d}\rho = \frac{4}{\lambda_n^3} J_1(\lambda_n). \tag{27}$$

Prin urmare, soluţia ecuaţiei (11) cu condiţiile

$$\xi = 0,\ c_H = \frac{4c_0}{\lambda_n^3} J_1(\lambda_n);\ \xi \to \infty,\ c_H = 0, \tag{28}$$

are forma

$$c_H = 4c_0 \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n^3} \mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}, \tag{29}$$

dedusă imediat din (14).

Aplicarea teoremei de inversiune pentru transformata lui Hankel ne conduce şi de data aceasta la rezultatul căutat care este

$$c = 8c_0 \sum_n \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}. \tag{30}$$

Evident, atunci cînd difuzia în direcţia axială se poate neglija faţă de difuzia convectivă, se ajunge la o soluţie simplificată analogă cu (19).

Pentru compararea expresiei (30) a concentraţiei cu aceea dată de formula (18), vom calcula valorile medii într-o secţiune transversală oarecare. Găsim astfel

$$c_m^{(1)} = 2\int_0^1 \rho c\, \mathrm{d}\rho = 4c_0 \sum_n \frac{\mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \int_0^1 \rho J_0(\lambda_n \rho)\, \mathrm{d}\rho =$$

$$= 4c_0 \sum_n \frac{\mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}}{\lambda_n^2} \tag{31}$$

dacă pornim de la formula (18), respectiv

$$c_m^{(2)} = 2\int_0^1 \rho c \mathrm{d}\rho = 16c_0 \sum_n \frac{\mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \int_0^1 \rho J_0(\lambda_n \rho)\, \mathrm{d}\rho =$$

$$= 16c_0 \sum_n \frac{\mathrm{e}^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}}{\lambda_n^4} \tag{32}$$

dacă luăm ca punct de plecare formula (30).

Prin urmare, raportul celor două concentrații medii este

$$\frac{c_m^{(1)}}{c_m^{(2)}} = \frac{1}{4} \frac{\sum_n \frac{e^{-\frac{P}{4}\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\xi}}{\lambda_n^2}}{\sum_n \frac{e^{-\frac{P}{4}\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\xi}}{\lambda_n^4}}, \tag{33}$$

și fără a se efectua nici un calcul se observă că avem $c_m^{(1)} > c_m^{(2)}$ în orice secțiune transversală.

Prin urmare, condiția la $\xi = 0$ are o influență certă asupra valorii concentrației medii în orice secțiune a tubului. Desigur că pentru ecuația (5) condiția (15) pare mai potrivită decît (26), astfel că o comparație de felul celei pe care am făcut-o poate apare insuficient de bine justificată.

3. OBSERVAȚII ASUPRA UNEI ALTE PROBLEME DE DIFUZIE CONVECTIVĂ CU VITEZĂ CONSTANTĂ ÎN REGIM STAȚIONAR

Studiul pe care l-am făcut mai sus asupra unei probleme cu soluția cunoscută, a avut un obiectiv bine precizat. Pentru scopul pe care îl urmărim este însă mai interesant să ne ocupăm de cazul în care a doua condiție (7) esre înlocuită cu

$$\rho = 1, \qquad \frac{\partial c}{\partial \rho} = 0, \tag{34}$$

celelalte condiții (6), respectiv (7), rămînînd neschimbate. Într-adevăr, problema astfel formulată este chiar aceea care ar corespunde transportului succesiv în regim staționar, condiția (34) arătînd că prin peretele tubului nu se produce transfer de masă. Deși, așa cum am precizat mai înainte, regimul staționar prezintă un interes practic redus, soluția corespunzătoare ar putea permite obținerea unor concluzii utile cu privire la fenomenul studiat. În cele ce urmează, vom arăta încă că problema nu are soluție în cazul în care se impune condiția (34).

Revenind deci la ecuția (15), cu condițiile precizate mai sus, aplicăm din nou transformata finită a lui Hankel sub forma

$$c_H = \int_0^1 \rho c J_0(\alpha_n \rho)\, \mathrm{d}\rho, \tag{35}$$

α_n fiind rădăcinile pozitive ale ecuației

$$J_1(\alpha_n) = 0, \tag{36}$$

astfel ca de data aceasta să fie satisfăcută condiția (34).

Prin calcule asemănătoare cu cele efectuate mai înainte, ajungem la ecuația

$$\frac{d^2 c_H}{d\xi^2} - \frac{P}{2}\frac{dc_H}{d\xi} - \alpha_n^2 c_H = 0 \tag{37}$$

și dacă utilizăm condițiile (12), găsim

$$c_H = f_H e^{\frac{P}{4}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi} \tag{38}$$

iar pentru precizarea formei acestei soluții trebuie stabilită, ca și mai înainte, condiția efectivă care urmează să fie satisfăcută la $\xi = 0$. Dacă alegem, pentru simplitatea ei, condiția (15), găsim

$$f_H = c_0 \int_0^1 \rho J_0(\alpha_n \rho)\, d\rho = c_0 \frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0, \tag{39}$$

rezultat care poate fi explicat ținînd seama de faptul că transformata finită a lui Hankel este direct legată de teoria dezvoltărilor în serie de funcții Bessel. Această observație ne conduce la constatarea că pentru seriile Bessel de tipul al doilea (seriile Dini), datorită formei ecuației (36) sistemul ortogonal cu ponderea ρ, format din funcțiile $J_0(\alpha_n \rho)$, trebuie completat cu funcția $\rho^0 = 1$, ortogonală cu ele cu aceeași pondere. Este deci necesar să fie considerată și integrala

$$f_H^{(0)} = c_0 \int_0^1 \rho d\rho = \frac{c_0}{2}, \tag{40}$$

care corespunde la prima rădăcină a ecuației (36), respectiv $\alpha_0 = 0$.

Așa dar, pentru $n \leqslant 1$, constantele f_H sînt toate nule, în timp ce pentru $n = 0$ se obține valoarea dată de (40). În acest din urmă caz, se constată însă imediat că ecuația (37), în care punem $\alpha_n = \alpha_0 = 0$, nu are o soluție care să se anuleze atunci cînd ξ tinde spre infinit. Rezultă de aci că problema propusă nu poate fi rezolvată dacă se impune soluției satisfacerea condiției (15).

Putem considera pentru funcția $f(\rho)$ din prima condiție (6) forma (26) care nu mai conduce la inconvenientul semnalat mai sus. Într-adevăr, în acest caz, un rezultat cunoscut [5] ne dă

$$\int_0^1 \rho(1 - \rho^2)\, J_0(\alpha_n \rho)\, d\rho = -\frac{2}{\alpha_n^2} J_0(\alpha_n), \tag{41}$$

iar condițiile (6) iau forma

$$\xi = 0, \quad c_H = -\frac{2c_0}{\alpha_n^2} J_0(\alpha_n); \quad \xi \to \infty, \quad c_H = 0. \tag{42}$$

Prin comparație cu (12) rezultă deci f_H, iar soluția (38) devine

$$c_H = -2c_0 \frac{J_0(\alpha_n)}{\alpha_n^2} e^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\alpha_n^2}{P^2}}\right)\xi}. \tag{43}$$

Și de data aceasta este însă valabilă observația cu privire la sistemul ortogonal de funcții în raport cu care se efectuează dezvoltarea în serie Dini. Completarea acestui sistem în modul indicat mai înainte, ne conduce la considerarea integralei

$$\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\,d\rho = \frac{1}{4}, \tag{44}$$

respectiv la căutarea unei soluții a ecuației

$$\frac{d^2c_H^{(0)}}{d\xi^2} - \frac{P}{2}\frac{dc_H^{(0)}}{d\xi} = 0, \tag{45}$$

care satisface condițiile

$$\xi = 0, \quad c_H^{(0)} = \frac{c_0}{4}; \quad \xi \to \infty, \quad c_H^{(0)} = 0. \tag{46}$$

Se constată însă imediat că o astfel de soluție nu există și prin urmare nici de data aceasta problema propusă nu poate fi rezolvată.

Precizăm în încheierea acestor considerații că ecuația (36) este un caz particular al aceleia mai generale

$$\alpha_n J_p'(\alpha_n) - H J_p(\alpha_n) = 0 \tag{47}$$

tu $p + H = 0$. În această situație, dezvoltarea în serie Dini a unei funcții rebuie completată totdeauna cu un termen inițial.

4. DIFUZIA CONVECTIVĂ CU VITEZĂ VARIABILĂ ÎN REGIM STAȚIONAR

În cazul în care numărul lui Péclet este suficient de mare, ecuația (3) se poate scrie

$$P(1-\rho^2)\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial c^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \rho}, \tag{48}$$

deoarece, așa cum am arătat mai înainte, difuzia longitudinală poate fi neglijată.

Dacă se consideră din nou condițiile (6) și (7), problema poate fi rezolvată prin metoda separării variabilelor, care ne conduce la o soluție de forma

$$c = \sum_n A_n R_n(\rho)\, e^{-\frac{\beta_n^2}{P}\xi}, \tag{49}$$

funcțiile $R_n(\rho)$ rezultînd din ecuația

$$\frac{d^2R_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR_n}{d\rho} + \beta_n^2(1 - \rho^2)\, R_n = 0, \tag{50}$$

cu condițiile

$$\rho = 0, \quad \frac{dR_n}{d\rho} = 0; \quad \rho = 1, \quad R_n = 0. \tag{51}$$

Observăm că ecuația (50) este chiar aceea care se obține într-o problemă de altă natură și anume transferul de căldură în regim staționar în mișcarea laminară printr-un tub de secțiune circulară. Forma acestei ecuații permite căutarea soluției sub forma unei serii de puteri

$$R_n = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \rho^p, \tag{52}$$

în care, după cum se știe, primii doi coeficienți, respectiv α_0 și α_1, sînt arbitrari. Pentru a satisface prima condiție (51), punem

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_1 = 0 \tag{53}$$

și după înlocuirea în (50) obținem

$$\alpha_2 = -\frac{\beta_n^2}{4}, \qquad \alpha_3 = 0, \qquad \alpha_4 = \frac{\beta_n^2}{16}\left(1 + \frac{\beta_n^2}{4}\right) \tag{54}$$

dacă limităm dezvoltarea în acest mod. Rezultă deci

$$R_n = 1 - \frac{\beta_n^2}{4}\rho^2 + \frac{\beta_n^2}{16}\left(1 + \frac{\beta_n^2}{4}\right)\rho^4 - \ldots, \tag{55}$$

respectiv

$$c = \sum_n A_n\left[1 - \frac{\beta_n^2}{4}\rho^2 + \frac{\beta_n^2}{16}\left(1 + \frac{\beta_n^2}{4}\right)\rho^4\right] e^{-\frac{\beta_n^2}{P}\xi}. \tag{56}$$

Din a doua condiție la limită (51) se obține

$$\beta_1 = 2{,}705, \qquad \beta_2 = 6{,}66, \qquad \beta_3 = 10{,}3, \tag{57}$$

valori calculate de W. Nusselt [2] pentru problema de transfer de căldură amintită mai sus.

Constantele A_n din (56) pot fi determinate dacă se utilizează condiția (15), valorile respective fiind

$$A_1 = 1{,}477\, c_0, \quad A_2 = -0{,}810\, c_0, \quad A_3 = 0{,}385\, c_0 \tag{58}$$

tot după calculele efectuate de W. Nusselt.

Pentru o comparație cu cazul în care viteza lichidului este presupusă constantă în secțiunea transversală a tubului, vom calcula și de data aceasta concentrația medie într-o secțiune transversală. Valoarea acesteia se obține cu ușurință fiind

$$c_m^{(a)} = 2\int_0^1 \rho c\, d\rho = \sum_n A_n \left[1 - \frac{\beta_n^2}{6} + \frac{\beta_n^2}{40}\left(1 + \frac{\beta_n^2}{4}\right)\right] e^{-\frac{\beta_n^2}{P}\xi} \tag{59}$$

și deoarece soluția corespunde la valori mari ale numărului lui Péclet, vom face comparație cu valoarea medie calculată dacă luăm ca punct de plecare formula (19) și care este

$$c_m^{(b)} = 4c_0 \sum_n \frac{e^{-\frac{2\lambda_n^2}{P}}}{\lambda_n^2}. \tag{60}$$

Punînd $P = 100$ și $\xi = 10$, cu valorile pentru A_n și β_n date mai sus rezultă din (59)

$$c_m^{(a)} = 0{,}1444\, c_0,$$

în timp ce din (60) găsim

$$c_m^{(b)} = 0{,}2178\, c_0,$$

eroarea fiind deci de 50,83%, pentru o valoare dată a concentrației c_0. Acest calcul arată deci că ipoteza simplificatoare de a considera viteza constantă în secțiunea transversală a tubului poate conduce la erori mari. Desigur, o generalizare a acestei concluzii nu este posibilă decît după examinarea mai atentă și a celorlalte situații posibile, în special a condiției care trebuie satisfăcută la $\xi = 0$.

Primită la redacție la 15 iunie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. A. Gray, G.B. Mathews, *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică*, București, Edit. tehnică, 1958, p. 126.
2. Gröber/Erk/Grigull, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961, p. 180–181.
3. W. Jost, *Diffusion in Solids, Liquids, Gases*. Academic Press Inc., New York, 1960, p. 51–54.
4. T. Oroveanu, I. Spulber, *Asupra difuziei convective în tuburi de secțiune circulară*, St. cerc. mec. apl. **XXX**, 6 (1971).
5. Ian N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1951, p. 83, 87, 513.
6. G.N. Vatson, *Teoriia Besselevih funkții, Ciast pervaia*. Izdatelstvo inostrannoi literaturî, Moskva, 1949, p. 553, 655.

MODEL MATEMATIC PENTRU STUDIUL STABILITĂȚII CASTELELOR ȘI SISTEMELOR DE CASTELE DE ECHILIBRU

de MIHAIL POPESCU, PETER NOVOTNY
Institutul de studii și cercetări pentru
îmbunătățiri funciare

Se prezintă un model de calcul pentru studiul stabilității castelelor și sistemelor de castele de echilibru bazat pe integrarea numerică a ecuațiilor complete ale mișcării oscilatorii din sistem.
Se face o apreciere critică asupra stadiului actual de rezolvare a problemei, se expune sintetic metoda de calcul și se dau exemple de calcul.
Cu ajutorul metodei de calcul propuse, calitatea fenomenului fizic apare alta decît cea pe care o putem descoperi cu metodele cunoscute de calcul.
Astfel se dă posibilitatea studiului și proiectării castelelor și sistemelor de castele de echilibru în condițiile cunoașterii mai complete a fenomenului de amortizare a oscilațiilor din castele.

NOTAȚII

H — căderea brută,
H_0 — căderea utilă — referitoare la nivelurile apei din cele două castele în regim permanent,
Z — cota nivelului apei din castel raportată la nivelul de retenție din lac și socotită pozitivă în sus,
Z_0 — cota nivelului apei din castel în regim permanent,
Z_* — denivelarea maximă a apei din castel la închiderea bruscă a turbinelor, în cazul neglijării pierderilor de sarcină,
X — cota nivelului apei din castel față de nivelul dinamic de regim,
Q — debitul galeriei de aducțiune,
Q_T — debitul instantaneu al turbinelor,
Q_0 — debitul turbinelor în regim permanent,
Q_c — debitul instantaneu de intrare sau ieșire din castel,
W_1, W_2 — viteza apei din galeria de aducțiune, respectiv din galeria de fugă, socotită pozitivă în scurgerea din amonte spre aval,
U — viteza apei în conducta forțată,

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 1, 1972, P. 27–49

V — viteza verticală a apei în castel considerată pozitivă cînd nivelul creşte,
V_s — viteza apei în strangularea castelului avînd acelaşi semn ca şi V,
P_1, P_2 — pierderea de sarcină în galeria de aducţiune, respectiv în galeria de fugă,
E_1, E_2 — înălţimea reprezentativă a energiei cinetice a apei din galeria de aducţiune, respectiv din galeria de fugă în dreptul castelelor,
R — pierderea de sarcină în strangularea castelului,
t — timpul,
T_* — perioada oscilaţiilor apei din castel în cazul neglijării pierderilor de sarcină,
t_s — timpul de închidere sau deschidere a turbinelor,
L_1, L_2 — lungimea galeriei de aducţiune, respectiv a galeriei de fugă,
L_T — lungimea conductei forţate,
d_1, d_2 — diametrul secţiunii galeriei de aducţiune, respectiv a galeriei de fugă,
d_T — diametrul secţiunii conductei forţate,
D — diametrul secţiunii castelului de echilibru,
f_1, f_2 — aria secţiunii galeriei de aducţiune, respectiv a galeriei de fugă,
f_T — aria secţiunii conductei forţate,
F — aria secţiunii orizontale a castelului de echilibru,
F_{Th} — aria secţiunii-limită a lui Thoma,
Vol — volumul castelului de echilibru între secţiunea de la bază şi nivelul instantaneu al apei din el,
η — randamentul ansamblului turbină + conductă forţată,
η_t — randamentul turbinelor,
η_T — randamentul conductei forţate,
N — puterea turbinelor,
N_s — puterea totală din reţea,
K — raportul mărimilor N şi N_s,
Ω — viteza de rotaţie a turbinelor,
g — acceleraţia gravitaţiei,
λ — coeficientul pierderii de sarcină longitudinală,
K_T — coeficientul pierderii de sarcină longitudinală pe conducta forţată,
ζ — coeficientul pierderii de sarcină locală,
ΔZ^p, ΔZ_p — valoarea propusă pentru ΔZ,
ΔZ^c, ΔZ_c — valoarea calculată pentru ΔZ,
Δi, δi — notaţii prescurtate pentru ΔZ^p, ΔW.

NOTĂ: Mărimile care se referă la castelele C_1 şi C_2 sînt afectate de indicele 1, respectiv 2.

În ultimul timp problema stabilităţii castelelor de echilibru în cazul funcţionării automate a centralei a fost foarte mult abordată în literatura de specialitate, pe de o parte, datorită importanţei pe care o prezintă pentru buna funcţionare a uzinelor hidroelectrice şi, pe de alta, dificultăţilor pe care le ridică rezolvarea acestei probleme.

1. PRIVIRE CRITICĂ ASUPRA STADIULUI ACTUAL DE REZOLVARE A PROBLEMEI

1.1. CAZUL UNUI CASTEL DE ECHILIBRU

Metodele cunoscute pentru studiul stabilității castelelor de echilibru pot fi împărțite în mai multe grupe :

— metode care conduc la găsirea unor formule pentru secțiunea-limită a castelului ;

— metode grafice sau grafoanalitice ;

— metode experimentale cu ajutorul modelelor de laborator (fizice sau analogice) :

— metode bazate pe folosirea calculatoarelor analogice.

În lucrarea [8] am făcut un comentariu asupra stadiului actual de rezolvare a acestei probleme, precum și a posibilităților ce se întrevăd pentru găsirea unor metode de calcul mai exacte.

Analiza metodelor de calcul cunoscute a scos în evidență că metodele uzuale pentru studiul stabilității castelelor de echilibru se bazează pe clasificarea oscilațiilor în mici și mari, fără ca acestor noțiuni să le corespundă echivalentul amplitudinii oscilațiilor, ci în mod neadecvat neglijarea unor termeni din ecuațiile diferențiale ale mișcării.

De asemenea, se subliniază că relația cunoscută care definește coeficientul de siguranță la stabilitate are un caracter aproximativ și în consecință trebuie utilizată cu precauție. Formulele existente pentru calculul stabilității oscilațiilor mici și mari sînt aproximative întrucît caracterul lor general s-a obținut prin adoptarea unor ipoteze simplificatoare pentru a se depăși dificultățile problemei matematice.

Referitor la metodele grafice și grafoanalitice pentru studiul stabilității castelelor se remarcă posibilitățile limitate pe care le oferă de a lua în discuția fenomenului un număr cît mai mare de factori.

Studiile experimentale pe modele hidraulice au urmărit în general verificarea teoriei generale a stabilității castelelor, fiind utilizate numai rareori pentru rezolvarea unor cazuri concrete. Un alt mod de a trata problema stabilității castelelor a pornit de la programarea pe un calculator electronic analogic a ecuațiilor diferențiale ale mișcării, dînd posibilitatea studiului complet al oscilațiilor pentru o gamă de valori a secțiunii F a castelului [1], [6].

În acest fel, fără a mai despărți artificial problema în studiul micilor și marilor oscilații, s-a putut pune în evidență foarte exact secțiunea castelului care duce la o amortizare dorită a oscilațiilor.

Într-o altă lucrare [11] a fost studiată condiția de stabilitate a castelului în urma unei manevre defavorabile de închidere și de deschidere a turbinelor.

În acest caz poate să apară situația unei coborîri ireversibile a nivelului apei din castel (denumită de autor colaps), cu urmări dintre cele mai grave asupra uzinei hidroelectrice.

Astfel a fost pusă în evidență o secțiune-limită a castelului pentru care acest fenomen este înlăturat. Referitor la acest mod de a trata problema stabilității castelelor de echilibru atragem atenția că el nu se referă la o anumită caracteristică de reglaj a uzinei pentru care se studiază în

mod obișnuit acest fenomen, ci pune în evidență o situație-limită defavorabilă de manevră de debit la uzină, căreia castelul de echilibru trebuie să-i răspundă cu oscilații în limite impuse.

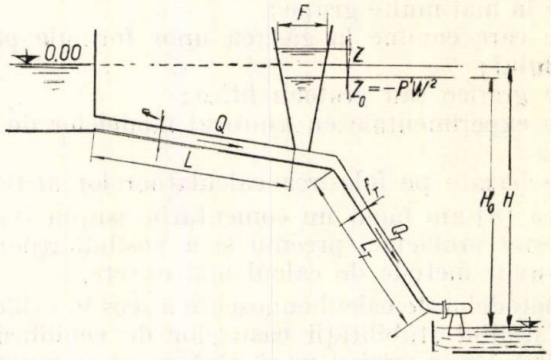


Fig. 1. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu castel de echilibru de secțiune variabilă.

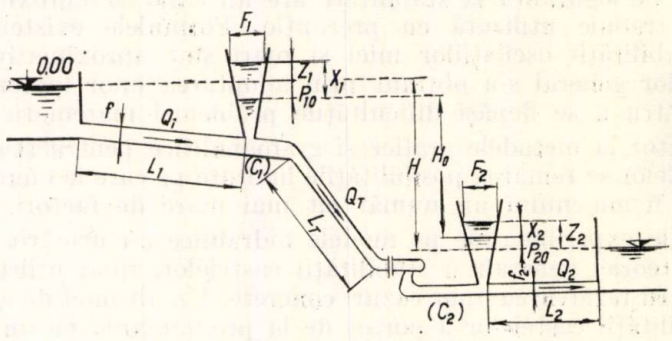


Fig. 2. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu două castele de echilibru situate de o parte și de alta a turbinelor.

În mod curent în proiectare pentru studiul stabilității castelelor de echilibru se folosesc formulele citate în lucrarea [8], precum și unele metode grafice pentru verificarea secțiunii alese pentru castel.

1.2. CAZUL A DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU DISPUSE ÎN SISTEM

Studiul stabilității unui sistem de două castele de echilibru comportă dificultăți mult mai mari decît cele întîlnite în cazul unui singur castel. La rezolvarea acestei probleme au contribuit hidraulicieni de renume cum sînt L. Escande și Ch. Jaeger [2], [4]. În lucrarea [8] ne-am referit pe larg la aceste metode de calcul, ele fiind considerate singurele care au dat o rezolvare matematică acceptabilă problemei.

Şi în acest caz studiul stabilităţii oscilaţiilor nivelului apei din castele a fost despărţit artificial în studiul micilor şi marilor oscilaţii. Chiar şi pentru studiul micilor oscilaţii dificultăţile de ordin matematic nu au permis decît considerarea unui singur factor în studiul stabilităţii sistemului (pierderea de sarcină longitudinală în galeria de aducţiune şi galeria de fugă).

În esenţă, ambele metode de calcul citate au condus la găsirea unor relaţii matematice pentru asigurarea stabilităţii micilor oscilaţii, relaţii pe care trebuie să le satisfacă patru coeficienţi, care, la rîndul lor, sînt funcţie de caracteristicile geometrice şi hidraulice ale uzinei hidroelectrice.

Deşi rezultatele sînt foarte complicate ele nu exprimă în fapt decît nişte condiţii asemănătoare condiţiei lui Thoma pentru cazul unui singur castel de echilibru, dacă avem în vedere că pentru obţinerea lor s-au folosit aceleaşi ipoteze de calcul. De remarcat că şi aceste condiţii de stabilitate nu aduc nici o precizare asupra timpului de automatizare a oscilaţiilor nivelurilor apei din castele.

În ce priveşte studiul influenţei şi a altor factori (pierderile de sarcină în diafragmele castelelor, pierderea de sarcină în conducta forţată, variabilitatea randamentului turbinelor cu puterea la cădere constantă etc.) asupra stabilităţii sistemului considerat de castele de echilibru nu avem cunoştinţă de a fi fost abordat prin calcul în literatura de specialitate.

În stadiul actual de rezolvare a problemei, în mod practic studiul stabilităţii marilor oscilaţii se poate face prin metode grafice şi grafoanaitice asemănătoare celor întîlnite în cazul uzinei prevăzute cu un singur castel de echilibru, cu avantajele şi dezavantajele respective.

În comunicarea de faţă se dă o metodă nouă de calcul a stabilităţii pentru unul şi două castele dispuse în sistem, caracterizată ca generală şi globală şi care se pretează calculului numeric automat [7], [9], [10].

2. EXPUNEREA METODEI

2.1. CAZUL UNUI CASTEL DE ECHILIBRU

Se consideră cazul unei uzine hidroelectrice prevăzute cu un castel de echilibru de secţiune variabilă, lucrînd automat pe putere constantă într-o reţea separată.

În studiul global al fenomenului de stabilitate a oscilaţiilor nivelului apei din castel, în afară de pierderile de sarcină din galeria de aducţiune şi diafragma castelului s-au considerat şi următorii factori care influenţează sensibil acest fenomen:

— energia cinetică a apei din galeria de aducţiune în dreptul castelului;

— pierderea de sarcină în conducta forţată;

— variabilitatea randamentului turbinelor cu puterea la cădere constantă.

Ecuațiile generale ale mișcării oscilatorii ale apei din castel, la o manevră de putere la centrală de la N_1 și N_2, cu notațiile obișnuite sînt următoarele (fig. 1) :

$$\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Z + P + E + R = 0,$$

$$Wf = Q_T + F\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

$$\eta_t g(H + Z - K_T Q_T^2)\, Q_T = N_2,$$

unde

$$P = \frac{\lambda L}{D}\frac{W|W|}{2g} = P'W|W|; \qquad E = \mu\frac{W|W|}{2g} = E'W|W|,$$

$$R = R'V_s|V_s|; \qquad F = F(Z); \qquad \eta_t = \eta_t(N, H)^*. \tag{2}$$

Pentru simplificarea notațiilor se grupează :

$$P + E = P'W|W| + E'W|W| = P^*W|W|. \tag{3}$$

Se adoptă următorul sistem de diferențe finite și valori medii pentru variabilele sistemului :

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i; \qquad t_m = t_i + \frac{\Delta t}{2},$$

$$Z_m = Z_i + \frac{\Delta Z}{2}; \qquad W_m = W_i + \frac{\Delta W}{2},$$

$$F_m = \left|\frac{Vol_{i+1} - Vol_i}{\Delta Z}\right|; \qquad Q_{Tm} = \frac{Q_{Ti} + Q_{Ti+1}}{2}, \tag{4}$$

$$V_{sm} = \frac{F_m}{F_s}\frac{\Delta Z}{\Delta t},$$

$$f_m = \frac{L}{\sum_1^n \frac{L_j}{f_j}}$$

în cazul în care galeria de aducțiune este formată din mai multe tronsoane de secțiuni f_j și lungimi L_j.

* Coeficientul μ depinde de forma legăturii castelului de echilibru cu galeria de aducțiune și variază în timp în funcție de Q_c/Q^*, unde $Q^* = \max(Q, Q_T)$. El a fost determinat experimental și prezentat sub formă de grafice pentru cazuri uzuale întîlnite în practica inginerească de către A. Gardel în lucrarea [3].

Utilizarea valorilor medii ale variabilelor pe intervalul de timp Δt în procesul de integrare s-a dovedit a da cea mai bună precizie a calculului, fapt constant prin compararea rezultatelor cu măsurătorile efectuate la uzine hidroelectrice în funcţiune [8].

Sistemul de ecuaţii (1) scris în diferenţe finite devine

$$\frac{L}{g}\frac{\Delta W}{\Delta t} + Z_m + P^* W_m |W_m| + R' V_{sm} |V_{sm}| = 0,$$

$$W_m f_m = F_m \frac{\Delta Z}{\Delta t} + Q_{Tm}, \tag{5}$$

$$\eta_t g (H + Z_m - K_T Q_{Tm}^2)\, Q_{Tm} = N_2.$$

Înlocuind valoarea lui Q_{Tm} din ecuaţia a doua în ecuaţia a treia, în urma efectuării calculelor şi grupării convenabile a termenilor, sistemul (5) se mai poate scrie:

$$(\Delta W)^3 + a(\Delta W)^2 + b(\Delta W) + c = 0,$$

$$\Delta Z = -2\left[\frac{L}{g}\frac{\Delta W}{\Delta t} + Z_i + R' V_{sm} |V_{sm}| + \right. \tag{6}$$

$$\left. + P^* \left| W_i + \frac{\Delta W}{2} \right| \left(W_i + \frac{\Delta W}{2} \right) \right],$$

unde am făcut notaţiile:

$$a = 6\left(W_i - \frac{F_m}{f_m}\frac{\Delta Z}{\Delta t}\right),$$

$$b = 12\left(W_i - \frac{F_m}{f_m}\frac{\Delta Z}{\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{H + Z_i + \dfrac{\Delta Z}{2}}{K_T f_m^2}\right), \tag{7}$$

$$c = 8\left[\left(W_i - \frac{F_m}{f_m}\frac{\Delta Z}{\Delta t}\right)^3 + \frac{N_2}{\eta_t g K_T f_m^3} - \frac{\left(W_i - \dfrac{F_m}{f_m}\dfrac{\Delta Z}{\Delta t}\right)\left(H + Z_i + \dfrac{\Delta Z}{2}\right)}{K_T f_m^2}\right].$$

Ecuaţia de gradul trei din sistemul (6) se poate rezolva cu formulele lui Cardan (în cazul cînd admite o rădăcină reală) sau printr-un calcul iterativ (în cazul cînd admite trei rădăcini reale). În ultimul caz se reţine rădăcina care convine fenomenului fizic.

Pentru cazul general cînd se are în vedere și influența lucrului uzinei într-un sistem energetic, se admite următoarea ecuație de reglaj:

$$\eta_t g(H + Z - K_T Q_T^2)\, Q_T = N_2\left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{X}{H_0}(1 - K)\right], \tag{8}$$

iar sistemul de ecuații ale mișcării se tratează în mod asemănător. Referindu-ne la sistemul de ecuații (6) scris sub forma simplificată,

$$\begin{aligned} \Delta W &= \varphi_1(\Delta Z), \\ \Delta Z &= \varphi_2(\Delta W), \end{aligned} \tag{9}$$

pentru rezolvarea lui se propune următorul algoritm de calcul:

Etapa I

$$\begin{aligned} \Delta Z_p &= \Delta_1, \\ \Delta W &= \varphi_1(\Delta_1) = \delta_1, \\ \Delta Z_c &= \varphi_2(\delta_1), \\ |\Delta Z_p - \Delta Z_c| &= |\varepsilon_1| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Etapa a II-a

$$\begin{aligned} \Delta Z_p &= 2\Delta_1 = \Delta_2, \\ \Delta W &= \varphi_1(\Delta_2) = \delta_2, \\ \Delta Z_c &= \varphi_2(\delta_2), \\ |\Delta Z_p - \Delta Z_c| &= |\varepsilon_2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Etapa a III-a

$$\begin{aligned} \Delta Z_p &= \Delta_1 + \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\right)\varepsilon_1 = \Delta_3, \\ \Delta W &= \varphi_1(\Delta_3) = \delta_3, \\ \Delta Z_c &= \varphi_2(\delta_3), \\ |\Delta Z_p - \Delta Z_c| &= |\varepsilon_3| < \varepsilon. \end{aligned}$$

În procesul de iterație pentru prima propunere a lui $\Delta Z = \Delta_1$ se ia valoarea sa de la timpul de calcul anterior, iar în primul pas de calcul Δt se ia o valoare numerică acceptabilă.

Dacă condiția $|\Delta Z_p - \Delta Z_c| < \varepsilon$ este satisfăcută, calculul se consideră încheiat pentru pasul de calcul respectiv și se trece la timpul de calcul următor. În caz contrar calculul se reia de la etapa a III-a, considerînd

ca etape I și a II-a etapele parcurse II și III. Soluția problemei s-a dovedit a fi stabilă și rapid convergentă.

Ea a fost verificată pentru cazurile de discontinuități de valori numerice extreme, atît în ce privește manevrele de putere de la centrală, cît și în cazurile castelelor de echilibru cu camere întîlnite în practica inginerească.

Algoritmul de calcul propus nu a ridicat probleme în ce privește studiul pasului de calcul Δt, care să asigure stabilitatea numerică a soluției. Precizia calculului s-a dovedit a fi foarte bună pentru pași de timp egali cu o fracțiune $\left(\frac{1}{50} \div \frac{1}{100}\right)$ din perioada oscilațiilor ideale din castel. De remarcat, că pentru aproximarea curentă a lui ΔZ s-a folosit metoda „poziției false".

Programată pe un calculator electronic numeric metoda de calcul propusă dă posibilitatea studiului concret al amortizării oscilațiilor nivelului apei din castel pentru diverse manevre de putere, *extreme sau predominante*, din exploatarea uzinei hidroelectrice.

Astfel, forma și secțiunea optimă a castelului se pot determina printr-un studiu tehnic-economic al mai multor secțiuni și forme de castele.

Factorii care concură la alegerea unei secțiuni optime a castelului de echilibru care să asigure o funcționare stabilă a uzinei sînt, pe de o parte, cei legați de acceptarea unor oscilații ale nivelului apei din castel, oscilații întreținute pe anumite intervale de timp și care să permită o funcționare bună a turbinelor, iar pe de altă parte, costul construcției castelului de echilibru funcție de forma și mărimea lui.

În acest fel, problema micilor și marilor oscilații, creată artificial în studiul stabilității castelelor de echilibru datorită dificultăților de integrare a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării, este depășită prin metoda expusă.

Într-adevăr, rezolvarea numerică completă a sistemului general de ecuații ale mișcării oscilatorii a nivelului apei din castel cuprinde în același timp cazul micilor și marilor oscilații, putînd fi caracterizată ca o metodă globală de studiu a stabilității castelelor de echilibru. De asemenea, remarcăm faptul că metoda de calcul propusă permite studiul stabilității castelului fără a mai folosi un coeficient de siguranță la stabilitate, coeficient întîlnit în metodele de calcul cunoscute.

Însăși secțiunea-limită a lui Thoma nu mai apare decît ca o valoare orientativă în seria de valori ale secțiunilor castelului pe care le putem studia.

2.2. CAZUL A DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU DISPUSE ÎN SISTEM

Se consideră cazul unui sistem de două castele de echilibru de secțiune variabilă — plasate respectiv pe galeria de aducțiune și galeria de fugă ale unei uzine hidroelectrice ce lucrează automat pe putere constantă într-o rețea separată.

În studiul global al fenomenului de stabilitate a oscilațiilor din sistem, în afară de pierderile de sarcină din galeriile de aducțiune și de fugă, se

vor lua în calcul şi următorii factori care influenţează sensibil acest fenomen:

— pierderile de sarcină din diafragmele castelelor;

— energiile cinetice ale apei din galeriile de aducţiune şi de fugă în dreptul castelelor;

— pierderea de sarcină în conducta forţată;

— variabilitatea randamentului turbinelor cu puterea la cădere constantă.

Influenţa funcţionării într-un sistem energetic a uzinei va fi, de asemenea, prinsă în calcul şi acest lucru va fi semnalat pe parcursul expunerii. Ecuaţiile generale ale mişcării oscilatorii ale apei din sistem, la o manevră de putere la centrală de la N_1 la N_2, cu notaţiile obişnuite sînt următoarele (fig. 2):

$$\begin{aligned}
&\frac{L_1}{g}\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}t} + Z_1 + P_1 + E_1 + R_1 = 0,\\
&\frac{L_2}{g}\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}t} - Z_2 + P_2 + E_2 - R_2 = 0,\\
&f_1 W_1 = \frac{\mathrm{d}Z_1}{\mathrm{d}t} F_1 + Q_T, \qquad (9)\\
&f_2 W_2 = -\frac{\mathrm{d}Z_2}{\mathrm{d}t} F_2 + Q_T,\\
&g\eta_t Q_T (H + Z_1 - Z_2 - K_T Q_T^2) = N_2,
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
&P_1 = \frac{\lambda_1 L_1}{D_1}\frac{W_1|W_1|}{2g} = P' W_1|W_1|; \qquad E_1 = \mu_1 \frac{W_1|W_1|}{2g} = E_1' W_1|W_1|,\\
&P_2 = \frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\frac{W_2|W_2|}{2g} = P_2' W_2|W_2|; \qquad E_2 = \mu_2 \frac{W_2|W_2|}{2g} = E_2' W_2|W_2|, \qquad (10)\\
&R_1 = R_1' V_{s1}|V_{s1}|; \qquad R_2 = R_2' V_{s2}|V_{s2}|,\\
&F_1 = F_1(Z_1); \qquad F_2 = F_2(Z_2); \qquad \eta_t = \eta_t(H, N).
\end{aligned}$$

Pentru simplificarea notaţiilor se grupează:

$$\begin{aligned}
P_1 + E_1 &= P_1' W_1|W_1| + E_1' W_1|W_1| = P_1^* W_1|W_1|,\\
P_2 + E_2 &= P_2' W_2|W_2| + E_2' W_2|W_2| = P_2^* W_2|W_2|.
\end{aligned} \qquad (11)$$

Se adoptă un sistem de diferenţe finite şi valori medii ale variabilelor analog lui (4).

Cu aceste precizări sistemul de ecuații (9) scris în diferențe finite devine :

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \frac{L_1}{g}\frac{\Delta W_1}{\Delta t} + Z_{1m} + P_1^* W_{1m}|W_{1m}| + R_1 = 0,\\
&\text{(b)} \quad \frac{L_2}{g}\frac{\Delta W_2}{\Delta t} - Z_{2m} + P_2^* W_{2m}|W_{2m}| - R_2 = 0,\\
&\text{(c)} \quad f_1 W_{1m} = F_{1m}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t} + Q_{Tm},\\
&\text{(d)} \quad f_2 W_{2m} = -F_{2m}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t} + Q_{Tm},\\
&\text{(e)} \quad g\eta_t Q_{Tm}(H + Z_{1m} - Z_{2m} - K_T Q_T^2) = N_2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Eliminînd pe rînd termenul Q_{Tm} între ecuațiile *c* și *d* și apoi *d* și *e* ale sistemului de mai sus, în urma efectuării calculelor și grupării convenabile a termenilor, sistemul de ecuații (12) se mai poate scrie astfel :

$$\begin{aligned}
\Delta Z_1 &= -2\left[\frac{L_1}{g}\frac{\Delta W_1}{\Delta t} + Z_{1i} + P_1^*\left(W_{1i} + \frac{\Delta W_1}{2}\right)\left|W_{1i} + \frac{\Delta W_1}{2}\right| + R_1\right],\\
\Delta Z_2 &= -2\left[\frac{L_2}{g}\frac{\Delta W_2}{\Delta t} - Z_{2i} + P_2^*\left(W_{2i} + \frac{\Delta W_2}{2}\right)\left|W_{2i} + \frac{\Delta W_2}{2}\right| - R_2\right],\\
\Delta W_1 &= 2\left[\frac{F_{1m}}{f_1}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t} + \frac{F_{2m}}{f_1}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t} + \frac{f_2}{f_1}\left(W_{2i} + \frac{\Delta W_2}{2}\right) - W_{1i}\right],\\
(\Delta W_2)^3 &+ \alpha(\Delta W_2)^2 + \beta(W_2) + \gamma = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

unde am făcut notațiile

$$\begin{aligned}
\alpha &= 6\left(W_{2i} + \frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\frac{F_{2m}}{f_2}\right),\\
\beta &= 12\left(W_{2i} + \frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\frac{F_{2m}}{f_2}\right)^2 - \frac{4}{K_T f_2^2}\left(H + Z_{1i} - Z_{2i} + \frac{\Delta Z_1 - \Delta Z_2}{2}\right),\\
\gamma &= 8\left[\left(W_{2i} + \frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\frac{F_{2m}}{f_2}\right)^3 + \frac{N_2}{\eta_t g K_T f_2^3} - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{\left(W_{2i} + \frac{\Delta Z_2}{\Delta t}\frac{F_{2m}}{f_2}\right)\left(H + Z_{1i} - Z_{2i} + \frac{\Delta Z_1 - \Delta Z_2}{2}\right)}{K_T f_2^2}\right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Pentru cazul general cînd se are în vedere şi influenţa lucrului uzinei într-un sistem energetic, se admite următoarea ecuaţie de reglaj:

$$\eta_t g Q_T (H + Z_1 - Z_2 - K_T Q_T^2) = N_2 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{X_1 - X_2}{H_0} (1 - K) \right], \quad (15)$$

iar sistemul de ecuaţii ale mişcării se tratează în mod asemănător. Cu aceste precizări sistemul (13) se poate scrie într-un mod simplificat astfel

$$\begin{aligned} \Delta Z_1 &= \varphi_1(\Delta W_1, \Delta Z_1), \\ \Delta Z_2 &= \varphi_2(\Delta W_2, \Delta Z_2), \\ \Delta W_1 &= \psi_1(\Delta Z_1, \Delta Z_2, \Delta W_2), \\ \Delta W_2 &= \psi_2(\Delta Z_1, \Delta Z_2), \end{aligned} \quad (16)$$

iar pentru rezolvarea lui se propune următorul algoritm de calcul:

Etapa I:

$$\Delta Z_1^p = \Delta_1', \quad \Delta Z_2^p = \Delta_1'',$$

$$\Delta W_2 = \psi_2(\Delta_1', \Delta_1'') = \delta_1'', \quad \Delta W_1 = \psi_1(\Delta_1', \Delta_1'', \delta_1'') = \delta_1',$$

$$\Delta Z_1^c = \varphi_1(\delta_1', \Delta_1'), \quad \Delta Z_2^c = \varphi_2(\delta_1'', \Delta_1''),$$

$$|\Delta Z_1^p - \Delta Z_1^c| = |\varepsilon_1'| < \varepsilon,$$

$$|\Delta Z_2^p - \Delta Z_2^c| = |\varepsilon_2'| < \varepsilon,$$

Etapa a II-a:

$$\Delta Z_1^p = 2\Delta_1' = \Delta_2', \quad \Delta Z_2^p = 2\Delta_1'' = \Delta_2'',$$

$$\Delta W_2 = \psi_2(\Delta_2', \Delta_2'') = \delta_2'', \quad \Delta W_1 = \psi_1(\Delta_2', \Delta_2'', \delta_2'') = \delta_2',$$

$$\Delta Z_1^c = \varphi_1(\delta_2', \Delta_2'), \quad \Delta Z_2^c = \varphi_2(\delta_2'', \Delta_2''),$$

$$|\Delta Z_1^p - \Delta Z_1^c| = |\varepsilon_2'| < \varepsilon,$$

$$|\Delta Z_2^p - \Delta Z_2^c| = |\varepsilon_2''| < \varepsilon.$$

Etapa a III-a

$$\Delta Z_1^p = \Delta_1' + \left(\frac{\Delta_2' - \Delta_1'}{\varepsilon_1' - \varepsilon_2'} \right) \varepsilon_1' = \Delta_3',$$

$$\Delta Z_2^p = \Delta_1'' + \left(\frac{\Delta_2'' - \Delta_1''}{\varepsilon_1'' - \varepsilon_2''} \right) \varepsilon_1'' = \Delta_3'',$$

$$\Delta W_2 = \psi_2(\Delta_3', \Delta_3'') = \delta_3'', \quad \Delta W_1 = \psi_1(\Delta_3', \Delta_3'', \delta_3'') = \delta_3',$$

$$\Delta Z_1^c = \varphi_1(\delta_3', \Delta_3'), \quad \Delta Z_2^c = \varphi_2(\delta_3'', \Delta_3''),$$

$$|\Delta Z_1^p - \Delta Z_1^c| = |\varepsilon_3'| < \varepsilon,$$

$$|\Delta Z_2^p - \Delta Z_2^c| = |\varepsilon_3''| < \varepsilon.$$

Pentru primele propuneri ale lui ΔZ_1, ΔZ_2 se iau valorile lor de la timpul de calcul anterior (pentru primul pas de timp Δt se poate lua un set de valori acceptabile oarecare).

Pentru aproximarea curentă a soluției (ΔZ_1, ΔZ_2) s-a folosit o extindere pentru două variabile a metodei „poziției false".

În rest se mențin precizările făcute la tratarea cazului cu un singur castel de echilibru. Metoda de calcul a fost scrisă în ALGOL și folosită pe calculatorul ELLIOTT-4120.

3. EXEMPLE DE CALCUL

3.1. CAZUL UNUI CASTEL DE ECHILIBRU

S-a ales cazul unei uzine hidroelectrice aflată în prezent în fază de proiectare pentru care s-a adoptat un castel de echilibru cu cameră superioară și cu rezistență hidraulică la bază.
Dintre caracteristicile uzinei notăm:

$$L = 8130 \text{ m}, \quad d = 4{,}40 \text{ m}, \quad L_T = 740 \text{ m}, \quad d_T = 3{,}40 \text{ m},$$

$$H = 470 \text{ m}, \quad N = 225.000 \text{ kW}.$$

În studiul global al oscilațiilor nivelului apei din castel, urmărind amortizarea lor, s-au luat în considerare mai multe secțiuni ale castelului de echilibru pentru care s-au calculat oscilațiile nivelului apei la o manevră de putere la centrală de la

$$N_1 = 100\,000 \text{ kW} \text{ la } N_2 = 150\,000 \text{ kW}.$$

Pentru a pune în evidență influența pierderii de sarcină din diafragma de la baza castelului, calculele s-au făcut cu și fără această rezistență (s-a admis în calcule o pierdere de sarcină în diafragmă de forma $R = 0{,}00416\ Q_c^2$).
Rezultatele calculelor sînt prezentate grafic în figurile 3 și 4.

Pentru urmărirea amortizării oscilațiilor nivelului apei din puțul castelului nu a fost necesară luarea în considerare a camerei superioare a castelului, în schimb, de ea s-a ținut seama în unele studii comparative (fig. 6, 7, 8).

Timpul de calcul pentru o oscilație completă a fost de șase minute, lucrîndu-se cu o precizie de închidere pentru cote $\varepsilon = 0{,}01$ m și cu pasul de timp $\Delta t = 5$ s. Un studiu mai amănunțit al amortizării oscilațiilor nivelului apei din castel s-a făcut pentru secțiunile

$$F = 28{,}3,\ 24,\ 20 \text{ m}^2,$$

unde s-au considerat cîteva manevre de putere la centrală. În figura 5 sînt prezentate rezultatele calculelor într-unul din cazurile analizate.

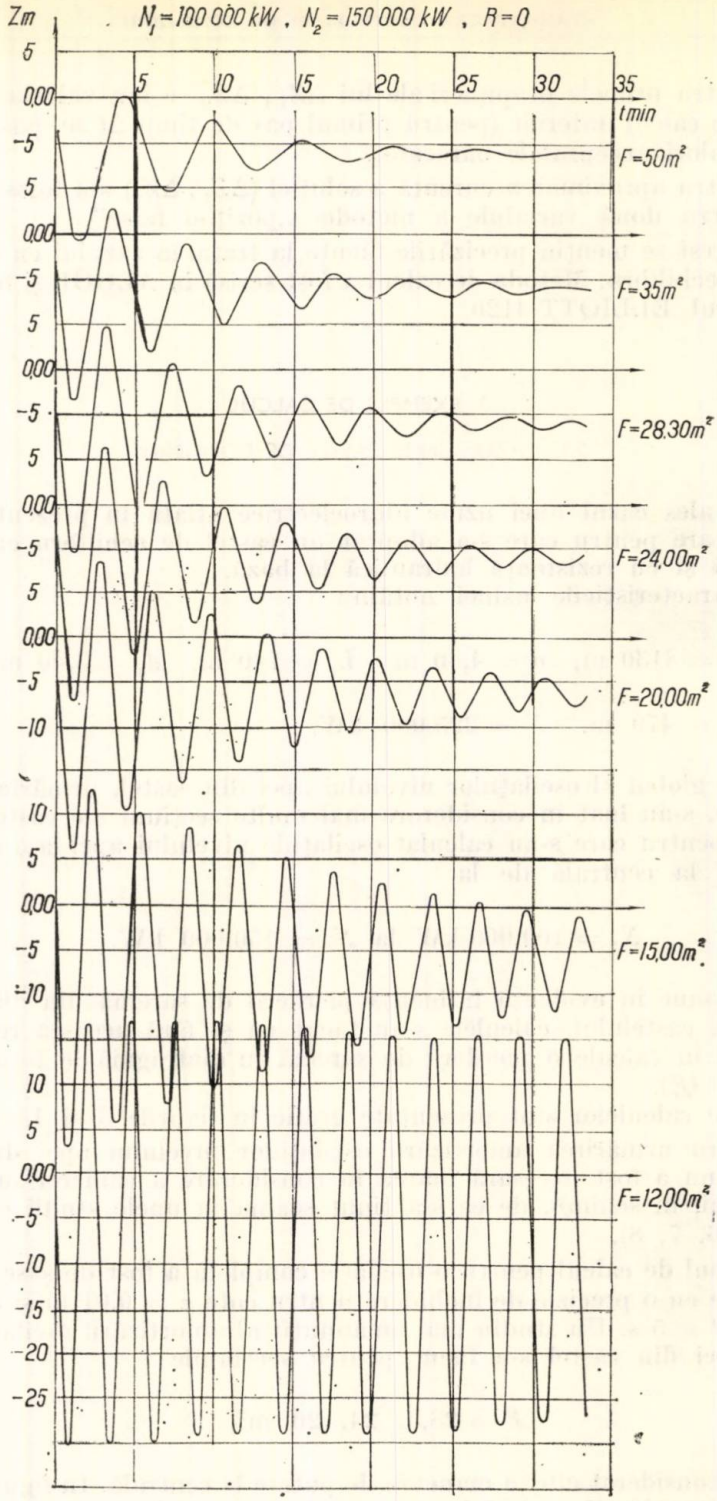


Fig. 3. — Oscilații calculate pentru diverse secțiuni ale castelului de echilibru ($R = 0$).

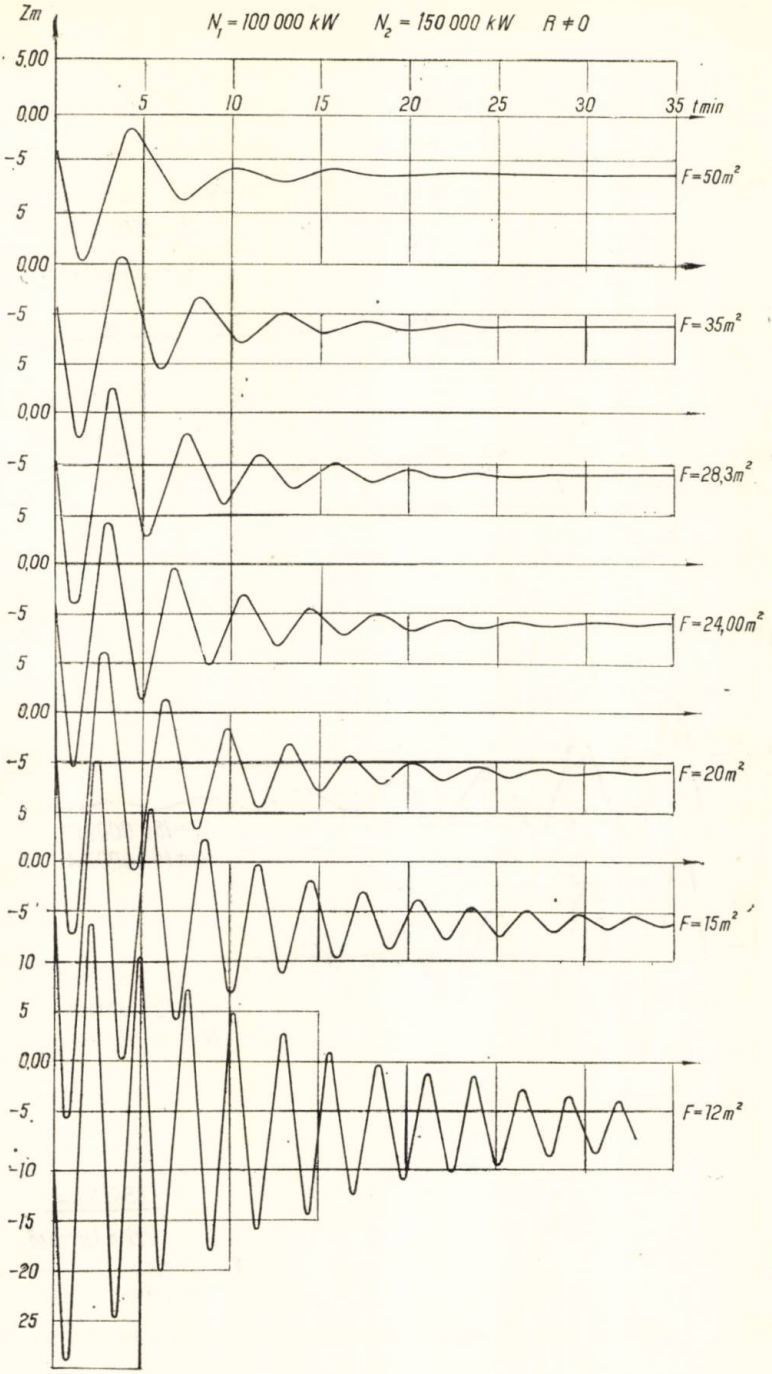


Fig. 4. — Oscilaţii calculate pentru diverse secţiuni ale castelului de echilibru ($R \neq 0$).

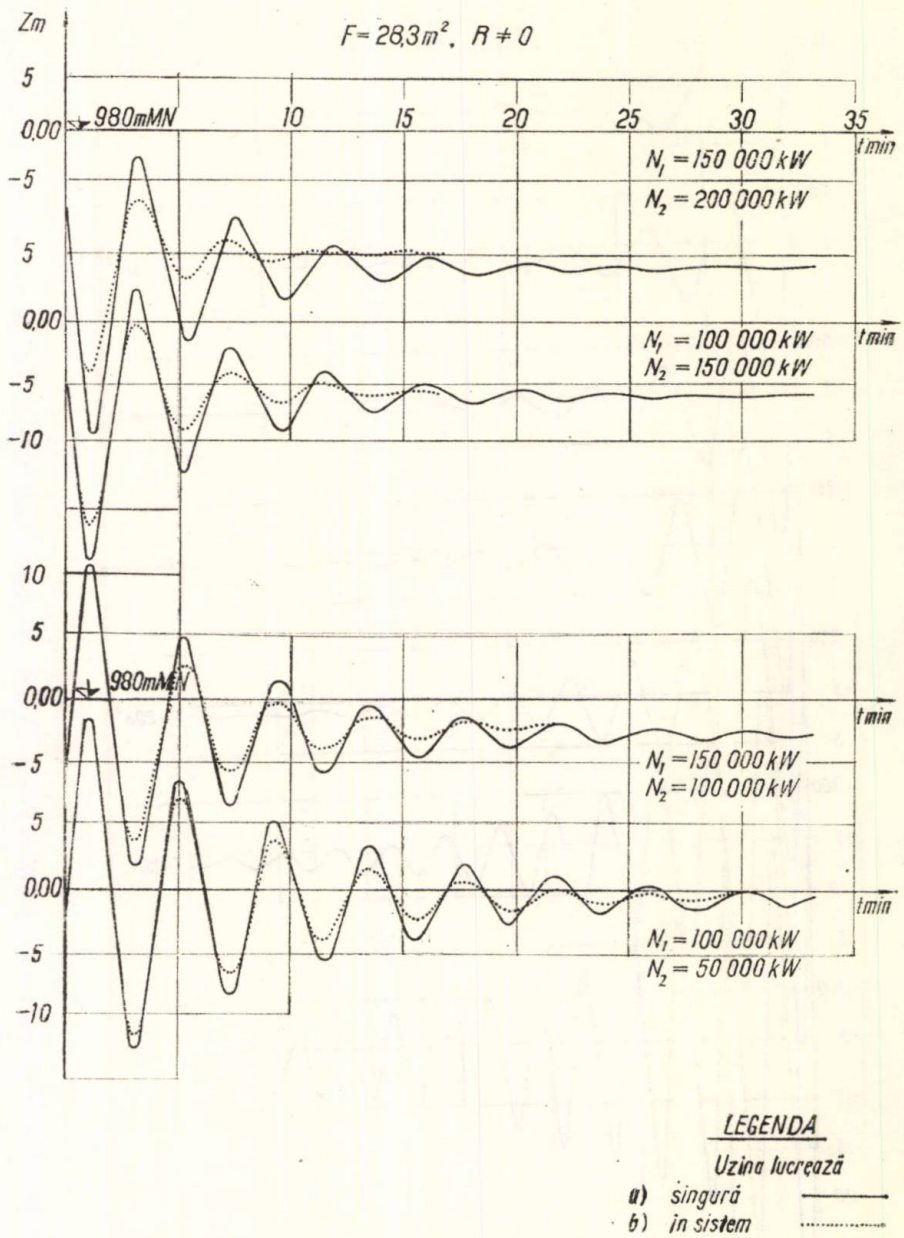


Fig. 5. — Oscilații în castel pentru diverse manevre de putere la centrală.

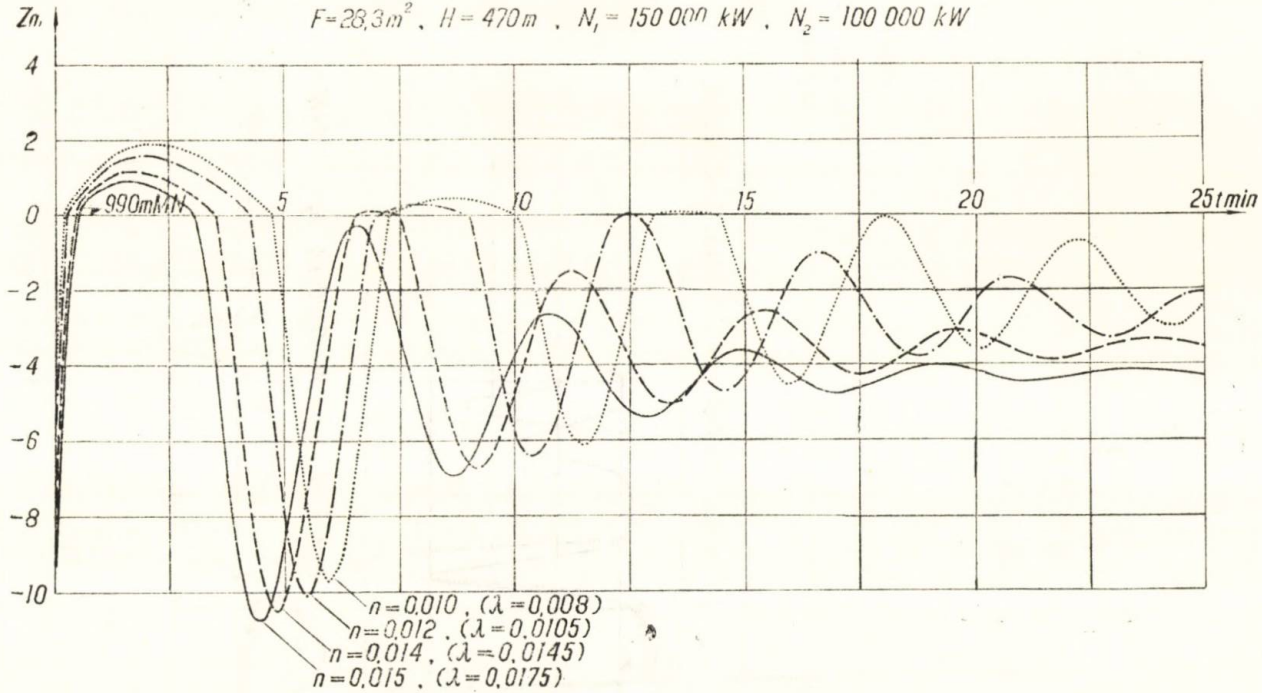


Fig. 6. — Influența coeficientului de rugozitate a galeriei de aducțiune și a conductei forțate asupra stabilității castelului.

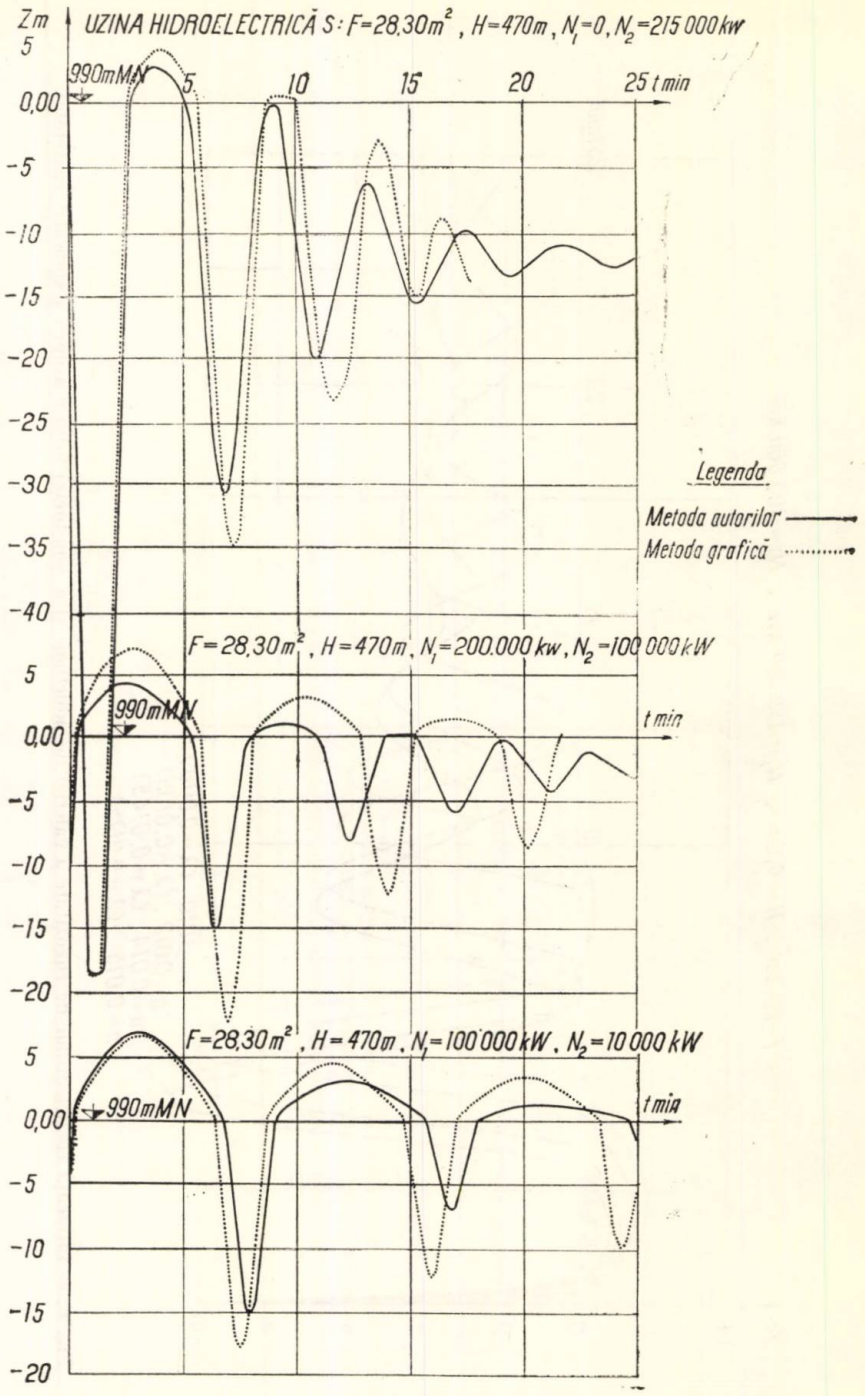


Fig. 7. — Reprezentarea comparativă a două metode pentru studiul stabilității castelelor de echilibru.

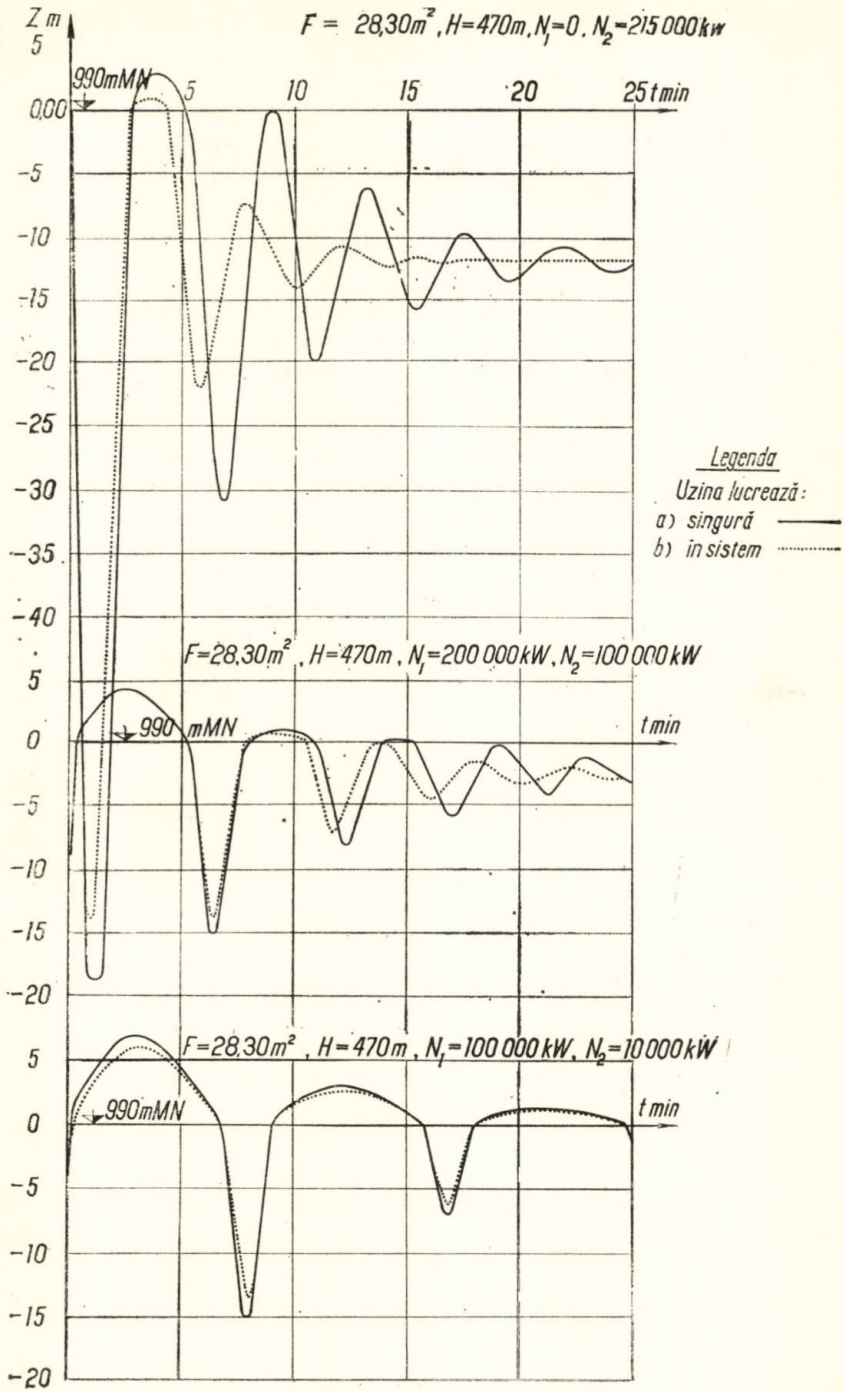


Fig. 8. — Studiul stabilității castelului de echilibru în ipotezele de funcționare a uzinei singure și în sistem

De asemenea, s-a considerat și situația în care uzina lucrează într-un sistem cu o putere de 2 500 000 kW, în algoritmul de calcul folosindu-se ecuațiile mișcării sub forma generală.

Rezultatele calculelor sînt prezentate în figurile 5 și 8. Studiul influenței coeficientului de rugozitate al galeriei de aducțiune și a conductei forțate asupra stabilității castelului s-a făcut considerînd pentru n următoarele valori :

$$n = 0{,}010, \quad 0{,}012, \quad 0{,}014, \quad 0{,}015$$

și admițînd două manevre de putere la centrală. În figura 6 sînt prezentate rezultatele calculelor într-unul din cazurile analizate.

Ele pun în evidență influența mare pe care o are acest coeficient asupra amortizării oscilațiilor apei din castel, cînd uzina lucrează cu puteri mari [7]. S-a făcut o comparație între rezultatele obținute prin metoda propusă și rezultatele unui calcul grafic (metoda Schoklitsch). Diferențele se explică, pe de o parte, prin precizia în sine a metodelor de calcul, iar pe de altă parte, prin influența și a celorlalți factori cuprinși în metoda propusă. Din analiza rezultatelor prezentate grafic în figura 7 apar diferențe ce variază în funcție de zona de putere în care lucrează uzina și se constată că nu se poate trage o concluzie prin care să se exprime în procente aceste diferențe (de amplitudine și perioade ale oscilațiilor).

De aici rezultă și importanța metodei de calcul propuse pentru o cunoaștere cît mai exactă a fenomenului hidraulic de stabilitate a castelelor de echilibru.

Menționăm că metoda de calcul a fost verificată și confirmată prin compararea rezultatelor calculelor cu măsurătorile de oscilații ale apei din castel efectuate de unul dintre autori la uzina hidroelectrică B din țara noastră [7].

3.2. CAZUL A DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU DISPUSE ÎN SISTEM

Calculul s-a făcut pentru o uzină hidroelectrică cu următoatele caracteristici principale :

$$L_1 = 5000 \text{ m}, \; d_1 = 7 \text{ m}, \quad L_T = 300 \text{ m}, \quad d_T = 5{,}6 \text{ m},$$

$$L_2 = 500 \text{ m}, \; d_2 = 7 \text{ m}, \quad H = 130 \text{ m}, \quad N = 180\,000 \text{ kW}.$$

Castelele de echilibru s-au luat de secțiune constantă și prevăzute cu diafragme la bază, iar pierderile de sarcină în diafragme s-au admis de forma $R_1 = R_2 = 0{,}001 \; Q_c^2$ cu $F_{s1} = F_{s2} = 20 \text{ m}^2$.

În studiul global al oscilațiilor nivelurilor apei din castele, urmărind amortizarea lor, s-au luat în considerare mai multe seturi de valori ale secțiunilor castelelor, pentru care s-au calculat oscilațiile nivelurilor apei la o manevră de putere la centrală de la $N_1 = 100\,000$ kW la $N_2 = 150\,000$ kW.

Rezultatele calculelor sînt prezentate grafic în figura 9.

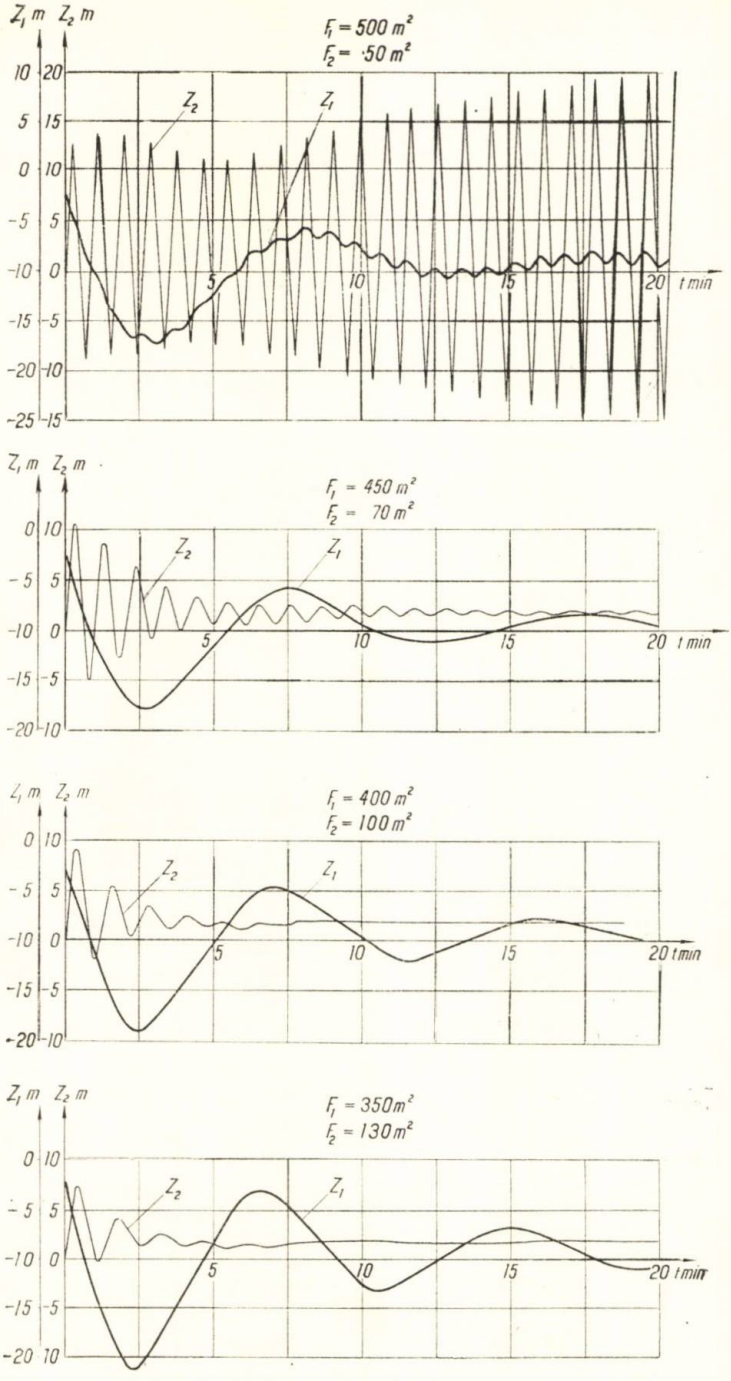


Fig. 9. — Oscilații calculate în sistem pentru diferite secțiuni ale castelelor de echilibru.

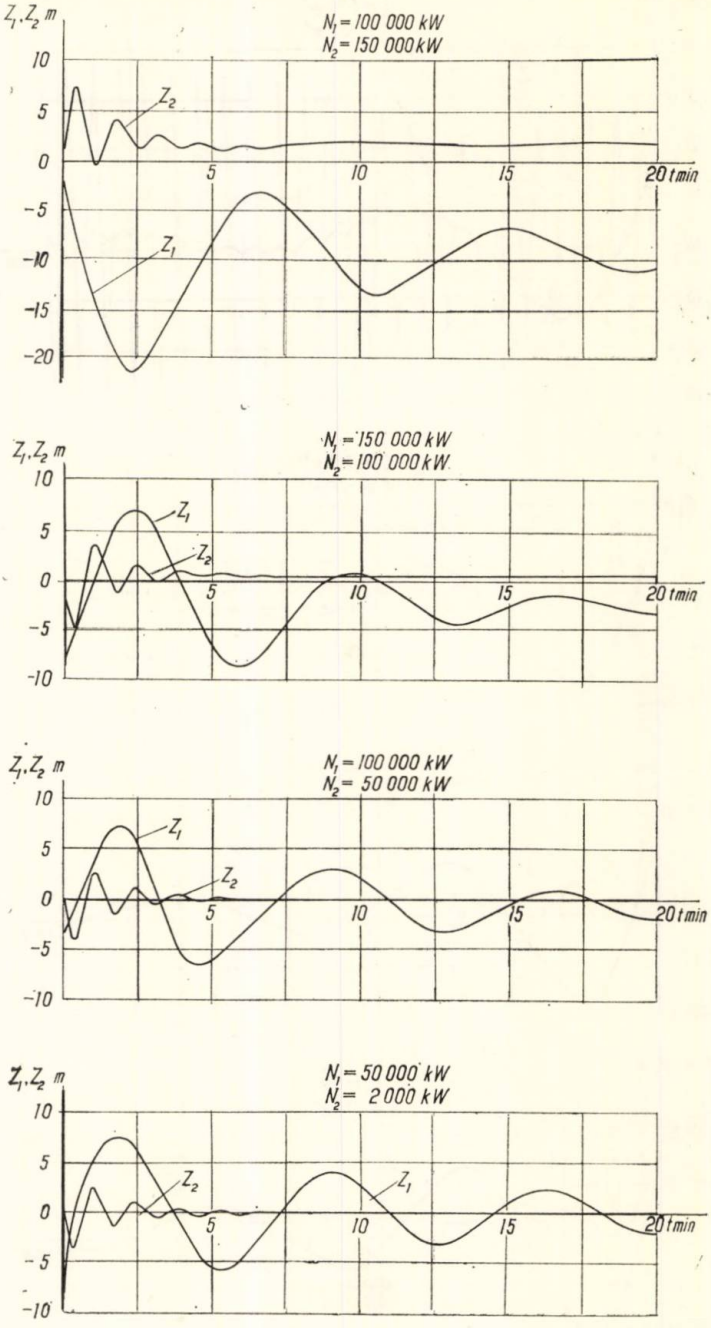


Fig. 10. — Oscilaţii calculate în sistem pentru diverse manevre de putere la centrală.

Un studiu mai amănunţit al amortizării oscilaţiilor nivelurilor apei din cele două castele s-a făcut pentru secţiunile :

$$F_1 = 350 \text{ m}^2, \quad F_2 = 130 \text{ m}^2,$$

caz în care s-au considerat cîteva manevre de putere la centrală, iar rezultatele calculelor sînt prezentate grafic în figura 10.

În exemplele de calcul pe care le-am prezentat nu s-a urmărit dimensionarea hidraulică a secţiunilor castelelor la stabilitate, ci numai punerea în evidenţă a drumului de urmat pentru aplicarea metodei într-un caz concret.

Pentru aceasta vor trebui luate în calcul diferite ipoteze asupra manevrelor de putere predominante în exploatarea uzinei, precum şi asupra manevrelor de putere defavorabile posibile. Alegerea secţiunii optime a castelului (cazul 1) sau a secţiunilor celor două castele de echilibru (cazul 2) se poate face printr-un calcul tehnic-economic care să aibă în vedere, pe de o parte, acceptarea unor oscilaţii ale nivelurilor apei din castele pe o anumită perioadă de timp, avînd în vedere funcţionarea turbinelor la cădere variabilă, iar pe de altă parte, costul construcţiei castelelor de echilibru funcţie de tipul şi secţiunea lor.

În sfîrşit, menţionăm că metoda de calcul expusă se poate aplica cu unele modificări şi pentru cazul a două castele de echilibru situate pe galeria de aducţiune a unei uzine hidroelectrice.

Primită la redacţie la 30 martie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Brunelle, P., Delisle, J., Larivière, R., Fonseca, F., *Étude de la stabilité des installations Manicouagan 5 et Qutardes 2 en réseau séparé et en réseau interconnecté*, Congrès A.I.R.H (1969).
2. Escande, L., Huron, R., *Stabilité de deux chambres d'equilibre respectivement solidaires des canaux d'amenée et de fuite*, La Houille Blanche, *5*, (1953).
3. Gardel, A., *Chambres d'équilibre*, Lausanne (1956).
4. Jaeger, Ch., *Le système à double chambre d'équilibre*, La Houille Blanche, *4* (1957).
5. Mayer, R. *Conditions analogues à celles de Thoma pour une installation hydro-électrique ayant une cheminée d'équilibre à l'amont et une autre à l'aval des turbines*, La Houille Blanche, *5* (1953).
6. Mosonyi, E., Nagy, L., *Stability Investigations by Computer*, Water Power, *7* (1964).
7. Popescu, M., *Metode noi pentru calculul hidraulic al castelelor de echilibru*, Studii de hidraulică, **XXIII** (1970).
8. Popescu, M., *Probleme actuale în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru*, Studii de hidraulică, **XXI** (1969).
9. Popescu, M., *Modèle mathématique pour l'étude de la stabilité d'un système de deux chambres d'équilibre*, C.R. Acad. Sc. Paris, **273**, 129—132 (1971).
10. Popescu, M., Novotny, P., *Contribuţie la studiul stabilităţii castelelor de echilibru*, Hidrotehnica, *6* (1970).
11. Vucetic, J., *Nouveau critère de stabilité des cheminées d'équilibre en régime initial nonpermanent*, Génie Civil, *6—7* (1968).

ASUPRA PRINCIPIILOR MECANICII NEWTONIENE

de. L. DRAGOŞ
Facultatea de matematică Bucureşti

În lucrare sînt formulate principiile mecanicii clasice, considerîndu-se ca element de bază corpul solid rigid, spre deosebire de metoda folosită în mod curent, în care se ia ca element de bază punctul material.
Se deduc apoi teoremele de mişcare ale sistemelor de corpuri rigide. Cazul punctului material şi al celui al sistemelor de puncte sînt obţinute prin particularizare.

1. INTRODUCERE

În anul 1686, Newton formulează în *Philosophiae naturalis principia mathematica* cele trei legi faimoase care stau la baza mecanicii [1]:

Legea I, orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare uniformă în linie dreaptă dacă nu este constrîns de forţe imprimate să-şi schimbe starea.

Legea a II-a, variaţia mişcării este proporţională cu forţa motoare imprimată şi este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forţa.

Legea a III-a, reacţiunea este totdeauna contrară şi egală cu acţiunea sau acţiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale şi dirijate în sensuri contrare.

Cu toate că Newton vorbeşte de corp, enunţul acestor legi se referă de fapt la *punctul material*, prin punct material înţelegîndu-se un punct geometric caracterizat de o masă (un coeficient pozitiv constant). Această precizare se impune în momentul cînd dorim să formulăm cantitativ cele trei legi. Într-adevăr, mişcarea unui punct se caracterizează prin viteză şi acceleraţie, în timp ce mişcarea unui corp se caracterizează printr-o distribuţie de viteze şi o distribuţie de acceleraţii. Ştim ce înseamnă mişcarea uniformă şi în linie dreaptă a unui punct, dar nu ştim ce sens să dăm mişcării uniforme şi în linie dreaptă a unui corp (căci corpul poate avea şi o rotaţie). Mai mult, forţa motoare ca şi acţiunea şi reacţiunea de care vorbesc legile a II-a şi a III-a sînt vectori aplicaţi punctual.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 1, 1972, P. 51–65

În concluzie, prima lege precizează că un punct material își păstrează mișcarea rectilinie și uniformă atîta timp cît nu este constrîns de forțe imprimate să-și schimbe starea. Cu alte cuvinte

$$m\vec{V} = \text{const}, \tag{1}$$

m fiind masa punctului (considerată constantă) și $\vec{V}$ viteza sa.

A doua lege spune că variația cantității de mișcare (= impulsului $m\vec{V}$) a unui punct material este proporțională cu forța imprimată (relație vectorială), fapt care revin la

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\vec{V} = \vec{F}. \tag{2}$$

Ecuația (2) este valabilă într-un reper și într-o cronologie absolută (precizări incluse în definițiile spațiului și timpului newtonian). Ecuația (2) în proiecții apare prima dată la MacLaurin (1742) și la L. Euler (1749).

În fine, a treia lege se referă la două puncte materiale P_1 și P_2 în interacțiune și se scrie cantitativ astfel:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0\,; \qquad \vec{F}_{12} \| \overrightarrow{P_1P_2}, \tag{3}$$

$\vec{F}_{12}$ fiind acțiunea punctului P_2 asupra lui P_1 și $\vec{F}_{21}$ acțiunea punctului P_1 asupra lui P_2 (sau reacțiunea lui P_1). Ultima relație din (3), care precizează că acțiunile sînt pe dreapta ce unește cele două puncte, nu rezultă explicit din enunțul lui Newton, dar se subînțelege, căci altfel nu s-ar vorbi de „dirijate în sensuri contrare". De fapt, ea este justificată de omogenitatea spațiului și timpului (nu este nici un motiv să fie altfel). Sub această formă folosim noi astăzi legile lui Newton.

Desigur că cea mai mare slăbiciune a legilor lui Newton este aceea că ele sînt formulate pentru punctul material, o abstracție care nu există în realitate. Or, justificarea acestor legi rezidă în experiență. Cum cu punctul material nu se pot face experiențe, rămîne ca valabilitatea acestor legi să o verificăm în mod indirect, prin concluziile la care ele conduc. Aceasta încă nu ar fi un rău prea mare dacă de la punctul material, pentru care sînt valabile aceste legi, s-ar putea ajunge la corpul material pe o cale de raționament riguros și fără imixtiuni străine. Or, se întîmplă că chiar în momentul cînd trecem de la un sistem discret de punct materiale (în număr finit) la mediul continuu (în particular la rigid) trebuie să acceptăm cîteva compromisuri. Mai întîi trebuie să renunțăm la noțiunea de punct material așa cum a fost definită anterior (și pentru care s-au enunțat legile lui Newton) și să considerăm elemente materiale cu întindere spațială (acceptînd legea lui Newton pentru astfel de elemente). Trebuie apoi, în orice caz, să admitem că aceste legi sînt valabile și pentru sisteme cu număr infinit de puncte. Dacă în cazul rigidului raționamentele se pot ajusta cu oarecare decență, ele rămîn neputincioase în cazul mediului nerigid. Practic se impun postulate noi.

Aşa cum ştim, mecanica nu este complet definită prin aceste trei legi. Mai sînt şi alte momente în procesul de desfăşurare al mecanicii în care trebuie să facem apel la experienţă pentru a completa ecuaţiile de mişcare. Este suficient să amintesc în acest sens problema mişcărilor cu frecare. Pentru a deduce, de exemplu, legile frecării coulombiene facem experienţe cu corpuri şi postulăm rezultatele pentru punctul material.

Greutăţile semnalate mai sus, ca şi altele, justifică necesitatea formulării legilor mecanicii pentru corpuri cît mai reale (corpuri cu care să se poată face, în anumite limite, experienţe). Un prim model al corpului real ar putea fi solidul rigid. Solidul rigid este de fapt tot o abstracţie, deoarece orice corp solicitat se deformează. Există însă corpuri la care deformaţia este atît de mică (pentru solicitări nedepăşind anumite limite), încît practic se poate neglija. Corpul rigid aproximează deci destul de bine anumite corpuri reale. În nota de faţă ne propunem să formulăm principiile mecanicii luînd ca element de bază solidul rigid. Ideea aceasta se mai găseşte într-o anumită formă la J. Pérès [2] şi H. Cabannes [3].

A. DEFINIŢII ŞI AXIOME

2. SPAŢIU, TIMP, MIŞCARE

Spaţiul fenomenelor reale este absolut şi independent de materie. Ca structură matematică, el este un spaţiu euclidian cu trei dimensiuni E_3. Admitem că s-a definit o unitate practică pentru măsurarea distanţelor.

Timpul în mecanica newtoniană are, de asemenea, un caracter absolut (există posibilitatea de a transmite instantaneu semnale) şi este independent de materie. Întrucît este independent de materie, înseamnă că şi el, ca şi spaţiul, nu are structură (este omogen şi izotrop). Timpul este unidimensional şi ireversibil. Există posibilitatea practică de a măsura timpul, unitatea de măsură avînd şi ea un caracter absolut.

Mişcarea corpurilor este raportată la spaţiu (un reper S), timpul fiind variabila independentă. Spaţiul este suportul materiei.

DEFINIŢIA 1. Numim rigid un sistem de puncte cu proprietatea că distanţa dintre oricare două puncte ale sistemului rămîne constantă.

TEOREMA 1. Poziţia rigidului în spaţiu se identifică prin şase parametri (cu excepţia rigidului de două puncte, cînd se impun cinci parametri, şi a rigidului de un punct, care depinde de trei parametri). Spunem că rigidul are şase grade de libertate (respectiv cinci şi trei). Demonstraţia este cunoscută.

TEOREMA 2. Orice poziţie a unui rigid se identifică prin coordonatele X_0^i $(i = 1, 2, 3)$ ale unui punct o al rigidului şi prin unghiurile lui Euler φ, ψ şi θ, care dau orientarea unui sistem solidar cu rigidul în raport cu S (demonstraţia se găseşte în bibliografia indicată). În cazul a două puncte P_1 P_2 coordonatele lui P_1 şi cosinuşii direcţiei $\overrightarrow{P_1P_2}$ determină poziţia rigidului.

În consecinţă, legea de mişcare a rigidului va fi:

$$X_0^i = X_0^i(t), \qquad i = 1, 2, 3,$$
$$\varphi = \varphi(t), \qquad \psi = \psi(t), \qquad \theta = \theta(t). \tag{4}$$

DEFINIȚIA 2. Viteza unui punct P care se mișcă după legea $X^i = X^i(t)$ are coordonatele $\dot{X}^i$, punctul de deasupra marcînd derivata în raport cu timpul.

DEFINIȚIA și TEOREMA 3. Vectorul $\vec{\omega}$ definit prin relațiile

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\dot{\vec{i}}_2 \cdot \vec{i}_3, \dot{\vec{i}}_3 \cdot \vec{i}_1, \dot{\vec{i}}_1 \cdot \vec{i}_2), \tag{5}$$

$\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$ și $\vec{i}_3$ fiind versorii axelor reperului mobil s, caracterizează rotația lui s (și a rigidului) în raport cu S.

Afirmația rezultă din formulele:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{6}$$

și inversele lor:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega_3 - (\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi) \operatorname{ctg}\theta, \\ \dot{\psi} \sin\theta &= \omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi, \\ \dot{\theta} &= \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi. \end{aligned} \tag{6'}$$

Din (6) rezultă că, dacă orientarea reperului s nu se schimbă, $\vec{\omega} \equiv 0$, iar din (6') reciproca.

TEOREMA 4. Între derivata absolută a unui vector $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$ (vectorul raportat la reperul fix S) și derivata sa relativă $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ (vectorul raportat la reperul mobil s) există relația

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u}. \tag{7}$$

Demonstrația rezultă imediat folosind formulele lui Poisson:

$$\dot{\vec{i}}_i = \vec{\omega} \times \vec{i}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

consecințe ale definiției (5).

TEOREMA 5. Distribuţia de viteze într-un rigid este dată de următoarea expresie :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}; \qquad \vec{V} = \dot{\overrightarrow{OP}}, \tag{8}$$

P fiind un punct curent al rigidului, O originea reperului S, o originea reperului s şi $\vec{V}_0$ viteza acestei origini.

Demonstraţia rezultă imediat folosind (5′).

3. MATERIE, MASĂ

Materia este realitatea obiectivă de care luăm cunoştinţă prin senzaţii şi gîndire. Masa este o mărime de stare a materiei, caracterizînd inerţia şi greutatea corpurilor. Cantitativ o definim prin următoarele axiome :

1°. Oricărui sistem material $\mathfrak{M}$ i se asociază un număr real pozitiv $m(\mathfrak{M})$ numit masa sistemului (numărul rezultă din comparaţia cu o mărime etalon).

2°. În cursul evoluţiei sistemului masa rămîne constantă ($\dot{m} \equiv 0$).

3°. Pentru orice diviziune $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ a sistemului avem

$$m(\mathfrak{M}) = m(\mathfrak{M}_1) + \ldots + m(\mathfrak{M}_n).$$

Notăm $m(\mathfrak{M}_s) = m_s$, $s = 1, \ldots, n$.

Ultima proprietate ne arată că masa este o măsură. Ca atare, masa unui sistem material $\mathfrak{M}$ repartizat continuu pe un domeniu D din E_3 se va scrie :

$$m(\mathfrak{M}) = \int_{\mathfrak{M}} \mathrm{d}m = \int_D \rho(P)\, \mathrm{d}v\,(P), \tag{9}$$

unde $\rho(P) \geqslant 0$ reprezintă masa specifică (o funcţie numerică continuă cel puţin pe porţiuni), iar $\mathrm{d}v$ elementul de volum (scriem o singură integrală, dar se subînţelege că este vorba de o integrală de volum). În cazul mediilor deformabile ρ poate fi şi funcţie de t. În (9) prima integrală este o integrală Stiltjes, iar a doua o integrală Riemann.

Dacă sistemul material $\mathfrak{M}$ este repartizat discret, punctele P_s purtînd masele m_s, atunci în (9) se va înlocui [4] :

$$\rho(P) = \Sigma m_s\, \delta(P - P_s), \tag{10}$$

δ fiind distribuţia lui Dirac. Utilizînd definiţia distribuţiei lui Dirac, în acest caz (9) devine

$$m = \Sigma m_s. \tag{9′}$$

DEFINIŢIA 4. Cetrul de inerţie G al sistemului $\mathfrak{M}$ este definit de relaţia

$$\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{GP}\, dm = 0 \quad (\Sigma m_s \overrightarrow{GP_s} = 0). \tag{11}$$

În paranteză am scris ce devine prima relaţie în cazul sistemului discret (se utilizează (10)). În raport cu o origine $O(\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP})$ relaţia (11) ne dă

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{OP}\, dm \qquad \left(\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\Sigma m_s \overrightarrow{OP_s}\right). \tag{11'}$$

DEFINIŢIA 5. Momentul de inerţie al unui sistem $\mathfrak{M}$ în raport cu o varietate V (plan, dreaptă, punct) se defineşte prin integrala

$$I_V = \int_{\mathfrak{M}} d^2(P, V)\, dm \quad (I_V = \Sigma m_s d_s^2), \tag{12}$$

d fiind distanţa de la punctul curent (în raport cu care se integrează) la varietate. Momentul de inerţie este un număr pozitiv (nul în cazuri excepţionale).

TEOREMA 6. Momentul de inerţie în raport cu o dreaptă Δ, ce trece prin originea unui sistem cartezian $OX^1 X^2 X^3$ şi are versorul $\vec{u}$ de coordonate (u_i), este dat de formula

$$I_\Delta = \sum_{i,j} I^{ij} u_i u_j, \tag{13}$$

unde I^{ij} este tensorul

$$I^{ij} = \int_{\mathfrak{M}} (X^k X^k \delta^{ij} - X^i X^j)\, dm, \tag{13'}$$

δ^{ij} fiind tensorul unitate (simbolul lui Kröenecker).

TEOREMA 7. Ca orice tensor simetric de ordinul doi, I^{ij} are, în orice punct O, trei direcţii principale (direcţii faţă de care momentul de inerţie are valori extreme). Cele trei direcţii sînt ortogonale. Dacă raportăm tensorul de inerţie la aceste direcţii el se reduce la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{13''}$$

4. ELEMENTE DE CINETICĂ

Cinetica este sinteza elementelor de mişcare şi a geometriei maselor. Fie $\mathfrak{M}$ un sistem material şi D raportul său (ansamblul (P_s) în cazul că sistemul este distribuit discret).

DEFINIŢIA 6. Se numeşte *impuls* mărimea

$$\vec{H} = \int_{\mathfrak{M}} \vec{V}\, dm, \tag{14}$$

$\vec{V}$ fiind viteza unui punct curent $P(\vec{V} = \dot{\overrightarrow{OP}}$, O fiind o origine fixă).

DEFINIŢIA 7. Se numeşte *moment cinetic* mărimea

$$\vec{K} = \int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{OP} \times \vec{V}\, dm. \tag{15}$$

DEFINIŢIA 8. Se numeşte *energie cinetică* mărimea:

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{M}} V^2\, dm. \tag{16}$$

TEOREMA 8. În cazul sistemului discret, impulsul, momentul cinetic şi energia cinetică au expresiile următoare:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \Sigma m_s \vec{V}_s, \\ \vec{K} &= \Sigma \overrightarrow{OP}_s \times m_s \vec{V}_s, \\ E &= \frac{1}{2}\Sigma m_s V_s^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Demonstraţia rezultă imediat dacă se introduce masa specifică ρ în (14)—(16) şi se utilizează (10).

TEOREMA 9. În cazul sistemului rigid, impulsul, momentul cinetic şi energia cinetică au expresiile:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= m\,(\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{oG}), \\ \vec{K} &= \vec{Oo} \times \vec{H} + \vec{oG} \times m\vec{V}_0 + \overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}, \\ E &= \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{(i} \cdot \vec{\omega}) + m\vec{V}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{oG}). \end{aligned} \tag{18}$$

Demonstraţia rezultă uşor dacă se ţine cont de distribuţia de viteze (8). Am notat $\overleftrightarrow{i}$ tensorul de inerţie în raport cu sistemul $s : ox^1x^2x^3$ solidar cu rigidul. Produsul scalar $\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}$ este un vector de coordonate $(\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega})_k = i_{kj}\,\omega_j$.

Expresiile din dreapta formulelor (18) au semnificaţii mecanice sugestive. De exemplu, vectorul din prima paranteză reprezintă chiar viteza centrului de inerţie G, astfel că impulsul rigidului apare ca fiind masa totală înmulţită cu această viteză.

Semnificaţia este şi mai evidentă dacă alegem originea sistemului mobil s să coincidă cu centrul de inerţie $G(0 \equiv G)$. În acest caz formulele (18) devin :

$$\vec{H} = m\vec{V}_G,$$

$$\vec{K} = \overrightarrow{OG} \times m\vec{V}_G + \overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}, \tag{18'}$$

$$E = \frac{1}{2} mV_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}).$$

5. FORŢE

Forţa este acţiunea care modifică starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă a unui punct. Forţa determină variaţia mişcării. În mecanică, forţa se caracterizează prin următoarele două axiome :

1°. Forţa aplicată într-un punct P al unui sistem material este un vector legat.

2°. Două forţe ce acţionează într-un punct P se pot înlocui printr-o rezultantă reprezentată de diagonala paralelogramului construit pe vectorii ce reprezintă cele două forţe (şi reciproc).

TEOREMA 10. O forţă ce acţionează într-un punct al unui rigid se comportă ca un vector alunecător. Demonstraţia rezultă din definiţia 1 şi din axioma 2° relativă la forţă.

DEFINIŢIA 9. Fie $\mathcal{F} : (P_r, \vec{F}_{rs})$ un sistem de forţe aplicate unui rigid (P_r sînt punctele în care sînt aplicate forţele $\vec{F}_{rs}$ $s = 1, \ldots, n_r$). Vectorii

$$\vec{\mathcal{R}} = \sum_{r,s} \vec{F}_{rs}, \quad \vec{\mathcal{M}}\,O = \sum_{r,s} \overrightarrow{OP_r} \times \vec{F}_{rs} \tag{19}$$

se numesc, respectiv, *rezultantă* şi *moment rezultant* al sistemului de forţe în O ; ansamblul $(\vec{\mathcal{R}}, \vec{\mathcal{M}}\,O)$ se numeşte *torsorul sistemului* de forţe în punctul O şi se notează $\tau\,O\,\mathcal{F}$.

TEOREMA 11. Dacă torsorul este nul într-un punct din spaţiu, el este nul în orice punct. Demonstraţia rezultă din relaţia

$$\vec{\mathcal{M}}O' = \overrightarrow{O'O} \times \vec{\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}O. \tag{20}$$

DEFINIŢIA 10. Două sisteme de forţe $\mathcal{F} : (P_r, \vec{F}_{rs})$ şi $\mathcal{F}' : (P'_{r'}, \vec{F}'_{r's'})$ aplicate unui rigid sînt *echivalente* dacă se deduc unul din celălalt prin operaţiile admise de axioma 2° şi de teorema 10.

TEOREMA 12. Condiţia necesară şi suficientă ca două sisteme de forţe $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{F}'$ aplicate unui rigid să fie echivalente este ca ele să aibă acelaşi torsor. Cu alte cuvinte

$$\forall O, \vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}}', \vec{\mathcal{M}}O = \vec{\mathcal{M}}'O. \tag{21}$$

Demonstraţia este cunoscută.

Din această teoremă rezultă că acţiunea unui sistem de forţe oarecare, aplicată unui rigid, este complet caracterizată de torsorul acestui sistem. Definiţia 10 şi teorema 12 nu sînt necesare în expunerea pe care o facem. Ele sînt introduse numai pentru a sugera în ce mod forţele aplicate unui rigid vor determina mişcarea acestuia.

B. ECUAŢIILE DE MIŞCARE

6. PRINCIPIUL GENERAL DE MIŞCARE

Analiza de mai sus ne sugerează că torsorul forţelor exterioare determină mişcarea rigidului. Pe de altă parte, primele două legi ale lui Newton arată că acţiunea forţelor exterioare trebuie pusă în legătură cu variaţia impulsului. Este atunci natural să postulăm următorul principiu general de mişcare:

Mişcarea unui rigid se face în aşa fel încît în orice moment variaţia torsorului sistemului de impulsuri (*respectiv* $\vec{H}$ *şi* $\vec{K}$) *să fie egală cu torsorul forţelor exterioare.* Matematic aceasta revine la:

$$\forall O, \dot{\tau} O(m\vec{V}) = \tau O(\vec{F}) \Leftrightarrow, \tag{22}$$

$$\forall O, \dot{\vec{H}} = \vec{\mathcal{R}}, \dot{\vec{K}} = \vec{\mathcal{M}}O,$$

mărimile fiind raportate la un reper absolut S şi la o cronologie absolută.

Luînd ca origine a sistemului solidar cu rigidul chiar centrul de inerţie al acestuia ($o \equiv G$), utilizînd (18′) şi (7), ecuaţiile (22) devin:

$$m\dot{\vec{V}}_G = \vec{\mathcal{R}}, \tag{23}$$

$$\overleftrightarrow{i} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\mathcal{M}}G. \tag{24}$$

În fine, dacă axele reperului mobil s coincid cu direcțiile principale ale tensorului inerție în G, atunci ecuațiile (24) se simplifică. În sistemul mobil acestea se scriu:

$$a\,\dot{\omega}_1 + (c - b)\,\omega_2\,\omega_3 = \mathcal{M}G_1,$$

$$b\,\dot{\omega}_2 + (a - c)\,\omega_3\,\omega_1 = \mathcal{M}G_2, \tag{24'}$$

$$c\,\dot{\omega}_3 \times (b - a)\,\omega_1\,\omega_2 = \mathcal{M}G_3,$$

a, b, c fiind momentele de inerție principale în sistemul s.

Dacă forțele $\vec{F}_r$ sînt date, ecuația (23) definește mișcarea centrului de inerție al rigidului. Ea se reduce în fond la ecuația lui Newton pentru acest punct, ca și cum în el ar fi concentrată întreaga masă m a corpului. Ecuațiile (24) definesc mișcarea de rotație a rigidului (vectorul $\vec{\omega}$). Determinînd vectorul $\vec{\omega}$, mai rămîne de integrat sistemul (6') pentru a obține complet legea de mișcare (4).

Cu notațiile:

$$q = \begin{pmatrix} X_G^1 \\ X_G^2 \\ X_G^3 \\ \dot{X}_G^1 \\ \dot{X}_G^2 \\ \dot{X}_G^3 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} \dot{X}_G^1 \\ \dot{X}_G^2 \\ \dot{X}_G^3 \\ \mathcal{R}_1/m \\ \mathcal{R}_2/m \\ \mathcal{R}_3/m \end{pmatrix}; \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -\dfrac{c-b}{a}\,\omega_2\omega_3 + \dfrac{1}{a}\,\mathcal{M}G_1 \\ -\dfrac{a-c}{b}\,\omega_3\omega_1 + \dfrac{1}{b}\,\mathcal{M}G_2 \\ -\dfrac{b-a}{c}\,\omega_1\omega_2 + \dfrac{1}{c}\,\mathcal{M}G_3 \end{pmatrix},$$

sistemele de mișcare (23) și (24') se pun sub forma normală:

$$\dot{q} = Q, \tag{25}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\Omega}. \tag{26}$$

Ecuațiile (6') sînt deja sub forma normală. Studiind problema lui Cauchy, rezultă că, dacă forțele aplicate sînt continue și lipschitziene într-un domeniu de definiție a sistemului, soluția există și este unică. Dacă forțele nu depind de vectorul de rotație $\vec{\omega}$, sistemele se separă: se integrează întîi sistemul (25), apoi sistemul (26) și, în fine, sistemul (6'). În acest caz

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} = 0,$$

fapt care reduce cu o unitate numărul de integrale prime necesare pentru integrarea sistemului (26) (conform teoriei ultimului multiplicator a lui Lagrange).

7. MIŞCAREA INERŢIALĂ A RIGIDULUI

Să presupunem că există un punct O în spaţiu în care rezultanta şi momentul rezultant al forţelor aplicate unui rigid sînt nule (în particular aceasta se întîmplă cînd toate forţele sînt nule). Conform teoremei 11 rezultanta şi momentul rezultant vor fi nule în orice punct. Ecuaţia (23) ne dă

$$\overrightarrow{OG} = \vec{V}_G|_{t=0}\, t + \overrightarrow{OG}|_{t=0}. \tag{27}$$

În concluzie, centrul de inerţie are tot timpul aceeaşi stare : *ori este în mişcare rectilinie şi uniformă, ori este în repaus.* Acest adevăr era confirmat şi de *principiul inerţiei.* Noul principiu determină însă şi mişcarea de rotaţie. Într-adevăr, în acest caz, sistemul (24′) se reduce la sistemul omogen :

$$\begin{aligned} a\dot{\omega}_1 + (c - b)\ \omega_2\omega_3 &= 0, \\ b\dot{\omega}_2 + (a - c)\ \omega_3\omega_1 &= 0, \\ c\dot{\omega}_3 + (b - a)\ \omega_1\omega_2 &= 0, \end{aligned} \tag{24″}$$

a cărui soluţie generală a fost determinată încă de Euler. În funcţie de datele iniţiale, soluţia poate fi o rotaţie uniformă în jurul uneia din axe sau o rotaţie mai complexă [5]. Dacă vectorul $\vec{\omega}$ în momentul iniţial este nul, el rămîne nul tot timpul (rezultă din forma generală a soluţiei). Acest rezultat confirmă unicitatea soluţiei sistemului (24). Tot de aici rezultă că pentru ca *rigidul să fie în echilibru într-o poziţie oarecare, este necesar şi suficient ca în acea poziţie torsorul forţelor aplicate să fie nul.*

Observaţie. Dacă asupra rigidului acţionează doar greutatea proprie, rotaţia va fi cea descrisă mai sus, deoarece

$$\overrightarrow{\mathcal{M}G} = \int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{GP} \times \vec{g}\ \mathrm{d}m = \left(\int_{\mathfrak{M}} \overrightarrow{GP}\, \mathrm{d}m\right) \times \vec{g} = 0.$$

8. PRINCIPIUL ACŢIUNII ŞI REACŢIUNII

Fie R_1 şi R_2 două rigide în interacţiune şi fie $(\vec{F}_{12})$ sistemul acţiunilor lui R_2 asupra lui R_1 şi $(\vec{F}_{21})$ sistemul acţiunilor lui R_1 asupra lui R_2. Fie, de asemenea, $(\vec{F}_1)$ sistemul acţiunilor exterioare (altele decît cele care provin de la R_2) ce afectează rigidul R_1 şi $(\vec{F}_2)$ sistemul ce afectează rigidul R_2. Scriind principiul (22) pentru R_1, R_2 şi ansamblul (R_1, R_2) deducem

$\forall O$:

$$\dot{\tau}O\,(m_1\vec{V}_1) = \tau O\,(\vec{F}_1) + \tau O\,(\vec{F}_{12}),$$

$$\dot{\tau}O\,(m_2\vec{V}_2) = \tau O\,(\vec{F}_2) + \tau O\,(\vec{F}_{21}),$$

$$\dot{\tau}O\,(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2) = \tau O\,(\vec{F}_1 + \vec{F}_2).$$

Ținînd cont că torsorul este un *operator liniar*, din relațiile de mai sus găsim

$$\tau O(\vec{F}_{12}) + \tau O(\vec{F}_{21}) = 0. \tag{28}$$

Acesta este principiul acțiunii și reacțiunii. El se enunță astfel: *în orice moment torsorul acțiunilor lui R_2 asupra lui R_1 este egal și de semn opus cu torsorul acțiunilor lui R_1 asupra lui R_2.* În particular, dacă cele două corpuri se reduc la centrele lor de inerție regăsim relațiile (3).

Aceste rezultate demonstrează că principiul general enunțat în (22) conține legile lui Newton.

C. MECANICA SISTEMELOR DE RIGIDE

9. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Prin sistem de rigide înțelegem o mulțime de rigide cu proprietatea că mișcarea fiecărui rigid este determinată și de mișcarea celorlalte rigide din sistem. Este deci vorba de mișcarea unui ansamblu de corpuri în interacțiune. Interacțiunea o caracterizăm prin torsor. Notăm $\tau O(\vec{F}_{rs}) = (\vec{\mathcal{R}}_{rs}, \vec{\mathcal{M}O}_{rs})$ torsorul acțiunilor corpului C_s asupra corpului C_r. Conform principiului acțiunii și reacțiunii avem

$$\tau O(\vec{F}_{rs}) + \tau O(\vec{F}_{sr}) = 0. \tag{29}$$

Dacă mai notăm $\tau O(\vec{F}_r) = (\vec{\mathcal{R}}_r, \vec{\mathcal{M}O}_r)$ torsorul forțelor exterioare aplicate corpului C_r, deducem că mișcarea acestui corp va fi determinată de ecuațiile

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_r &= \vec{\mathcal{R}}_r + \sum_s \vec{\mathcal{R}}_{rs}, \\ \dot{\vec{K}}_r &= \vec{\mathcal{M}O}_r + \sum_s \vec{\mathcal{M}O}_{rs} \quad , \quad \forall O. \end{aligned} \tag{30}$$

Dacă acțiunile interioare ar fi cunoscute, ecuațiile (30) ar rezolva problema.

Ecuațiile de mișcare ale sistemului vor fi ecuațiile scrise pentru orice parte a sistemului.

Pentru întreg sistemul ecuațiile (30) se reduc la

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \Sigma \vec{\mathcal{R}}_r \quad ; \quad \vec{H} = \Sigma \vec{H}_r, \\ \dot{\vec{K}} &= \Sigma \vec{\mathcal{M}}_r \quad , \quad \vec{K} = \Sigma \vec{K}_r \end{aligned} \tag{31}$$

și ele nu conțin interacțiunile. Ecuațiile (31) sînt necesare, nu și suficiente pentru determinarea mișcării sistemului.

9'. MIȘCAREA CENTRULUI DE INERȚIE ȘI MIȘCAREA SISTEMULUI ÎN JURUL CENTRULUI DE INERȚIE

Din proprietatea de adivitate a masei și din (11') deducem că în cazul unui sistem de corpuri

$$m\,\overrightarrow{OG} = \Sigma m_r\,\overrightarrow{OG_r} \quad , \quad m = \Sigma m_r. \tag{11''}$$

Folosind acum expresia impulsului (18') și (31) găsim

$$\vec{H} = \Sigma m_r\,\ddot{\overrightarrow{OG_r}} = m\,\ddot{\overrightarrow{OG}} = \Sigma\vec{\mathcal{R}}_r. \tag{32}$$

Ultima egalitate din (32) ne arată că *centrul de inerție G al unui sistem de rigide* (C_r) *se mișcă la fel ca un punct material în care ar fi concentrată întreaga masă a sistemului și asupra căruia ar acționa rezultanta forțelor exterioare aplicate sistemului.*

Să considerăm acum un reper cu originea în G și cu axele de direcție fixă. Întrucît

$$\vec{K} = \Sigma\vec{K}_r = \Sigma\int_{\mathfrak{M}_r} \overrightarrow{OP} \times \dot{\overrightarrow{OP}}\,\mathrm{d}m = \dot{\overrightarrow{OG}} \times m\overrightarrow{OG} + \vec{KG},$$

$$\vec{KG} = \Sigma\int_{\mathfrak{M}_r} \overrightarrow{GP} \times \dot{\overrightarrow{GP}}\,\mathrm{d}m,$$

deoarece $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$, $\dot{\overrightarrow{OP}} = \dot{\overrightarrow{OG}} + \dot{\overrightarrow{GP}}$, și întrucît

$$\Sigma\vec{\mathcal{M}}O_r = \sum_{r,\,s} \overrightarrow{OP_{rs}} \times \vec{F}_{rs} = \dot{\overrightarrow{OG}} \times \vec{\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{M}}G,$$

$$\vec{\mathcal{M}}G = \sum_{r,s} \overrightarrow{GP_{rs}} \times \vec{F}_{rs},$$

P_{rs} fiind punctele corpului C_r în care sînt aplicate forțele $\vec{F}_{rs}$, deducem din (31) și (32)

$$\dot{\vec{K}}G = \vec{\mathcal{M}}G. \tag{33}$$

Ecuația obținută este ecuația momentului cinetic față de centrul de inerție G al sistemului. Ea ne va caracteriza mișcarea sistemului în jurul centrului său de inerție.

10. TEOREMA ENERGIEI (CINETICE) PENTRU SISTEME DE CORPURI RIGIDE

Teorema energiei (cinetice) este o consecinţă a ecuaţiilor de mişcare. Pentru a o deduce vom retranscrie explicit ecuaţiile (30)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_r \vec{V}_r = \sum_q \vec{F}_{rq} + \sum_{s,p} \vec{F}_{rsp}, \quad \vec{V}_r = \dot{\overrightarrow{OG}}_r, \tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\overrightarrow{OG}_r \times m_r \vec{V}_r + \overleftrightarrow{i}_r \cdot \vec{\omega}_r) = \sum_q \overrightarrow{OP}_{rq} \times \vec{F}_{rq} + \sum_{s,p} \overrightarrow{OP}_{rsp} \times \vec{F}_{rsp}, \tag{35}$$

unde prin q indicăm forţele exterioare ($q = 1, \ldots, n_r$), prin s rigidele ce acţionează asupra corpului C_r ($s = 1, \ldots, N$, $s \neq r$), iar prin p forţele interioare ($p = 1, \ldots, n_{rs}$). Forţele se presupun concentrate.

Înmulţind scalar ecuaţia (34) cu $\vec{V}_r$ şi ecuaţia (35) cu $\vec{\omega}_r$, găsim

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m_r V_r^2\right) = \sum_q \vec{F}_{rq} \cdot \vec{V}_r + \sum_{s,p} \vec{F}_{rsp} \cdot \vec{V}_r, \tag{34'}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} \vec{\omega}_r \cdot (\overleftrightarrow{i}_r \cdot \vec{\omega}_r) = \sum_q (\overrightarrow{G_r P_{rq}} \times \vec{F}_{rq}) \cdot \vec{\omega}_r + \sum_{s,p} (\overrightarrow{G_r P_{rsp}} \times \vec{F}_{rsp}) \cdot \vec{\omega}_r, \tag{35'}$$

unde am ţinut cont de (34) şi am observat că

$$\vec{\omega} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot (\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega}).$$

În ultima relaţie am observat că din cauza simetriei tensorului $\overleftrightarrow{i}$ avem (pe componente)

$$\frac{1}{2} \dot{\omega}_k \, i_{kj} \, \omega_j + \frac{1}{2} \omega_k \, i_{kj} \, \dot{\omega}_j = \omega_k \, i_{kj} \, \dot{\omega}_j.$$

Adunînd ecuaţiile (34') şi (35'), rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_r = \sum_q \vec{F}_{rq} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{X}_{rq}}{\mathrm{d}t} + \sum_{s,p} \vec{F}_{rsp} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{X}_{rsp}}{\mathrm{d}t}, \tag{36}$$

unde

$$\frac{\mathrm{d}\vec{X}_{rq}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{G_r P_{rq}}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{X}_{rsp}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{G_r P_{rsp}}.$$

Sumînd ecuaţia (36) pentru toate corpurile sistemului obţinem

$$\mathrm{d}E = \sum_{r,q} \vec{F}_{rq} \cdot \mathrm{d}\vec{X}_{rq} + \sum_{r,s,p} \vec{F}_{rsp} \cdot \mathrm{d}\vec{X}_{rsp}, \tag{37}$$

relaţie care constituie teorema energiei în cazul sistemelor de corpuri rigide.

Dacă corpurile se reduc la centrele lor de inerţie ($\overleftrightarrow{i_r} \equiv 0$, $\overrightarrow{G_r P_{rq}} \equiv \overrightarrow{G_r P_{rsp}} \equiv 0$) sau dacă rotaţiile corpurilor sînt zero ($\vec{\omega}_r \equiv 0$), se găseşte teorema cunoscută din cazul sistemelor de puncte. De altfel în aceste ipoteze şi ecuaţiile (31) se reduc la teoremele generale (*t.* impulsului şi *t.* momentului cinetic) din cazul sistemelor de puncte.

În concluzie, principiul general formulat în (22) permite dezvoltarea mecanicii newtoniene pornind de la corpul rigid ca element fundamental. Punctul material este un caz particular al acestuia.

Primită la redacţie la 16 iulie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1686 (în româneşte de V. Marian, Edit. Academiei, 1956).
2. J. Pérès, *Mécanique générale*, Masson, Paris, 1962.
3. H. Cabannes, *Cours de mécanique générale*, Dunod, Paris, 1966.
4. L. Dragoş, *Cursul de mecanică generală predat la Facultatea de matematică-mecanică*, Bucureşti, 1965–1970.
5. J.L. Synge, *Classical Dynamics*, în „Handbuch der Physik" III/s, 1960.

INFLUENȚA VARIAȚIEI COEFICIENTULUI DE ADERENȚĂ ASUPRA PARAMETRILOR CAPACITĂȚII DE FRÎNARE A AUTOMOBILULUI

de CHIRIAC VASILIU
Institutul politehnic București

În timpul regimului tranzitoriu de frînare a automobilului, printre altele, valoarea coeficientului de aderență este sensibil influențată de variația vitezei de deplasare. Cu toate acestea, în relațiile analitice curente folosite în mecanica automobilului, pentru coeficienții de aderență se folosesc valori constante.
În lucrare se prezintă posibilitatea ca la determinarea capacității de frînare a automobilului să se folosească relații analitice, care să conțină influența vitezei asupra variației coeficientului de aderență.
Folosind metoda punctelor selecționate se stabilește funcția, care reflectă influența vitezei asupra variației coeficientului de aderență, cu ajutorul căreia, ținînd seama și de influența vitezei asupra celorlalți factori deceleratori, se îmbunătățesc relațiile analitice de determinare a elementelor cinematice ale mișcării rectilinii a automobilului frînat.

1. FRÎNAREA AUTOMOBILULUI ȘI PARAMETRII CAPACITĂȚII DE FRÎNARE

Regimul de frînare este un regim tranzitoriu de mișcare în care automobilul își reduce viteza pînă la o anumită valoare sau pînă la starea de repaus. Mișcarea din timpul procesului de frînare este o mișcare întîrziată, la aceasta contribuind, drept cauză principală, o forță de frînare paralelă cu calea, precum și rezistența la rulare, rezistența aerului și rezistența la pantă (care poate să frîneze sau să accelereze mișcarea).

Forța de frînare este rezultatul acțiunii momentului de frînare produs de frecarea dezvoltată asupra unor tamburi sau discuri solidare cu roțile automobilului, iar în cazul că frînarea se face fără decuplarea motorului, mai intervine momentul redus la roțile motoare al forțelor de frecare din ansamblul motor-transmisie, precum și momentul motor la roată.

Este unanim admis că parametrii prin care se apreciază capacitatea de frînare a automobilului sînt valoarea decelerației maxime sau spațiul de frînare minim în funcție de viteză și de coeficientul de aderență. În

literatura de specialitate [1], [2], [3] sînt prezentate relaţii analitice de determinare a acestor parametri.

1.1. DETERMINAREA DECELERAŢIEI MAXIME

În cazul unui automobil cu frînare integrală ($G_f = G_a$), ecuaţia pentru determinarea decelerației maxime se poate scrie sub forma

$$d = \frac{g}{\delta} \cdot \left[(\varphi + f) \cdot \cos \alpha \pm p + \frac{K.A.V^2}{G_a} \right], \tag{1}$$

în care G_f este greutatea aderentă la frînare, egală cu reacţiunea normală a căii la roţile frînate;

G_a — greutatea automobilului;

δ — coeficientul maselor de rotaţie din timpul frînării (roţile automobilului şi transmisia);

φ — coeficientul de aderenţă;

f — coeficientul de rezistenţă la rulare;

α — unghiul de pantă; p — panta: $p = \operatorname{tg} \alpha \cong \sin \alpha$;

K — coeficientul aerodinamic;

A — suprafaţa transversală a automobilului.

Influenţa maselor în rotaţie, la frînarea cu ambreiajul decuplat, nefiind esenţială ($\delta \approx 1$), iar efectul de frînare al rezistenţei aerului devenind apreciabil numai de la viteze mai mari de 80 ... 100 km/h, se foloseşte, deseori, o relaţie mai simplificată de forma

$$d = g.[(\varphi + f) \cos \alpha \pm p]. \tag{2}$$

Coeficientul de rezistenţă la rulare avînd valori mult prea mici faţă de valorile coeficientului de aderenţă (pe o cale din beton asfaltat, $f = 0{,}014 \ldots 0{,}018$, faţă de $\varphi = 0{,}7 \ldots 0{,}8$; deci $f = 0{,}025\ \varphi$), valoarea sa se poate considera cuprinsă în cîmpul de variaţie al coeficientului de aderenţă şi dacă se consideră că frînarea se face pe un drum orizontal ($\alpha = 0$), relaţia ia forma cea mai simplă şi foarte des folosită

$$d = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \varphi . g. \tag{3}$$

1.2. DETERMINAREA SPAŢIULUI MINIM DE FRÎNARE

Relaţia spaţiului minim de frînare corespunzător unei scăderi a vitezei, de la viteza iniţială V_i, avută de automobil la începutul frînării, la viteza finală a acestuia este de forma

$$S_f = \int_{V_f}^{V_i} \frac{V \cdot \mathrm{d}V}{d} \tag{4}$$

sau

$$S_f = \frac{\delta}{g} \cdot \int_{V_f}^{V_i} \frac{V \cdot dV}{(\varphi + f) \cdot \cos \alpha \pm p + \frac{KAV^2}{G_a}} \cdot \tag{5}$$

Dacă frînarea se face pe un drum orizontal şi cu motorul decuplat, atunci spaţiul minim de frînare este dat de relaţia

$$S_f = \frac{1}{g} \int_{V_f}^{V_i} \frac{V \cdot dV}{(\varphi + f) + \frac{KAV^2}{G_a}} = \frac{G_a}{g} \cdot \int_{V_f}^{V_i} \frac{V \cdot dV}{G_a(\varphi + f) + KAV^2},$$

sau

$$S_f = \frac{G_a}{2gKA} \cdot \ln \frac{G_a(\varphi + f) + KAV_i^2}{G_a(\varphi + f) + KAV_f^2} \cdot \tag{6}$$

În cazul vitezelor sub 100 km/h şi cînd se neglijează rezistenţa la rulare, relaţia devine

$$S_f = \frac{1}{\varphi \cdot g} \cdot \int_{V_f}^{V_i} V \cdot dV = \frac{V_i^2 - V_f^2}{2\varphi \cdot g} \cdot \tag{7}$$

Dacă frînarea se face pînă la oprire ($V_f = 0$), relaţiile (6) şi (7) devin

$$S_f = \frac{G_a}{2gKA} \cdot \ln \left[1 + \frac{KAV_i^2}{G_a(\varphi + f)} \right] \tag{8}$$

şi

$$S_f = \frac{V_i^2}{2\varphi \cdot g} \cdot \tag{9}$$

În timpul frînării cu motorul nedecuplat de transmisie, se introduce un moment de frînare suplimentar, rezultat al frecărilor şi acţiunii de „pompare" din motor, compensate, în parte, în inerţia volantului motorului.

Cercetările teoretice şi experimentale conduc la concluzia că frînarea fără decuplarea motorului este indicată mai ales la viteze mari, deoarece echipajul mobil al motorului acţionează ca un regulator al forţei de frînare şi favorizează evitarea blocării roţilor şi menţinerea stabilităţii automobilului.

Spaţiile reale de frînare sînt sensibil influenţate şi de timpul de percepţie-reacţie al conducătorului,precum şi de inerţia mecanismelor de acţionare a frînei.

În medie se consideră acest timp de mărimea unei secunde, ca atare spațiul suplimentar parcurs de automobil va fi

$$S_{fs} = Vi \cdot t = V_i. \tag{10}$$

De remarcat, că în toate relațiile analitice folosite pentru determinarea parametrilor capacității de frînare, coeficientul de aderență este considerat constant, cu toate că valoarea sa este sensibil influențată de mărimea vitezei de mers a automobilului.

2. VARIAȚIA COEFICIENTULUI DE ADERENȚĂ

Fenomenul aderării la calea de rulare a pneurilor automobilului în mers este de o accentuată complexitate, datorită numeroșilor factori variabili, care intervin în timpul rulării roților.

Acțiunea reciprocă dintre pneu și cale a format preocuparea multor cercetători, dintre care o mare parte [4]—[8] consideră că forța de frecare care ia naștere în timpul mișcării automobilului este rezultată din însumarea a doi termeni : forța de adeziune, de natură moleculară și forța de histerezis, de natură vîscoelastică.

Coeficientul de adeziune este preponderent pe o suprafață netedă și uscată, iar coeficientul de histerezis este preponderent pe o suprafață rugoasă și umedă.

Cu toate că, în general, influența aderenței dintre pneu și suprafața căii, asupra parametrilor de mișcare ai automobilului nu este indicat a fi reprezentată printr-un singur coeficient, totuși în literatura de specialitate este folosită exclusiv această reprezentare, coeficientul căpătînd denumirea de coeficient de aderență. Din această cauză toate studiile și cercetările cu privire la aderență, comportă, în fond, determinarea valorii coeficientului de aderență în funcție de factorii ce-l influențează.

Factorii principali care provoacă variația coeficientului de aderență pot fi prezentați în patru grupe :

— caracteristicile suprafeței căilor de rulare ;
— caracteristicile pneurilor automobilului ;
— mișcarea relativă dintre pneu și cale ;
— viteza de deplasare a automobilului.

2.1. CARACTERISTICILE SUPRAFEȚEI CĂILOR DE RULARE

Pentru un pneu cu anumite caracteristici (formă, presiune etc.), valoarea coeficientului de aderență și variația lui cu viteza depind în mare măsură de calitățile suprafeței carosabile.

Natura și rugozitatea stratului superficial de acoperire al căii au o influență determinantă asupra coeficientului de aderență [9]. Excesul de ciment în liantul îmbrăcăminților din beton conduce la micșorarea porozității și, ca atare, la coeficienți de aderență mici ; de asemenea și suprafețele din beton asfaltat au o mai mică aderență decît cele din beton vibrat.

Totodată, starea de umiditate şi de curăţenie a suprafeţei căii influenţează puternic asupra valorii coeficientului de aderenţă; starea de umiditate, mai ales pe căile cu suprafeţe netede, micşorează cu 30 ... 50% coeficientul de aderenţă.

În acelaşi timp, suprafeţele rugose, ale căror proeminenţe produc zone de frecare uscată, sînt favorabile aderenţei, în timp ce suprafeţele netede şi lustruite, care menţin o peliculă de apă între suprafeţele de contact cu pneul, au o influenţă nefavorabilă.

Valoarea coeficientului de frecare se reduce considerabil în cazul prezenţei pe suprafaţa drumului a prafului fin şi mijlociu (1...5 mμ) sau chiar a nisipului fin (0.01...0,25 mμ), mai ales cînd este umed, mărind considerabil pericolul de accidente.

Complexitatea fenomenului nu permite indicarea — pentru coeficienţii de aderenţă — a unor valori constante şi precise; ca atare, în lucrările de specialitate [1], [2] sînt date în tabele valori medii ale acestui coeficient, pentru diverse acoperiri şi stări ale căilor de circulaţie rutieră.

S-a constatat, de asemenea, că în cursul exploatării căilor moderne de circulaţie, cu acoperiri din beton şi beton asfaltic, valoarea coeficientului de aderenţă se modifică în timp, în funcţie de uzura stratului superficial.

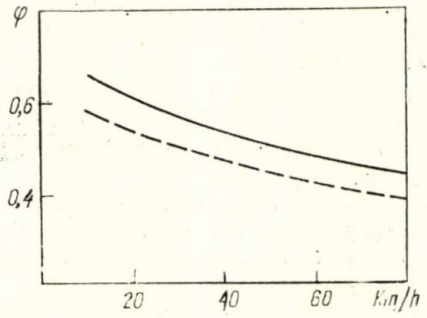


Fig. 1

În figura 1 sînt redate curbele de variaţie ale coeficientului de aderenţă pe o cale asfaltată umedă, în funcţie de uzura şi de viteza de circulaţie [10].

2.2. CARACTERISTICILE PNEURILOR AUTOMOBILELOR

Valoarea absolută a coeficienţilor de aderenţă depinde, între altele, şi de tipul anvelopei (profilul şi rigiditatea pneului), de presiunea interioară din pneu şi de încărcarea verticală a roţilor active (motoare sau frînate).

Folosirea anvelopelor cu faţă profilată conduce la un spor de pînă la 30% a coeficientului de aderenţă, faţă de cel obţinut cu pneuri cu profilele uzate, mai ales pe drumuri umede.

Lamelele pneurilor produc zone de frecare uscată, favorabile aderenței; în același timp, canalele dintre profile ajută la evacuarea stratului de apă (un pneu rulînd la 90 km/h, pe ploaie mijlocie, evacuează 3—4 l de apă pe secundă).

În figura 2 se prezintă variația aderenței pneurilor cu suprafața de rulare profilată și a celor netede, rulînd pe o cale umedă, în funcție

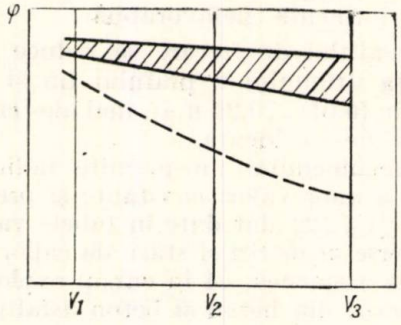


Fig. 2

de viteza automobilului [3]; se constată puternica influență a existenței profilelor antiderapante asupra coeficientului de aderență și a variației acestuia în funcție de viteză.

Elasticitatea pneului face ca o dată cu creșterea alunecării sau a patinării pînă la procente de 20—30%, să crească și coeficientul de aderență, datorită mărimii numărului de elemente de contact cu drumul care alunecă simultan pe acesta.

Coeficientul de aderență este influențat de presiunea interioară a pneului; micșorarea presiunii la un pneu care rulează pe o cale dură, conduce la mărirea suprafeței de contact și la o creștere, relativ redusă, a coeficientului de frecare.

La rularea roților pe căi deformabile, se recomandă folosirea unor presiuni scăzute în interiorul pneurilor, pentru micșorarea presiunii pneului pe cale și creșterea aderenței.

Pe șosele cu suprafețe dure și umede, creșterea presiunii interioare conduce la mărirea aderenței, datorită sporirii presiunii pe cale și, în consecință, a evacuării peliculei de apă dintre banda de rulare și cale.

Coeficientul de aderență variază și datorită modificării încărcării verticale a roților active, influența fiind însă destul de redusă.

2.3. MIȘCAREA RELATIVĂ DINTRE PNEU ȘI CALE

Cînd pneul se află în regim de frînare, datorită elasticității cauciucului, zona de contact cu calea se deformează tangențial, influențînd favorabil asupra aderenței.

Dacă efortul de frînare devine prea mare, are loc alunecarea relativă a pneului în raport cu calea. În astfel de cazuri curent întîlnite în regimurile tranzitorii ale mișcării automobilelor, coeficientul de aderență variază substanțial cu alunecarea.

La valori mici ale alunecării, coeficientul creşte la o valoarea maximă corespunzătoare unei alunecări cuprinse între 20—30%, scăzînd puternic pînă la alunecarea de 100%, respectiv, la blocarea roţilor frînate, cînd ajunge la valoarea coeficientului de aderenţă după alunecare sau coeficientului de frecare la alunecare a pneului (φ_a).

În figura 3 se prezintă variaţia coeficientului de aderenţă în funcţie de alunecare, pentru o cale din beton, în trei situaţii : uscată, umedă şi murdară [11].

2.4. VITEZA DE DEPLASARE A AUTOMOBILULUI

Valorile coeficienţilor de aderenţă, influenţate de factorii anterior prezentaţi, descresc o dată cu creşterea vitezei. Descreşterea este mai accentuată pe drumurile umede; reducerea în acest caz, poate atinge 30...50% între 20...65 km/h şi este mai puţin accentuată la viteze mai mari [9].

De asemenea, se constată [12] o variaţie diferită a valorii maxime φ a coeficientului de aderenţă, faţă de cea a coeficientului de aderenţă după alunecare, φ_a (fig. 4).

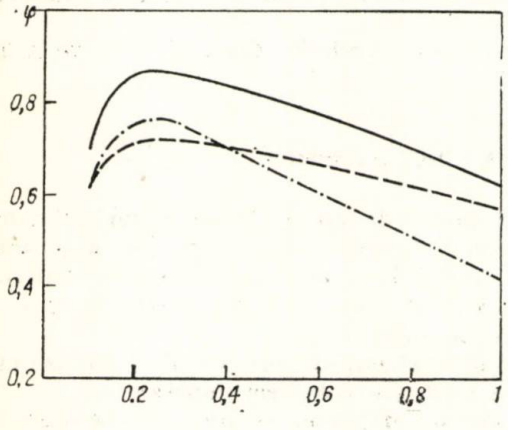


Fig. 3

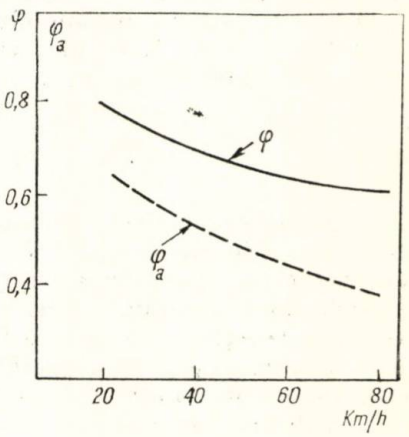


Fig. 4

Aceste diferenţieri sînt semnalate şi în cazul căilor umede faţă de cele uscate [10].

3. MODUL DE PREZENTARE A VARIAŢIEI COEFICIENTULUI DE ADERENŢĂ

Valoarea coeficienţilor de aderenţă fiind determinată de un complex de factori variabili, nu se poate stabili pe căi analitice, ci numai prin încercări în laborator şi pe cale.

Rezultatele cercetărilor experimentale cu privire la determinarea coeficienţilor de aderenţă, în general, sînt redate sub forma tabelară, prezentîndu-se valorile obţinute în timpul încercărilor, însoţite în majori-

tatea cazurilor de grafice. Aceste grafice reprezintă variația coeficientului de aderență pentru o anumită acoperire și stare a căii de rulare, un anumit pneu etc., în funcție de variația vitezei de deplasare a automobilului.

O analiză bibliografică a cercetărilor din acest domeniu a condus la concluzia că totalitatea curbelor de variație a valorilor coeficienților de aderență în funcție de viteza de deplasare a automobilului, reprezintă ramuri de parabole convexe, cu ordonate în originea axelor de coordonate (valoarea coeficientului de aderență neînfluențată de viteză).

Pentru ca valorile obținute la experimentări sau graficele trasate pe baza valorilor obținute să se poată folosi în relațiile analitice, trebuie determinată funcția empirică a fiecărui grafic de variație. Prin încercări s-a constatat că expresia analitică care redă cît mai fidel alura graficelor de variație a coeficienților de aderență în funcție de viteză este o funcție de gradul doi cu trei constante, de forma

$$y = a + bx + cx^2, \tag{11}$$

care, în cazurile studiate, va deveni

$$\varphi(V) = a + bV + cV^2, \tag{12}$$

unde φ este valoarea coeficientului de aderență la o anumită viteză;
V — viteza automobilului;
a, b, c — constante ale căror valori trebuie determinate pentru fiecare caz în parte.

4. DETERMINAREA FUNCȚIEI EMPIRICE

Funcțiile empirice trebuie să concorde cu graficele experimentale de variație ale coeficienților de aderență, ținînd seama că valorile acestora sînt totdeauna pozitive și cuprinse între două extreme: maximă pentru vitezele mici și minimă pentru vitezele maxime întîlnite curent în practica construcției și exploatării automobilelor.

Pentru exprimarea analitică a curbelor experimentale sub forma unei funcții de gradul doi, trebuie evaluate cele trei constante.

Folosindu-se metoda punctelor selecționate, se aleg de pe curbă trei puncte, ale căror abscise să suprindă cele mai caracteristice valori ale ordonatelor respective. Înlocuirea succesivă a celor trei perechi de valori ale vitezei V și a coeficientului de aderență φ în ecuația (12) conduce la formarea unui sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, care, rezolvat clasic, determină constantele căutate.

Pentru comoditatea calculului, vitezele se exprimă în m/s, iar pentru alegerea celor trei abscise se poate folosi o *progresie aritmetică* cu rația $r = \Delta V = V_1$,
astfel

$$V_1 = V_1 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_1,$$
$$V_2 = 2V_1 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_2,$$
$$V_3 = 3V_1 \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_3.$$

Funcția empirică se poate prezenta și sub formă de determinant, scriind condiția de compatibilitate a unui sistem de patru ecuații cu trei necunoscute, incluzîndu-se în sistem și ecuația generală (12).

4.1. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Determinatul care exprimă funcția (12) se prezintă în acest caz astfel:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi & 1 & V & V^2 \\ \varphi_1 & 1 & V_1 & V_1^2 \\ \varphi_2 & 1 & 2V_1 & 4V_1^2 \\ \varphi_3 & 1 & 3V_1 & 9V_1^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

care devine

$$\Delta = 2V_1^2 \cdot \varphi - (\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) \cdot V^2 + V_1 \cdot (5\varphi_1 - 8\varphi_2 + 3\varphi_3) \cdot V - \\ - V_1^2 \cdot (6\varphi_1 - 6\varphi_2 - 2\varphi_3) = 0. \tag{14}$$

Din această ecuație se deduce funcția căutată

$$\varphi = (3\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3) - \frac{5\varphi_1 - 8\varphi_2 + 3\varphi_3}{2V_1} \cdot V + \frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}{2V_1^2} \cdot V^2. \tag{15}$$

Cele trei constante ale funcției (12) vor fi deci

$$a = 3\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3,$$

$$b = -\frac{5\varphi_1 - 8\varphi_2 + 3\varphi_3}{2V_1}, \tag{16}$$

$$c = \frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}{2V_1^2}.$$

4.2. FORMA ANALITICĂ A GRAFICELOR DE VARIAȚIE A COEFICIENTULUI DE ADERENȚĂ

Folosind coeficienții determinați, funcția care exprimă relația între valoarea coeficientului de aderență și viteza de deplasare a automobilului,

$$\varphi(V) = a + bV + cV^2, \tag{17}$$

se va prezenta sub forma:

$$\varphi(V) = (3\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3) - \frac{5\varphi_1 - 8\varphi_2 + 3\varphi_3}{2V_1} \cdot V + \frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}{2V_1^2} \cdot V^2. \tag{18}$$

Folosind calculul erorilor, se verifică concordanța valorilor calculate cu punctele graficului folosit, astfel ca valorile interpolate să fie acceptabile.

De remarcat, că valoarea constantei a reprezintă coeficientul de aderență atunci cînd viteza este nulă, deci ar reprezenta valoarea maximă a coeficientului de aderență.

Se determină apoi valoarea minimă a coeficientului de aderență și viteza la care se obține aceasta cu relația

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}V} = b + 2\ c \cdot V = 0. \tag{19}$$

Deci

$$V\varphi_m = -\frac{b}{2c},$$

$$\varphi_m = a - \frac{b^2}{4c}. \tag{20}$$

Înlocuind în relațiile (19) și (20) expresiile coeficienților a, b și c, se obțin următoarele relații:

$$V\varphi_{\min} = \frac{5\varphi_1 - 8\varphi_2 + 3\varphi_3}{2(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)} \cdot V_1, \tag{21}$$

$$\varphi_m = 3\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3 - \frac{(5\varphi_1 - 8\varphi_2 + 3\varphi_3)^2}{8(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)}. \tag{22}$$

Ținînd sema de vitezele curente de deplasare a automobilelor, viteza pentru valorile minime ale coeficientului de aderență trebuie să fie cuprinsă în plaja de 110...145 km/h (30...40 m/s), pînă la aceste valori parabola avînd tangente negative.

5. VARIAȚIA COEFICIENTULUI DE ADERENȚĂ ȘI ELEMENTELE CINEMATICE ALE MIȘCĂRII RECTILINII A AUTOMOBILULUI FRÎNAT

Față de cele prezentate, rezultă că în urma exprimării subforma analitică a dependenței coeficientului de aderență de viteza de deplasare a automobilului, relațiile folosite pentru determinarea elementelor mișcării automobilului frînat vor putea conține influența acestei variații, apropiind și mai mult rezultatele calculelor de realitatea fenomenelor din această perioadă tranzitorie.

5.1. DETERMINAREA DECELERAȚIEI MAXIME

Ținînd seama de cea mai simplă relație (3) pentru determinarea decelerației

$$d = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \varphi \cdot g,$$

aceasta va deveni o funcţie de viteză, de forma

$$\mathrm{d}(V) = g(a + b \cdot V + c \cdot V^2), \tag{23}$$

astfel că media decelerațiilor maxime din timpul deplasării unui automobil frînat va fi

$$d_{\text{med}} = g \cdot \varphi_{\text{med}}, \tag{24}$$

în care

φ_{med} este valoarea medie a coeficientului de aderenţă.

Valoarea medie a coeficientului de aderenţă depinde în acest caz, de intervalul de viteze în care se urmăreşte mişcarea automobilului frînat, astfel că

$$\varphi_{\text{med}} = \frac{1}{V_i - V_f} \cdot \int_{V_f}^{V_i} \varphi(V) \cdot \mathrm{d}V = \frac{1}{V_i - V_f} \cdot \int_{V_f}^{V_i} (a + b \cdot V + c \cdot V^2)\, \mathrm{d}V, \tag{25}$$

în care

V_i este viteza iniţială (în momentul aplicării frînei),

V_f — viteza finală a automobilului.

Din integrarea relaţiei (25) rezultă că

$$\varphi_{\text{med}} = a + \frac{1}{2} b\,(V_i + V_f) + \frac{1}{3} c \cdot (V_i^2 + V_i \cdot V_f + V_f^2). \tag{26}$$

În cazul frînării automobilului pînă la oprire ($V_f = 0$), valoarea medie a coeficientului de aderenţă se determină cu relaţia

$$\varphi_{\text{med}} = a + \frac{1}{2} b \cdot V_i + \frac{1}{3} c \cdot V_i^2. \tag{27}$$

În consecinţă, media decelerației va fi dată de relaţia

$$d_{\text{med}} = g \cdot \left[a + \frac{1}{2} b \cdot (V_i + V_f) + \frac{1}{3} c \cdot (V_i^2 + V_i \cdot V_f + V_f^2) \right], \tag{28}$$

iar în cazul opririi automobilului ($V_f = 0$)

$$d_{\text{med}} = g \cdot \left(a + \frac{1}{2} b \cdot V_i + \frac{1}{3} c \cdot V_i^2 \right). \tag{29}$$

Dacă se ia în consideraţie şi rezistenţa de rulare, precum şi influenţa pantei, relaţia (2) se reconsideră şi ia forma

$$d_{\text{med}} = \frac{g}{V_i - V_f} \cdot \int_{V_f}^{V_i} [(a + f) + b \cdot V + c \cdot V^2] \cdot \cos \alpha \cdot \mathrm{d}V \pm p \cdot g \tag{30}$$

sau

$$d_{med} = g \cdot \left[(a+f) + \frac{1}{2} b \cdot (V_i + V_f) + \frac{1}{3} c \cdot (V_i^2 + V_i \cdot V_f + V_2^2) \right] \cdot \cos\alpha \pm \text{p.}\, g. \tag{31}$$

În cazul cînd se ţine seama de rezistenţa aerului, pe o cale orizontală relaţia se prezintă astfel

$$d_{med} = \frac{g}{V_i - V_f} \cdot \int_{V_f}^{V_i} \left[(\varphi + f) + \frac{KAV^2}{G_a} \right] \cdot \mathrm{d}V =$$

$$= \frac{g}{V_i - V_f} \cdot \int_{V_f}^{V_i} \left[(a+f) + b \cdot V + c \cdot V^2 + \frac{KAV^2}{G_a} \right] \cdot \mathrm{d}V,$$

$$d_{med} = g \cdot \left[(a+f) + \frac{1}{2} b\,(V_i + V_f) + \frac{1}{3} \left(c + \frac{KA}{G_a} \right) (V_i^2 + V_i \cdot V_f + V_f^2) \right]. \tag{32}$$

În cazul frînării automobilului pînă la oprire ($V_f = 0$), relaţia (32) devine

$$d_{med} = g \cdot \left[a + f + \frac{1}{2} b \cdot V_i + \frac{1}{3} \left(c + \frac{KA}{G_a} \right) \cdot V_i^2 \right]. \tag{33}$$

5.2. DETERMINAREA SPAŢIULUI MINIM DE FRÎNARE

a. În ipoteza care stă la baza celei mai simple relaţii (7), expresia analitică ar deveni

$$S_f = \frac{1}{g} \int_{V_f}^{V_i} \frac{V \cdot \mathrm{d}V}{\varphi(V)} \tag{34}$$

sau

$$S_f = \frac{1}{g} \int_{V_f}^{V_i} \frac{V \cdot \mathrm{d}V}{a + b \cdot V + c \cdot V^2}, \tag{35}$$

în care

$$(a + bV + cV^2) \in (0,1) \text{ şi } (b^2 - 4ac) < 0;$$

deoarece coeficientul de aderenţă este pozitiv şi subunitar.

Integrînd relaţia (35), se va obţine

$$S_f = \frac{1}{2gc} \cdot \ln \frac{a + bV_i + cV_i^2}{a + bV_f + cV_f^2} - \frac{b}{2gc} \cdot \frac{1}{\sqrt{c\left(a - \frac{b^2}{4c}\right)}} \times$$

$$\times \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{c}V_i + \frac{b}{2\sqrt{c}}}{\sqrt{a - \frac{b^2}{4c}}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{c}V_f + \frac{b}{2\sqrt{c}}}{\sqrt{a - \frac{b^2}{4c}}} \right] \tag{36}$$

sau

$$S_f = \frac{1}{2gc} \cdot \ln \frac{a + bV_i + cV_i^2}{a + bV_f + cV_f^2} - \frac{b}{gc\sqrt{4ac - b^2}} \times$$

$$\times \left[\operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} \frac{2cV_i + b}{\sqrt{4ac - b^2}} - \operatorname{arc.tg} \frac{2cV_f + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right]. \tag{37}$$

Ţinînd sema de relaţiile (12), (19) şi (20), ecuaţia pentru determinarea spaţiului se prezintă sub forma

$$S_f = \frac{1}{2gc} \cdot \ln \frac{\varphi_i}{\varphi_f} + \frac{V\varphi_m}{g\sqrt{c \cdot \varphi_m}} \cdot \left[\operatorname{arc.tg.} \frac{\left(\frac{d\varphi}{dV}\right)_i}{2\sqrt{c \cdot \varphi_m}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc.\,tg.} \frac{\left(\frac{d\varphi}{dV}\right)_f}{2\sqrt{c \cdot \varphi_m}} \right], \tag{38}$$

relaţie uşor de folosit sub această formă.

În cazul frînării pînă la oprire, relaţia (37) devine

$$S_f = \frac{1}{2gc} \cdot \ln \frac{a + bV_i + cV_i^2}{a} - \frac{b}{gc\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \left[\operatorname{arc.\,tg} \frac{2cV_i + b}{\sqrt{4ac - b^2}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc.\,tg.} \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right] \tag{39}$$

sau relația (38) devine

$$S_f = \frac{1}{2gc} \cdot \ln \frac{\varphi_i}{a} + \frac{V\varphi_m}{g\sqrt{c \cdot \varphi_m}} \cdot \left[\text{arc. tg.} \frac{\left(\frac{d\varphi}{dV}\right)_i}{2\sqrt{c \cdot \varphi_m}} - \right.$$

$$\left. - \text{arc. tg.} \frac{b}{2\sqrt{c \cdot \varphi_m}} \right]. \tag{40}$$

Ținînd seama că $a = \varphi_M$ (coeficientul maxim de aderență) și că

$$\frac{b}{2\sqrt{c}} = \sqrt{a - \varphi_m} = \sqrt{\varphi_M - \varphi_m},$$

rezultă

$$S_f = \frac{1}{2gc} \cdot \ln \frac{\varphi_i}{\varphi_M} + \frac{V\varphi_m}{g\sqrt{c \cdot \varphi_m}} \cdot \left[\text{arc. tg.} \frac{\left(\frac{d\varphi}{dV}\right)_i}{2\sqrt{c \cdot \varphi_m}} - \right.$$

$$\left. - \text{arc. tg.} \sqrt{\frac{\varphi_M - \varphi_m}{\varphi_m}} \right]. \tag{41}$$

În aceeași ipoteză, relațiile devin mai simple dacă se va folosi valoarea coeficientului mediu de aderență, care apoi se comportă ca o constantă

$$S_f = \frac{1}{g \cdot \varphi_{\text{med}}} \cdot \int_{V_f}^{V_i} V \cdot dV = \frac{V_i^2 - V_f^2}{2g \cdot \varphi_{\text{med}}} \tag{42}$$

sau

$$S_f = \frac{V_i^2 - V_f^2}{2g \cdot \left[a + \frac{1}{2} b (V_i + V_f) + \frac{1}{3} c (V_i^2 + V_i V_f + V_f^2) \right]}. \tag{43}$$

Spațiul minim de frînare pînă la oprirea automobilului se va determina deci cu relația

$$S_f = \frac{V_i^2}{2g \cdot \varphi_{\text{med}}} = \frac{V_i^2}{2g \left(a + \frac{1}{2} b V_i + \frac{1}{3} c V_i^2 \right)}. \tag{44}$$

b. În ipoteza în care se ține seama și de rezistențele la înaintare pe o cale orizontală (R_r și R_a), atunci relația (6) va deveni

$$S_f = \frac{1}{g} \cdot \int_{V_f}^{V_i} \frac{V \cdot dV}{(a+f) + b \cdot V + \left(c + \frac{KA}{G_a}\right) \cdot V^2} \quad (45)$$

iar pe o cale în pantă, ținîndu-se seama și de masele în rotație,

$$S_j = \frac{\delta}{g} \cdot \int_{V_f}^{V_i} \frac{V \cdot dV}{(a+f)\cos\alpha \pm p + b \cdot V \cdot \cos\alpha + \left(c \cdot \cos\alpha + \frac{KA}{G_a}\right) V^2} \cdot \quad (46)$$

Integralele din relațiile (36) și (37) vor deveni astfel:

$$S_f = \frac{1}{2g\left(c + \frac{KA}{G_a}\right)} \ln \frac{a + f + bV_i + \left(c + \frac{KA}{G_a}\right) V_i^2}{a + f + bV_f + \left(c + \frac{KA}{G_a}\right) V_f^2} -$$

$$- \frac{b}{g\left(c + \frac{KA}{G_a}\right) \cdot \sqrt{4(a+f)\left(c + \frac{KA}{G_a}\right) - b^2}} \cdot \left[\text{arc.tg.} \frac{2\left(c + \frac{KA}{G_a}\right) V_i + b}{\sqrt{4(a+f)\left(c + \frac{KA}{G_a}\right) - b^2}} - \right.$$

$$\left. - \text{arc. tg.} \frac{2\left(c + \frac{KA}{G_a}\right) V_f + b}{\sqrt{4(a+f)\left(c + \frac{KA}{G_a}\right) - b^2}} \right] \cdot \quad (47)$$

Și aceste relații se pot simplifica făcînd uz de valoarea medie a coeficientului de aderență, care apoi este considerat constant, astfel că relația (6) devine

$$S_f = \frac{G_a}{2gKA} \cdot \ln \frac{G_a(\varphi_{med} + f) + KAV_i^2}{G_a(\varphi_{med} + f) + KAV_f^2} \quad (48)$$

sau

$$S_f = \frac{G_a}{2gKA} \cdot \ln \frac{G_a \cdot \left[a + f + \frac{1}{2} b(V_i + V_f) + \frac{1}{3} c(V_i^2 + V_i V_f + V_f^2)\right] + KAV_i^2}{G_a \cdot \left[a + f + \frac{1}{2} b(V_i + V_f) + \frac{1}{3} c(V_i^2 + V_i V_f + V_f^2)\right] + KAV_f^2} \cdot \quad (49)$$

Dacă frînarea se face pînă la oprire, relaţia va lua forma

$$S_f = \frac{G_a}{2gKA} \cdot \ln \left[1 + \frac{KAV_i^2}{G_a \left(a + f + \frac{1}{2} bV_i + \frac{1}{3} cV_i^2 \right)} \right]. \tag{50}$$

5.3. DETERMINAREA VITEZEI INIŢIALE A AUTOMOBILULUI

Dacă se cunoaşte viteza finală şi spaţiul de frînare, relaţia clasică şi cea mai simplă din literatură (folosită în majoritatea lucrărilor de expertiză tehnică) pentru determinarea vitezei din momentul aplicării frînei :

$$V_i^2 = 2\varphi gs + V_f^2, \tag{51}$$

în care se consideră o valoare constantă pentru coeficientul de aderenţă, trebuie înlocuită cu relaţia

$$V_i^2 = V_f^2 + 2gS \cdot \left[a + \frac{1}{2} b(V_i + V_f) + \frac{1}{3} c(V_i^2 + V_i V_f + V_f^2) \right]. \tag{52}$$

Ordonînd expresia după puterile necunoscutei V_i, se obţine

$$\left(1 - \frac{2}{3} c \cdot g \cdot S \right) \cdot V_i^2 - \left(b + \frac{2}{3} c \cdot V_f \right) g \cdot S \cdot V_i - \left[\left(1 + \frac{2}{3} c \cdot g \cdot S \right) V_f^2 + \right.$$

$$\left. + b \cdot g \cdot S \cdot V_f + 2a \cdot g \cdot S \right] = 0, \tag{53}$$

o ecuaţie de gradul doi, prin rezolvarea căreia se determină viteza la începutul frînării automobilului.

În cazul frînării pînă la oprire, se poate folosi aceeaşi relaţie, considerînd $V_f = 0$

$$\left(1 - \frac{2}{3} c \cdot g \cdot S \right) \cdot V_i^2 - b \cdot g \cdot S \cdot V_i - 2a \cdot g \cdot S = 0. \tag{54}$$

În ipoteza considerării şi a rezistenţelor la înaintare, pe o cale orizontală, în relaţia (51) va fi luată în calcul valoarea medie a decelerației, exprimată prin relaţia (32), astfel

$$V_i^2 = 2gS \cdot \left[(a + f) + \frac{1}{2} b (V_i + V_f) + \frac{1}{3} \left(c + \frac{KA}{G_a} \right) (V_i^2 + V_i V_f + V_f^2) \right] + V_f^2. \tag{55}$$

Ordonînd expresia după puterile necunoscutei V_i, se obține

$$\left[1-\frac{2}{3}\left(c+\frac{KA}{G_a}\right)gS\right]\cdot V_i^2-\left[b+\frac{2}{3}\left(c+\frac{KA}{G_a}\right)V_f\right]g\cdot S\cdot V_i-$$

$$-\left\{\left[1+\frac{2}{3}\left(c+\frac{KA}{G_a}\right)g\cdot S\right]\cdot V_f^2+bgSV_f+2\,(a+f)\,gS\right\}=0, \quad (56)$$

o ecuație de gradul doi, prin rezolvarea căreia se determină viteza la începutul frînării automobilului.

În cazul frînării pînă la oprire ($V_f = 0$) se va obține

$$\left[1-\frac{2}{3}\left(c+\frac{KA}{G_a}\right)g\cdot S\right]\cdot V_i^2-b\cdot g\cdot S\cdot V_i-2(a+f)\,g\cdot S=0. \quad (57)$$

5.4. DETERMINAREA TIMPULUI DE FRÎNARE

În ipoteza că sînt cunoscute valorile vitezelor extreme ale fenomenului de frînare cercetat, timpul de frînare se determină cu relația

$$t=\frac{V_i-V_f}{g\cdot\varphi_{med}}=\frac{V_i-V_f}{g\cdot\left[a+\frac{1}{2}b\,(V_i+V_f)+\frac{1}{3}c\,(V_i^2+V_iV_f+V_f^2)\right]}, \quad (58)$$

iar timpul de frînare pînă la oprirea automobilului,

$$t=\frac{V_i}{g\left(a+\frac{1}{2}bV_i+\frac{1}{3}cV_i^2\right)}. \quad (59)$$

În ipoteza considerării și a rezistenței de rulare și rezistenței aerului, relațiile devin :

$$t=\frac{V_i-V_f}{g\cdot\left[(a+f)+\frac{1}{2}b\,(V_i+V_f)+\frac{1}{3}\left(c+\frac{KA}{G_a}\right)(V_i^2+V_iV_f+V_f^2)\right]}, \quad (60)$$

iar timpul de frînare pînă la oprirea automobilului

$$t=\frac{V_i}{g\cdot\left[(a+f)+\frac{1}{2}bV_i+\frac{1}{3}\left(c+\frac{KA}{G_a}\right)V_i^2\right]}. \quad (61)$$

Pentru a afla timpul de frînare pînă la oprirea automobilului, cunoscînd spaţiul de frînare, este necesar să cunoaştem şi viteza de la începutul frînării

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g \cdot \varphi_{med}}} = \sqrt{\frac{2S}{g\left(a + \frac{1}{2} b \cdot V_i + \frac{1}{3} c \cdot V_i^2\right)}}. \tag{62}$$

Dacă se consideră şi rezistenţele la înaintare, relaţia devine

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g \cdot \left[(a+f) + \frac{1}{2} bV_i + \frac{1}{3}\left(c + \frac{KA}{G_a}\right) V_i^2\right]}}. \tag{63}$$

5.5. CONCLUZII ASUPRA RELAŢIILOR

Elementele cinematice ale mişcării rectilinii a automobilului frînat se pot determina, folosind relaţiile complete sau pe cele simplificate întîlnite în literatura de specialitate, înlocuind valoarea constantă a coeficientului de aderenţă din aceste relaţii cu valoarea medie a coeficientului de aderenţă sau cu funcţia care exprimă variaţia coeficientului de aderenţă cu viteza.

Astfel aceste elemente se vor determina, folosindu-se relaţii care conţin şi influenţa variaţiei în funcţie de viteză a celui mai important factor al frînării, aderenţa.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Untaru, V. Cîmpeanu, N. Seitz, I. Soare., *Automobile*, Edit. didactică şi pedagogică, 1968.
2. C. Ghiulai, *Mecanica automobilului*, Edit. tehnică, 1965.
3. M. Boisseaux, *L'automobile*, Edit. Dunod-Paris, 1966.
4. D. Tabor, *Frecarea cauciucului pe suprafeţe rugoase lubrifiate*, Revue generale du caoutchouc, *10* (1959).
5. P. Thirion, R. Chosset, *Le frottement du caouchouc*, Buletin de liaison des laboratoires routieres, novembre (1966).
6. H. Kummer, W. Mayer, *New theory permits better frictional coupling between tire and road*, FISITA, 1966.
7. A. Streţiuk, *Steplenie kolesa s dorogoi i bezopasnosti dvijenia*, Moskva, 1959.
8. G. Jeuffroy, *Actions reciproques des véhicules et des chaussées*, Revue general des routes, *358* (1961).
9. R. Coquand, *Routes*, Livre II. Paris Edit. Eyrolles, 1965.
10. K. Schultze, L. Beckmann, *Die Griffigkeit nasser Strassendecken bei verschiedenen Geschwindigkeiten*, A.T.Z., *7* (1963).
11. Bussien, *Automobiltechnisches Handbuch*, Berlin, 1965.
12. G. Kuelberg, *Method and equipement for continous measuring of the coefficent of friction at incipient Skid*, Highway Research Board Bull. *348*— (1962).

DE LA GRINZILE BARANOV PRIN GRAFIZARE LA LANȚURILE ȘI MECANISMELE PLANE ARTICULATE

de N. I. MANOLESCU
Institutul politehnic București

Se prezintă metoda de transformare a grinzilor Baranov cu ajutorul grafului — — „grafizare" (*G*) — în lanțuri cinematice plane cu articulații multiple și elemente simple (*LCpams*).
De aici, în continuare, prin operația de „amplificare" a acestora „cu diade" (*AD*) se obțin *LCpams* cu un număr superior de elemente și cu același grad de libertate (L_3).
Prin operația de „simplificare a articulațiilor" (*Sa*) se obțin apoi lanțurile plane cu articulații simple (*LCpa*), mecanismele (*Mpa*) și mecanismele-motor plane articulate (*Mmpa*) existente în tehnică.

1. INTRODUCERE

În cele ce urmează se va scoate în evidență că noțiunea de „lanț cinematic" poate rezulta și din „grinda Baranov" prin transformarea acesteia, folosind metoda denumită în prezenta lucrare „grafizare".

Pornind de la noțiunea de „grindă Baranov" [1], [2] pot rezulta astfel toate lanțurile cinematice plane articulate (*LCpa*) utilizate în tehnică și, în consecință, și mecanismele (*Mpa*) și mecanismele motor (*Mmpa*) ce rezultă din ele prin fixarea unui element și apoi precizarea elementului sau elementelor conducătoare.

Datorită introducerii acestei noțiuni este posibilă realizarea unei sinteze unitare a lanțurilor și mecanismelor plane articulate.

În memoria lui Baranov — unul din întemeietorii teoriei moderne a mecanismelor, alături de V.V. Dobrovolski și I.I. Artobolevski — se prezintă, în cele ce urmează, legătura dintre „grinda Baranov" și „lanțul plan cu articulații multiple și elemente simple" (*LCpams*) și de aici, fie

prin metoda de simplificare a articulațiilor (*Sa*), fie prin metoda amplificării cu diade (*AD*) a *LCpams*-urilor la toate lanțurile plane cu articulații simple (*LCpa*) existente în tehnică.

2. DEFINIȚII

Notații

Grinda („ferma") Baranov este construcția formată din bare articulate a cărei formulă structurală este

$$L_{3B} = 3e - 2c_5 = 3,$$

unde

$L_{3B} = 3$ este numărul gradelor de libertate ale grinzii;

e — numărul barelor grinzii;

c_5 — numărul articulațiilor simple.

Notația propusă pentru aceste „ferme" este următoarea:

— la numărător numărul e al barelor;

— la numitor inițiala B (Baranov) urmată de numărul de ordine. Astfel:

$5/B_1$ — este grinda Baranov cu $e = 5$ și, evident, $c_5 = 6$ conform relației (1);

$7/B_6$ — este grinda Baranov cu $e = 7$; $c_5 = 9$.

etc.

În lucrarea [3] s-a arătat modul cum se pot alcătui toate grinzile Baranov, folosind noțiunea de lanț cinematic deschis și închis (la cele mai simple astfel de lanțuri), cum și noțiunea de grupă ASSUR și neASSUR.

Grupele neASSUR ($M_0 = +1$) [4] — [6] au permis alcătuirea lanțurilor cinematice cu $e = 6, 8, 10$ elemente în număr de 2, 16, respectiv, 230, lucru care nu a putut fi realizat (în ceea ce privește lanțurile cu $e = 8$ și 10 elemente) decît în ultimii ani [7] — [15].

Se dă mai jos folosirea acestor metode pentru alcătuirea lanțurilor cinematice plane articulate (*LCpa*).

3. ALCĂTUIREA LANȚURILOR CINEMATICE CU ARTICULAȚII MULTIPLE ȘI ELEMENTE SIMPLE (LCpams) CU AJUTORUL FERMELOR BARANOV 3/B ȘI 5/B TRANSFORMATE PRIN OPERAȚIA DE „GRAFIZARE"

3.1. Prima grindă Baranov transformată prin operația de „grafizare" ($3/B_1$) este tot o grindă Baranov, după cum se vede în figura 1 *b*. Grinda $3/B_1$ s-a obținut [3] după cum se vede în figura 1*a* din grinda $1/B_1$ plus diada (2,3).

3.2. Din cele două grinzi $5/B$, alcătuite după cum se vede în figura 2, se alege $5/D_2$, care nu conține în structura ei diade, iar clasa contururilor este dată de relația

$$\oint_{ZB} = 4.$$

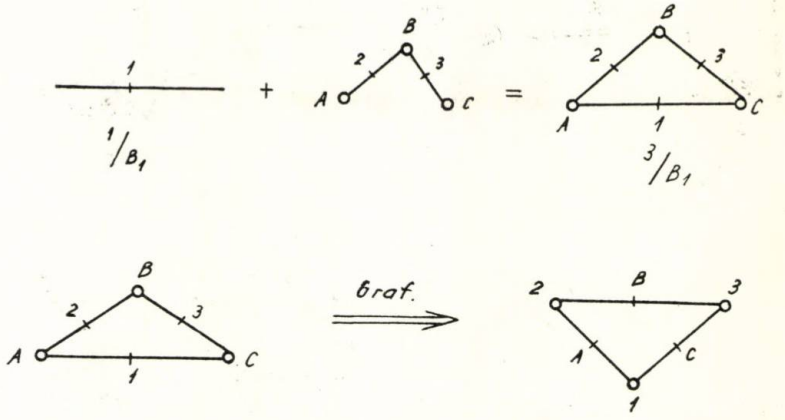


Fig. 1. — Obținerea grinzii Baranov $3/B_1$ a) și transformarea ei prin graf („grafizare") b).

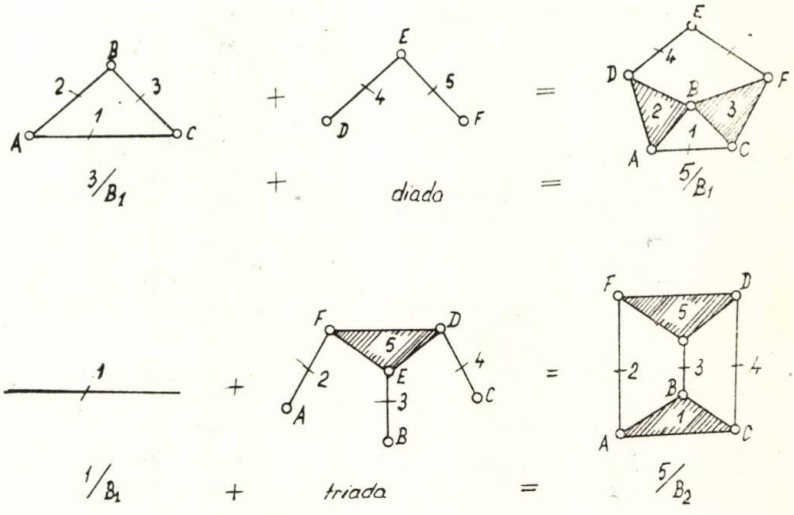


Fig. 2. — Obținerea grinzilor Baranov $5/B_1$ și $5/B_2$.

Din această fermă transformată prin operația de „grafizare" rezultă lanțul cinematic plan cu articulații multiple și elemente simple (*LCpams*) redat în figura 3. Acest lanț s-a notat cu $6K/2$ (4) (după notația adoptată în lucrările anterioare. [3] — [6].

În continuare, din acest lanț, prin transformare în lanțuri cu articulații simple (*LCpa*), rezultă imediat cele două lanțuri cunoscute, și anume : 6/1(4) (lanțul Stephenson) și 6/2(4) (Watt) redate în figura 2 (rîndul 3), precum și lanțul intermediar cu o articulație multiplă $6K/1$ (4).

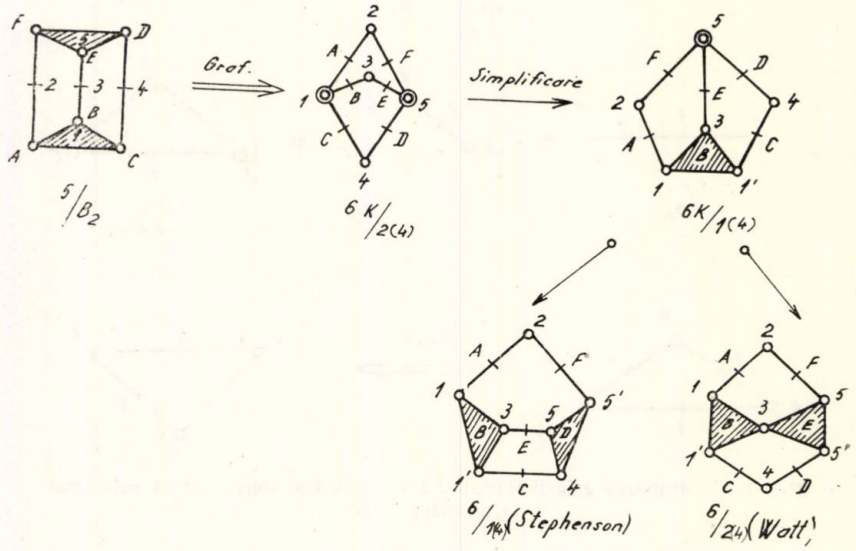


Fig. 3. — Obținerea lanțurilor cu $e = 6$ elemente prin transformarea prin graf (grafizare) a grinzii $5/B_2$ și operația de simplificare a articulațiilor.

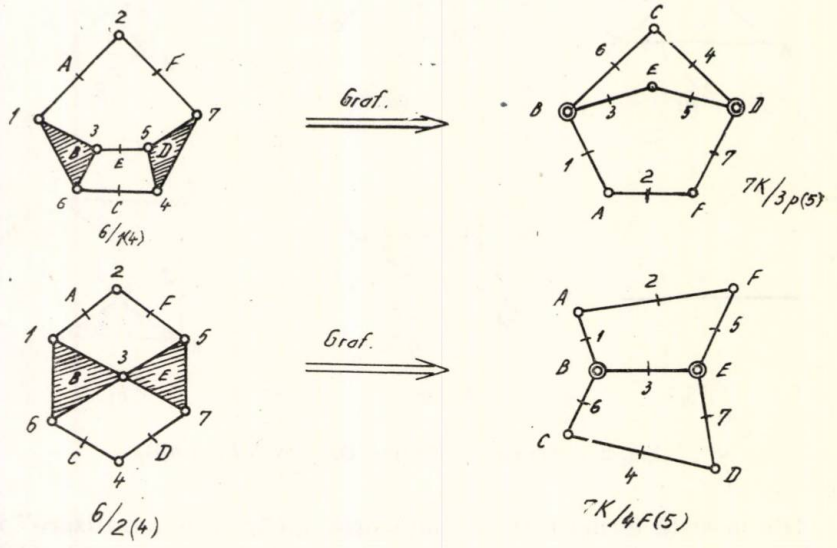


Fig. 4. — Obținerea lanțurilor cu $e = 7$ elemente simple și articulații multiple (*LCpams*) prin transformare prin graf (grafizare) a lanțurilor Stephenson (6/1(4)) și Watt (6/2(4)).

3.3. Transformarea prin„grafizare" a celor două lanțuri 6/1 (4) și 6/2 (4) determină *cele două lanțuri plane cu articulații multiple și elemente simple* (*LCpams*) propuse de K. Hain [16] (fig. 4),
și anume :

— lanțul $7K/3p$ (5) (rezultat din 6/1(4)) cu grad de libertate $L_3^p = 5$ „parțial" și

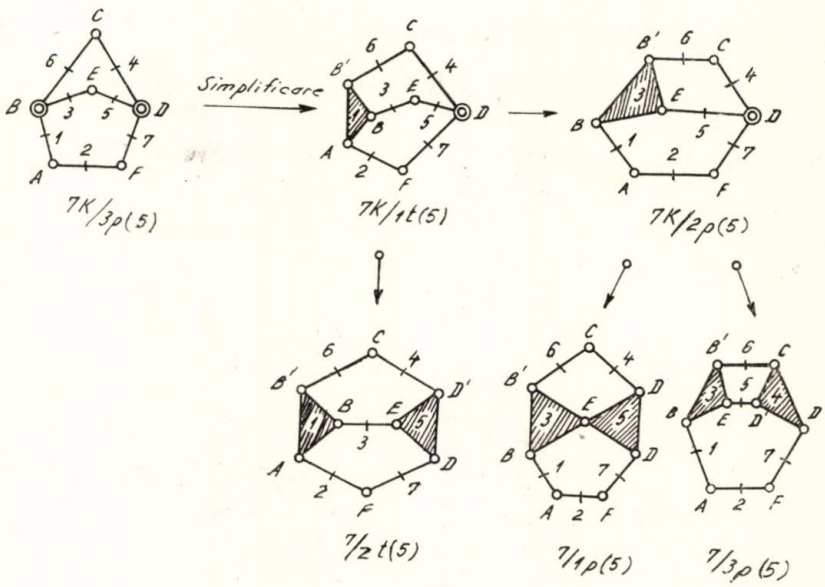


Fig. 5. — Obținerea prin operația de simplificare a articulațiilor a lanțurilor cu $e = 7$ și o articulație dublă ($7K/1(5)$; $7K/2p(5)$ (fig. 5*a*) și din acestea a lanțurilor cu articulații simple ($7/1p(5)$; $7/2t(5)$; $7/3p(5)$) (fig. 5*b*) din lanțul $7K/3p(5)$.

— lanțul $7K/4F(5)$(rezultat din 6/2) cu grad de libertate $L_3^{fr} = 5$ „fracționat".

Pentru o ușoară identificare se propune ca la numitorul simbolului lanțului să se treacă în paranteză gradul de libertate al lanțului plan articulat.

3.4. Prin transformarea în lanțuri cu articulații simple (*LCpa*) a celor două lanțuri de mai sus, folosind operația de simplificare a articulațiilor (Sa), rezultă :

— din lanțul $7K/3p$ (5) (fig. 5) :

— lanțurile : $7K/1t$ (5) cu o articulație dublă și $L_3 = 5$ „total" și $7K/2p(5)$ cu o articulație dublă și $L_3^p = 5$ „parțial" ;

— lanțurile cu articulații simple (*LCpa*) :

$7/1p(5)$ cu $L_3^p = 5$ „parțial" ;

$7/2t(5)$ cu $L_3 = 5$ „total" ;

$7/3p(5)$ cu $L_3^p = 5$ „parțial" ;

— din lanțul $7K/4F(5)$ (fig. 6) :

— lanțurile : $7K/5F(5)$ cu o articulație dublă și $L_3^{fr} = 5$ „fracționat" și același lanț $7K/2p(5)$ rezultat din fig. 5 ;

— lanțurile cu articulații simple ($LCpa$) :

$$7/4F(5) \text{ cu } L_3^{fr} = 5 \text{ „fracționat"}$$

și celelalte două lanțuri obținute din lanțul $7K/3p(5)$.

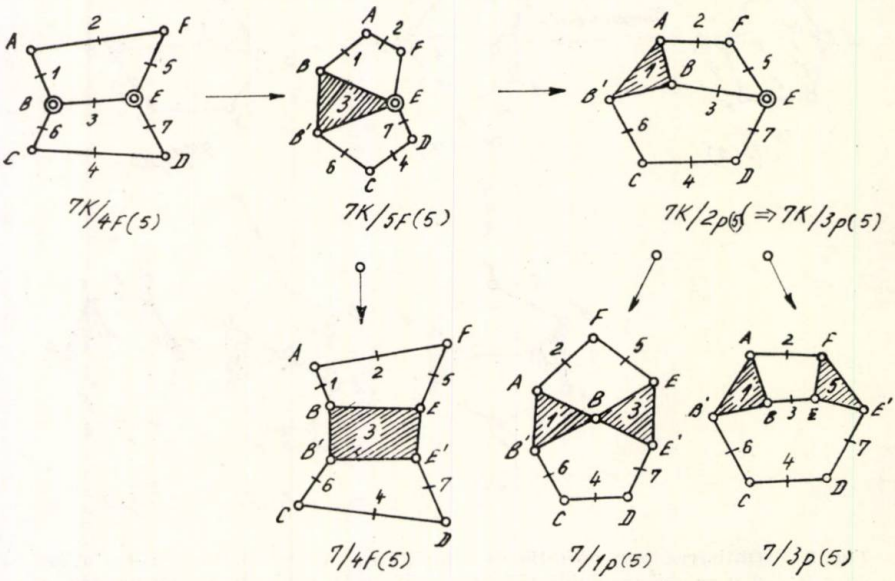


Fig. 6. — Obținerea prin operația de simplificare a articulațiilor a lanțurilor cu $e = 7$ și o articulație dublă $7K/5F(5)$ și $7K/2p(5)$ (identic cu cel din fig. 5*a*) și din acestea a lanțurilor cu articulații simple ($7/4F(5)$ și cele două identice din fig. 5*b* ($7/1p(5)$, $7/3p(5)$).

Prin operația de „grafizare" a lanțurilor Watt și Stephenson și de simplificare a articulațiilor (Sa) s-au obținut deci toate lanțurile cinematice cu $e = 7$ elemente cu articulații simple și multiple, existente în tehnică pe care K. Hain le-a obținut în [16], și anume :

4 lanțuri cinematice cu articulații simple ($LCpa$) și $e = 7$; $L_3 = 5$:

$$(7/1p(5) ; \ 7/2(5) ; \ 7/3p(5) ; \ 7/4F(5) ;$$

3 lanțuri cinematice cu o articulație dublă ($LCpam$) și $e = 7$, $L_3 = 5$:

$$(7K/1(5) ; \ 7K/2p(5) ; \ 7K/5F(5) ;$$

2 lanțuri cinematice cu articulații multiple și elemente simple ($LCpams$) cu : $e = 7$, $L_3 = 5$

$$(7K/3p(5) ; \ 7K/4F(5)).$$

4. ALCĂTUIREA LANȚURILOR CINEMATICE CU ARTICULAȚII MULTIPLE ȘI ELEMENTE SIMPLE (LCpams) CU AJUTORUL FERMELOR BARANOV 7/B ȘI ÎN CONTINUARE A LCpa CU e=9 ȘI L_3=5 „PARȚIAL" ȘI „FRACȚIONAT"

4.1. Spre deosebire de Baranov, s-au alcătuit toate grinzile posibile [3] (fig. 7) din care însă în prezenta lucrare se reţin numai acelea care au

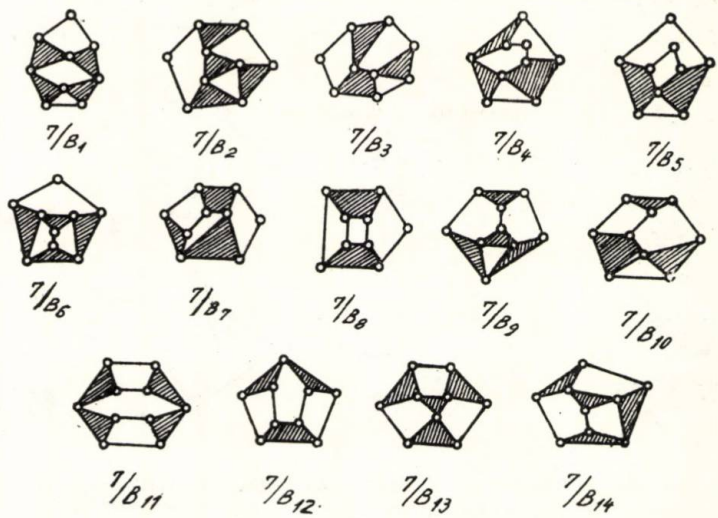


Fig. 7. — Fermele Baranov 7/B1 ... 7/B14 alcătuite conform metodei din lucrarea [3].

clasa $\oint_{zB}$ a conturului închis dată de inegalitatea : $\oint_{zB} \geqslant 4$ fără diade (7/*B*12, 7/*B*13, 7/*B*14), precum şi pe acelea care satisfac aceeaşi inegalitate : $\oint_{zB} \geqslant 4$, însă au în structura lor şi diade (7/*B*6, 7/*B*7, 7/*B*8).

În figurile 8 şi 9 se prezintă, folosind metoda transformării prin graf „grafizare" a celor şase grinzi Baranov menţionate mai sus — alcătuirea celor şase lanţuri cinematice plane cu articulaţii multiple şi elemente simple (*LCpams*) $e = 9$ şi $L_3 = 5$ [4].

Astfel, după cum se vede în figura 8 :
— din 7/*B*6 rezultă : $9K/94p(5)$ ($L_3^p = 5$ „parţial") ;
— din 7/*B*7 rezultă : $9K/109p(5)$ ($L_3^{fr} = 5$ „fracţionat") ;
— din $7/B_8$ rezultă : $9K/108p(5)$ ($L_3^p = 5$ „parţial").

Mai departe, după cum se vede în figura 9 :
— din $7/B_{13}$ rezultă $9K/92p(5)$ ($L_3^p = 5$ „parţial") ;
— din $7/B_{14}$ rezultă $9K/93p(5)$ ($L_3^p = 5$ „parţial") ;
— din $7/B_{12}$ rezultă $9K/110p(5)$ ($L_3^p = 5$ „parţial").

4.2. Din aceste şase lanţuri, prin operaţia de transformare în lanţuri cu articulaţii simple (*Sa*) rezultă, în final, cele 40 de lanţuri cu articulaţii simple (*LCpa*) cu $e = 9$; $c_5 = 11$ şi $L_3 = 5$ „total" şi „fracţionat" redate în lucrările [17], [18].

În figurile 10 — 15 sînt redate operaţiile de obţinere directă a celor 40 *LCpa*.

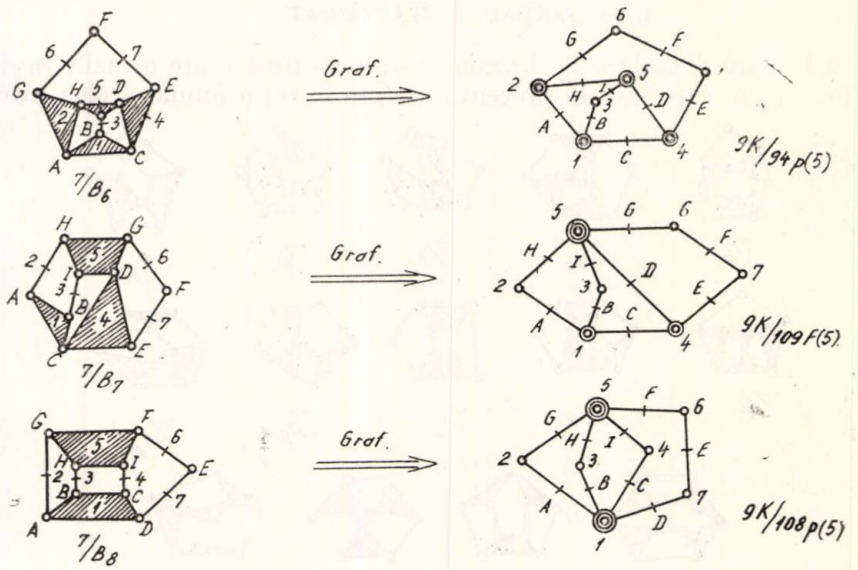


Fig. 8. — Din cele trei ferme Baranov cu o diadă : 7/B6, 7/B7 și B7/8 prin transformare prin graf (grafizare) se obțin 3/LCpams cu $e = 9$ și $L_3 = 5(9K/94p(5)$; $9K/109F(5)$; $9k/108P(5))$.

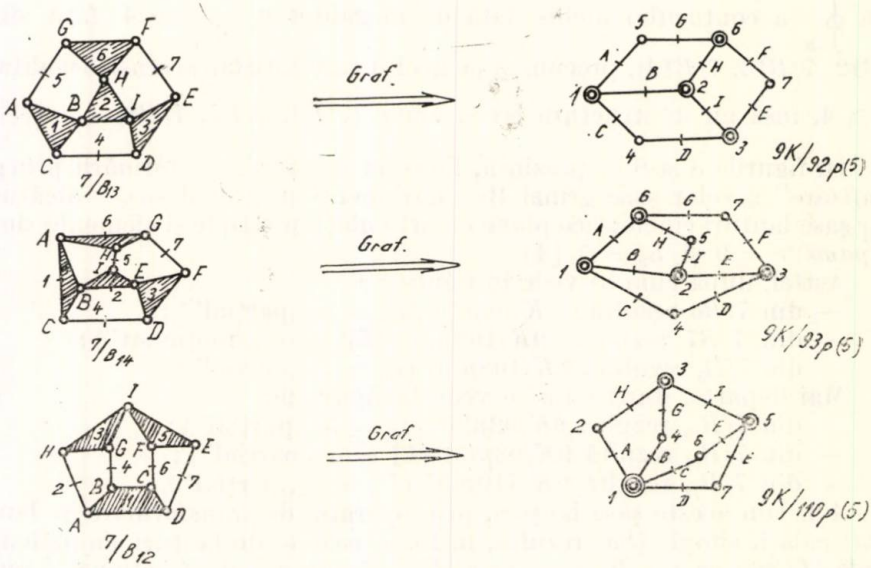


Fig. 9. — Din fermele Baranov $7/B13$, $7/B14$ și $7/B12$ prin operația de „grafizare" se obțin $3LCpams$ cu $e = 9$ și $L_3 = 5$: $9K/92p(5)$; $9K/93p(5)$, $9K/110p(5)$.

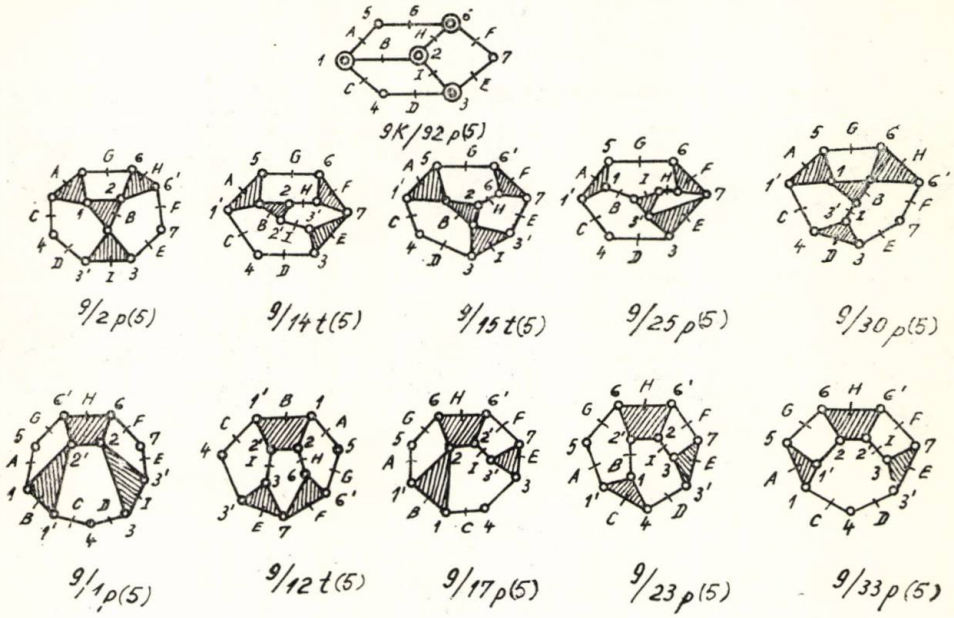


Fig. 10. — Din *LCpams* $9K/92p(5)$ prin operația de simplificare a articulațiilor (Sa), se obțin 10 *LCpa* cu $e = 9$ și $L_3 = 5$ „total" și „parțial".

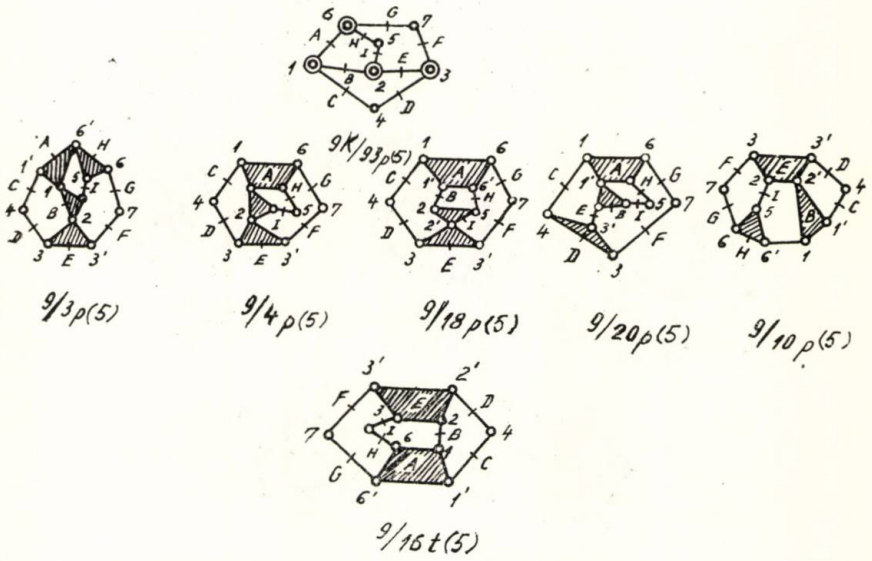


Fig. 11. — Din *LCpams* $9K/93p(5)$ prin operația de simplificare a articulațiilor (Sa), se obțin 6*LCpa* cu $e = 9$ și $L_3^P = 5$ „parțial", și „total" ca variante independente.

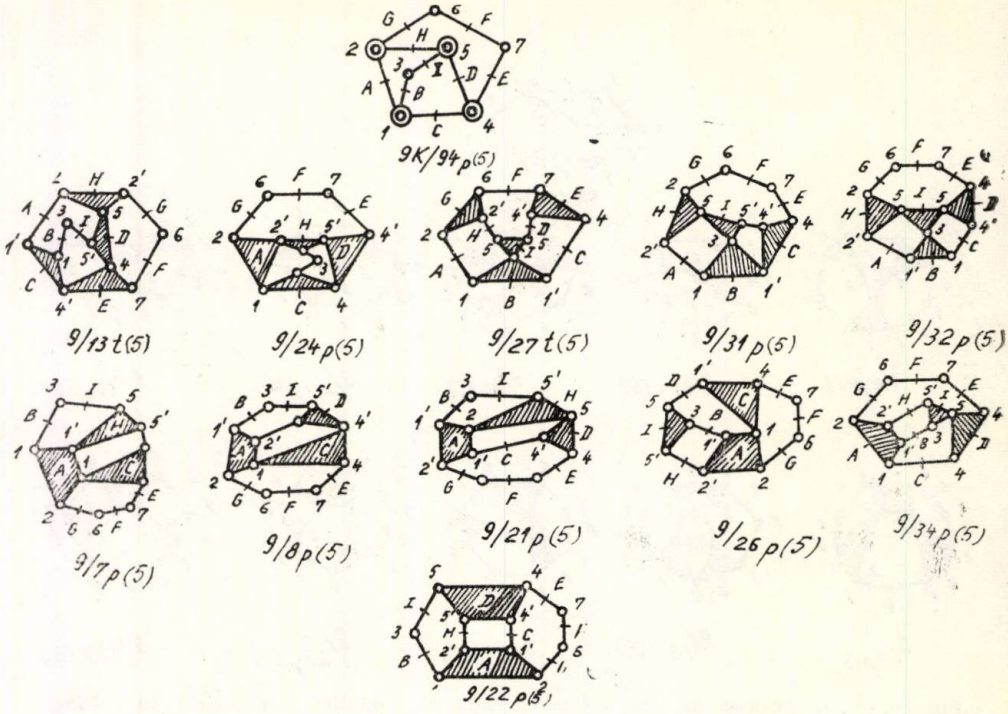


Fig. 12. — Din *LCpams* $9K/94p(5)$ prin operația de simplificare a articulațiilor (Sa) se obțin 11 *LCpa* cu $e = 9$ și $L_3 = 5$ „total" și „parțial", ca variante independente.

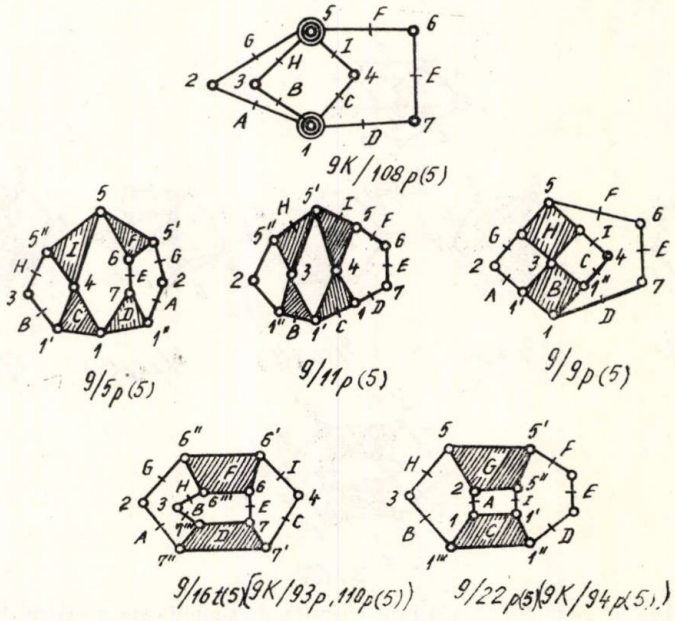


Fig. 13. — Din *LCpams* $9K/108p(5)$ prin operația de simplificare a articulațiilor (Sa) se obțin $3LCpa$ cu $e = 9$ și $L_3^p = 5$ „parțial", ca variante independente.

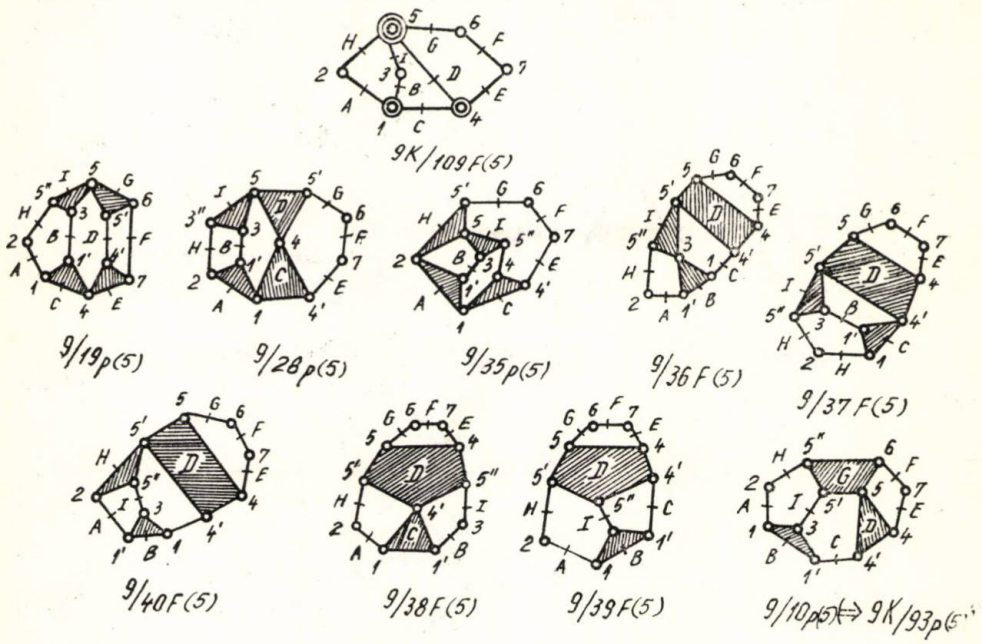


Fig. 14. — Din *LCpams* 9K/109*F*(5) prin operația de simplificare a articulațiilor (*Sa*) se obțin 8*LCp* cu $e = 9$ și $L_3 = 5$ „parțial" și „fracționat", ca variante independente.

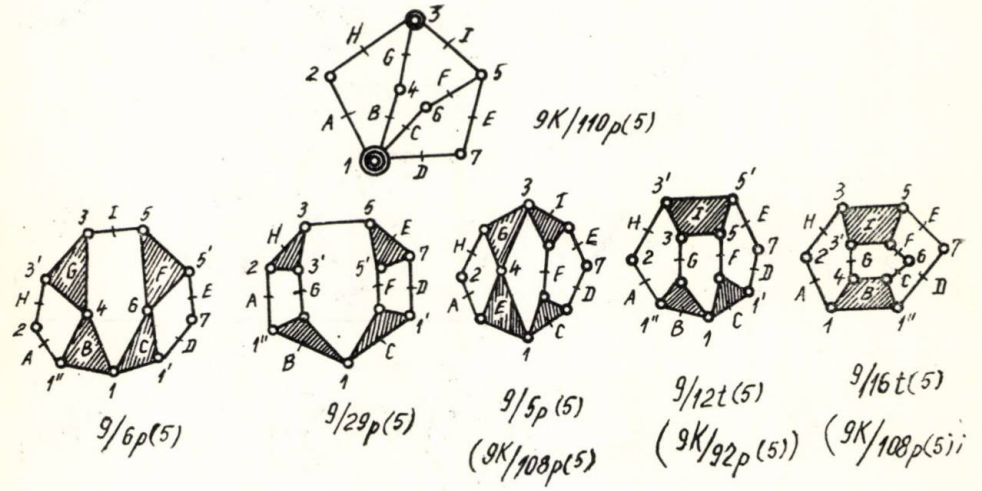


Fig. 15. — Din *LCpams* 9*K*/110*p*(5) prin operația de simplificare a articulațiilor (*Sa*) se obțin 2*LCpa* cu $e = 9$ și $L_3^p = 5$ „parțial", ca variante independente.

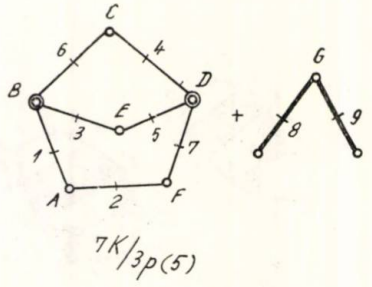
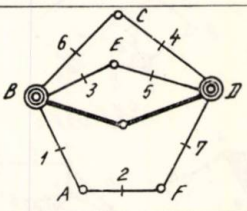
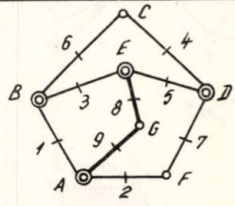
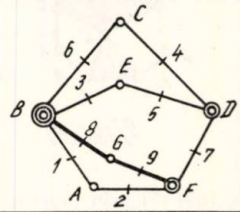
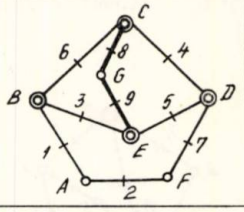
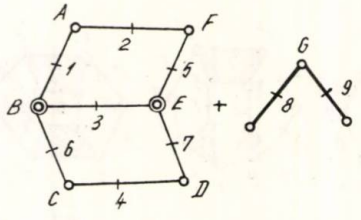
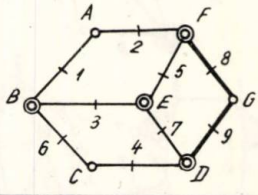
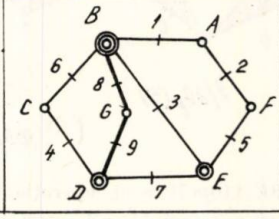
LC pams (cu elemente simple) cu $e=7$; $c_5=8$	Diada	LC pams (cu $j=2$); $e=9$ și $c_5=11$	Modul de legare	Simbolul LC pams
 $7K/3p(5)$			cu 8 la B și 9 la D	$9K/108p(5)$
			cu 8 la E și 9 la A	$9K/93p(5)$
			cu 8 la B și 9 la F	$9K/110p(5)$
			cu 8 la C și 9 la E	$9K/94p(5)$
 $7K/4F(5)$			cu 8 la F și 9 la D	$9K/92p(5)$
			cu 8 la B și 9 la D	$9K/109F(5)$

Fig. 16. — Din cele două lanțuri $7K/3p(5)$ și $7K/4F(5)$ prin amplificarea cu o diadă (AD) rezultă cele șase *LCpams* cu $e = 9$ și $c_5 = 11$ și $L_3 = 5$ „parțial" și „fracționat".

4.3. Cele șase *LCpams* cu $e = 7$; $c_5 = 8$ și $L_3 = 5$ se pot obține și prin operația folosită în lucrările [4], [5] și [17] după cum se vede în figura 16.

Astfel, prin amplificarea lanțurilor $7K/3p$ (5) și $7K/4F(5)$ cu o diadă (AD) în diferite variante au rezultat :

— din lanțul $7K/3p(5)$ amplificat cu diadă :

4 *LCpams* : $9K/93p(5)$; $9K/94p(5)$; $9K/108p(5)$ și $9K/110p(5)$;

— din lanțul $7K/4F(5)$ amplificat cu diadă :

2 *LCpams* : $9K/92p(5)$ și $9K/109F(5)$.

5. ALCĂTUIREA LCpams CU e=8, c_5=10 ȘI L_3=4 PRIN AMPLIFICAREA LANȚULUI 6K/2(4) CU O DIADĂ

5.1. În figura 17 este prezentat modul de alcătuire a acestor lanțuri, folosind metoda propusă în lucrarea [17].

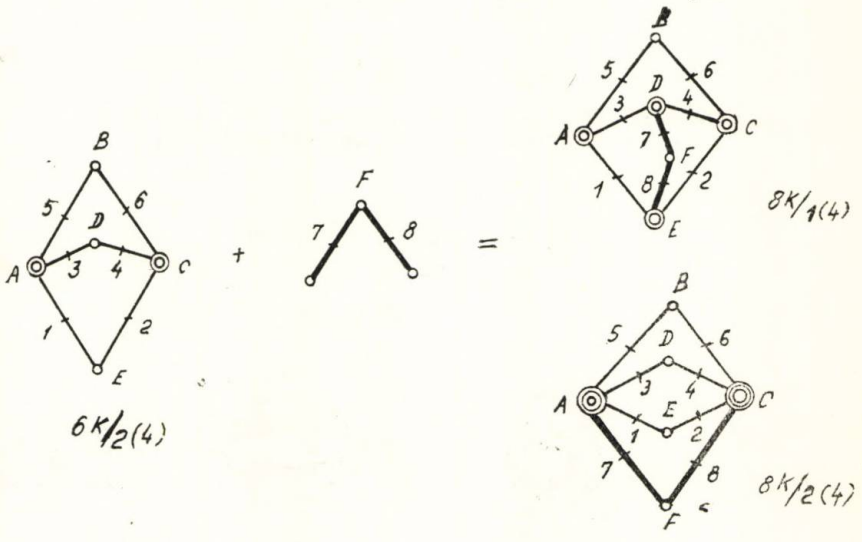


Fig. 17. — Din *LCpams* $6K/2(4)$ amplificat cu o diadă rezultă cele două *LCpams* $8K/1(4)$ și $8K/2(4)$ cu $L_3 = 4$.

Se vede că din lanțul $6K/2(4)$ se obțin cele două variante ale *LCpams* cu $e = 8$; $c_5 = 10$ și $L_3 = 4$ notate cu $8K/1(4)$ și $8K/2(4)$.

Din cele două lanțuri, prin operația de simplificare a articulațiilor (Sa), se obțin cele 16 *LCpa* cu $e = 8$; $c_5 = 10$ și $L_3 = 4$ după cum urmează : În figura 18 :

Din $8K/1$ (4) rezultă următoarele *LCpa* :

— 8/2 (4), 8/3 (4), 8/7 (4), 8/12 (4), 8/13 (4), 8/16 (4) cu structura elementelor ($n_2 = 4$, $n_3 = 4$, $n_4 = 0$) (440) ;

— 8/1 (4), 8/4 (4), 8/8 (4), 8/9 (4), 8/14 (4) cu structura (521) ;

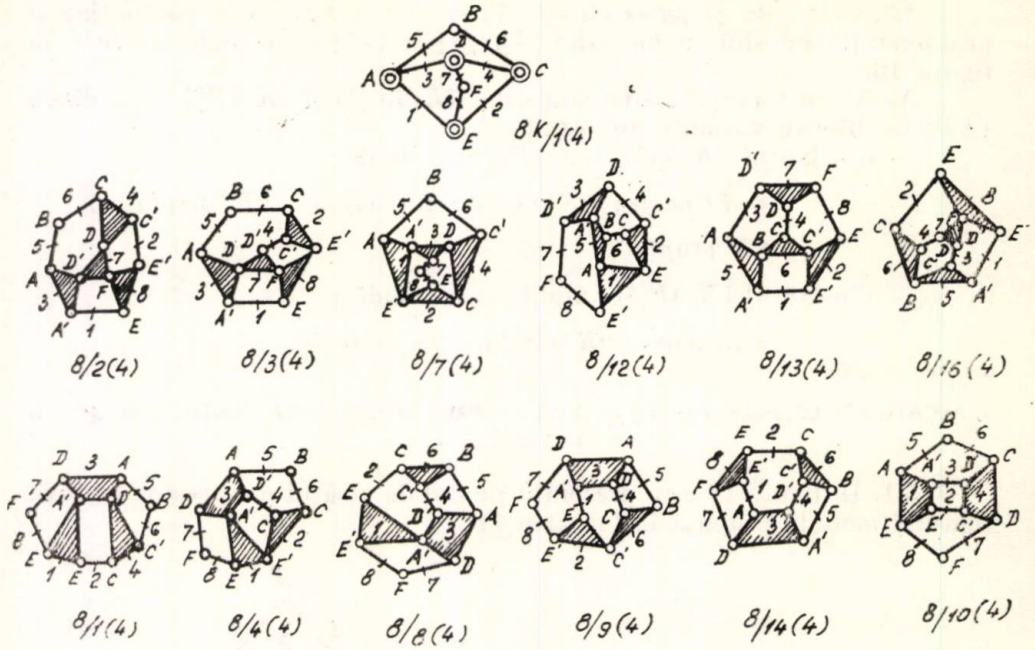


Fig. 18. — Din *LCpams* $8K/1(4)$ prin simplificarea articulațiilor (Sa) se obțin 12 *LCpa* cu $e = 8$, $c_5 = 10$ și $L_3 = 4$, ca variante independente.

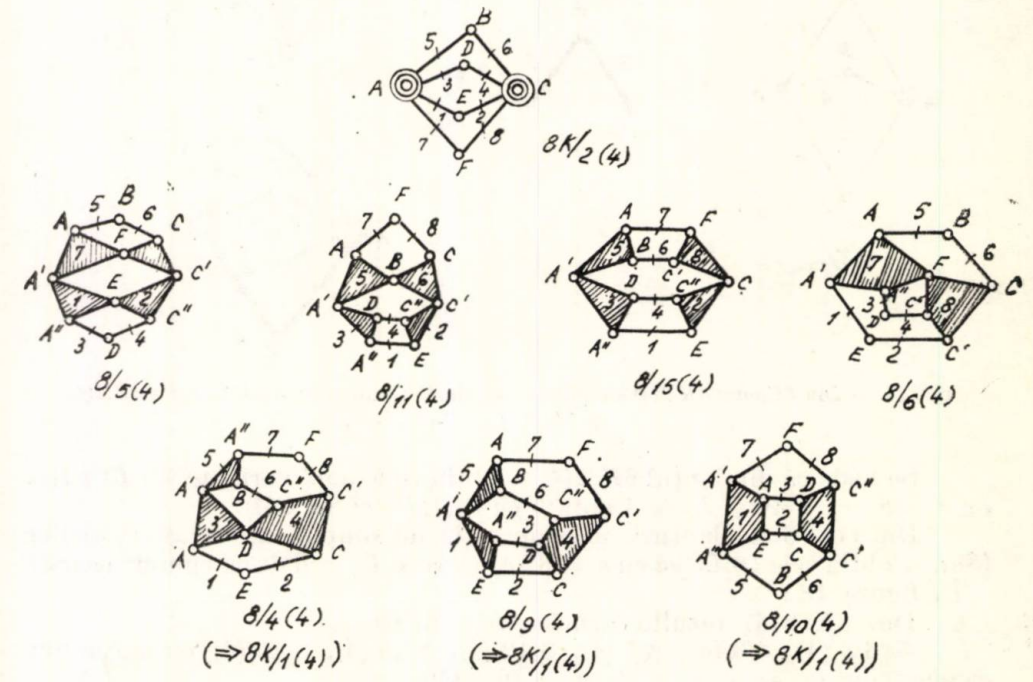


Fig. 19. — Din *LCpams* $8K/2(4)$ prin simplificarea articulațiilor se obțin $4LCpa$ cu $e = 8$, $c_5 = 10$ și $L_3 = 4$, ca variante independente.

— 8/10 (4) cu structura (602).

În total 12 *LCpa*.

În figura 19 :

Din $8K/2$ (4) rezultă următoarele *LCpa* :

— 8/5 (4), 8/11 (4), 8/15 (4) cu structura (440) ;

— 8/6 (4) cu structura (602).

5.2. Metoda obținerii directe din *LCpams* a *LCpa* se observă ușor din figurile 18 și 19, unde s-a folosit același procedeu ca și în figurile 10—15.

Metoda de notare a *LCpa*, obținute prin operația de simplificare a articulațiilor (*Sa*) se va reda la § 6.2.

6. ALCĂTUIREA LCpams CU e = 10 ȘI $L_3 = 4$ PRIN AMPLIFICAREA LCpams 8K/1(4) ȘI 8K/2(4) CU O DIADĂ

6.1. În figura 20 este prezentat modul de alcătuire a celor patru *LCpams* prin amplificarea celor două *LCpams* $8K/1$ (4) și $8K/2$ (4) cu o diadă.

Astfel, din lanțul $8K/1$ (4) prin amplificarea cu o diadă în diferite moduri de legare a articulațiilor exterioare ale acesteia s-au obținut trei variante de *LCpams*, și anume :

10 $K/1$ (4) și 10 $K/2$ (4) (în cîte două variante poziționale ale legării diadei) și 10 $K/3$ (4).

Din lanțul 8 $K/2$ (4) se obțin două variante din care numai 10 $K/4$ (4) este independentă structural. A doua (prin legarea lui 9 la D și a lui 10 la D, sau oricare altă articulație simplă) este identică cu 10 $K/1$ (4).

6.2. Alcătuirea celor 230 *LCpa* cu $e = 10 c_5 = 13$ și $L_3 = 4$ prin operația de simplificare a articulațiilor celor 4 *LCpams* (10K1(4).... 10K4/(4).

Operația de alcătuire a celor 230 *LCpa* cu $e = 10$, $c_5 = 13$ și $L_3 = 4$, obținute în lucrările [7] și [6] prin metode diferite, comportă un volum de lucru mare, nu atît prin obținerea variantelor independente rezultate din fiecare *LCpams* pe baza simetriei și a combinațiilor elementelor de diferite ranguri j, cît prin eliminarea variantelor distincte structural rezultate din cele patru *LCpams*. Această din urmă dificultate se elimină însă, folosind criteriul de evidențiere a variantelor distincte structural prin „numărul diadelor aflate în structura lor" [6].

Cu titlu de informare se prezintă un exemplu de obținere din lanțul 10 $K/1$ (4) a cîtorva lanțuri cinematice plane articulate (*LCpa*) cu $e = 10$ și $L_3 = 4$, folosind operația de simplificare a articulațiilor (tabela 1). Din fiecare combinație structurală s-a prezentat cîte un exemplu de *LCpa* cu 3, 2, 1 sau fără nici o diadă.

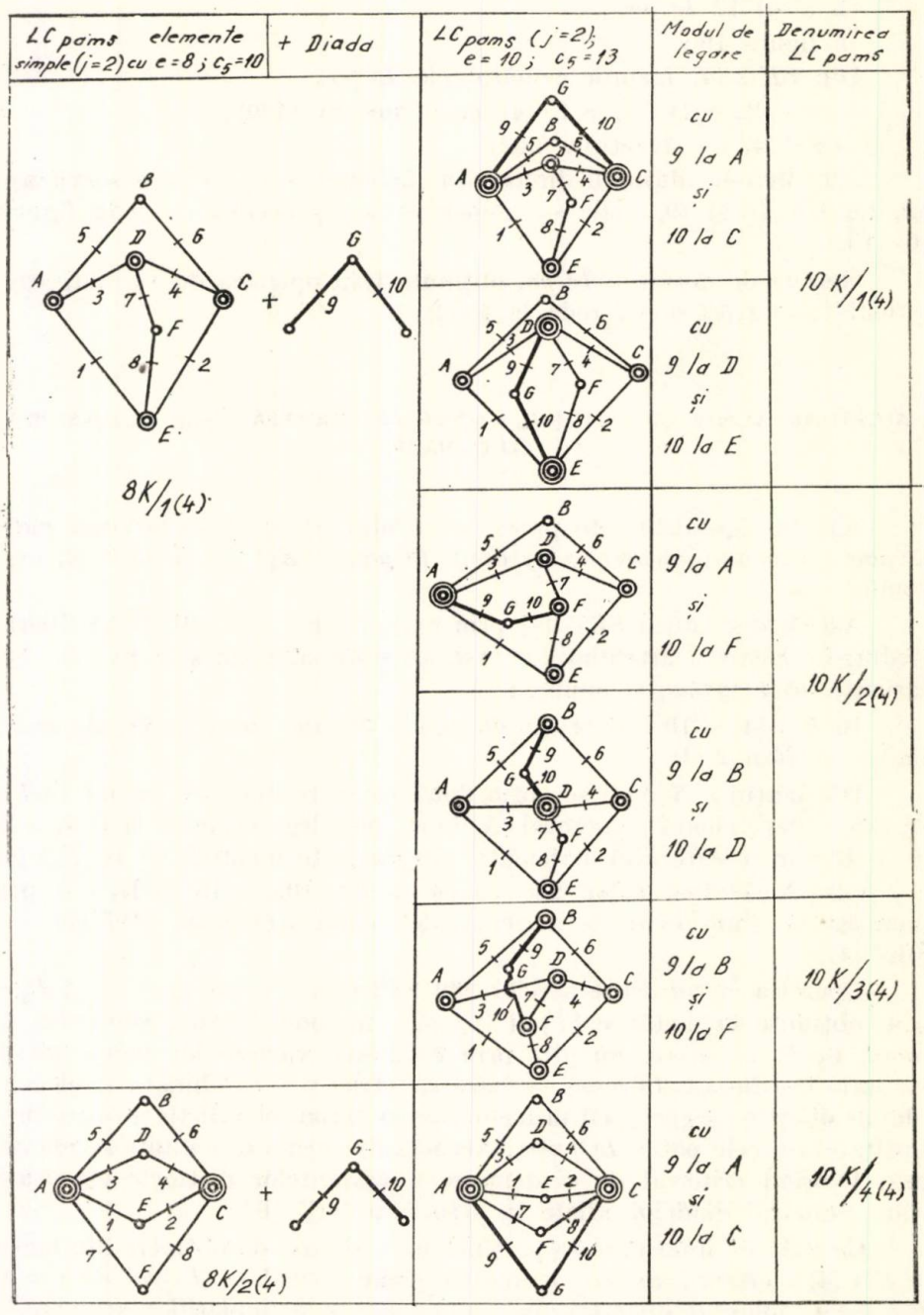
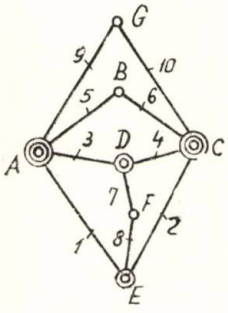


Fig. 20.—Din cele 2 *LCpams* $8K/1(4)$ și $8K2(4)$ amplificate cu diade (AD) rezultă $4LC$ *pams* $10K/1(4)$ ... 10 $K4(4)$ ($L_3 = 4$).

Tabela 1

Exemplu de obținerea lanțurilor plane articulate (*LCpa*) **cu** $e = 10$, $C_5 = 13$ s, $L_3 = 4$ **prin operația de simplificare a articulațiilor**

Lanțul cu articulații multiple (*LCpa*)	Combinația structurală	Schema lanțului cu articulații multiple (*LCpa*) (*x*)	Total rezultat	Total existent
0	1	2	3	4
 $10K/1(4)$ $(3C_5^1;\ 2C_5^2;\ 2C_5^3)$	8002	333,222(10/230); 10/229 10K/4	1	2
	7030	22,44,33(10/218); 22,44,55(10/219); 10/220 10K/2	2	3
	6301	333,10,6,1(10/212); 333,10,6,8(10/217); 333,10,4,1(10/205); 333,10,4,8(10/211); 333,4,2,1(10/203); 333,4,2,8(10/209); 333,10,6,2(10/213); 333,10,4,2(10/206);	8	15
		10/204; 10/207; 10/208; 10/210; 10/214; 10/215; 10/216; 10K/2	7	
	7111	333,66,1(10/224); 333,66,2(10/226); 333,66,8(10/228); 333,44,1(10/221); 333,44,2(10/223); 333,44,8(10/225); 333,22,4(10/222); 333,22,6(10/227);	8	8
	6220	55,66,7,1(10/186); 55,66,7,8(10/196); 55,66,4,1(10/160); 55,66,4,2(10/157); 33,44,7,1(10/175); 33,44,7,8(10/156); 22,33,9,10(10/173); 22,33,9,6(10/197); 22,33,1,10(10/171); 22,33,1,4(10/147); 55,44,6,2(10/161); 55,44,6,1(10/162); 55,44,6,8(10/190); 55,44,2,8(10/191); 55,44,2,1(10/170); 11,33,2,4(10/146); 11,33,2,6(10/164); 11,33,6,10(10/194)	18	57

(*Continuare tabela 1*)

0	1	2	3	4
	5410	99,6,10,7,8(10/193); 99,6,10,7,2(10/126); 99,6,10,7,1(10/125); 99,6,10,4,2(10/82); 99,6,10,4,8(10/131); 99,6,10,4,1(10/84); 99,6,10,3,2(10/83); 99,6,10,3,8(10/130); 99,6,4,7,8(10/142); 99,6,4,7,2(10/141); 99,6,4,7,1(10/143); 99,6,10,3,1(10/85); 99,6,4,3,2(10/94); 99,6,4,3,8(10/132); 99,6,4,3,1(10/93); 33,6,10,7,2(10/144); 33,6,10,7,1(10/140); 33,6,10,4,2(10/92) etc.		95
	4600	1,2,3,4,7,8(10/1) 1,3,5,6,9,10(10/12); 5,6,7,8,9,10(10/37) etc.		50

*) În paranteză este trecut numărul de ordine al *LCpa* cu $e = 10$; $L_3 = 4$, alcătuite în lucrarea [6].

Obținerea variantelor în funcție de structura rangului j al elementelor s-a realizat succesiv, admițîndu-se ca punct de plecare elementul de rangul j_{max} și făcînd combinațiile (ținîndu-se seama de simetria lanțului) asupra căreia se efectuează operația de simplificare a articulațiilor (în cazul de față 10 K/1 (4).

În schema alcătuirii lanțurilor cinematice plane articulate (*LCpa*) rezultate din *LCpams* nu figurează elementele de rang $j=2$. Apar cu o singură cifră elementele de rang $j = 3$, apoi, în continuare, cu cifra repetată elementul sau elementele de rang $j = 4$ (de exemplu, 99, 33, 55 etc.).

Astfel lanțul (333, 44, 1) dedus din *LCpams* 10 K/1 (4) figura 22 tabela 1 prin simplificarea articulațiilor are structura:

$n_2 = 7$, $n_3 = 1$ (elementul 1); $n_4 = 1$ (elementul 4, cu cifra repetată adică 44) și $n_5 = 1$ (elementul 3 cu cifra triplă 333), deci prescurtat cu notația (7111) și încadrat la numărul 10/221 în lucrarea [6] (fig. 21).

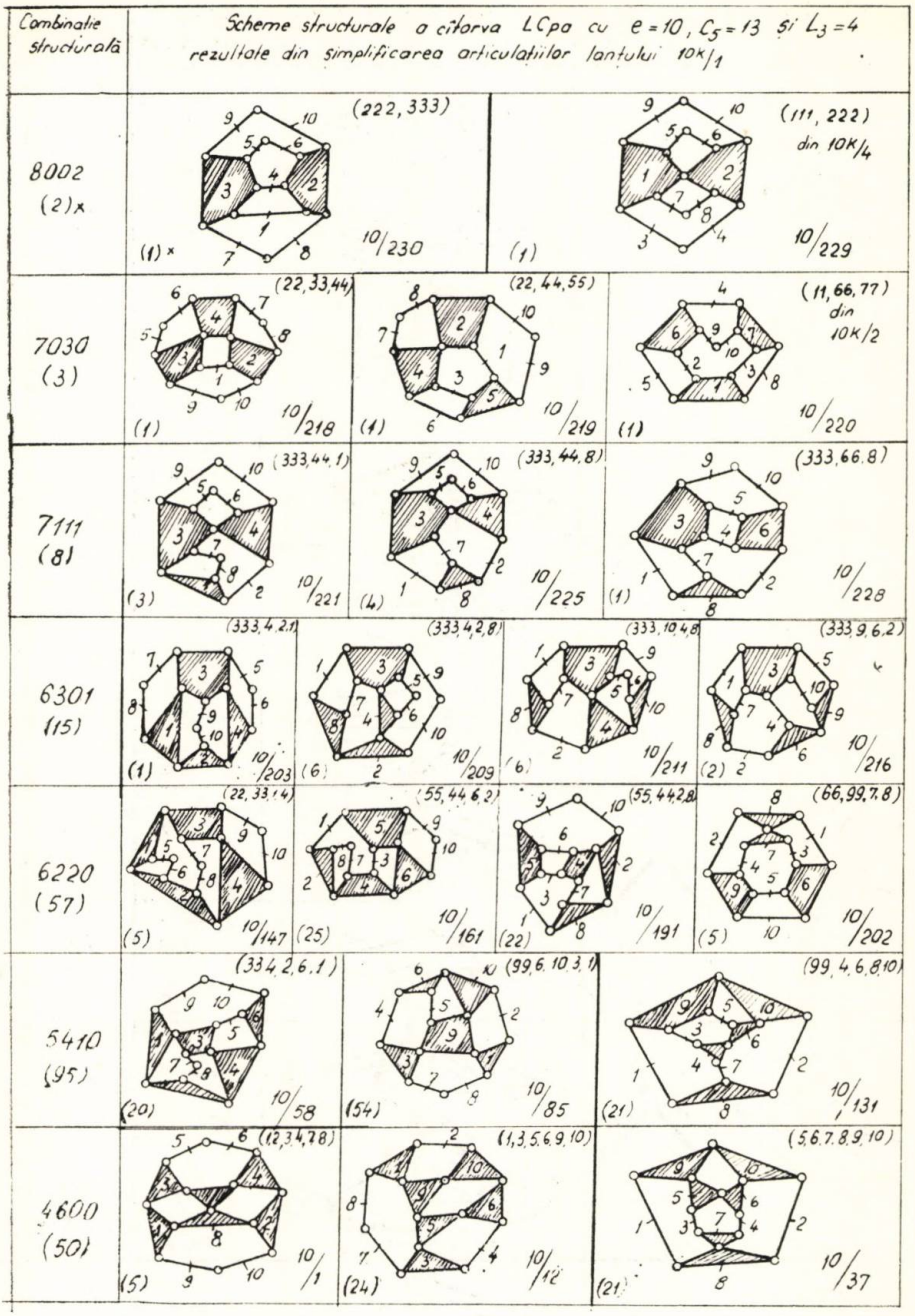
În figura 21 se dau cîteva exemple de *LCpa* cu $e = 10$, cu $c_5 = 13$ și $L_3 = 4$ obținute din *LCpams* 10 K/1 (4) prin operația de mai sus cu simbolul operației propuse și numărul de ordine din lucrarea [6].

7. ALCĂTUIREA *LCpams* CU e = 12 ȘI $L_3 = 4$ PRIN AMPLIFICAREA *LCpams* (10 K/1(4)..... 10 K/4(4)) CU O DIADĂ

7.1. În figura 22 este redată operația de alcătuire care a permis obținerea următoarelor *LCpams* cu $e = 12$ elemente:

— din lanțul 10 K/1 (4) au rezultat 5 lanțuri

12 K/1 (4) ... 12 K/5 (4);



În paranteză este trecut numărul total de variante distincte structural din fiecare combinație și grupă (în partea de jos).

Fig. 21. — Cîteva exemple de *LCpa* cu $e = 10$ și $L_3 = 4$ obținute din *LCpams* 10 *K*/1(4) prin operația de simplificare a articulațiilor (*Sa*).

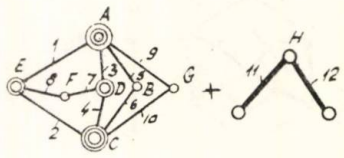
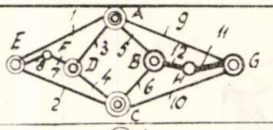
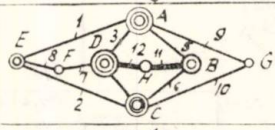
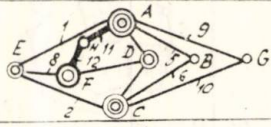
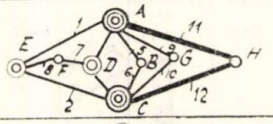
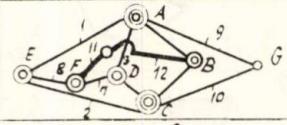
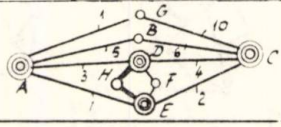
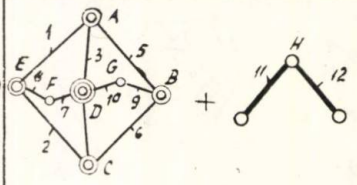
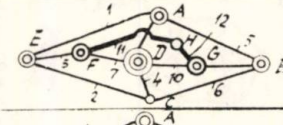
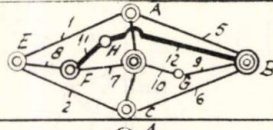
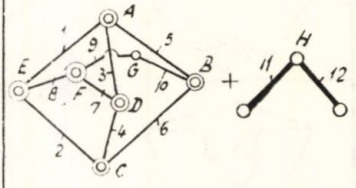
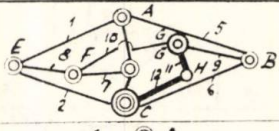
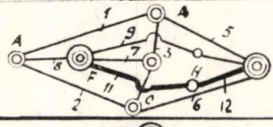
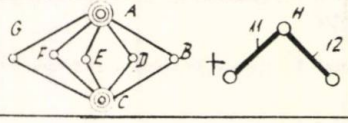
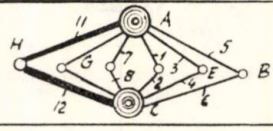
Simbol	Operația de amplificare cu Diadă	LCpams rezultate	Modul de legare a articulațiilor	Simbolul propus
10K/1(4)			cu 11 la G și 12 la B	12K/1(4)
			cu 11 la B și 12 la D	12K/2(4)
			cu 11 la A și 12 la F	12K/3(4)
			cu 11 la A și 12 la C	12K/4(4)
			cu 11 la F și 12 la B	12K/5(4)
			cu 11 la D și 12 la E	12K/6(4)
10K/2(4)			cu 11 la F și 12 la G	12K/7(4)
			cu 11 la F și 12 la B	12K/8(4)
10K/3(4)			cu 11 la G și 12 la C	12K/9(4)
			cu 11 la F și 12 la B	12K/10(4)
10K''/4(4)			cu 11 la A și 12 la C	12K/11(4)

Fig. 22. — Din cele 4 *LCpams* 10 $K/1(4)$ ... 10 $K/4(4)$ amplificate cu o diadă rezultă 9 *LCpams* (12 $K/1(4)$ ... 12$K/9(4)$ cu $e = 12$; $c_5 = 16$ și $L_s = 4$.

— din lanțul 10 $K/2$ (4) au rezultat 2 lanțuri 12 $K/6$ (4) și 12 $K/7$ (4);
— din lanțul 10 $K/3$ (4) a rezultat lanțul 12 $K/8$ (4);
— din lanțul 10 $K/4$ (4) a rezultat lanțul 12 $K/9$ (4).

Eliminarea variantelor care se repetau s-a realizat folosind metoda ordinului de multiplicitate al articulațiilor la care apăreau legate diadele cu articulații simple.

7.2. Prin operația de simplificare a articulațiilor se obțin toate *LCpa* cu $e = 12$ și $L_3 = 4$ a căror structură în ansamblul lor a fost prezentată în tabela 9 din lucrarea [6].

8. CONCLUZII

8.1. În cele de mai sus s-a căutat să se alcătuiască lanțurile cinematice plane articulate (*LCpa*) cu orice număr e de elemente și grad de libertate L_3, pornind de la cele mai simple grinzi Baranov ($5/B_2$, $7/B_6$, $7/B_7$, $7/B_8$ $7/B_{12}$, $7/B_{13}$ și $7/B_{14}$) care, prin operația de „grafizare" (G), au fost transformate în lanțurile cinematice plane cu articulații multiple și elemente simple (*LCpams*) (fig. 3, 8 și 9).

De aici, prin operația de simplificare a articulațiilor (*Sa*), s-au obținut toate *LCpa* cu $e = 7$, $e = 9$ și $L_3 = 5$ existente în tehnică (fig. 5, 6, 10—15).

8.2. Obținerea de *LCpa* cu $e = 8$, 10, respectiv, 12 elemente și $L_3 = 4$, precum și a *LCpa* cu $e = 9$ și $L_3 = 5$ s-a realizat prin amplificarea în prealabil a *LCpams* cu o diadă (AD) (fig. 16, 17, 20 și 22) urmată de operația de simplificare a articulațiilor *LCpams*-urilor rezultate (fig. 18 și 19 și exemplul din tabela 1 și fig. 21).

Este de menționat că obținerea *LCpa* cu $e = 7$ și $L_3 = 5$ s-a realizat prin „grafizarea" celor două *LCpa* cu $e = 6$ (Watt și Stephenson) și, în continuare, prin operația de simplificare a articulațiilor (*Sa*) și a *LCpams*-urilor obținute (7 $K/3p$ (5) și 7 $K/4F$ (5), după cum este arătat în figurile 4—6 și schema generală redată în tabela 2.

8.3. Obținerea de *LCpams* cu grade de libertate superioare se realizează prin „grafizarea" *LCpa*-urilor cu L_3 inferioare.

Astfel, după cum se vede în aceeași schemă generală redată în tabela 2:

— din *LCpa* cu $e = 8$, $L_3 = 4$ prin „grafizare" rezultă *LCpams* cu $e = 10$, $L_3 = 6$;
— din *LCpa* cu $e = 10$, $L_3 = 4$ rezultă *LCpams* cu $e = 13$, $L_3 = 7$;
— din *LCpa* cu $e = 7$, $L_3 = 5$ rezultă *LCpams* cu $e = 8$, $L_3 = 6$;
— din *LCpa* cu $e = 9$, $L_3 = 5$ rezultă *LCpams* cu $e = 11$; $L_3 = 7$;
— din *LCpa* cu $e = 10$, $L_3 = 6$ rezultă *LCpams* cu $e = 12$, $L_3 = 8$;

etc.

În aceeași tabelă 2 sînt prezentate și celelalte două metode de obținere a *LCpa*:

— prin operația de simplificare a articulațiilor (*Sa*),
— prin operația de amplificare a *LCpams* cu diadă (AD) și în continuare prin operațiile de simplificare a articulațiilor (*Sa*).

8.4. Considerăm că metodele propuse :

a) a „grafizării" (*G*) a grinzilor Baranov și în continuare a lanțurilor cu articulații simple (*LCpa*) rezultate ;

b) a operației de simplificare a articulațiilor (*Sa*) a lanțurilor rezultate prin „grafizare" și

c) a amplificării cu o diadă (*AD*) a lanțurilor cu articulații multiple și elemente simple (*LCpams*) permit obținerea oricărui lanț cinematic plan articulat cu orice număr de elemente și orice grad L_3 de libertate.

8.5. Din *LCpa* astfel alcătuite se obțin în continuare mecanismele plane articulate (*Mpa*) (prin fixarea cîte unuia din elemente), iar din acestea mecanismele-motor plane articulate (*Mmpa*) prin precizarea elementului sau a elementelor conducătoare).

În figurile 23 și 24 se dau cîteva exemple de modul cum se poate realiza această operație pentru mecanismele-motor cu $M_3 = 1$ (fig. 23) și cele cu $M_3 = 2$ „total" (în fig. 24).

8.6. Într-o lucrare următoare se va dezvolta metoda de simplificare a articulațiilor (*Sa*) *LCpams*-urilor rezultate prin „grafizare" sau prin amplificare cu diade (*AD*) și completarea numărului total de *LCpams* pentru un *e* dat, prin combinarea metodelor de „amplificare" și „grafizare".

Ca exemple se menționează că prin :

a) amplificarea celor patru *LCpams* (alcătuite în tabela 3) (8*K*/1 (6) ... 8 *K*/4 (6) cu $L_3 = 6$) cu o diadă, rezultă 17 *LCpams* cu $e = 10$ și $L_3 = 6$ (alcătuite în tabela 4) în timp ce prin

b) „grafizarea" celor 16 *LCpa* cu $e = 8$ și $L_3 = 4$ rezultă 16 *LCpams* cu $e = 10$ și $L_3 = 6$ (alcătuite în fig. 13 din [14]) și redate în tabela 5.

Din aceste două operații 13 *LCpams* sînt comune :

—din operația b) nu rezultă însă cele trei LCpams obținute din „grafizarea" *LCpa* 8/5 (4) 8/6 (4) și 8/7 (4) ; în schimb, apar patru LCpams cu $e = 10$ (notate 10 *K*/17*F* (6) ... 10 *K*/20*F* (6)) care au în structură patru elemente simple legate între ele prin trei articulații simple.

În consecință, continuarea operației de simplificare a articulațiilor (*Sa*) nu se va mai face decît pentru cele patru *LCpams* care se vor aduna la cele provenite din cele 16 *LCpams* (tabela 4) alcătuite prin aceeași operație de simplificare a articulațiilor.

8.7. În sfîrșit, tot cu titlu de informare, în tabela 6 se arată cum, folosind metodele de „grafizare" (*G*), amplificare cu diadă (*AD*) și simplificarea articulațiilor (*Sa*) se obțin din lanțul cinematic 9/12 *t* (5) [17] cele 7 *LCpa* cu $e = 13$, $c_5 = 18$ și $L_3 = 7$ găsite de S. L. Haas și F.R.E. Crossley în lucrarea [19].

Aceleași 7 *LCpa* se pot obține prin „grafizarea" (*G*) a *LCpa* 10/215 (4) și simplificarea articulațiilor (*Sa*) *LCpams*-ului rezultat (tabela 7).

8.8. GRADUL DE LIBERTATE L_{3G} AL LANȚULUI REZULTAT PRIN „GRAFIZARE"

Dacă se notează cu

e, c_5 numărul elementelor și articulațiilor *LCpa*,

e_G, c_{5G} cele corespunzătoare lanțului „grafizat",

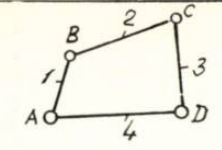
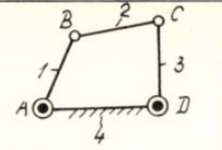
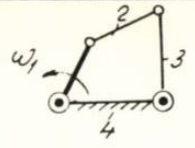
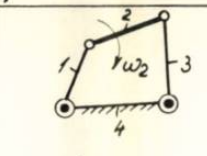
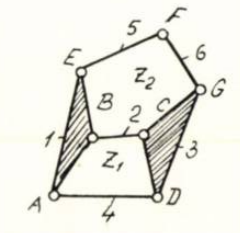
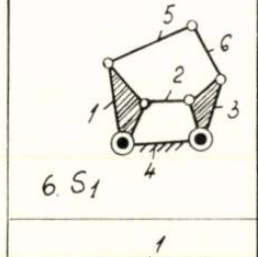
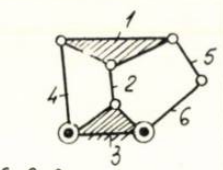
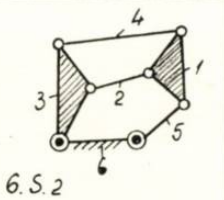
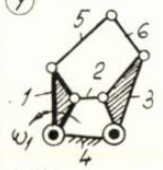
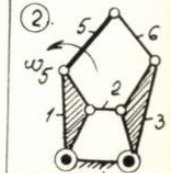
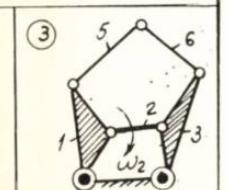
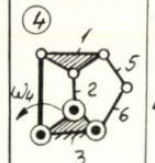
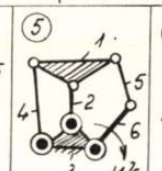
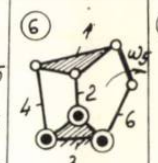
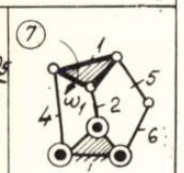
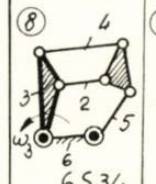
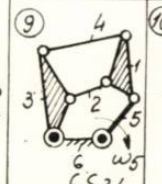
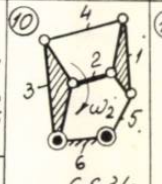
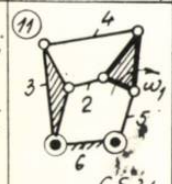
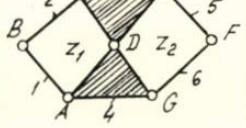
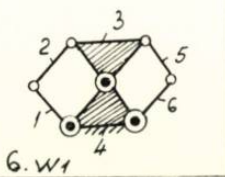
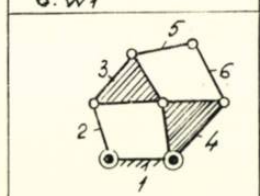
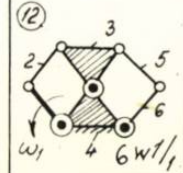
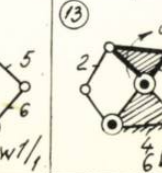
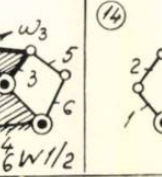
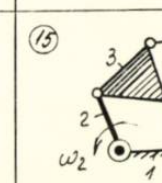
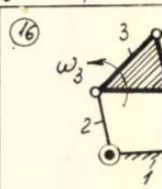
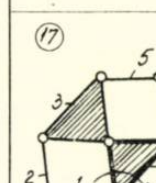
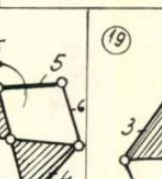
Lanțul cinematic (LCpa)		Mecanismul rezultat (Mpa)	Mecanismul-motor rezultat (Mmpa)	
Date	Schemă structurală			
1	2	3	4	
$e=4$ $C_5=4$ $n_2=4$	 4/1	 4/1 : 1.	 4. 1/1	 4. 1/2
$e=6$ $C_5=7$ $n_2=4$ $n_3=2$ $\Phi_{z_1}=4$ $\Phi_{z_2}=5$	 (Stephenson) 6/1 (S)	 6. S1  6. S. 2  6. S. 2	①  6. S1/1 ②  6. S1/2 ③  6. S1/3 ④  6S2/1 ⑤  6S2/2 ⑥  6S2/3 ⑦  6S2/4 ⑧  6S3/1 ⑨  6S3/2 ⑩  6S3/3 ⑪  6S3/4
$e=6$ $C_5=7$ $n_2=4$ $n_3=2$ $\Phi_{z_1}=$ $\Phi_{z_2}=$ $=4$	 (Watt) 6/2 (W)	 6. W1  6. W2	⑫  6W1/1 ⑬  6W1/2 ⑭  6W1/3 ⑮  6W2/1 ⑯  6W2/2 ⑰  6W2/3 ⑱ 6W2/4 ⑲  6W2/5

Fig. 23. — Alcătuirea mecanismelor-motor plane articulate (*Mmpa*) cu $e = 4$ (2 variante) și $e = 6$(19 variante) și $M_3 = 1$.

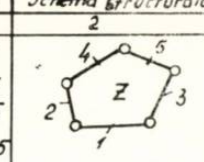
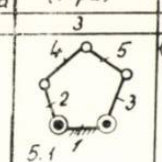
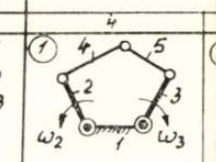
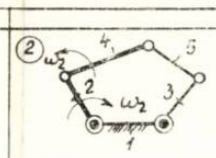
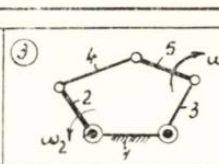
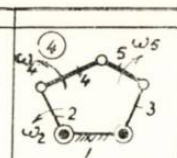
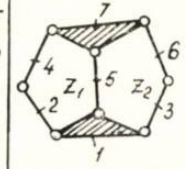
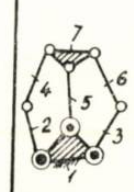
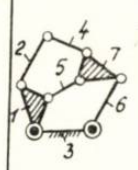
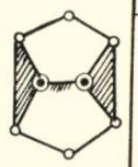
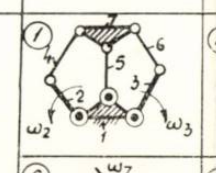
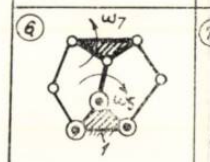
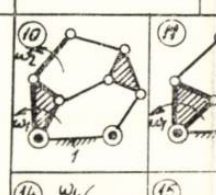
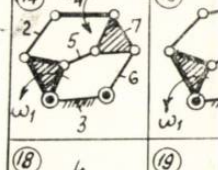
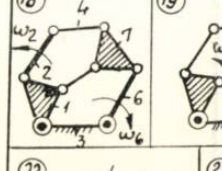
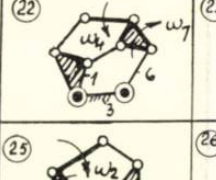
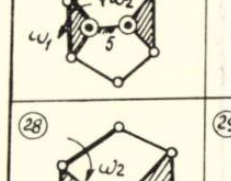
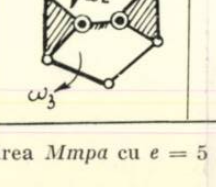
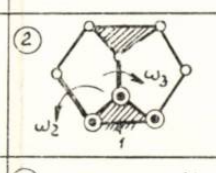
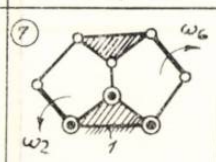
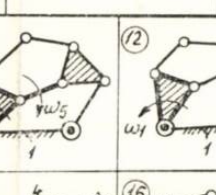
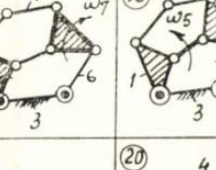
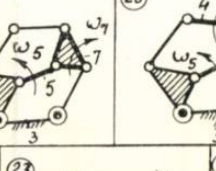
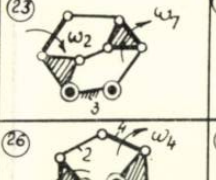
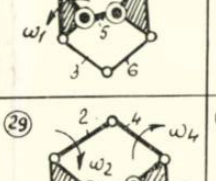
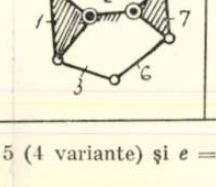
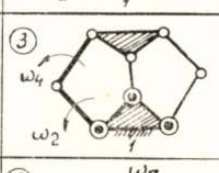
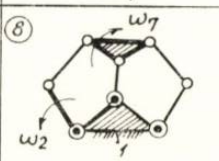
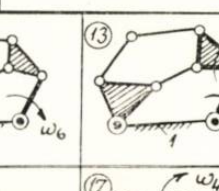
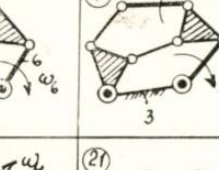
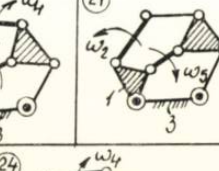
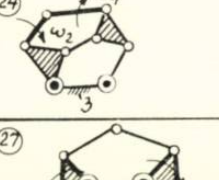
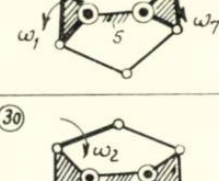
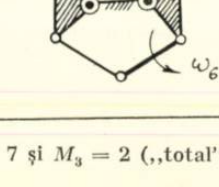
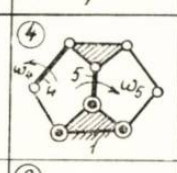
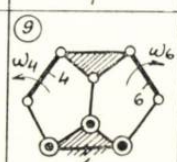
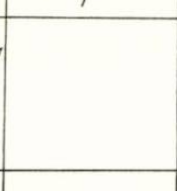
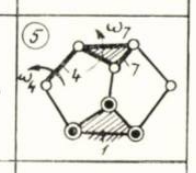
Lanțuri cinematice (LCpa)		Mecanisme (Mpa)	Mecanisme-motor (Mmpa)					
Date	Schemă structurală							
1	2	3	4					
$e=5$ $C_5=5$ $n_2=5$ $\Phi_{z_1}=5$		 5.1	① 	② 	③ 	④ 		
$e=7$ $C_5=8$ $n_2=5$ $n_3=2$ $\Phi_{z_1}=$ $\Phi_{z_2}=$ $=2$.		 7.2.1  7.2.2  7.2.3	①  ⑥  ⑩  ⑭  ⑱  ㉒  ㉕  ㉘ 	②  ⑦  ⑪  ⑮  ⑲  ㉓  ㉖  ㉙ 	③  ⑧  ⑫  ⑯  ⑳  ㉔  ㉗  ㉚ 	④  ⑨  ⑬  ⑰	⑤ 	

Fig. 24. — Alcătuirea *Mmpa* cu $e = 5$ (4 variante) și $e = 7$ și $M_3 = 2$ („total" (30 de variante).

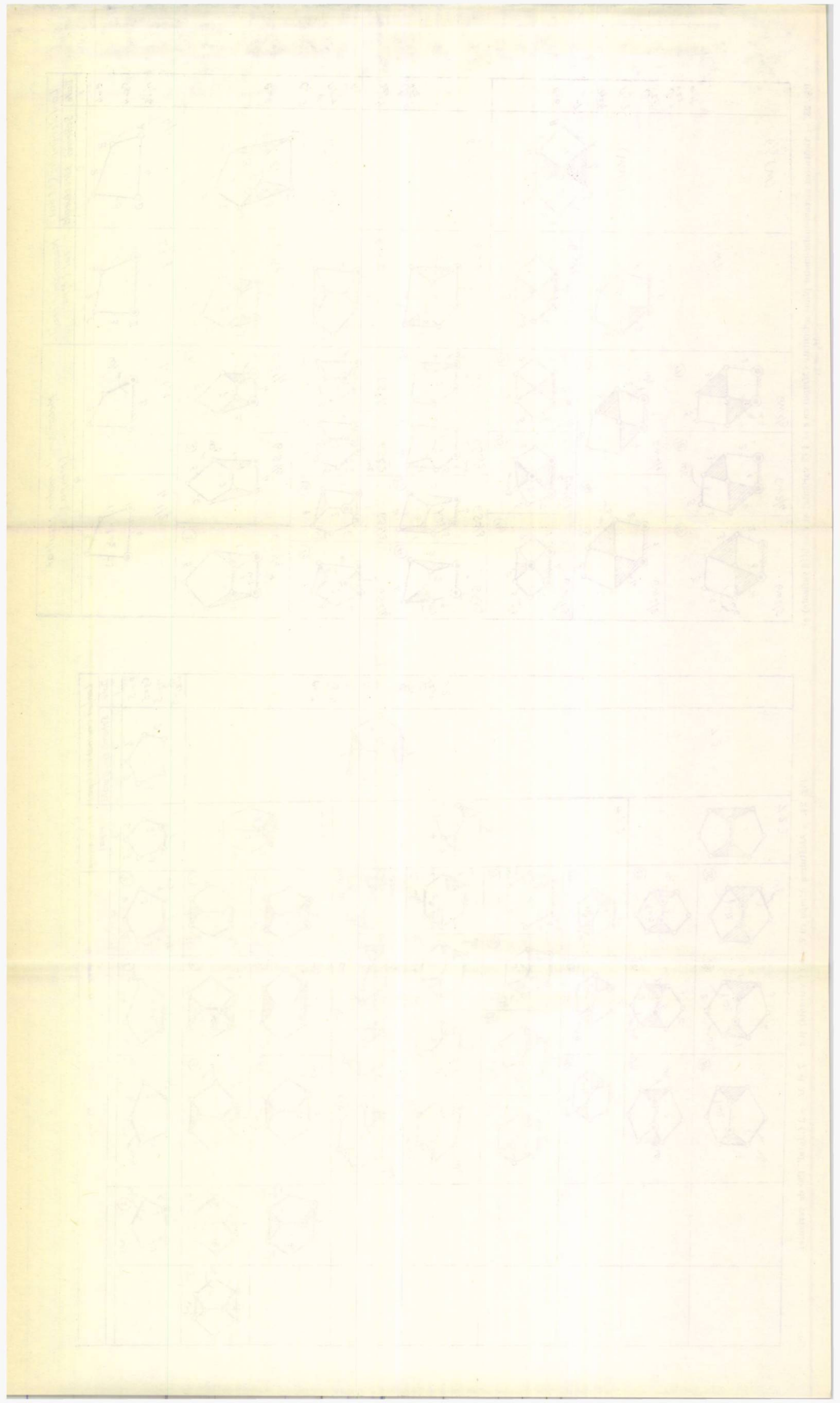


Tabela 2

Schema generală de obținere a *LCpa* prin cele trei operații propuse în lucrare:
— „grafizarea" „grinzilor Baranov" și în continuare a *LCa* rezultate;
— simplificarea articulațiilor.
— amplificarea *LCpams*-urilor cu o diadă și în continuare prin simplificarea articulațiilor

SEMNIFICAȚIA PRESCURTĂRILOR

LCpams = lanț cinematic plan cu articulații multiple și elemente simple.
LCpa = lanț cinematic plan articulat (cu articulații simple).
L_3 = grodul de libertate al *LCpa*.
e, C_5 = numărul elementelor, respectiv al articulațiilor *LCpa*.
5/6, 7/8, 9/10 grinzi Baranov cu e=5,7, respectiv 9 elemente.
G = operația de transformare prin graf (grafizare) a grinzilor Baranov sau a *LCpa*.
Sa = operația de simplificare a articulațiilor.
AD = operația de amplificare a *LCpams* cu diadă (grupă Assur cu n=2 ; C_5=3).

Tabela 3

Obținerea *LCpams* **cu** $e = 8$, $c_5 = 9$ **și** $L_3 = 6$ **prin operația de „grafizare" a** *LCpa* **cu** $e = 7$, $c_5 = 8$ **și** $L_3 = 5$

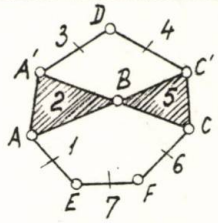
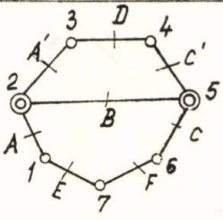
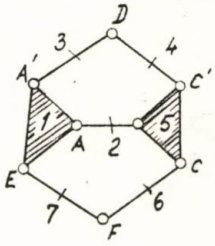
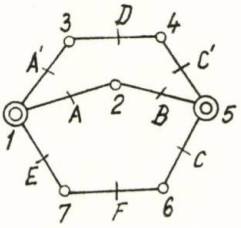
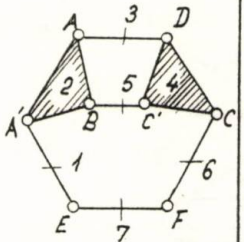
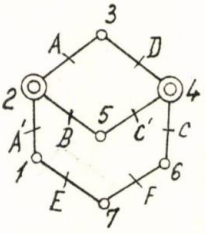
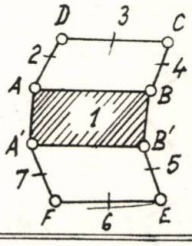
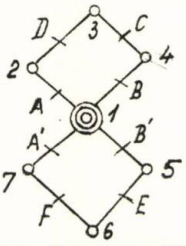
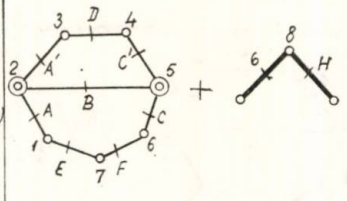
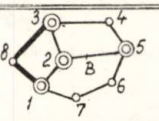
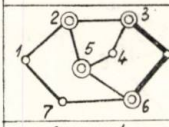
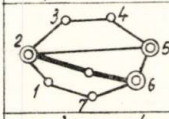
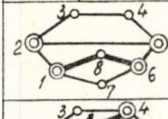
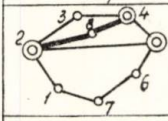
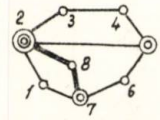
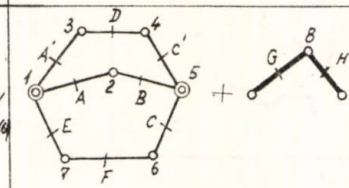
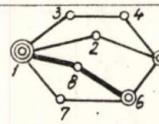
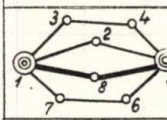
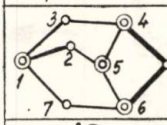
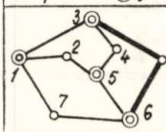
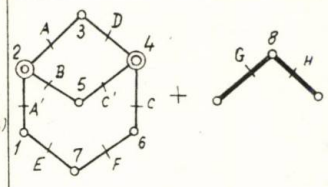
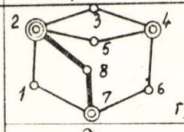
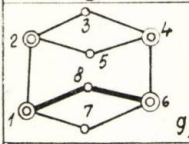
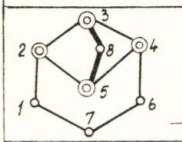
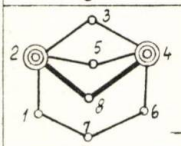
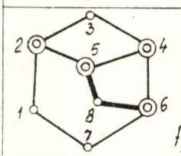
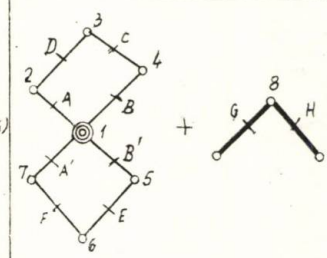
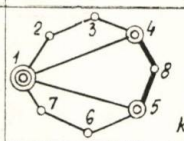
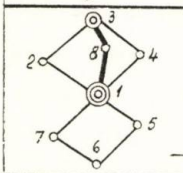
Simbol	Schema structurală	Grafizarea (G)	Lanțul LCpams rezultat	simbol
7/1P(5)		⟹		8K/1F(6)
7/2t(5)		⟹		8K/2P(6)
7/3P(5)		⟹		8K/3P(6)
7/4F(5)		⟹		8K/4F(6)

Tabela 4

Obținerea *LCpams* **cu** $e = 10$, $c_5 = 16$ **și** $L_3 = 6$ **prin operația de amplificare cu diadă** (*AD*) **a** *LCpams* **cu** $e = 8$, $c_5 = 9$ **și** $L_3 = 6$

	Operația de „amplificare".	Lanțul rezultat. (LCpams)	Simbol.	Lanțul cu $e = 8$ și $L_3 = 4$ „grafizat".
8K/1F(6)		 d)	10K/2P(6)	8/2(4)
		 c)	10K/12P(6)	8/12(4)
		 a)	10K/4F(6)	8/4(4)
		 b)	10K/11F(6)	8/11(4)
		 —)	10K/17F(6)	— 1)
		 h)	10K/8F(6)	8/8(4)
8K/2P(6)		 g)	10K/9P(6)	8/9(4)
		 a)	10K/10P(6)	8/10(4)
		 s)	10K/13P(6)	8/13(4)
		 t)	10K/16P(6)	8/16(4)

(continuare tabela 4

	Operația de „amplificare".	Lanțul rezultat (LCpams)	Simbol	Lanțul cu e=8 și L_3=4 „grafizat"
8K/3p(6)		 r).	10K/14p(6)	8/14(4)
		 g).	10K/15p(6)	8/15(4)
		 —)	10K/18p(6)	2) —
		 —)	10K/19p(6)	1) —
		 f).	10K/3p(6)	8/3(4) ?
8K/4F(6)		 k)	10K/1p(6)	8/1(4)
		 —)	10K/20F(6)	2) —

Obs. 1). Lanțuri alcătuite de Crossley [15 fig. 13] dar nenumerotate
2). Lanțuri care nu figurează în lucrarea [15 fig. 13].

Tabela 5

Obținerea *LCpams* **cu** $e = 10$, $c_5 = 16$ **și** $L_3 = 6$ **prin „operația de grafizare" a celor 16** *LCpa* **cu** $e = 8$, $c_5 = 10$ **și** $L_3 = 4$

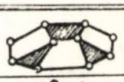
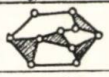
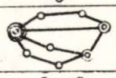
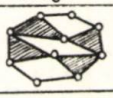
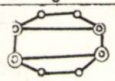
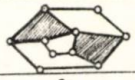
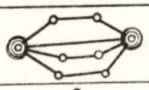
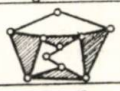
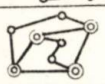
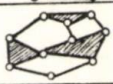
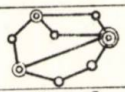
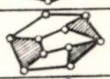
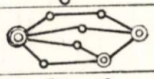
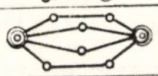
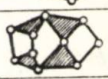
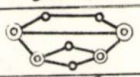
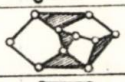
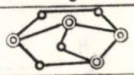
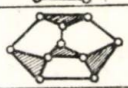
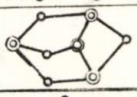
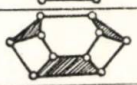
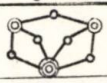
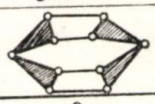
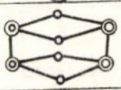
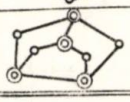
Simbol	Schema structurală	Grafizarea (G)	Lanțul LCpams rezultat	simbol propus	Notația Crossley [14 fig. 13]
$8/1(4)$		⟹		$10K/1F(6)$	K
$8/2(4)$		⟹		$10K/2p(6)$	d
$8/3(4)$		⟹		$10K/3p(6)$	f
$8/4(4)$		⟹		$10K/4F(6)$	n
$8/5(4)$		⟹		$10K/5f(6)$	a
$8/6(4)$		⟹		$10K/6F(6)$	p
$8/7(4)$		⟹		$10K/7p(6)$	e
$8/8(4)$		⟹		$10K/8F(6)$	h
$8/9(4)$		⟹		$10K/9p(6)$	g
$8/10(4)$		⟹		$10K/10p(6)$	m
$8/11(4)$		⟹		$10K/11F(6)$	b
$8/12(4)$		⟹		$10K/12p(6)$	c
$8/13(4)$		⟹		$10K/13p(6)$	s
$8/14(4)$		⟹		$10K/14p(6)$	r
$8/15(4)$		⟹		$10K/15p(6)$	q
$8/16(4)$		⟹		$10K/16p(6)$	t

Tabela 6

Obținerea celor 7 *LCpa* cu $e = 13$, $c_5 = 16$ și $L_3 = 7$ prin operația de „grafizare" a *LCpa* 9/12/(5), amplificarea cu diadă a *LCpams* rezultat și apoi prin simplificarea articulațiilor *(Sa)*

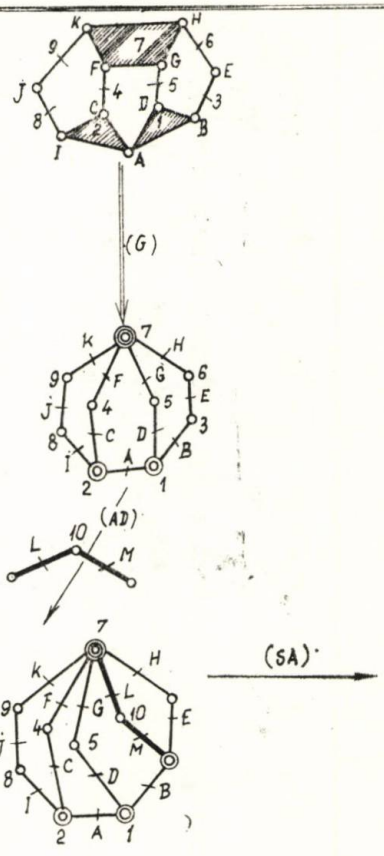
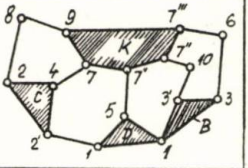
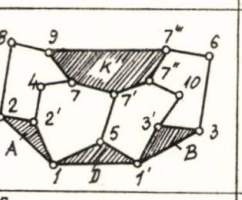
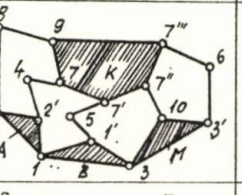
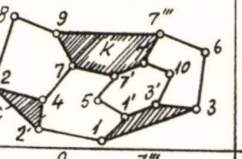
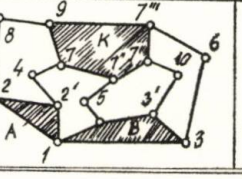
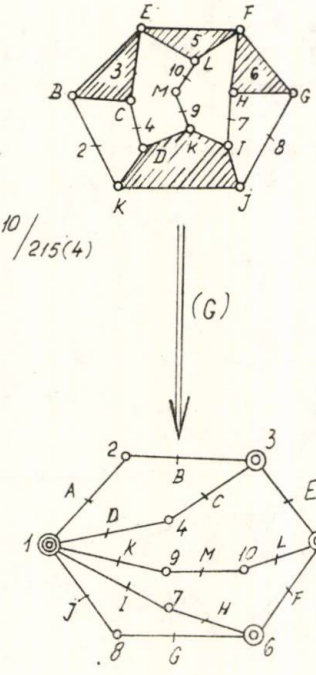
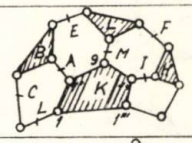
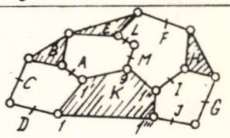
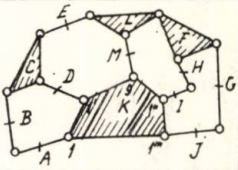
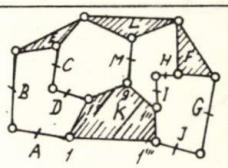
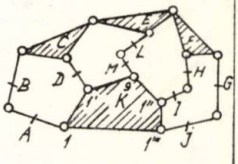
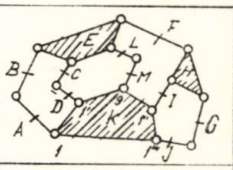
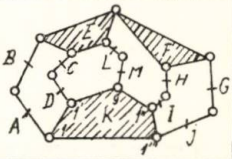
Operațiile de transformare ale LCpa 9/12t(5).	Schema structurală a LCpa rezultate	Simbol
		13/1tp(7)
		13/2tp(7)
		13/3tp(7)
		13/4tp(7)
		13/5tp(7)
		13/6tp(7)
		13/7tp(7)

Tabela 7

Obținerea celor 7 *LCpa* cu $c = 13$, $c_5 = 16$ și $L_3 = 7$ prin operația de „grafizare" (G) a *LCpa* 10/215 (4) și apoi a operației de simplificare a articulațiilor (*Sa*)

Operațiile de transformare ale LCpa 10/215 (4).	Schema structurală a LCpa rezultate.	Simbol.
		13/1 tp (7)
		13/2 tp (7)
		13/3 tp (7)
		13/4 tp (7)
		13/5 tp (7)
		13/6 tp (7)
		13/7 tp (7)

există următoarele relații :

$$e_G = c_5, \tag{2}$$

$$c_{5G} = c_5 + (c_5 - e) = 2c_5 - e. \tag{3}$$

Gradul de libertate al lanțului inițial este

$$L_3 = 3e - 2c_5, \tag{4}$$

iar al celui „grafizat" :

$$L_{3G} = 3e_G - 2c_{5G} = 3c_5 - 2(2c_5 - e),$$

$$L_{3G} = 2e - c_5. \tag{5}$$

Expresia lui L_{3G} se poate scrie în funcție și de L_3 dacă în (5) se introduc, respectiv, valorile lui e și c_5 deduse din (4), și anume :

$$e = \frac{L_3 + 2c_5}{3}, \tag{6}$$

$$c_5 = \frac{3e - L_3}{2}. \tag{7}$$

Rezultă

$$L_{3G} = \frac{1}{3}(2L_3 + c_5), \tag{8}$$

respectiv,

$$L_{3G} = \frac{1}{2}(L_3 + e). \tag{9}$$

Exemple. *LCpams* rezultat din „grafizarea" lanțului *LCpa* 10/215 (4) cu $e = 10$, $c_5 = 13$, $L_3 = 4$ (tabela 7) are gradul de libertate L_{3G} :

— conform formulei (8)

$$L_{3G} = \frac{1}{3}(2 \cdot 4 + 13) = 7,$$

— conform formulei (9)

$$L_{3G} = \frac{1}{2}(4 + 10) = 7.$$

Numărul de elemente e_G și articulații c_{5G} se obțin din (2) și (3):

$$e_G = c_5 = 13,$$

$$c_{5G} = 2c_5 - e = 2 \cdot 13 - 10 = 16.$$

În consecință

$$L_{3G} = 3e_G - 2c_{5G} = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 16 = 7.$$

Primită la redacție la 8 ianuarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. G. G. Baranov, *Klasificația, stroienie, kinematica kinetostatika ploskih mehanizmov c parami pervovo roda*, Trudî seminara pe Teorii maşîn i mehanizmov **XII**, *46*, 5—39, Izdatelstvo Academii Nauk SSSR, Moskva, 1952.
2. — *Kurs teorii mehanizmov i maştn*, Maşghiz, 1958.
3. N.I. Manolescu, *Contribuții la sinteza numerică, structurală și cinematică a grupelor ASSUR, a lanțurilor cinematice, a mecanismelor și mecanismelor-motor plane articulate*, Teză de doctorat, iulie 1969, București, Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej".
4. N.I. Manolescu, Tempea Iosif, *Structural Synthesis of plane Kinematic Chains with multiple joints and five degrees of Freedom* $L_3 = 5$ *„total"*; $L_3^P = 5$ *„parțial and* $L_3^{fr} = 5$ *„fracțional"*, Rev. Roum. Sci. Techn. Série de Mec. Appliquée, **12**, *5* (1167); Stud. cerc. mec. apl., **25**, *3*, 549—572 (1967).
5. — *Structural and Kinematic Synthesis of Plane Driving-Mechanisms with multiple joints and two degrees of Mobility, „Total"* $M_3=2$ *and „Parțial"* $M_3^P = 2$, Rev. Roum. Sci. Techn. Série de Mech. Appliquée, **13**, *1* (1968); Stud. cerc. mec. apl., **25**, *5* (1967).
6. — *Sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane articulate cu* $e = 10$ *elemente,* $c_5 = 13$ *articulații și grad de mobilitate* $L_3 = 4$, Ses. șt. I.P.B. 1968, Bul. Inst. politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" **XXXII**, *1*, 39—69 (1970).
7. L.S. Woo, *Type Synthesis of plane linkages*, Trans. ASME Jnl. Engag. for Industry 89 Séries B, 159—172 (1967).
8. Kurt Hain, *Die Analyse und Synthese achtgliedriger Gelenkgetriebe*, VDI Berichte, *5*, 81—93 (1955).
9. Kurt Hain, Aug.W. Zielstorff, *Systematik der zwangläufigen, achtgliedrigen kinematischen Kette*, Maschinenmarkt 8700, *37*, 14—20 (1964).
10. — *Die zwangläufigen achtgliedrigen Getriebe mit Einfach-und Mehrfachgelenken*, Maschinenmarkt Würzburg 70 Jg *64*, 12—18 (1964).
11. — *Die höheren Koppelelebenen der sechs und achtgliedrigen*, zwangläufigen Getriebe. Maschinenmarkt, Würzburg 70 Jg *81*, 19—26 (1964).
12. — *Die aus Gelenkvierecken zusammengesetzeen, achtgliedrigen*, zwangläufigen Getriebe. Maschinenmarkt Würzburg 71 Jg *82*, 24—31 (1965).
13. — *Höhere Winkelübertragungen in sechs und schtgliedrigen, zwangläufigen Getrieben*. Maschinenmarkt Würzburg 71 Jg *3*, 18—23 (1965).
14. F.R.E. Crossley, *A contribution to Grübler's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms*, J. of. Eng. for Industry, February 1964.
15. F.R.E. Crossley, *The Permutations of Kinematic Ghains of eight members or less from the Graph Teoretic Viewpoint*, Developaments in theoretical and Applied Mechanics, vol. 2, Pergamon Press, Oxford, 1965, p. 457—486.
16. Kurt Hain, *Discussion to* (14), J. of Eng. for Industry, February 1964.

17. N.I. Manolescu, *Une méthode unitaire pour la formation des chaines cinématiques et des mécanismes plans articulés avec différents degrés de liberté et mobilité*, Rev. Roum. Sci. Techn. Séries de Mecanique Appliquée, **9**, *6*, 1263—1313 (1964). Stud. cerc. mec. apl, *6*, **17**, 1465—1512 (1964).

18. — *Systematisation et classification des mécanismes-moteurs plans articulés à deux degrés de mobilité*: „*total*" ($M_3 = 2$) *et* „*partial*" ($M_3^p = 2$), Rev. Roum. Sci. Techn. Séries de Mec. Appliquée, **10**, *4*, 999—1042 (1965), Stud. cerc. mec. apl, *6*, **20**, 1355—1399 (1965).

19. S.L. Haas, F.R.E. Crossley, *Structural Synthesis of a Four-Bit Binary Adding Mechanism*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, Mech. Conf. Atlanta, 6—9 octomber 1968, Paper No 68-Mech-25.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1848

SINTEZA STRUCTURALĂ A LANȚURILOR CINEMATICE PLANE GENERALE CU $N = 1,2,3$ CONTURURI DEFORMABILE ȘI GRAD DE LIBERTATE $L_3 = 4$ *)

de IOSIF TEMPEA
Institutul politehnic București

Cu ajutorul grafelor, autorul dezvoltă o metodă de sinteză structurală a *LCpa* și generale. Autorul redă lanțurile cu 1, 2, 3 contururi și patru grade de libertate, construite atît cu cuple inferioare, cît și cu cuple superioare.

Într-o lucrare anterioară [28] autorul a dezvoltat o metodă de sinteză structurală a *LCpa* **) bazată pe teoria grafelor. În cele ce urmează, metoda este extinsă pentru sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane cu cuple inferioare și superioare, numite de autor lanțuri cinematice plane generale. Metoda expusă este aplicată pentru obținerea lanțurilor cu $N = 1, \ldots, 3$ contururi deformabile și cu grad de libertate $L_3 = 4$.

1. PRECIZĂRI ASUPRA NOȚIUNILOR MATEMATICE UTILIZATE

1.1. Studiul proprietăților topologice ale schemelor structurale ale *LC* și ale mecanismelor și problemelor legate de enumerarea acestora au condus la necesitatea utilizării unor noțiuni din teoria grupurilor și teoria grafelor. Aceste noțiuni apar în lucrările lui B. Paul [22], R. Voinea și M. Atanasiu [29], [30], F.R.E. Crossley [5], [6], F. Freudenstein [10], L. Dobrjanskyj [8], Chr. Pelecudi [23], T. Davies [7], N. I. Manolescu [18], F. Buchsbaum [4] și alții [11], [27], [28].

*) Lucrare prezentată la sesiunea de comunicări științifice organizată de C.M.S. în cinstea celei de a 50-a aniversări a Partidului Comunist Român, 22–23 februarie 1971.

**) În continuare sînt utilizate următoarele prescurtări:
LC — lanț(uri) cinematic(e);
LCpa — lanț(uri) cinematic(e) plan(e) articulat(e);
LCpg — lanț(uri) cinematic(e) plan(e) general(e).

1.2. Schemei structurale a unui *LCpa* i se poate asocia în diferite moduri un graf. Mai frecvent se utilizează graful asociat obținut în modul următor:

— elementele *LC* sînt reprezentate prin vîrfuri ale grafului;

— două vîrfuri ale grafului sînt unite printr-o muchie dacă și numai dacă elementele *LC* reprezentate prin aceste vîrfuri sînt legate între ele printr-o articulație.

1.3. Graful contractat al unui graf inițial dat [21], [31], [10] se obține din acesta prin înlocuirea fiecărui lanț format din muchii și vîrfuri de grad doi, cuprins între vîrfuri de grad mai mare ca doi printr-o singură muchie.

În figura 1 sînt reprezentate schemele structurale ale unor *LCpa*, grafele asociate lor și grafele contractate corespunzătoare.

1.4. Operația inversă contractării, numită de Ore „expansiune" [21], constă în dispunerea unor vîrfuri de gradul doi pe muchiile grafului inițial. Rezultă, astfel, posibilitatea obținerii grafelor asociate *LCpa*, prin „expansiunea" grafelor contractate corespunzătoare. Numărul acestora din urmă este mult mai redus.

1.5. Operația de „expansiune" a unui graf contractat poate fi privită ca o operație de „colorare" a muchiilor acestuia cu diferite culori, în funcție de numărul vîrfurilor de grad doi ce vor fi dispuse pe fiecare muchie. Numărul grafelor distinct „colorate", obținute în acest mod, poate fi determinat cu ajutorul teoremei fundamentale a enumerării, atribuită lui Polya [24], [2], [31], [10].

1.6. Aplicațiile biunivoce ale unei mulțimi finite X pe ea însăși se numesc permutări. Elementele permutării care prin aplicarea repetată a acesteia se transformă unele în altele formează un ciclu. Permutarea se poate scrie ca un produs al ciclurilor sale. Lungimea i a unui ciclu este egală cu numărul de elemente pe care acesta le conține.

Permutarea

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 10 & 7 & 5 & 8 & 4 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

se poate scrie în funcție de ciclurile sale:

$$g = (168)\quad (2)\quad (5)\quad (9)\quad (310)\quad (47). \tag{1'}$$

Tipul unei permutări este dat de produsul unor pseudovariabile πt_i^j, unde j reprezintă numărul ciclurilor de lungime i ale permutării.

Tipul permutării g este $t_1^3 t_2^2 t_3$.

1.7. O mulțime de permutări formează un grup multiplicativ cu condiția ca produsul a două permutări oarecare ale mulțimii să fie o permutare aparținînd aceleiași mulțimi.

Un grup de permutări G poate fi caracterizat prin noțiunea de indice al ciclurilor:

$$i_c = \frac{1}{|G|} \sum h\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, t_1^{k_1} t_2^{k_2} \ldots t_n^{k_n}, \tag{2}$$

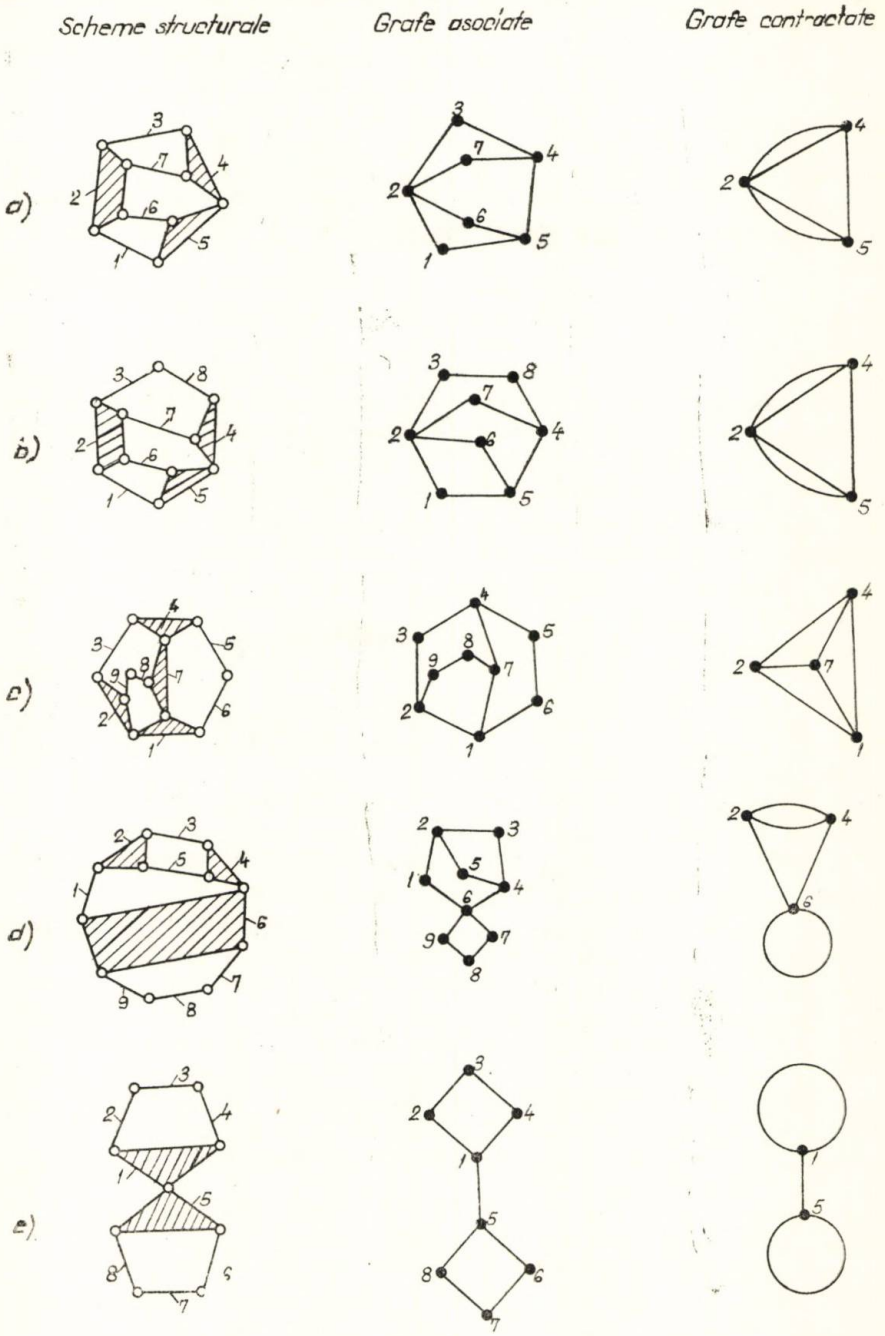

Scheme structurale
Grafe asociate
Grafe contractate
a)
b)
c)
d)
e)

Fig. 1

unde $h\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ reprezintă numărul permutărilor de tip $t_1^{k_1}\, t_2^{k_2} \ldots$ $\ldots\, t_n^{k_n}$, iar $|G|$ este ordinul grupului (egal cu numărul permutărilor pe care le conține).

1.8. Două grafe se numesc izomorfe dacă între vîrfurile și muchiile lor se poate stabili o corespondență biunivocă, care păstrează incidența. Grupul de automorfism al unui graf este reprezentat prin grupul de permutări ale vîrfurilor grafului, care lasă graful invariant. În cazul unui graf de forma unui poligon cu n lanțuri, grupul de automorfism se numește grup diedru și are ordinul $2n$. Indicile ciclurilor pentru grupul diedru al hexagonului este [25]

$$D_6 = \frac{1}{12}\,(t_1^6 + 3t_1^2 t_2^2 + 4t_2^3 + 2t_3^2 + 2t_6). \tag{3}$$

1.9. Numărul grafelor distinct colorate, α_1 vîrfuri cu o culoare x, α_2 vîrfuri cu o culoare y ș.a.m.d., este egal cu coeficientul monomului de forma $x^{\alpha_1} \cdot y^{\alpha_2} \ldots$ obținut prin dezvoltarea indicelui ciclurilor grupului de automorfism al grafului pentru $t_i = x^i + y^i + \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Astfel numărul grafelor distincte, obținute prin colorarea muchiilor hexagonului cu două culori R, T, se obține înlocuind în expresia (3): $t_1 = R + T$, $t_2 = R^2 + T^2$, $t_3 = R^3 + T^3$, $t_6 = R^6 + T^6$.
Se obține

$$D_{6(R,T)} = R^6 + R^5T + 3R^4T^2 + 3R^3T^3 + 3R^2T^4 + RT^5 + T^6. \tag{4}$$

Dacă considerăm că hexagonul este graful asociat unui LC cu $L_3 = 6$ grade de libertate cu R cuple de rotație și T cuple de translație, funcția $D_6(R, T)$ enumeră lanțurile posibile, și anume

— există un LC cu șase cuple de rotație (coeficientul lui R^6);
— un LC cu cinci cuple de rotație și una de translație;
— trei LC cu patru cuple de rotație și două de translație etc.

Cele 13 LC distincte sînt reprezentate în figura 2.

1.10. Schemei structurale a unui *LCpg* i se poate asocia, de asemenea, un graf definit ca și în cazul *LCpa*. Pentru precizarea felului cuplelor cinematice muchiile grafului asociat se vor „colora". Convenim ca în reprezentările ce le vom utiliza, muchiile corespunzătoare cuplelor superioare de clasa a IV-a să fie reprezentate punctat, în timp ce muchiile care corespund cuplelor de clasa a V-a vor fi reprezentate prin linie continuă. Astfel, în figura 3, mecanismul cu camă cu tachet în mișcare plan paralelă (*a*) provine din *LCpg* (*b*) căruia i se asociază graful cu muchii colorate (*c*). Cuplele superioare vor fi reprezentate prin alăturarea a două cuple de clasa a V-a.

2. SINTEZA NUMERICĂ A CUPLELOR (C_5, C_4) ȘI ELEMENTELOR ($n_2, n_3, \ldots, n_j$) *LCpg*

2.1. Sinteza numerică a cuplelor și elementelor are ca obiect stabilirea numerelor de cuple de diferite clase (C_5, C_4) și a elementelor de diferite ranguri ($n_2, n_3, \ldots, n_j$) care intră în structura lanțurilor cu anumite caracteristici impuse (numărul total de elemente e, gradul de libertate L_3,

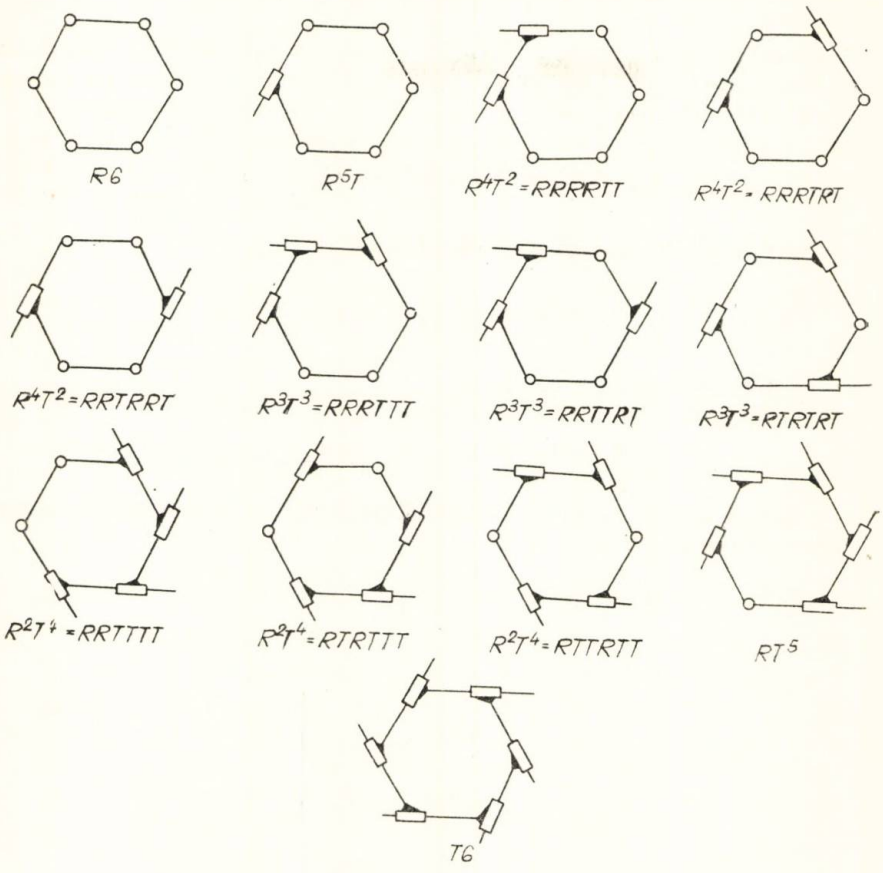

R6
R5T
R4T2=RRRRTT
R4T2=RRRTRT
R4T2=RRTRRT
R3T3=RRRTTT
R3T3=RRTTRT
R3T3=RTRTRT
R2T4=RRTTTT
R2T4=RTRTTT
R2T4=RTTRTT
RT5
T6

Fig. 2

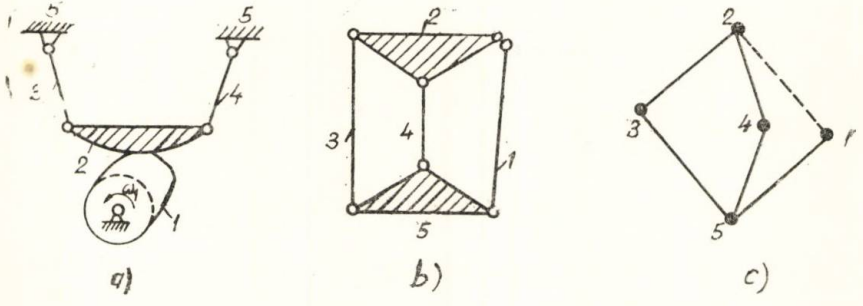

5
5
4
2
1
a)
2
3
4
1
5
b)
2
3
4
1
5
c)

Fig. 3

numărul contururilor deformabile N). În continuare, vom considera sinteza structurală a *LCpg* cu un anumit număr de contururi și grad de libertate dat.

Formulele structurale ale *LCpg* se obțin prin generalizarea celor corespunzătoare *LCpa* [5], [23], [28]

— gradul de libertate

$$L_3 = 3e - 2C_5 - C_4, \tag{5}$$

— numărul de contururi deformabile

$$N = C_5 + C_4 - e + 1, \tag{6}$$

— numărul total de elemente

$$e = n_2 + n_3 + \ldots + n_{j_{\max}}, \tag{7}$$

— relația dintre numărul total al cuplelor și numerele elementelor de diferite ranguri

$$2\,(C_5 + C_4) = 2n_2 + 3n_3 + \ldots + jn_j. \tag{8}$$

Combinînd relațiile (5) și (6) se poate scrie

$$e + C_4 = 2\,(N - 1) + L_3, \tag{9}$$

$$C_5 + C_4 = 3\,(N - 1) + L_3. \tag{10}$$

Înlocuind (7), (8) în (9) și (10) se obține, în final,

$$(n_2 + C_4) - L_3 = n_4 + 2n_5 + \ldots + (j - 3)\,n_j, \tag{11}$$

$$e + C_4 - L_3 = n_3 + 2n_4 + \ldots + (j - 2)\,n_j. \tag{12}$$

Ecuațiile (9)—(12) alcătuiesc un sistem care permite determinarea numerelor de cuple (C_5, C_4), elemente (e) și elemente de diferite ranguri $(n_2, n_3, \ldots, n_j)$ pentru *LCpg* cu N contururi și L_3 grade de libertate.

2.2. Dacă se fac notațiile

$$e_e = e + C_4, \tag{13}$$

$$C_{5e} = C_5 + 2C_4, \tag{14}$$

$$n_{2e} = n_2 + C_4, \tag{15}$$

relațiile (9)—(12) devin

$$e_e = 2\,(N-1) + L_3, \tag{16}$$

$$C_{5e} = 3\,(N-1) + L_3, \tag{17}$$

$$n_{2e} - L_3 = n_4 + 2n_5 + \ldots + (j-3)\,n_j, \tag{18}$$

$$e_e - L_3 = n_3 + 2n_4 + \ldots + (j-2)\,n_j. \tag{19}$$

Aceste formule corespund sintezei numerice a elementelor *LCpa* cu e_e elemente, C_{5e} articulații, pe care le vom numi lanțuri echivalente celor cu cuple superioare. După cum se știe, o cuplă plană superioară poate fi înlocuită printr-un element și două cuple inferioare. Un studiu aprofundat asupra posibilităților de echivalare a cuplelor plane și spațiale de diferite clase a fost dezvoltat de N. I. Manolescu.

2.3. Pe baza formulelor și constatărilor de mai sus se pot trage următoarele concluzii :

— *LCpg* au același număr de elemente de diferite ranguri, ca și *LCpa* echivalente lor, cu excepția elementelor binare care diferă în minus prin numărul cuplelor superioare ;

— *LCpg* au același grad de libertate și același număr de contururi cu *LCpa* echivalente.

2.4. Numărul maxim al cuplelor superioare din structura *LCpg* cu N contururi și L_3 grade de libertate rezultă din relația (10) considerînd $C_5 = 0$

$$C_4 \leqslant \frac{3\,(N-1) + L_3}{2}. \tag{20}$$

Rangul maxim al elementelor din structura *LCpg* este egal cu cel corespunzător *LCpa* echivalente [16]

$$j = \frac{e_e - L_3 + 4}{2} \tag{21}$$

sau, ținînd cont de relația (11),

$$j = N + 1. \tag{22}$$

2.5. În teoria numerelor este definită noțiunea de partiție ca o aplicație univocă a unei mulțimi $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ de numere întregi mai mari ca zero, în mulțimea $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ de întregi > 0. Vom nota această partiție

$$p = (\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, \ldots, \lambda_s^{\alpha_s}). \tag{23}$$

Prin definiție, ponderea partiției este numărul întreg

$$w(p) = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_s\lambda_s, \tag{24}$$

iar dimensiunea

$$d(p) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s. \tag{25}$$

În lucrarea [28] se propune introducerea noțiunii de „partiție asociată" pentru definirea structurii numerice a elementelor lanțurilor cu n_2, $n_3, \ldots, n_j$ elemente de diferite ranguri, sub forma

$$p = (2^{n_2}, 3^{n_3}, \ldots, j^{n_j}). \tag{26}$$

În cazul *LCpg* dimensiunea partiției asociate este

$$d(p) = n_2 + n_3 + \ldots + n_j = e, \tag{27}$$

$$w(p) = 2n_2 + 3n_3 + \ldots + jn_j = 2(C_5 + C_4). \tag{28}$$

Gradul de libertate al unui *LCpg* cu partiția asociată p este

$$L_3 = 3d(p) - w(p) + C_4. \tag{29}$$

3. METODA PROPUSĂ PENTRU SINTEZA STRUCTURALĂ A *LCpg*

3.1. Metoda de sinteză structurală a *LCpg* pe care o propunem se bazează pe teoria grafelor și permite totodată utilizarea teoremei lui Polya pentru stabilirea cu precizie a numărului de variante.

Deoarece *LCpg* cu un număr dat de contururi diferă de *LCpa* echivalente numai prin elementele binare, este evident că grafele contractate corespunzătoare *LCpg* sînt identice cu grafele contractate corespunzătoare *LCpa* echivalente cu același număr de contururi. În prezent, se cunosc grafele contractate cu $N = 1, 2, \ldots, 5$ contururi [28].

3.2. Pentru efectuarea sintezei structurale a *LCpg* cu N contururi și L_3 grade de libertate se determină mai întîi soluțiile pentru e, C_5 și C_4 din ecuațiile (9) și (10). Numerele elementelor de diferite ranguri (n_2, $n_3, \ldots, n_j$) se pot obține pornind de la structura *LCpa* echivalente, obținută prin metoda tabelară prezentată în lucrările [28], [17]. Se obțin astfel partițiile asociate schemelor structurale ale *LCpg*.

3.3. Pornind de la grafele contractate cu N contururi prin operația de „expansiune", se dispun pe muchiile acestora vîrfurile de grad doi, obținîndu-se în final grafe cu un număr total de vîrfuri $C_5 + C_4$. Această operație poate fi privită ca o „colorare" a muchiilor grafelor contractate, numărul variantelor distincte rezultînd prin teorema lui Polya.

3.4. Prin „colorarea" muchiilor grafelor obținute la punctul anterior

— C_5 muchii cu o culoare,

— C_4 muchii cu o altă culoare,

rezultă grafele asociate *LCpg*.

Și în acest caz se poate utiliza teorema lui Polya, cu condiția să se cunoască indicele ciclurilor grupului de automorfism al grafului inițial considerat.

Se obțin astfel grafele asociate *LCpg*, avînd muchiile colorate cu două culori și reprezentînd cele două feluri de cuple : cuplele superioare (C_4) și cele inferioare (C_5).

3.5. *LCpg* obținute în final nu trebuie să conțină contururi deformabile de clasă mai mică ca patru. Clasa unui contur z o vom defini prin

$$\Phi_z = C_{5Z} + 2C_{4Z}, \tag{30}$$

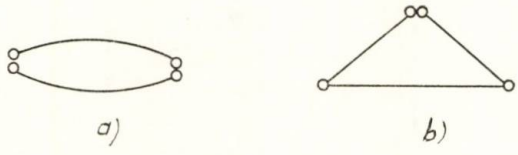
unde C_{5Z} și C_{4Z} reprezintă numărul cuplelor de clasa a 4-a, respectiv a 5-a, care mărginesc conturul Z.

4. *LCpg* CU $N = 1,2$ CONTURURI ȘI GRAD DE LIBERTATE $L_3 = 4$

4.1. *LCpg* cu un contur au ca lanț echivalent patrulaterul articulat. Se obțin *LCpg* cu

$C_4 = 2$; $C_5 = 0$; partiția asociată (2^2) (fig. 4 *a*),

$C_4 = 1$; $C_5 = 2$; partiția asociată (2^3) (fig. 4 *b*).



a) *b)*

Fig. 4

4.2. *LCpg* cu $N = 2$, $L_3 = 4$ au ca *LCpa* echivalente, conform relațiilor (13), (14) lanțurile cu $e_e = 6$; $C_{5e} = 7$. Acestea sînt cele două lanțuri Watt și Stephenson cu partiția asociată $(2^2, 3^2)$. *LCpg* vor avea, de asemenea, $n_3 = 2$, dar numărul elementelor binare va fi

$$n_2 = n_{2e} - C_4.$$

Numărul maxim al cuplelor superioare este dat de relația (20). Pentru cazul de față se obține

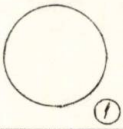
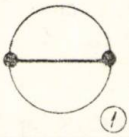
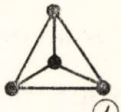
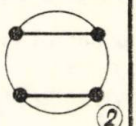
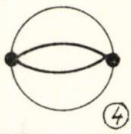
$$C_4 \leqslant \frac{7}{2}.$$

Rezultă astfel structura numerică a *LCpg* cu $N = 2$, $L_3 = 4$
a) $C_4 = 3$, $e = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$ partiția asociată $(2, 3^2)$,
b) $C_4 = 2$, $e = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$ partiția asociată $(2^2, 3^2)$,
c) $C_4 = 1$, $e = 5$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$ partiția asociată $(2^3, 3^2)$.

4.3. Grafele contractate necesare sintezei structurale a *LCp* cu $N = 1, 2, 3$ contururi sînt redate în tabela 1.

Tabela 1

Grafele contractate cu N=1,23 contururi

Numărul de contururi	Partiția asociată	Schemele grafelor contractate	
N=1	—		
N=2	(3^2)		
N=3	(3^4)		
	$(3^2,4)$		
	(4^2)		

Pentru lanțurile cu două cantururi există un singur graf contractat cu partiția asociată (3^2).

4.4. Pentru partiția $(2, 3^2)$, deoarece există un singur punct de grad doi, rezultă prin operația de „expansiune" un singur graf (notat „*a*" în fig. 5).

„Colorarea" muchiilor cu două culori corespunzătoare celor două tipuri de cuple ($C_4 = 3$, $C_5 = 1$) are ca rezultat obținerea unui singur graf „colorat" asociat unui *LCpg*, deoarece, pentru respectarea clasei minime cele două muchii care unesc punctele de grad trei, trebuie să corespundă unor cuple superioare. Se obține graful cu muchii colorate notat 2/1 în figura 5.

4.5. Pentru partiția $(2^2, 3^2)$ cele două puncte de grad doi pot fi plasate, fie pe aceeași muchie a grafului contractat, fie pe muchii distincte.

Se obțin grafele *b*1, *b*2 (fig. 5). Prin „colorarea" muchiilor acestor grafe, corespunzător numerelor de cuple ($C_4 = 2$, $C_5 = 3$), se obțin gra-

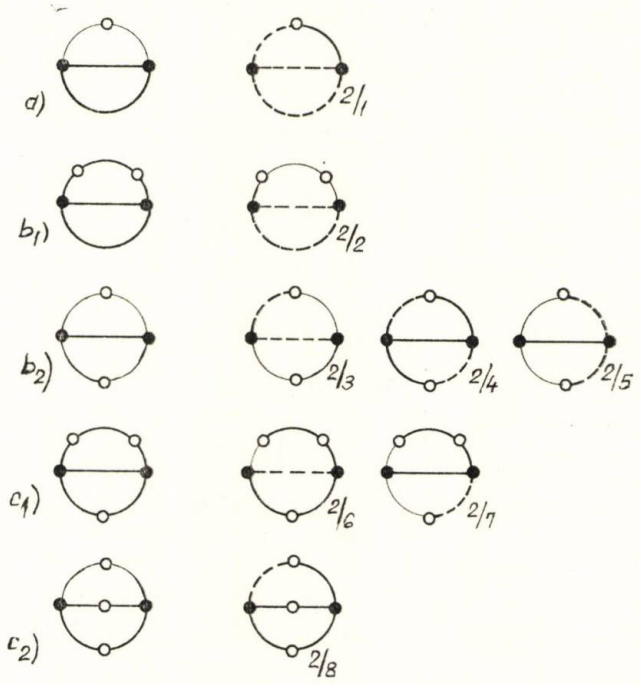


Fig. 5

fele colorate 2/2, respectiv, 2/3...2/5 care satisfac și condiția referitoare la clasa contururilor.

4.6. Pentru partiția $(2^3, 3^2)$ cele trei puncte de gradul doi pot fi dispuse : două pe o muchie, unul pe alta sau cîte un punct pe fiecare muchie. Se obțin astfel grafele c_1 și c_2 din figura 5. Prin colorarea muchiilor acestor grafe în conformitate cu numărul lor de cuple ($C_4 = 1$, $C_5 = 5$) se obțin grafele „colorate" 2/6, 2/7, respectiv, 2/8.

4.7. Celor 8 grafe cu muchii colorate obținute mai sus le corespund cele 8 *LCpg* cu $N = 2$ contururi redate în tabela 2.

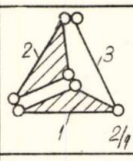
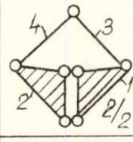
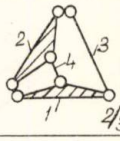
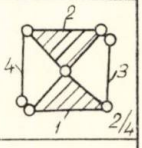
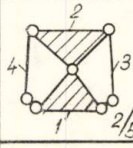
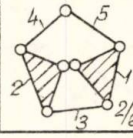
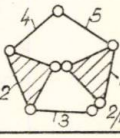
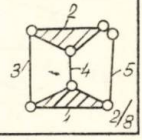
5. *LCpg* CU $N = 3$ CONTURURI ȘI GRAD DE LIBERTATE $L_3 = 4$

5.1. *LCpg* cu $N = 3$, $L_3 = 4$ au ca lanțuri echivalente, *LCpa* cu $e_e = 8$, $C_{5e} = 10$. Conform relației (20), numărul maxim de cuple superioare este în acest caz

$$C_{4\max} = 5.$$

Tabela 2

LCpg cu N=3 contururi și grad de libertate $L_3=4$

Nr. cuplelor C_4	Partiția asociată	Scheme structurale		
3	$(2,3^2)$			
2	$(2^2,3^2)$			
				
1	$(2^3,3^2)$			

Numărul elementelor este cuprins conform relației (5.8) între limitele :

$e_{max} = 7$ pentru $C_4 = 1$ (cazul $C_4 = 0$ nu se ia în considerație deoarece corespunde pentru *LCpa*) ;

$e_{min} = 3$ pentru $C_4 = 5$.

Acest ultim caz corespunde *LC* care au numai cuple superioare ($C_5 = 0$), numite de autor *LCp* superioare.

Structura numerică a cuplelor și elementelor *LCpg* cu $N = 3$, $L_3 = 4$ este redată în tabela 3.

5.2. *LCpg* cu $e = 3$, $C_5 = 0$, $C_4 = 5$ au, conform tabelei 3, o singură partiție asociată, și anume (3^2, 4). Pentru alcătuirea lor se pornește de la graful 3 (tab. 1). Deoarece în acest caz $n_2 = 0$ și $C_4 = 5$, rezultă că se va obține un singur *LCpg* care are ca graf asociat chiar graful 3, la care toate cele cinci muchii vor reprezenta cuple superioare.

5.3. *LCpg* cu $e = 4$, $C_5 = 2$, $C_4 = 4$ pot prezenta, conform tabelei 3, trei partiții asociate, și anume :

a) Partiția (3^4)

Lanțurile cu această partiție au la bază grafele cu $N = 3$ contururi notate 1 și 2 (tab. 1). „Colorarea" muchiilor grafului 1 două muchii cu o culoare (reprezentînd cuplele de clasa a 5-a cu linie plină) și celelalte patru cu o altă culoare (reprezentînd cuplele de clasa a 4-a linii punctate) conduce la două grafe cu muchii „colorate" (fig 6 *a*1 și *a*2). Aceeași operație

Tabela 3

Structura numerică a cuplelor și elementelor LCpg cu N=3, L_3=4

Numărul cuplelor cinematice		Nr. elementelor	Numărul elementelor de diferite ranguri „J"			Partiția asociată
C_4	C_5		n_2	n_3	n_4	
1	2	3	4	5	6	7
5	0	3	0	2	1	$(3^2,4)$
4	2	4	0	4	0	(3^4)
			1	2	1	$(2,3^2,4)$
			2	0	2	$(2^2,4^2)$
3	4	5	1	4	0	$(2,3^4)$
			2	2	1	$(2^2,3^2,4)$
			3	0	2	$(2^3,4^2)$
2	6	6	2	4	0	$(2^2,3^4)$
			3	2	1	$(2^3,3^2,4)$
			4	0	2	$(2^4,4^2)$
1	8	7	3	4	0	$(2^3,3^4)$
			4	2	1	$(2^4,3^2,4)$
			5	0	2	$(2^5,4^2)$

pentru graful 2 permite obținerea unui singur graf „colorat", deoarece condiția respectării clasei minime a contururilor necesită ca muchiile duble să reprezinte obligatoriu cuple superioare (fig. 6. *a*3).

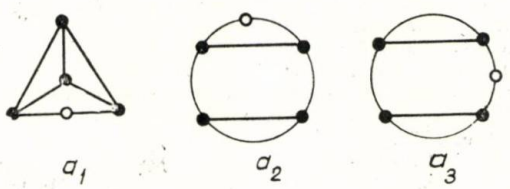


Fig. 6

b) Partiția (2, 3^2, 4)

Grafele asociate *LCpg* cu această partiție asociată se obțin pornind de la graful contractat 3 (tab. 1). Punctul de grad doi poate fi dispus în două moduri distincte pe muchiile grafului contractat inițial, obținîndu-se grafele *b*1, *b*2 (fig. 7). Colorarea muchiilor acestor grafe în concordanță

cu numărul și felul cuplelor conduce la obținerea grafelor asociate *LCpg* cu partiția respectivă.

c) Partiția $(2^2, 4)$

Grafele asociate *LCpg* cu această partiție rezultă prin „expansiunea" grafului 4 (tab. 1) urmată de o colorare a muchiilor grafelor obținute cu

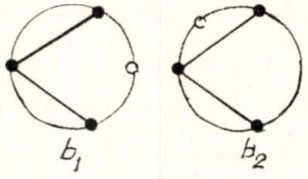


Fig. 7

două culori reprezentînd cele două feluri de cuple. La operația de expansiune a grafului 4 cele două puncte de grad doi trebuie dispuse în mod obligatoriu pe două muchii distincte, pentru respectarea condiției clasei minime a contururilor.

5.4. Procedînd în mod asemănător, ca în exemplele de mai sus și pentru celelalte partiții asociate cuprinse în tabela 3, s-au obținut grafele „colorate" asociate *LCpg* cu $N = 3$, $L_3 = 4$. Cele 143 de lanțuri sînt redate în tabela 4 grupate în funcție de partițiile asociate lor.

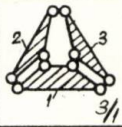
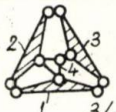
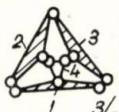
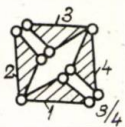
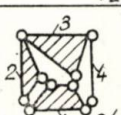
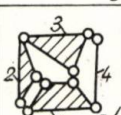
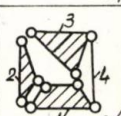
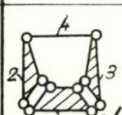
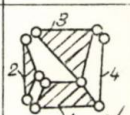
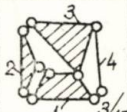
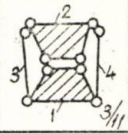
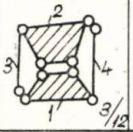
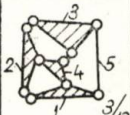
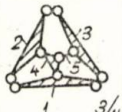
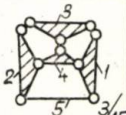
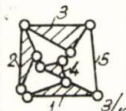
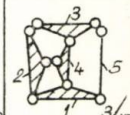
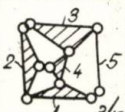
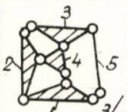
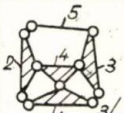
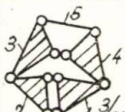
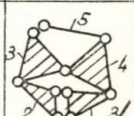
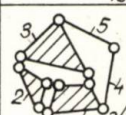
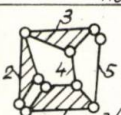
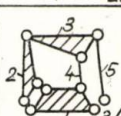
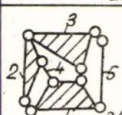
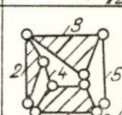
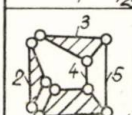
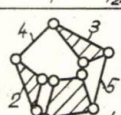
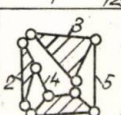
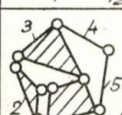
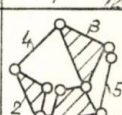
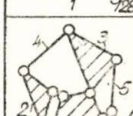
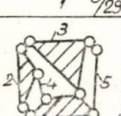
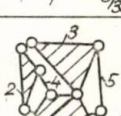
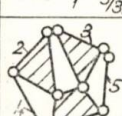
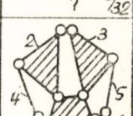
Primită la redacție la 2 iulie 1971

BIBLIOGRAFIE

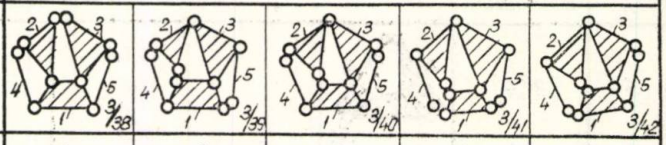
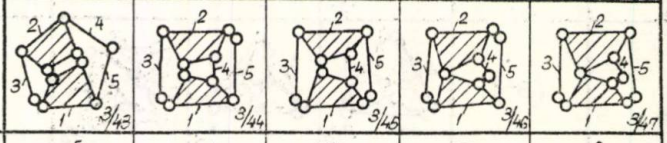
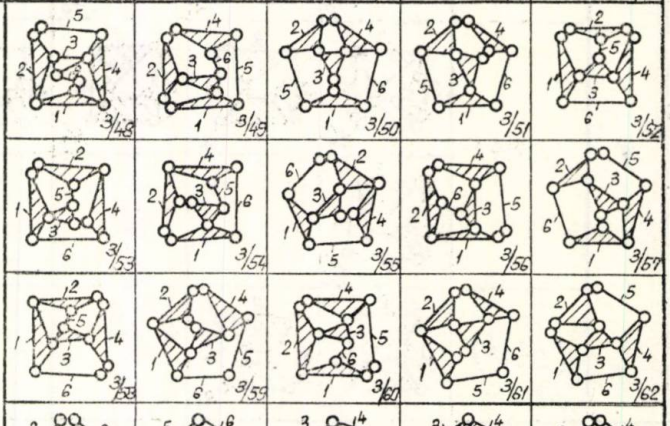
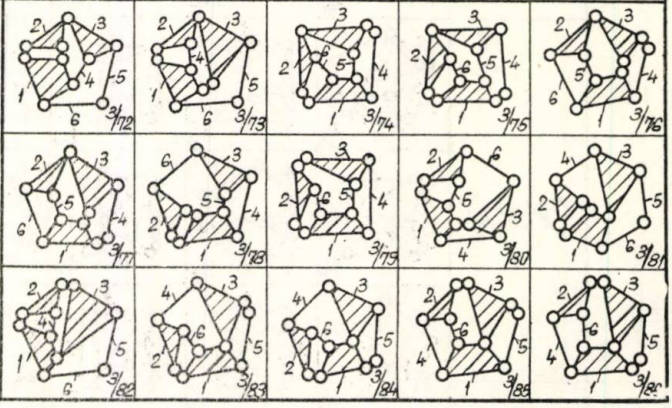
1. E. Arghiriade, A. Dragomir, P. Dragomir, *Algebră*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1964.
2. C. Berge, *Teoria grafurilor și aplicațiile ei* (trad. din lb. franceză), Edit. tehnică, 1969.
3. R.C. Bogdan, T.V. Huncher, *Sistematizarea generală și calculul unitar al mecanismelor fundamentale plane, pentalatere*, St. cerc. mec. apl., **24**, *2* 1967.
4. F. Buchsbaum, F. Preudenstein, *Synthesis of Kinematic structure of geared Kinematic Chains and other Mechanisms*, J. Mechanisms, *5*, *3* 1970.
5. F.R.E. Crossley, *A contribution to Gruebler's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms*, J. Engng, for Industry, February 1964.
6. — *The permutations of Kinematic Chains of eight member or less from the Graph — Theoretic Viewpoint, Developmens in Theoretical and Applied Mechanics*, **2**, p. 467—486, 1965.
7. T. Davies, *An Extension of Manolescu's Classification of Planar Kinematic Chains and Mechanisms of Mobility* $M \geqslant 2$, *using Graph Theory*, J. Mechanisms, **3**, *2*, p. 87—100, 1968.
8. L. Dobrjanshyj, F. Freudenstein, *Some Applications of Graph Theory to structural Analysis of Mechanisms*, J. Engng. for Industry, *89*, 1967.
9. R. Franke, *Vom Aufbau der Getriebe*, I. Bd, Düsseldorf, VDI — Verlag, *3*, 1958.
10. F. Freudenstein, *The basic Concepts of Polya's Theory of Enumeration, with Exemples from the structural Classification of Mechanisms*, J. Mechanisms, **2**, *3* 1967.
11. S.L. Haas, F.R.E. Crossley, *Structural Synthesis of a Four — Bit Binary Adding Mechanism*, 10-th ASME Mechanisms Conference, Paper *68*, **25**, 1968.
12. Kurt Hain, *Angewandte Getriebelehre*, VDI — Verlag Düsseldorf, 1961.
13. F. Harary, *The number of linear, directed, rooted and connected graphs*, Trans. Am. Math. Soc., *78*, 1955.

Tabela 4

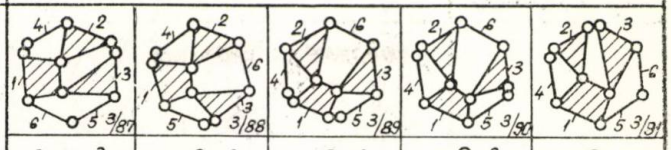
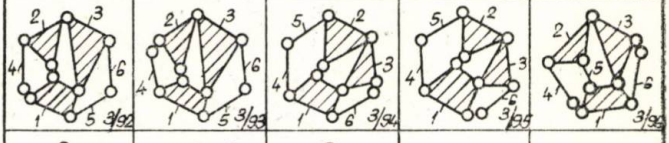
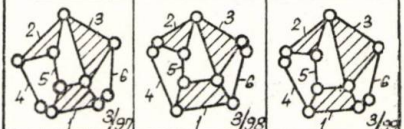
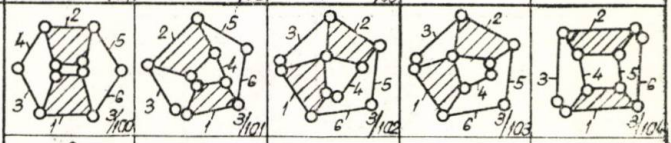
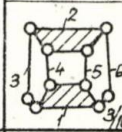
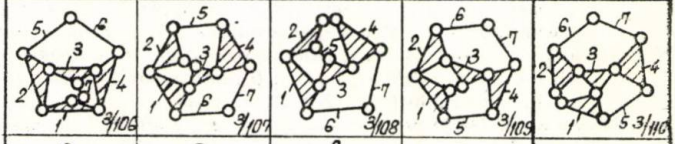
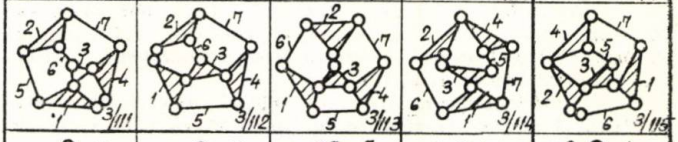
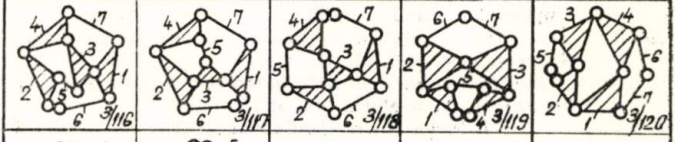
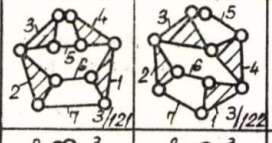
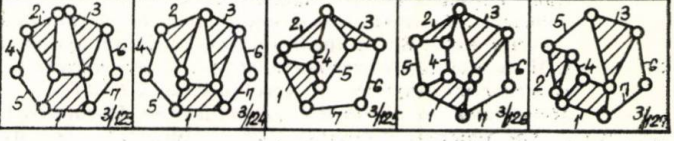
LCpg cu N=3 contururi şi L_3=4 grade de libertate

Nr. ciclelor C_4	Partiția asociată	Scheme structurale				
5	$(3^2,4)$	 3/1				
4	(3^4)	 3/2	 3/3	 3/4		
	$(2^3,4^2)$	 3/5	 3/6	 3/7	 3/8	 3/9
		 3/10				
	$(2^2,4^2)$	 3/11	 3/12			
3	$(2,3^4)$	 3/13	 3/14	 3/15	 3/16	 3/17
		 3/18	 3/19	 3/20	 3/21	 3/22
	$(2^2,3^2,4)$	 3/23	 3/24	 3/25	 3/26	 3/27
		 3/28	 3/29	 3/30	 3/31	 3/32
		 3/33	 3/34	 3/35	 3/36	 3/37

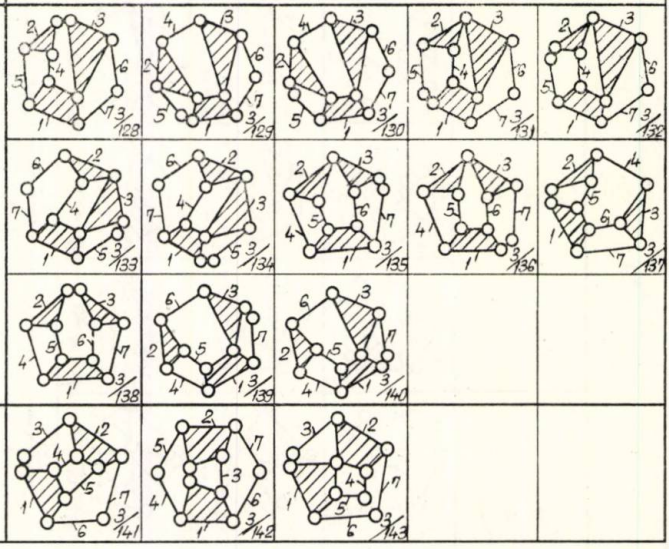
continuare tabela 4

Nr. cuplelor C_4	Partiția asociată	Scheme structurale
3	$(2^2,3^2,4)$	
	$(2^3,4^2)$	
2	$(2^2,3^4)$	
	$(2^3,3^2,4)$	

continuare tabela 4

Nr. cuplelor C_4	Partiția asociată	Scheme structurale
2	$(2^3,3^2,4)$	
		
		
	$(2^4,4^2)$	
		
1	$(2^3,3^4)$	
		
		
		
	$(2^4,3^2,4)$	

continuare tabela 4

Nr. cuplelor C_4	Partiția asociată	Scheme structurale
1	$(2^4, 3^2, 4)$	
	$(2^5, 4^2)$	

14. F. Kiper, *Kurvendiferentialgetriebe*, Konstruktion, *2*, 1968.
15. A. Kuroș, *Teoria grupurilor* (trad. din lb. rusă) București, Edit. tehnică, 1955.
16. N.I. Manolescu, *Une méthode unitaire pour la formation des chaines cinématiques et des mécanismes plans articulés avec differents dégrés de liberté et mobilité*, Rev. Roum. Sci. Techn., Série de Mécanique Appliquée, **9**, *6*, 1263 — 1300, 1964.
17. N.I. Manolescu, Iosif Tempea, *Sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane articulate cu e = 10 elemente, C_5 = 13 articulații și grad de libertate L_3 = 4*, Bul. Inst. polit. „Gh. Gheorghiu-Dej", **XXXI**, *4*, 1969.
18. N.I. Manolescu, *De la grinzile Baranov prin „grafizare" la lanțurile și mecanismele plane articulate*, A XI-a ses. științifică a Inst. polit., București, 1970.
19. P. Miresc u, Al. Roșu, *Teoria grafelor*, București, Edit. militară, 1968.
20. O. Ore, *Theory of Graphs, American Mathematical society Colloquium Publications*, Vol. 38, Providence, R.I., 1962.
21. — *Grafele și aplicațiile lor* (trad. din lb. engleză), București, Edit. științifică, 1968.
22. B. Paul, *A unified criterion for the Degree of constraint of Plane Kinematic Chaines*, J. of Applied Mechanics, March 1960.
23. Chr. Pelecudi, *Metoda contururilor în sinteza numerică și structurală a lanțurilor cinematice*, St. cerc. mec. apl., **25**, *3*, 1967.
24. G. Polya, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Math., *68*, 1937.
25. J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1968.
26. Iosif Tempea, *Sistematizarea lanțurilor cinematice plane cu cuple superioare și inferioare*, Ses. științifică festivă, Inst. Polit. „Gh. Gheorghiu-Dej", București, 1—3 nov., 1968.
27. — *Sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane generale cu grad de libertate L_3=5*, Conf. națională de mec. apl., București, iunie, 1969.
28. — *Contribuții la sinteza structurală a lanțurilor și mecanismelor plane cu ajutorul teoriei grafelor*, Ses. științifică a Acad. Militare, aprilie 1970.
29. R. Voinea, M. Atanasiu, *Determinarea vitezelor și accelerațiilor la un mecanism prin metoda ciclurilor independente*, St. cerc. mec. apl., *1*, 1964.
30. — *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, București, Edit. tehnică, 1964.
31. L.S. Woo, *Type Synthesis of plane linkages*, J. Engng. for Industry, *89*, 1967.

CALCULUL DE REZISTENȚĂ MECANICĂ AL CAMERELOR SPIRALE METALICE

de CESAR BUDA, ȘTEFAN POPESCU
Institutul politehnic Iași

Urmărind, în linii generale, calculul expus în [1] pentru camera spirală metalică din figura 2 *b*, se deduc formulele necesare determinării eforturilor unitare în elementele componente ale camerelor spirale metalice din figurile 2 *a*, *b*, *c*. Se efectuează particularizări ale rezultatelor în concordanță cu modul de rigidizare a antablamentelor inelare ale acestora.
Se întregește calculul de rezistență mecanică al camerelor spirale metalice, acesta putînd fi condus într-un mod unitar pentru toate tipurile de camere spirale metalice utilizate curent în practică.

INTRODUCERE

La proiectarea camerelor spirale metalice calculul rezistenței mecanice constituie o problemă care trebuie rezolvată cu atenție pentru fiecare caz în parte. Elementele camerei spirale ce intervin în calculul de rezistență, în general, sînt următoarele (fig. 1) :

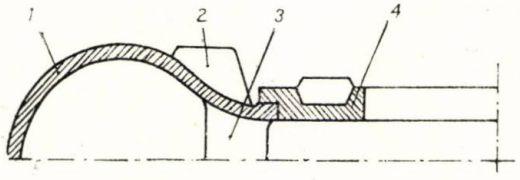


Fig. 1

1 — voluta sau camera spirală propriu-zisă ;
2 — antablamentele inelare superior și inferior ;
3 — antretoazele statorului ;
4 — bazele superioare și inferioare ale aparatului director (fundurile distribuitorului).

ST. CERC. MEC. APL., TOM, 31, NR. 1, 1972, P. 135–156

Caracteristicile constructive ale elementelor enumerate mai sus, considerate semnificative pentru particularizarea stabilirii sarcinilor, deformațiilor și eforturilor unitare, sînt : modul de variație a înălțimii antretoazelor statorului pe direcție radială (profilul meridian interior al antablamentelor inelare) și procedeul de rigidizare a antablamentelor inelare.

La turbinele hidraulice de turație specifică mijlocie sau înaltă, utilizate pentru căderi mici sau mijlocii, variația înălțimii antretoazelor este mică, iar uneori, chiar nulă (fig. 2 *a*), pe cînd la cele lente, de înaltă cădere, aceasta este pronunțată, profilul meridian interior al antablamentelor inelare fiind curb (fig. 2 *b*). Un caz intermediar ar fi acela al camerelor metalice sudate (fig. 2 *c*), la care variația înălțimii antretoazelor este liniară.

Camerele spirale metalice pot prezenta antablamente inelare rigidizate meridian, cu rigidizări meridiane și circulare, sau — situație nepreferată în practică — fără rigidizări.

Modelul fizic ce a constituit suportul pentru efectuarea calculelor este reprezentat de un sector de cameră spirală (carcasă) rigidizată meridian a cărei profil meridian interior al antablamentelor este curb și cu variație pronunțată a înălțimii antretoazelor de la intrare la ieșire, corespunzător unui pas al antretoazelor și secționat — datorită simetriei geometrice și statice — după un plan median prin distribuitorul turbinei (fig. 1 și 3).

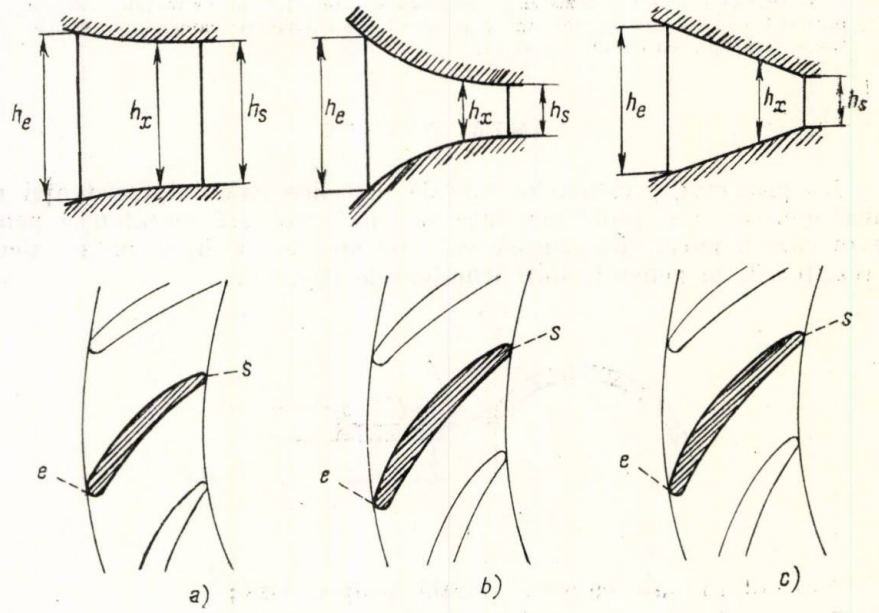


Fig. 2

În felul acesta problema calculului rezistenței mecanice a camerelor spirale metalice poate fi tratată într-un mod unitar, rezultatele fiind susceptibile de a fi particularizate corespunzător caracteristicilor constructive enumerate mai sus.

Pentru lămurirea modului de efectuare a calculelor ulterioare precizăm următoarele :

— valorile forțelor și momentelor, pentru modelul fizic expus, sînt raportate la un sector de cameră spirală, corespunzător unui pas al antre-

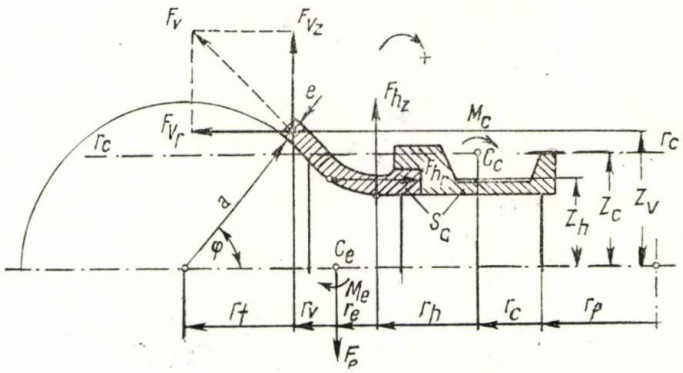


Fig. 3

toazelor, secționat printr-un plan median prin distribuitorul turbinei (fig. 3) ;

— în ipoteza de calcul adoptată, sarcinile ce acționează asupra elementelor camerei spirale se datoresc în exclusivitate presiunii statice a apei ;

— voluta se comportă ca o membrană, ea fiind solicitată numai de o forță de tracțiune F_v, tangentă la aceasta ;

— antablamentul inelar împreună cu fundul distribuitorului situat de aceeași parte — datorită unei bride de asamblare ce poate transmite, pe lîngă o forță de tracțiune și un moment încovoietor — alcătuiesc un ansamblu unitar, ce este solicitat la încovoiere ;

— antretoazele, în număr de n_e, sînt solicitate la tracțiune centrică combinată cu încovoiere.

1. CALCULUL DE REZISTENȚĂ MECANICĂ AL VOLUTEI

Porțiunea de volută corespunzătoare modelului fizic adoptat poate fi asimilată, cu suficientă precizie, cu un sector de tor inelar (fig. 4) ce are ca profil generator un sector de coroană circulară, cu raza interioară a, iar cea exterioară $a + e$ și unghiul la centru $\pi - \varphi$ (fig. 5), al cărui centru se deplasează pe o curbă directoare circulară de rază r_t.

Pentru mărirea acurateței calculului, valorile a și r_t se determină în planul bisector al sectorului-model fizic.

Separînd o porțiune $d\sigma$ din suprafața torului de lungime $\rho \cdot \Delta\psi$ și care are ca profil generator sectorul de coroană circulară ce prezintă unghiul la centru $\pi - \varphi$, aceasta se va afla în echilibru sub acțiunea presiunii apei și a forțelor $\Delta F_{v\theta}$ și $\Delta F_{v\pi}$, pe care le-am descompus după direcțiile z, de versor $\bar{k}$ (axul vertical al rotorului turbinei) și razei vectoare OM, de versor $\bar{l}$.

Proiectînd forţele ce se echilibrează pe direcţia $\bar{l}$ obţinem

$$\Delta F_{v\theta l} = -\int_{\Gamma} p \cdot \rho \cdot \Delta\psi \cdot \bar{l} \cdot \bar{n} \cdot ds. \tag{1}$$

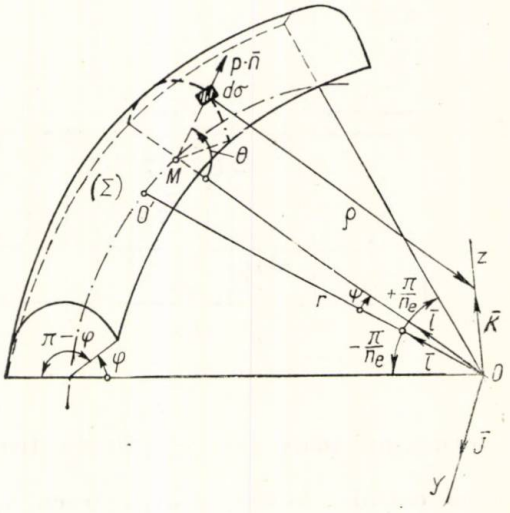


Fig. 4

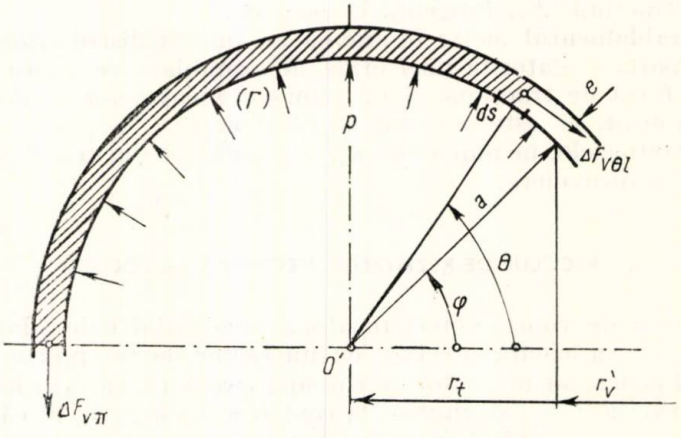


Fig. 5

Exprimînd produsul scalar $\bar{n} \cdot \bar{l}$ şi arcul elementar ds în funcţie de variabila θ, ce are semnificaţia din figura 2, obţinem integrala simplă

$$\Delta F_{v\theta l} = -a \cdot p \cdot \rho \cdot \Delta\psi \cdot \int_{\theta}^{\pi} \cos\theta \cdot d\theta = a \cdot p \cdot \rho \cdot \sin\theta \cdot \Delta\psi. \tag{2}$$

Deoarece $\Delta F_{v\theta l} = \Delta F_{v\theta} \cdot \sin\ \theta$, rezultă

$$\Delta F_{v\theta} = a \cdot p \cdot \rho \cdot \Delta\psi. \tag{3}$$

Efortul unitar de întindere $\sigma_{v\theta}$, ce apare în pereții volutei este dat de raportul

$$\sigma_{v\theta} = \frac{\Delta F_{v\theta}}{\Delta\omega_\theta} = \frac{a \cdot p \cdot \rho \cdot \Delta\psi}{e \cdot \rho \cdot \Delta\psi}. \tag{4}$$

Din (4) deducem constanța efortului unitar $\sigma_{v\theta}$ iș deci putem omite indicele θ. Prin urmare,

$$\sigma_v = \frac{a \cdot p}{e}. \tag{4'}$$

2. CALCULUL DE REZISTENȚĂ MECANICĂ AL ANTRETOAZELOR

Considerînd modelul fizic din figura 1, acțiunea celeilalte jumătăți de sector, simetrice față de planul median al distribuitorului, se înlocuiește prin forța axială F_e și momentul încovoietor M_e aplicate în centrul de masă al secțiunii antretoazei de coordonate $r = r_e$, $z = 0$. Forța tăietoare în aceeași secțiune, datorită simetriei amintite, este nulă.

Influența volutei poate fi redusă la forța F_v, situată în planul bisector al sectorului de tor și avînd pentru punctul de aplicație $\theta = \varphi$, $r = r_v = r_t - (a + 0{,}5\ e)\ \cos\ \varphi$, $z = z_v = (a + 0{,}5\ e)\ \sin\ \varphi$.

Semnificațiile simbolurilor fiind cele de pe figura 1 :

F_{vr} — proiecția forței F_v pe direcția r, de versor $\bar{i}$ poate fi determinată de integrala de suprafață

$$F_{vr} = \iint_{\Sigma} p \cdot \bar{n} \cdot \bar{i} \cdot \mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

unde Σ este suprafața interioară a sectorului de tor cu care se asimilează voluta.

Exprimînd produsul scalar $\bar{n} \cdot \bar{i} = -\cos\ \theta \cdot \cos\ \psi$ și elementul de suprafață $\mathrm{d}\sigma = a \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\psi = a(r_t - a\cos\ \theta)\ \mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}\psi$, integrala de suprafață (5) se transformă în integrala dublă :

$$F_{vr} = a \cdot p \left(- r_t \int_{\varphi}^{\pi} \cos\ \theta \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{n_e}}^{+\frac{\pi}{n_e}} \cos\ \psi \cdot \mathrm{d}\psi + a \int_{\varphi}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{n_e}}^{+\frac{\pi}{n_e}} \cos\ \psi \cdot \mathrm{d}\psi \right), \tag{6}$$

care, integrată, ne dă următoarea soluție :

$$F_{vr} = 2a \cdot p \cdot \sin \frac{\pi}{n_e} \left(r_t - \frac{a}{2} \cos\ \varphi + a \frac{\pi - \varphi}{2 \sin\ \varphi} \right) \cdot \sin\ \varphi. \tag{7}$$

În practică numărul de antretoaze fiind mai mare decît șase, putem considera acoperitor $\sin \frac{\pi}{n_e} \cong \frac{\pi}{n_e}$, astfel încît din (7) rezultă

$$F_v = \frac{2\pi}{n_e} \cdot a \cdot p \cdot \left(r_t - \frac{a}{2} \cos\varphi + a \frac{\pi - \varphi}{2 \sin \varphi} \right). \tag{8}$$

Presiunea apei exercitată asupra antablamentului inelar și fundului distribuitorului produce forțele F_{hr} și F_{hz}, F_{hr} — componenta forței de presiune după direcția r, de versor $\bar{i}$ — poate fi calculată cu ajutorul integralei de suprafață

$$F_{hr} = \iint_{\Sigma} p \cdot \bar{n} \cdot \bar{i} \, \mathrm{d}\sigma, \tag{9}$$

unde Σ poate fi considerată suprafața laterală a unui sector de trunchi de con cu unghiul la centru $\frac{2\pi}{n_e}$, razele r'_v, r_s și înălțimea $z'_v - z_s$, unde $r'_v = r_t - a \cos \varphi$, $z'_v = a \cdot \sin \varphi$, iar r_s și z_s sînt coordonatele culeei antretoazei la ieșire (fig. 6).

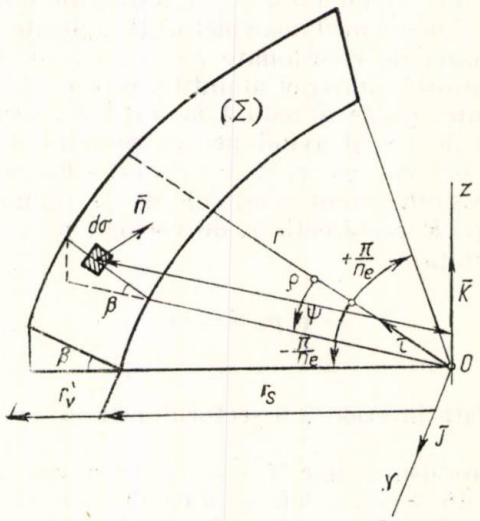


Fig. 6

Substituind în (9) produsul scalar $\bar{n} \cdot \bar{i}$ prin $-\sin \beta \cdot \cos \psi$ și elementul de suprafață $\mathrm{d}\sigma$ cu $\frac{\mathrm{d}z}{\sin \beta} \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\psi = [r_s + (z - z_s) \operatorname{ctg} \beta] \cdot \frac{\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}\psi}{\sin \beta}$, unde $\beta = \operatorname{arctg} \frac{z'_v - z_s}{r'_v - r_s}$, obținem integrala dublă (10)

$$F_{hr} = -p \cdot \int_{-\frac{\pi}{n_e}}^{+\frac{\pi}{n_e}} \cos \psi \cdot \mathrm{d}\psi \cdot \int_{z_s}^{z_v} [r_s + (z - z_s) \operatorname{ctg} \beta] \, \mathrm{d}z. \tag{10}$$

Integrînd, rezultă următoarea expresie

$$F_{hr} = -2 \cdot p \cdot \sin \frac{\pi}{n_e} \left[(r_s - z_s \cdot \operatorname{ctg} \beta) \cdot (z'_v - z_s) + \frac{z'^2_v - z^2_s}{2} \operatorname{ctg} \beta \right],$$

care, după calcule simple, devine

$$F_{hr} = -p \cdot \sin \frac{\pi}{n_e} \cdot (r'_v + r_s)\,(z'_v - z_s). \tag{11}$$

Cu aceeaşi remarcă ca pentru expresia lui F_v şi precizînd că semnul minus se datoreşte faptului că F_{hr} are sens contrar versorului $\bar{i}$, în final obţinem

$$F_{hr} = \frac{\pi}{n_e} \cdot p \cdot (r'_v + r_s)\,(z'_v - z_s). \tag{11'}$$

Expresia (11') se poate deduce direct, considerînd suprafaţa laterală a sectorului trunchiului de con desfăşurată, ca fiind un trapez plan cu bazele $2\pi \cdot r_s/n_e$, $2\pi \cdot r'_v/n_e$ şi înălţimea $z'_v - z_s$ (fig. 7).

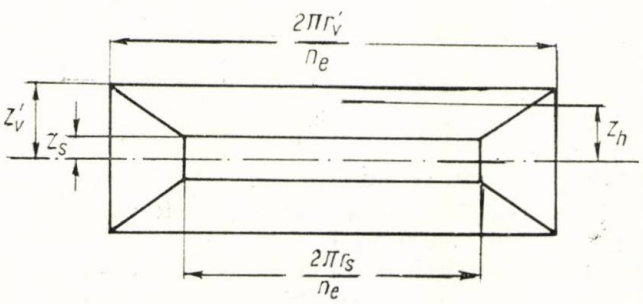


Fig. 7

Cota z_h a punctului de aplicaţie a forţei F_{hr} se consideră aceeaşi cu cota centrului de greutate al trapezului din (fig. 7)

$$z_h = z_s + \frac{(2r'_v + r_s)\,(z'_v - z_s)}{3(r'_v + r_s)}, \tag{12}$$

F_{hz} — componenta forţei de presiune asupra ansamblului antablament inelar fund distribuitor după direcţia z, de versor $\bar{k}$ — poate fi calculată ca produs dintre presiunea p şi aria sectorului de coroană circulară, cu razele r_v, r_f unde r_f este raza interioară a fundului distribuitorului şi unghiul la centru $2\pi/n_e$, micşorat cu aria secţiunii transversale a unei antretoaze S_e,

$$F_{hz} = \left[\frac{\pi}{n_e} (r'^2_v - r^2_f) - S_e \right] \cdot p. \tag{13}$$

Raza corespunzătoare punctului de aplicație a forței F_{hz}, r_h, se admite ca fiind aceeași cu raza centrului de greutate al sectorului amintit mai sus și este dată cu suficientă precizie, pentru n_e destul de mare, de relația

$$r_h = \frac{2(r_c'^3 - r_f^3)}{3(r_v'^2 - r_f^2)}. \tag{14}$$

Forțele F_v, F_{hr}, F_{hz}, F_e — în cazul modelului fizic adoptat — produc atît deformații liniare, cît și unghiulare (fig. 8).

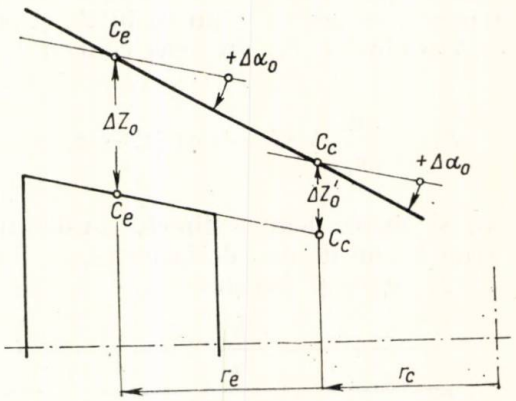


Fig. 8

Deformațiile semiantretoazei:

a) o alungire axială cu cantitatea Δz_0, unde z_0 este cota culeei antretoazei corespunzătoare centrului C_e,

b) o rotație de unghi $\Delta\alpha_0$ în jurul centrului de greutate C_e.

Deformațiile ansamblului antablament inelar-fund distribuitor:

a) o translație după axa z cu cantitatea $\Delta z_c = \Delta z_0 - (r_e - r_c)\,\Delta\alpha_0'$,

b) o rotație de unghi $\Delta\alpha_0'$ în jurul centrului de rotație C_c al acestui ansamblu.

Datorită rigidității antretoazei, a antablamentului inelar și a fundului distribuitorului și legăturilor dintre acestea apar momentele antagoniste ce se opun deformațiilor, $-M_e$ și $-M_c$, respectiv în centrele C_e și C_c, iar rotirile $\Delta\alpha_0$ și $\Delta\alpha_0'$ trebuie să fie egale.

Referindu-ne la figura 3, din relațiile de echilibru static rezultă:

$$F_e = F_{hz} + F_{vz}, \tag{15}$$

$$M_e + M_c = M = \pm F_e(r_e - r_c) \pm F_{hz}(r_h - r_c) \pm$$

$$\pm F_{vz}(r_v - r_c) \pm F_{hr}(z_c - z_h) \pm F_{vr}(z_v - z_c), \tag{16}$$

unde r_c, z_c sînt coordonatele centrului de rotație C_c.

Considerînd un reper cartezian $r\,C_c\,z$, trebuie satisfăcută condiţia

$$\iint_{S_c} \frac{z}{r}\,\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}z = 0, \tag{17}$$

în care S_c este secţiunea meridiană a ansamblului antablament inelar-fund distribuitor.

Relaţia dintre deformaţia unghiulară $\Delta\alpha_0 = \Delta\alpha_0'$ şi momentul ce o produce, M_c, are expresia

$$\Delta\alpha_0 = \frac{n_e}{2\pi}\cdot\frac{M_c}{E}\cdot\frac{1}{\iint_{S_c}\frac{z^2}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}\cdot \tag{18}$$

În cele mai multe cazuri se poate înlocui cu suficientă acurateţe centrul de rotaţie C_c prin centrul de greutate al secţiunii S_c; în acest caz, faţă de reperul $rC_c\,z$, trebuie verificate relaţiile:

$$\iint_{S_c} r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{şi} \quad \iint_{S_c} z\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 0, \tag{17'}$$

iar deformaţia unghiulară $\Delta\alpha_0$ se calculează cu ajutorul ecuaţiei

$$\Delta\alpha_0 = \frac{n_e}{2}\,\frac{M_c\cdot r_c}{E\cdot I_{rc}}, \tag{18'}$$

unde I_{rc} este momentul de inerţie al suprafeţei S_c în raport cu axa radială ce trece prin centrul C_c: $I_{rc} = \iint_{S_c} z^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$.

Deoarece forma antretoazei este complicată, pentru facilitarea calculelor de proiectare, conturul acesteia se înlocuieşte, în prealabil, cu un triunghi curbiliniu, iar apoi cu un trapez, ambele echivalente din punct de vedere geometric şi static. Datele referitoare la antretoaza reală şi la cea triunghi-curbiliniu fiind afectate de indicele prim (fig. 9), iar cele la antretoază fictivă trapezoidală neindexate, din condiţiile de echivalenţă amintite, rezultă următoarele relaţii:

1) din echivalenţa ariilor $\frac{d}{2}\,(b_e + b_s) = S_e'$, (19')

2) din coincidenţa centrelor de greutate

$$\frac{d\,(b_e + 2b_s)}{3\,(b_e + b_s)} = a_e'$$

sau (20')

$$\frac{d\,(2b_e + b_s)}{3(b_e + b_s)} = a_s',$$

3) din echivalența momentelor de inerție

$$\left[1 + \frac{2b_e b_s}{(b_e + b_s)^2}\right] \cdot \left[\frac{d^3}{36}(b_e + b_s)\right] = I'_e. \tag{21'}$$

În general, sistemul format din ecuațiile (19'), (20'), (21'), cu necunoscutele b_e, b_s nu admite nici o soluție (e incompatibil). De aceea,

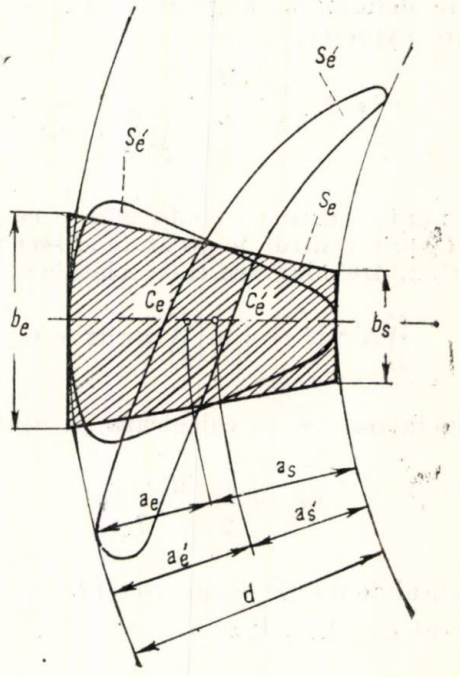


Fig. 9

considerînd succesiv cele trei sisteme compatibile, cu soluție unică, formate din perechi convenabile de ecuații (19'), (20'), (21'), obținem următoarele soluții:

$$b_{e\,1,2} = 2\frac{S'_e}{d^2}(2a'_s - a'_e),$$

$$b_{s\,1,2} = \frac{S'_e}{d^2}(2a'_e - a'_s); \tag{22}$$

$$b_{e\,1,3} = \frac{S'_e}{d}\left[1 + \sqrt{3 - \frac{36 I'_e}{d^2 S'_e}}\right],$$

$$b_{s\,1,3} = \frac{S'_e}{d}\left[1 - \sqrt{3 - \frac{36 I'_e}{d^2 S'_e}}\right]; \tag{23}$$

$$b_{e\,2,3} = \frac{12\,I'_e}{d^3}\left[\frac{1-\left(\frac{a'_s}{a'_e}\right)-2\left(\frac{a'_s}{a'_e}\right)^2}{1-4\left(\frac{a'_s}{a'_e}\right)+\left(\frac{a'_s}{a'_e}\right)^2}\right],$$

$$b_{s\,2,3} = \frac{12\,I'_e}{d^3}\cdot\left[\frac{1-\left(\frac{a'_e}{a'_s}\right)-2\left(\frac{a'_e}{a'_s}\right)^2}{1-4\left(\frac{a'_e}{a'_s}\right)+\left(\frac{a'_e}{a'_s}\right)^2}\right]. \tag{24}$$

Valorile cele mai posibile pentru mărimile b_e și b_s sînt date de mediile aritmetice ale rezultatelor acestora (22), (23), (24)

$$b_e = \frac{1}{3}(b_{e\,1,2} + b_{e\,1,3} + b_{e\,2,3}),$$

$$b_s = \frac{1}{3}(b_{s\,1,2} + b_{s\,1,3} + b_{s\,2,3}). \tag{25}$$

Cu ajutorul mărimilor b_e și b_s date de (25), se pot determina aria secțiunii antretoazei S_e, poziția centrului de greutate și momentul de inerție I_e

$$S_e = \frac{d}{2}(b_e + b_s), \tag{19}$$

$$a_e = \frac{d}{3}\cdot\left(\frac{b_e + 2b_s}{b_e + b_s}\right),$$

$$a_s = \frac{d}{3}\cdot\left(\frac{2b_e + b_s}{b_e + b_s}\right). \tag{20}$$

$$I_e = \left[1 + \frac{2b_e b_s}{(b_e + b_s)^2}\right]\left[\frac{d^3}{36}(b_e + b_s)\right]. \tag{21}$$

Relațiile de echilibru dintre eforturile unitare din secțiunea antretoazei și solicitările F_e, M_e sînt dat de ecuațiile

$$F_e = \int_{-a_s}^{+a_e} \sigma_x \cdot b_x \cdot \mathrm{d}x, \tag{22}$$

$$M_e = \int_{-a_s}^{+a_e} \sigma_x \cdot b_x \cdot x \cdot \mathrm{d}x. \tag{23}$$

Considerînd pe figura 10 un reper cu centrul în C_e cu axa x după direcţie radială şi axa z perpendiculară pe aceasta, alungirea corespunzătoare abscisei x, $\Delta z = \Delta z_0 + x \cdot \Delta\alpha_0$ produce, conform legii lui Hooke, efortul unitar

$$\sigma_x = \frac{\Delta z_0 + x \cdot \Delta\alpha_0}{z} \cdot E. \tag{24}$$

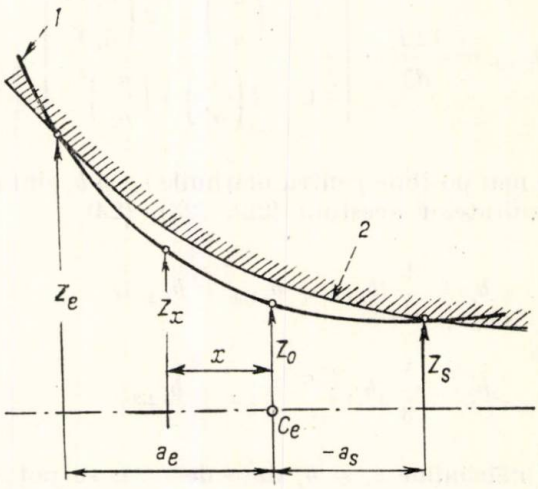


Fig. 10

Pentru a explicita cota z funcţie de abscisa x asimilăm profilul culeei antretoazei cu un arc de hiperbolă echilaterală, ce trece prin extremităţile culeei antretoazei a cărei ecuaţie este

$$z = \frac{\left(1 + \frac{a_s}{a_e}\right) z_s}{\left(1 + \frac{a_s}{a_e} \cdot \frac{z_s}{z_e}\right) - \left(1 - \frac{z_s}{z_e}\right) \cdot \frac{x}{a_e}}. \tag{25}$$

Cota culeei fictive corespunzătoare centrului C_e, adică pentru $x = 0$, dată de relaţia (25) are expresia

$$z_0 = \frac{\left(1 + \frac{a_s}{a_e}\right)}{1 + \frac{a_s z_s}{a_e z_e}} \cdot z_s. \tag{26}$$

Exprimînd ecuaţia (25) cu ajutorul relaţiei (26) obţinem

$$z_x = \frac{z_0}{1 - \left(1 - \frac{z_0}{z_e}\right) \frac{x}{a_e}}. \tag{27}$$

Introducînd ecuațiile (24) și (27) în (22), după calcule simple, obținem :

$$\frac{F_e}{\frac{Ea_e^3}{z_0}} = \int_{-a_s}^{+a_e}\left[\left(\frac{b_e+b_s}{2a_e}\right)+\left(\frac{b_e-b_s}{2a_e}\right)\frac{2x}{a_e+a_s}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\Delta z_0}{a_e}+\frac{x}{a_e}\Delta\alpha_0\right]\left[1-\left(1-\frac{z_0}{z_e}\right)\frac{x}{a_e}\right]\frac{\mathrm{d}x}{a_e},$$

iar cu notațiile simplificatoare

$$\frac{a_s}{a_e} = i, \tag{28}$$

$$\frac{Ea_e^3}{z_0} = k, \tag{29}$$

$$1-\frac{z_0}{z_e} = l, \tag{30}$$

$$\frac{b_e+b_s}{2a_e} = m, \tag{31}$$

$$\frac{b_e-b_e}{2a_e} = n, \tag{32}$$

rezultă integrala

$$\frac{F_e}{k} = \int_{-a_s}^{+a_e}\left(m+n\frac{2x}{a_e+a_s}\right)\cdot\left(\frac{\Delta z_0}{a_e}+\frac{x}{a_e}\Delta\alpha_0\right)\left(1-l\cdot\frac{x}{a_e}\right)\frac{\mathrm{d}x}{a_e},$$

care rezolvată, conduce la ecuația

$$\frac{F_e}{k} = \left[m(1+i)+n\left(\frac{1-i^2}{1+i}\right)-\frac{1}{2}\cdot l\cdot m(1-i^2)-\frac{2}{3}\,ln\left(\frac{1+i^3}{1+i}\right)\right]\frac{\Delta z_0}{a_e}+$$

$$+\left[\frac{1}{2}m(1-i^2)+\frac{2}{3}n\cdot\left(\frac{1+i^3}{1+i}\right)-\frac{1}{3}l\cdot m(1+i^3)-\frac{1}{2}l\cdot n\left(\frac{1-i^4}{1+i}\right)\right]\Delta\alpha_0. \tag{33}$$

Procedînd în aceeași manieră ecuația (23) devine

$$\frac{M_e}{k\cdot a_e} = \int_{-a_s}^{+a_e}\left[\left(m\frac{\Delta z_0}{a_e}\right)\frac{x}{a_e}+\left(n\frac{2a_e}{a_e+a_s}\Delta\alpha_0-l\cdot m\Delta\alpha_0-l\cdot n\frac{2a_e}{a_e+a_s}\frac{\Delta z_0}{a_e}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{x}{a_e}\right)^3-\left(ln\frac{2a_e}{a_e+a_s}\Delta\alpha_0\right)\left(\frac{x}{a_e}\right)^4+$$

$$\left.+\left(m\Delta\alpha_0+n\frac{2a_e}{a_e+a_s}\cdot\frac{\Delta z_0}{a_e}-l\cdot m\frac{\Delta z_0}{a_e}\right)\left(\frac{x}{a_e}\right)^2\right]\frac{\mathrm{d}x}{a_e},$$

care, după integrare, ne dă

$$\frac{M_e}{k \cdot a_e} = \left[\frac{1}{2} m(1 - i^2) + \frac{2}{3} n\left(\frac{1+i^3}{1+i}\right) - \frac{1}{3} lm(1 + i^3) - \frac{1}{2} ln\left(\frac{1-i^4}{1+i}\right)\right]\frac{\Delta z_0}{a_e} +$$

$$+\left[\frac{1}{3} m(1 + i^3) + \frac{1}{2} n\left(\frac{1-i^4}{1+i}\right) - \frac{1}{4} lm(1 - i^4) - \frac{2}{5} ln\left(\frac{1+i^5}{1+i}\right)\right]\Delta\alpha_0. \tag{34}$$

În continuare, efectuînd notațiile

$$r = \left[1\, m(1 + i) + \frac{2}{2} n \cdot \left(\frac{1-i^2}{1-i}\right) - \frac{1}{2} l \cdot m(1 - i^2) - \frac{2}{3} l \cdot n\left(\frac{1+i^3}{1+i}\right)\right], \tag{35}$$

$$s = \left[\frac{1}{2} m(1 - i^2) + \frac{2}{3} n\left(\frac{1+i^3}{1+i}\right) - \frac{1}{3} lm(1 + i^3) - \frac{2}{4} ln\left(\frac{1-i^4}{1+i}\right)\right], \tag{36}$$

$$t = \left[\frac{1}{3} m(1 + i^3) + \frac{2}{4} n\left(\frac{1-i^4}{1+i}\right) - \frac{1}{4} lm(1 - i^4) - \frac{2}{5} ln\left(\frac{1+i^5}{1+i}\right)\right] \tag{37}$$

obținem legătura dintre deformații și solicitări sub următoarea formă simplă

$$\frac{F_e}{k} = r \cdot \frac{\Delta z_0}{a_e} + s \cdot \Delta\alpha_0, \tag{38}$$

$$\frac{M_e}{k \cdot a_e} = s \frac{\Delta z_0}{a_e} + t \cdot \Delta\alpha_0. \tag{39}$$

Din sistemul format de ecuațiile (16), (18′), (38), (39) eliminăm mai întîi necunoscutele M_c, M_e

$$M_c = \frac{2\pi \cdot I_{rc} \cdot E}{n_e \cdot r_c} \cdot \Delta\alpha_0 = M_c' \cdot \Delta\alpha_0,$$

$$M_e = M - M_c = M - M_c' \cdot \Delta\alpha_0,$$

unde

$$M_c' = \frac{2\pi \cdot I_{rc} \cdot E}{n_e \cdot r_c}, \tag{40}$$

iar apoi putem explicita expresiile deformațiilor în funcție de forțele și momentele determinate din ecuațiile de echilibru static sub forma

$$\frac{\Delta z_0}{a_e} = \frac{\left(t + \frac{M'_c}{k \cdot a_e}\right) \cdot \left(\frac{F_e}{k}\right) - s \frac{M}{k \cdot a_e}}{r\left(t + \frac{M'_c}{k \cdot a_e}\right) - s^2}, \tag{41}$$

$$\Delta\alpha_0 = -\frac{s\left(\frac{F_e}{k}\right) - r\left(\frac{M}{k \cdot a_e}\right)}{r\left(t + \frac{M'_c}{k \cdot a_e}\right) - s^2}. \tag{42}$$

Substituind cota z dată de (27) și ținînd cont de notațiile (29), (30), expresia efortului σ_x din antretoază dată de (24) devine

$$\sigma_x = \left(\frac{k}{a_e^2}\right) \cdot \left(\frac{\Delta z_0}{a_e} + \frac{x}{a_e} \Delta\alpha_0\right) \left(1 - l\frac{x}{a_e}\right).$$

Introducînd în această relație expresiile deformațiilor date de (41), (42), în final, rezultă

$$\sigma_x = \frac{\left(t + \frac{M'_c}{k \cdot a_e} - s \cdot \frac{x}{a_e}\right)\frac{F_e}{a_e^2} + \left(r\frac{x}{a_e} - s\right)\frac{M}{a_e^3}}{r\left(t + \frac{M'_c}{k \cdot a_e}\right) - s^2} \cdot \left(1 - l\frac{x}{a_e}\right). \tag{43}$$

Dacă se neglijează influența rigidizatoare a antablamentului inelar și a fundului distribuitorului, fapt tradus fizic prin M'_c nul, expresia efortului unitar σ_x se simplifică

$$\sigma_x = \frac{\left(t - s\frac{x}{a_e}\right)\frac{F_e}{a_e^2} + \left(r\frac{x}{a_e} - s\right)\frac{M}{a_e^3}}{r \cdot t - s^2} \cdot \left(1 - l\frac{x}{a_e}\right). \tag{44}$$

Eforturile unitare extreme σ_e, σ_s se obțin la intrarea și la ieșirea antretoazei, respectiv pentru abscisele a_e și $-a_s$.

PARTICULARIZĂRI

a) În cazul cînd pe lîngă rigidizări meridiane camera spirală prezintă și rigidizări circulare, deformațiile semiantretoazei și a ansamblului antablament inelar-fund distribuitor constau doar dintr-o translație, după axa z, de

mărime Δz_0 şi relaţia dintre efortul unitar în antretoază σ_x şi deformaţia corespunzătoare devine

$$\sigma_x = \frac{k}{a_e^2} \cdot \frac{\Delta z_0}{a_e} \left(1 - l\frac{x}{a_e}\right).$$

Înlocuind expresia deformaţiei Δz_0, date de (41), după calcule elementare, se obţine

$$\sigma_x = \frac{\left(t + \frac{M_c'}{k \cdot a_e}\right)\frac{F_e}{a_e^2} - s\,\frac{M}{a_e^3}}{r\left(t + \frac{M_c'}{k \cdot a_e}\right) - s^2} \cdot \left(1 - l\frac{x}{a_e}\right). \tag{43}$$

b) În situaţia cameră spirală cu rigidizări meridiane, dar cu variaţie mică a înălţimii antretoazelor de la intrare la ieşire, hiperbola echilateră (25) este înlocuită de o dreaptă paralelă cu abscisa, de ecuaţie

$$z = z_0, \qquad \text{unde } z_0 = z_s = z_e = \text{const.}$$

Urmînd aceleaşi etape de rezolvare ca şi în cazul formulei (43) obţinem în final următoarea relaţie pentru calculul efortului unitar σ_x:

$$\sigma_x = \frac{\left(t_1 + \frac{M_c'}{k \cdot a_e} - s_1\frac{x}{a_e}\right)\frac{F_e}{a_e^2} + \left(r_1\frac{x}{a_e} - s_1\right)\frac{M}{a_e^3}}{r_1\left(t_1 + \frac{M_c'}{k \cdot a_e}\right) - s_1^2}, \tag{43'}$$

unde coeficienţii r_1, s_1, t_1 au expresiile

$$r_1 = m(1 + i) + n(1 - i), \tag{35'}$$

$$s_1 = \frac{1}{2}\, m(1 - i^2) + \frac{2}{3}\, n(1 - i + i^2), \tag{36'}$$

$$t_1 = \frac{1}{3}\, m(1 + i^3) + \frac{1}{2}\, n(1 + i^2)\,(1 - i). \tag{37'}$$

c) Eforturile unitare σ_x care apar în semiantretoaza unei camere spirale ce prezintă variaţie mică a înălţimii antretoazelor, cu rigidizări meridiane şi circulare, se pot determina cu relaţia:

$$\sigma_x = \frac{\left(t_1 + \frac{M_c'}{k \cdot a_e}\right)\frac{F_e}{a_e^2} - s_1\frac{M}{a_e^3}}{r_1\left(t_1 + \frac{M_c'}{k \cdot a_e}\right) - s_1^2}. \tag{43''}$$

d) În cazul camerei spirale cu rigidizări meridiane și cu variație a înălțimii semiantretoazelor liniară (fig. 2 *c*), relația dintre cota z a culeei semiantretoazei și abscisa x este de forma

$$z = z_0 + px, \tag{25'}$$

unde

$$p = \frac{z_e - z_s}{a_e + a_s}.$$

Parcurgînd etapele de calcul pentru deducerea formulei (43), relația de determinare a efortului σ_x în secțiunea mediană a antretoazei poate fi pusă sub forma

$$\sigma_x = \frac{\left(t_2 + \frac{M'_c}{k \cdot a_e} - s'_2 \frac{x}{a_e}\right)\frac{F_e}{a_e^2} + \left(r_2 \frac{x}{a_e} - s_2\right)\frac{M}{a_e^3}}{r_2\left(t_2 + \frac{M'_c}{k \cdot a_e}\right) - s_2 \cdot s'_2} \times \frac{1}{1 + \frac{q_e - q_s}{1+i} \cdot \frac{x}{a_e}}, \tag{43'''}$$

unde coeficienții r_2, s_2, s'_2, t_2 au expresiile

$$r_2 = \frac{1+i}{q_e - q_s}\left[2n + \left(m - 2\frac{n}{q_e - q_s}\right) \cdot Ln \frac{q_e}{q_s}\right], \tag{35''}$$

$$s_2 = -\left(\frac{1+i}{q_e + q_s}\right)^2\left[2 \cdot n + \left(m - 2\frac{n}{q_e - q_s}\right) Ln \frac{q_e}{q_s} - (q_e - q_s)\left(m + n\frac{1-i}{1+i}\right)\right], \tag{36''}$$

$$s'_2 = -\left(\frac{1+i}{q_e - q_s}\right)^2\left[2n + p\left(m - 2\frac{n}{q_e - q_s}\right) Ln \frac{q_e}{q_s} - (q_e - q_s)\left(m + n\frac{1-i}{1+i}\right)\right], \tag{36'''}$$

$$t_2 = \frac{1+i}{q_e - q_s}\left\{\frac{2n\,(1 - i + i^2)}{3} + \left(m - 2\frac{n}{q_e - q_s}\right)\left[\frac{1-i^2}{2} - \frac{(1+i)^2}{q_e - q_s} + p\left(\frac{1+i}{q_e - q_s}\right)^2 Ln \frac{q_e}{q_s}\right]\right\}, \tag{37''}$$

cu simbolurile q_e, q_s avînd semnificațiile

$$q_e = \frac{z_e}{z_0}, \qquad q_s = \frac{z_s}{z_0}. \tag{30'}$$

Observația 1. Pentru $p \cong 1$, $s_2' \cong s_2$.
Observația 2. Coeficientul S_2 poate fi pus și sub forma

$$s_2 = \frac{1+i}{q_e - q_s}\left[m(1+i) + n(1-i) - \frac{1+i}{q_e - q_s} r_2\right].$$

e) Eforturile unitare σ_x, ce apar în secțiunea mediană a semiantretoazei unei camere spirale ce prezintă o variație liniară a înălțimii semiantretoazei, cu rigidizări meridiane și circulare, pot fi determinate cu relația

$$\sigma_x = \frac{\left(t_2 + \frac{M_c'}{k \cdot a_e}\right)\frac{F_e}{a_e^2} - s_2 \frac{M}{a_e^3}}{r_2\left(t_2 + \frac{M_c'}{k \cdot a_e}\right) - s_2 \cdot s_2'} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q_e - q_s}{1+i} \cdot \frac{x}{a_e}}. \qquad (43^{IV})$$

3. CALCULUL DE REZISTENȚĂ MECANICĂ AL ANSAMBLULUI ANTABLAMENT INELAR-FUND DISTRIBUITOR

Raportîndu-ne la reperul cartezian $r\ C_c z$, efortul unitar σ, ce apare într-un punct de coordonare (r, z) al secțiunii S_c, este dat de relația

$$\sigma = \frac{M_c\left(\frac{z}{r}\right)}{\iint\limits_{S_c} \frac{z^2}{r}\, dr \cdot dz}. \qquad (44)$$

În cazurile practice curente centrul de rotație C_c coincide, cu suficientă precizie, cu centrul de greutate al secțiunii S_c; în această situație σ e dat de relația simplificată

$$\sigma = \frac{M_c \cdot r_c}{I_{rc}} \cdot \frac{z}{r}. \qquad (45)$$

Din sistemul alcătuit din ecuațiile (16), (18'), (38), (39), eliminînd necunoscutele M_c, Δz_0, $\Delta\alpha_0$, s-a determinat expresia momentului M_c sub forma

$$M_c = M_c' \cdot \left[\frac{\frac{M}{k \cdot a_e} - \frac{s}{r \cdot k} \cdot F_e}{\frac{M_c'}{k \cdot a_e} + t - \frac{s^2}{r}}\right], \qquad (46)$$

care, înlocuită în (45), conduce, în final, la următoarea expresie pentru efortul unitar σ:

$$\sigma = \frac{2\pi E}{n_e} \cdot \left[\frac{\dfrac{M}{k \cdot a_e} - \dfrac{s}{r \cdot k} \cdot F_e}{\dfrac{M'_c}{k \cdot a_e} + t - \dfrac{s^2}{r}} \right] \cdot \frac{z}{r} \cdot \tag{47}$$

4. CALCULUL DE REZISTENȚĂ MECANICĂ AL ASAMBLAJULUI ANTABLAMENTULUI INELAR CU FUNDUL DISTRIBUITORULUI

Porțiunea de bridă și șuruburile ce realizează acest asamblaj, corespunzătoare sectorului de cameră spirală model fizic, sînt solicitate de momentul încovoietor M_b, forța de tracțiune F_{hz2}, respectiv forța de întindere F_g.

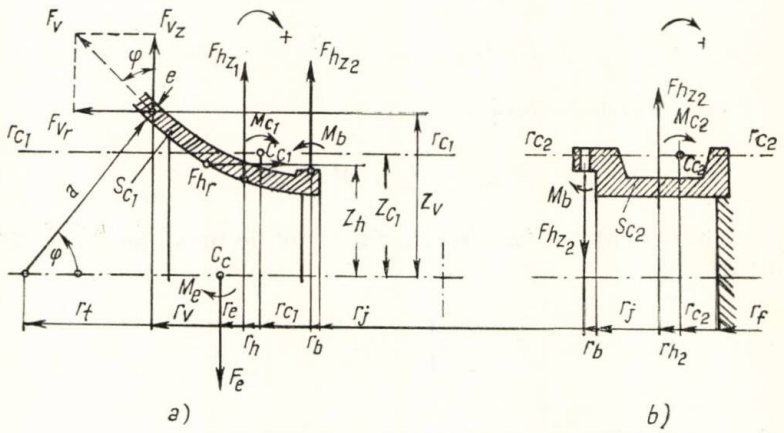


Fig. 11, *a* și *b*

Considerînd asamblajul demontat, cele două piese, antablamentul inelar (fig. 11 *a*) și fundul distribuitorului (fig. 11 *b*), vor fi în echilibru sub acțiunea următoarelor momente și forțe

a) *Antablamentul inelar*:

$$F_e,\ M_e,\ F_v,\ F_h,\ F_{hz1},\ F_{hz2},\ M_{c1},\ -M_b,$$

unde F_e, M_e, F_v, F_h au aceleași semnificații ca în §2,

F_{hz1} = componenta după direcția z a forței de presiune asupra antablamentului inelar,

$$F_{hz1} = \left[\frac{\pi}{n_e} (r'^2_v - r^2_j) - S_e \right] p, \tag{48}$$

și are raza corespunzătoare punctului de aplicație $r_{h_1} = \dfrac{2}{3} \left(\dfrac{r'^3_v - r^3_j}{r'^2_v - r^2_j} \right)$,

unde r_j este raza corespunzătoare joncțiunii dintre antablamentul inelar și fundul distribuitorului,

F_{hz2}, M_b provin din acțiunea fundului distribuitorului și sînt transmise prin intermediul bridei de asamblaj,

M_{c1} reprezintă momentul antagonist ce apare în centrul de rotație al antablamentului inelar, datorită rotirii de unghi $\Delta\alpha_1$.

Din ecuația de momente, scrisă în raport cu centrul C_{c1}, rezultă

$$M_{c1} + M_e = M_1 - M_b, \tag{49}$$

unde M_1 este momentul produs de forțele F_e, F_v, F_h, F_{hz1}, F_{hz2}, în raport cu C_{c1}, de coordonate (r_{c1}, z_{c1})

$$\begin{aligned} M_1 = {} & \pm F_e(r_e - r_{c1}) \pm Fh_{z1}\,(r_{h1} - r_{c1}) \pm \\ & \pm Fh_{z2}\,(r_{c1} - r_b) \pm F_{vz}\,(r_v - r_{c1}) \pm \\ & \pm F_{hr}\,(z_{c1} - z_h) \pm F_{vr}\,(z_v - z_{c1}). \end{aligned} \tag{50}$$

b) *Fundul distribuitorului* :

$$F_{hz2},\ -F_{hz2},\ M_{c2},\ M_b,$$

cu F_{hz2} = componenta după direcția z a forței de presiune asupra fundului distribuitorului

$$F_{hz2} = \left[\frac{\pi}{n_e}(r_j^2 - r_f^2)\right]p \tag{48'}$$

și are raza corespunzătoare punctului de aplicație,

$$F_{h2} = \frac{2}{3}\left(\frac{r_j^3 - r_f^3}{r_j^2 - r_f^2}\right),$$

$-F_{hz2}$, M_b provin din acțiunea antablamentului inelar și sînt transmise prin intermediul bridei de asamblaj;

M_{c2} este momentul antagonist ce apare în centrul de rotație C_{c2} al fundului distribuitorului datorită rotirii de unghi $\Delta\alpha_2$.

Din ecuația de momente scrisă în raport cu C_{c2} rezultă

$$M_{c2} = M_2 + M_b, \tag{49'}$$

unde M_2 e momentul produs de forțele F_{hz2}, $-F_{hz2}$ în raport cu C_{c2}, de coordonate (r_{c2}, z_{c2})

$$M_2 = \pm F_{hz2}\,(r_b - r_{c2}) \pm F_{hz2}\,(r_{h2} - r_{c2}) = -F_{hz2}\,(r_b - r_{h2}). \tag{50'}$$

Reconsiderînd ipoteza utilizată în § 2 sub forma

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_0,$$

cu $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ dați de relații de forma (18′)

$$\Delta\alpha_1 = \frac{n_e \cdot M_{c1} \cdot r_{c1}}{2\pi \cdot E_1 \cdot I_{rc1}}. \tag{51}$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{n_e \cdot M_{c2} \cdot r_{c2}}{2\pi \cdot E_2 \cdot I_{rc2}}, \tag{51′}$$

în cazul utilizării aceluiași material pentru cele două piese, după o simplă simplificare, rezultă

$$M_{c1} \cdot \frac{r_{c1}}{I_{rc1}} = M_{c2} \frac{r_{c2}}{I_{rc2}} = M_c \frac{r_c}{I_{rc}}. \tag{52}$$

Din sistemul alcătuit de ecuațiile (49), (49′), (52), eliminînd M_{c1}, M_{c2}, rezultă

$$M_b = \frac{\frac{r_{c1}}{I_{rc1}}(M_1 - M_e) - \frac{r_{c2}}{I_{rc2}} M_2}{\frac{r_{c1}}{I_{rc1}} + \frac{r_{c2}}{I_{rc2}}}. \tag{52′}$$

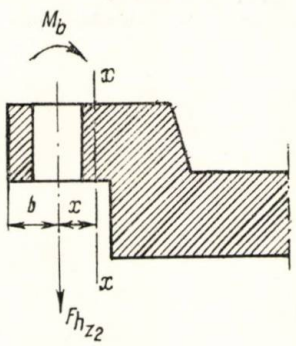


Fig. 12

Cu ajutorul relațiilor (48′), (52) putem determina momentul ce solicită brida în secțiunea $x-x$ (fig. 12)

$$M_x = F_{hz2} \cdot x - M_b \tag{53}$$

și forța de întindere F_g a prezoanelor de fixare a bridei

$$F_g = F_{hz2} + \frac{M_b}{\frac{2}{3} b}. \tag{54}$$

CONCLUZII

Urmărind în linii generale modul de tratare a problemei calculului de rezistenţă a camerei spirale metalice, prezentate de Th. Bovet în [1], pentru o turbină Francis de înaltă cădere, prezentînd o variaţie pronunţată a înălţimii antretoazelor după o hiperbolă echilateră şi rigidizări meridiane ale antablamentelor inelare, s-au dedus relaţiile de calcul şi pentru camerele spirale ale căror profil meridian interior al antablamentelor inelare implică o variaţie liniară a înălţimii antretoazelor, pronunţată sau neglijabilă.

S-au particularizat rezultatele calculelor pentru camerele spirale metalice ale căror antablamente inelare prezintă şi rigidizări circulare.

Au fost deduse sau expuse formulele de calcul pentru toate forţele şi punctele lor de aplicaţie ce solicită elementele componente ale camerei spirale.

Deci este întregit calculul de rezistenţă mecanică al camerelor spirale metalice expus în [1], acesta putînd fi condus într-un mod unitar pentru toate tipurile de camere spirale metalice, utilizate curent în practică.

Primită la redacţie la 20 mai 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Th. Bovet, *Calcul de la résistance mécanique des bâches spirales de turbines Francis a haute chute*, Informations techniques Charmilles 7 1958).
2. Cesar Buda, *Justificarea camerei spirale şi a tubului aspirator la turbinele hidraulice reactive*, Iaşi, 1970.

TORSIUNEA BARELOR ORTOTROPE COMPUSE, CU AXA UȘOR CURBATĂ*)

de V. V. GHEORGHIȚĂ
nstitutul de matematică Iași

În lucrare, autorul studiază problema torsiunii pentru o bară ortotropă, compusă cu axa ușor curbată.
Se demonstrează că problema se reduce, în final, la rezolvarea a două probleme la limită pentru funcțiile de tensiune : Φ, ψ.

Problema torsiunii barelor izotrope compuse, cu axa ușor curbată, a fost rezolvată de A.I. Gorghidze [1], iar pentru cazul transversal-izotrop problema analogă a constituit subiectul lucrării lui C.I. Borș [2].

În notele [3] și [4], G.M. Hatiașvili s-a ocupat cu problema Saint-Venant pentru corpuri aproape prismatice, compuse din mai multe materiale ortotrope, respectiv anizotrope cu un plan de simetrie elastică.

Lucrarea de față își propune să studieze starea de tensiune și de deformare care ia naștere într-o bară compusă din mai multe materiale ortotrope, cu axa ușor curbată, cînd aceasta suferă o torsionare.

Legea generalizată a lui Hooke pentru medii ortotrope se scrie astfel :

$$X_x = Ae_{xx} + He_{yy} + Ge_{zz} ,$$

$$Y_y = He_{xx} + Be_{yy} + Fe_{zz} , \tag{1}$$

$$Z_z = Ge_{xx} + Fe_{yy} + Ce_{zz} ;$$

$$Y_z = Le_{yz} ; \quad X_z = Me_{xz} ; \quad X_y = Ne_{xy} . \tag{2}$$

*) Lucrare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23–27 iunie 1969

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 1, 1972, P. 157–163

Componentele deformării se exprimă funcție de tensiuni prin relațiile

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{11}X_x + \sigma_{12}Y_y - \sigma_1 Z_z),$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{12}X_x + \sigma_{22}Y_y - \sigma_2 Z_z), \tag{3}$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E}(Z_z - \sigma_1 X_x - \sigma_2 Y_y);$$

$$e_{yz} = \frac{1}{L}Y_z; \qquad e_{xz} = \frac{1}{M}X_z; \qquad e_{xy} = \frac{1}{N}X_y, \tag{4}$$

unde σ_{ij}, σ_i $(i, j = 1,2, 3)$ sînt constante elastice legate de A, B, ... prin relațiile date în [5].

Considerăm acum un corp elastic ortotrop t' de forma unei bare compuse din mai multe materiale (tije) $t'(j)$, ușor curbate, ce se află plantate într-un mediu ambiant $t'(0)$, de asemenea, ortotrop.

Relativ la un sistem cartezian triortogonal $oxyz$, suprafețele laterale ale tijelor, cît și suprafața laterală a corpului au ecuațiile:

$$f_i\left(x + \frac{1}{2}kz^2, y\right) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m, m+1), \tag{5}$$

unde k-parametru suficient de mic, încît termenii care conțin pe k^2 și puteri mai mari pot fi neglijați.

Presupunem că corpul t'e mărginit de planele $z = 0$ și $z = h$.

Tijele t' (j) sînt sudate între ele de-a lungul suprafețelor de contact, iar constantele elastice au valori diferite pentru diverse materiale ce compun bara.

Punerea problemei

Asupra corpului ortotrop compus t' facem următoarele ipoteze:

— suprafața laterală e liberă de încărcări, pe baze acționînd forțe ce se reduc la cupluri de torsiune;

— forțele care apar pe elementele suprafețelor de separare dintre tije și mediul ambiant se echilibrează reciproc;

— deplasările sînt continui la trecerea prin suprafețele de separare ale diverselor materiale.

Problema constă în a găsi starea de tensiune și de deformare care apare în corpul t', astfel ca să fie satisfăcute condițiile de echilibru, condițiile de compatibilitate Saint-Venant și condițiile la limită ce decurg din ipotezele făcute anterior.

Componentele tensiunilor X_x, Y_y, ..., X_y trebuie deci să verifice în fiecare domeniu $t'(j)$ $(j = 0,1,2,\ldots, m)$ ecuațiile de echilibru

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

iar componentele deformării $e_{xx} \ldots e_{xy}$, următoarele condiții de compatibilitate:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}, \tag{7}$$

— — —; — — — —,

— — —; — — — —.

Condițiile la limită pentru suprafața laterală au forma

$$\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) &= 0, \\ X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) &= 0, \\ X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

iar cele pentru suprafețele de separație între materiale sînt:

$$\begin{aligned} [X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z)]\, i - [\text{ident.}]_0 &= 0, \\ [X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z)]\, i - [\text{ident.}]_0 &= 0, \\ [X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z)]\, i - [\text{ident.}]_0 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

În relațiile (9) indicii $[\ ]_i$ și $[\ ]_0$ se referă la valorile-limită pe suprafețele corespunzătoare domeniilor $t'^{(i)}$, respectiv $t'^{(0)}$.

Ultima ipoteză se traduce prin relațiile:

$$[u]_i - [u]_0 = 0 \text{ pentru } (i = 1, 2, 3, \ldots, m, m+1).$$

Dacă aplicăm transformarea de coordonate [2]:

$$\xi = x + \frac{1}{2} kz^2, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z, \tag{10}$$

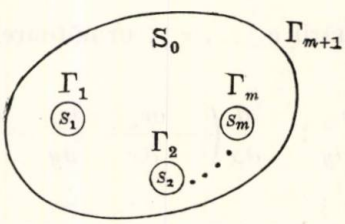
atunci ecuațiile suprafețelor (5) devin

$$f_i(\xi, \eta, \zeta) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m, m+1), \tag{11}$$

care reprezintă niște cilindri în spațiul $\xi\eta\zeta$, avînd generatoarele paralele cu axa $o\zeta$.

O secțiune plană transversală prin bara cilindrică t din spațiul $\xi\eta\zeta$ va consta din domeniile $S_0, S_1, \ldots, S_m$ mărginite de curbele de separație $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m+1}$, unde $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_{m+1}$, iar Γ_{m+1} le cuprinde pe toate celelalte în interior. Evident, domeniile $S_1, S_2, \ldots, S_m$ corespund tijelor $t'(j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, iar S_0 corespunde mediului ambiant.

Despre curbele Γ_i presupunem că sînt curbe simple Jordan, fără puncte comune (fig. 1). Bara o presupunem torsionată de momentul M.



Vom încerca să rezolvăm problema torsiunii, luînd deplasările (în variabile ξ, η, ζ) de forma

$$\begin{aligned} u &= -\tau\eta\zeta + ku_1, \\ v &= \tau\xi\zeta + kv_1, \\ w &= \tau\varphi(\xi, \eta) + kw_1, \end{aligned} \tag{12}$$

unde u_1, v_1, w_1 sînt deplasări suplimentare necunoscute deocamdată, iar φ = funcția de torsiune pentru cazul ortotrop [5].

Se constată ușor că

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + k\zeta\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{13}$$

Dacă notăm cu τ_{ij} eforturile unitare corespunzătoare deplasărilor u_1, v_1, w_1 găsim

$$\begin{aligned} X_x &= \tau kG\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + k\tau_{11}; \qquad Y_z = \tau L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \xi\right) + \tau kL\zeta^2 + k\tau_{23}, \\ Y_y &= \tau kF\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + k\tau_{22}; \qquad X_z = \tau M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \eta\right) + k\tau_{13}, \\ Z_z &= \tau kC\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + k\tau_{33}; \qquad X_y = k\tau_{12}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ecuațiile de echilibru (6) devin

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tau_{12}}{\partial \eta}+\frac{\partial \tau_{13}}{\partial \zeta}+\tau\zeta(G+M)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi^2}=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tau_{22}}{\partial \eta}+\frac{\partial \tau_{23}}{\partial \zeta}+\partial\zeta(F+L)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi\partial\eta}+\xi\tau L\zeta=0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tau_{23}}{\partial \eta}+\frac{\partial \tau_{33}}{\partial \zeta}+\tau C\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=0.$$

În stabilirea acestor ecuații am ținut cont de faptul că funcția de torsiune φ satisface, în cazul ortotrop, ecuația: $M\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+L\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}=0$, pentru orice domeniu $S_j (j=0, 1, 2, \ldots, m)$.

Reprezentăm tensiunile τ_{ij} cu ajutorul a două funcții de tensiune $\Phi(\xi,\eta)$, $\Psi(\xi,\eta)$:

$$\begin{aligned}
\tau_{11}&=\zeta\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}-\tau G\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-2\tau M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\eta\right)\right],\\
\tau_{22}&=\zeta\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}-\tau F\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right],\\
\tau_{33}&=\zeta\left[\sigma_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+\sigma_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}-\tau(2M\sigma_1+G\sigma_1+F\sigma_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\tau a\eta\right],\\
\tau_{23}&=L\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}-\tau\zeta^2+\tau b\xi^2\right],\\
\tau_{13}&=M\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+\tau c\eta^2\right],\\
\tau_{12}&=-\zeta\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}+\tau L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\xi\right)\right],
\end{aligned} \tag{16}$$

unde a, b, c = constante provizoriu nedeterminate.

Substituind tensiunile (16) în ecuațiile de echilibru (15), observăm că primele două ecuații sînt identic verificate. A treia ecuație va fi verificată dacă funcția Ψ satisface ecuația

$$M\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+L\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}=g-\left(\sigma_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+\sigma_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\right), \tag{17}$$

unde $g=\tau\left[(2M\sigma_1+G\sigma_1+F\sigma_2-C)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}-a\eta\right]$.

Condițiile de compatibilitate (7) se reduc la una singură:

$$\beta_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\eta^4}+(2\beta_{12}+\beta_{66})\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\beta_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4}=f, \tag{18}$$

unde, în prealabil, am adoptat notațiile

$$f=\tau(A_{11}-L\beta_{66})\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi\partial\eta^2}+\tau A_{12}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi^3},$$

$$A_{11}=(2M+G)\,\beta_{11}+F\beta_{12};\qquad A_{12}=(2M+G)\,\beta_{12}+F\beta_{22}.$$

Totodată, condițiile la limită (9) și condițiile de continuitate în deplasări se transpun astfel:

$$\begin{aligned}&[d_1\Psi]_i-[d_1\Psi]_0=g_i-g_0 \quad \text{pe } \Gamma_i,\\ &[d_1\Psi]_{m+1}=g_0 \quad \text{pe } \Gamma_{m+1},\\ &[\Psi]_i-[\Psi]_0=[\theta]_0-[\theta]_i;\end{aligned} \tag{17'}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]_0=c'_{m+1}\quad;\quad\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right]_0=c''_{m+1}\quad\text{pe }\Gamma_{m+1},$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right]_i-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right]_0=c_i''\,;\quad\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]_i-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]_0=c_i'\quad\text{pe }\Gamma_i \tag{18'}$$

$$\left[\beta_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\beta_{11}\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\,d\xi\right]_i-[id]_0=[\gamma]_i-[\gamma]_0,$$

$$\left[\beta_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}+\beta_{22}\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\,d\eta\right]_i-[id]_0=[\delta]_i-[\delta]_0\quad\text{pe }\Gamma_i$$

$$(i=1,\,2,\,\ldots,\,m)$$

unde d_1 este operatorul diferențial

$$d_1=M\frac{\partial}{\partial\xi}\cos\alpha+L\frac{\partial}{\partial\eta}\cos\beta,$$

iar g_i, θ, γ, δ sînt dați de expresiile

$$g_i=-\tau(cM\eta^2\cos\alpha+bL\xi^2\cos\beta)_i,$$

$$\theta=\frac{1}{2}\beta_{66}\Phi+\tau L\beta_{66}\int\varphi\,d\xi+\frac{1}{4}\tau L\beta_{66}\xi^2\eta+$$

$$+\frac{1}{3E}\tau\sigma_2a\eta^3+\frac{1}{2}\tau b\xi^2\eta+\frac{1}{2}\tau c\xi\eta^2;$$

$$\gamma=\tau A_{11}\varphi-\frac{1}{E}2\tau M\sigma_{11}\xi\eta+\frac{1}{E}\tau\sigma_1a\xi\eta+\frac{1}{2}\tau c\eta^2,$$

$$\delta=\tau A_{12}\int\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,d\eta-\frac{1}{E}\tau M\sigma_{12}\eta^2+\frac{1}{2E}\tau\sigma_2a\eta^2+\frac{1}{2}\tau\left[b-\frac{1}{2}L\beta_{66}\right)\xi^2.$$

Se poate observa că odată rezolvată problema (18—18'), în membrul drept al ecuației (17), apar cantități cunoscute.

Prin urmare, problema pusă se reduce în cele din urmă la rezolvarea problemelor la limită (18—18') și (17—17') — funcția $\Phi(\xi, \eta)$ din (17), fiind soluția problemei la limită (18—18').

Condiția necesară și suficientă de existență a soluției [5] impusă problemei la limită (17—17'), determină valoarea constantei a.

Necunoscutele b și c le găsim din condiția de existență a problemei la limită (18—18'), v. [6].

Rezolvarea efectivă a problemelor la limită (17—17'), (18—18') nu prezintă dificultăți, studiul unor asemenea probleme la limită fiind deja făcut în lucrările [5] și [6].

Rămîne să verificăm dacă sînt îndeplinite condițiile la capătul $z = h$. Se constată imediat, că aceste condiții nu sînt satisfăcute și, ca atare, e necesară suprapunerea peste soluția obținută mai sus, a soluției problemei de torsiune corespunzătoare pentru date convenabil alese asupra cilindrului ortotrop compus-t.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. A.I. Gorghidze, *Torsiunea și încovoierea barelor izotrope cu axa ușor curbată*, Trudî Tb. Inst., **XVII** (1949).
2. C.I. Borș, *Torsiunea barelor alcătuite din mai multe materiale transversal-izotrope cu axa ușor curbată*, St. Cerc. mat. Fil. Ac. Iași, *1* (1961).
3. G.M. Hatiașvili, *Zadača Sen-Venana dlja sostavnyh ortotropnyh telblizkih k prizmaticeskim*, Trudî Tb. Mat. Inst., **XXIX** (1963).
4. — *Zadača Sen-Venana dlja sostavnyh anizotropnyh tel blizkih k prizmaticeskim*, Trudî Vyc. Zentr. Ak. Nauk Gr. SSR, **IV** (1963).
5. C.I. Borș, *Torsiunea, încovoierea și întinderea barelor ortotrope compuse din mai multe materiale*, St. Cerc. mat. Fil. Ac. Iași. **VII**, *2* (1956).
6. G.M. Hatiașvili, *Zadača Almansi-Michell dlja sostavnogo anizotropnogo cilindriceskogo brusa*, Trudî Vyc. Zentr. Ak. Nauk Gr. SSR, **III** (1963).
7. D.I. Sherman, *Ploskaja zadača teorii uprugosti dlja anizotropnyh sredy*, Trudî Seism. Inst. 86 (1938).
8. I.G. Lehnițkii, *Teorja anizotropnyh tel*, Moskva, 1950.
9. G.M. Hatiașvili, *Echilibrul elastic al barelor ortotrope compuse cu suprafața laterală încărcată*, Trudî Tb. Mat. Inst., **XXVIII** (1963).

COMPATIBILITATEA ROTIRILOR ARTICULAȚIILOR PLASTICE ÎN TEORIA REDISTRIBUȚIEI MINIME DE MOMENTE A STRUCTURILOR CONTINUE DE BETON ARMAT

de VALERIU PETCU
Institutul de construcții, București

În lucrare se stabilesc limitările care apar în teoria redistribuției minime de momente a structurilor continue de beton armat, rezultate din condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul. Studiul se referă la structurile continue, formate din bare de secțiune constantă, solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate vertical, la care articulațiile plastice se formează exclusiv în dreptul secțiunilor critice solicitate la încovoiere simplă.

1. NOTAȚII

Notațiile folosite în cuprinsul acestei lucrări au următoarele semnificații :

A_i este aria armăturii întinse din secțiunea critică i;

A'_i — aria armăturii comprimate din secțiunea critică i;

a_i — valoarea absolută a coeficientului de influență al momentului elastic produs de încărcările permanente în secțiunea critică i;

b_i — valoarea absolută a coeficientului de influență al momentului elastic maxim produs de încărcările temporare în secțiunea critică i;

b — lățimea secțiunilor critice de formă dreptunghiulară sau a inimii secțiunilor critice în formă de T;

b' — lățimea de calcul a tălpii comprimate la secțiunile critice în formă de T;

E_a — modulul de elasticitate al armăturii;

G_c — valoarea de calcul a încărcării permanente de referință G;

h_0 — înălțimea utilă a secțiunilor critice dintr-o deschidere;

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 1, 1972, P. 165–178

i — indice exprimînd numărul de ordine al secţiunilor critice de pe reazemele şi din cîmpurile elementelor încovoiate simplu ale unei structuri continue ($i = j,\ k$);

j — indice exprimînd numărul de ordine al secţiunilor critice de pe reazemele elementelor încovoiate simplu ale unei structuri continue;

k — indice exprimînd numărul de ordine al secţiunilor critice din cîmpurile elementelor încovoiate simplu ale unei structuri continue;

K — modulul de rigiditate al secţiunilor unui element solicitat la încovoiere;

K_i — modulul de rigiditate la încovoiere al secţiunii critice i, corespunzător solicitării ei de momentul plastic M_{pi};

l — lungimea deschiderii de referinţă, în funcţie de care se exprimă momentele plastice din secţiunile critice ale unei structuri continue;

l_i — lungimea deschiderii care conţine secţiunea critică i;

M_{ei} — valoarea absolută a momentului elastic *maxim* din secţiunea critică i, produs de încărcările permanente şi temporare luate cu valorile lor de calcul;

M_{pi} — valoarea absolută a momentului plastic al secţiunii critice i; în calculele practice, momentele plastice reprezintă momentele de rupere ale secţiunilor critice respective;

P_c — valoarea de calcul a încărcării temporare de referinţă P;

R_i — rezistenţa de rupere la compresiune din încovoiere a betonului;

x_{pi} — înălţimea zonei comprimate a secţiunii critice i, în stadiul ei de rupere;

ε_{ac} — deformaţia specifică de curgere a armăturii; în calculele practice, această deformaţie se ia egală cu raportul $\frac{\sigma_c}{E_a}$;

θ_i — rotirea maximă a articulaţiei plastice formate în dreptul secţiunii critice i, sub acţiunea încărcărilor permanente şi temporare de calcul;

θ_{pi} — capacitatea de rotire a articulaţiei plastice din secţiunea critică i;

σ_c — limita de curgere a armăturii;

ν_i — coeficientul plastic al secţiunii critice i;

$$H_c = \frac{P_c}{G_c}, \qquad \beta = \frac{b'}{b},$$

$$\alpha_i = \frac{A_i \sigma_c}{b h_0 R_i}, \qquad \alpha_i' = \frac{A_i' \sigma_c}{b h_0 R_i}.$$

2. CONDIŢIA DE COMPATIBILITATE A ROTIRILOR ARTICULAŢIILOR PLASTICE

Prin *compatibilitatea rotirilor articulaţiilor plastice* se înţelege proprietatea articulaţiilor plastice de a dezvolta în mod efectiv rotirile rezultate din comportarea plastică a structurilor sub acţiunea încărcărilor de

calcul. Această proprietate este specifică acelor articulații plastice care îndeplinesc condiția

$$\theta_i \leqslant \theta_{pi}. \tag{1}$$

În cele ce urmează se stabilesc limitările ce decurg din îndeplinirea condiției (1), pentru structurile continue de beton armat calculate în domeniul plastic pe baza principiului redistribuției minime de momente [1]. Se iau în considerație numai structurile formate din bare de secțiune constantă, solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate vertical, la care articulațiile plastice se formează exclusiv în dreptul secțiunilor critice solicitate la încovoiere simplă.

Studiul se face pe grinzi continue de beton armat, solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate uniform distribuit pe lungimea fiecărei deschideri, rezultatele astfel obținute menținîndu-și valabilitatea pentru orice altă structură continuă solicitată de încărcări distribuite după legi oarecare sau de încărcări aplicate concentrat, cel puțin cîte două în fiecare deschidere [2].

În dezvoltările de mai jos, terminologia folosită este cea specifică metodei stărilor limită.

3. ARTICULAȚII PLASTICE FORMATE PE REAZEME

La grinzile continue ale căror deschideri se transformă în mecanisme sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul, cea mai mare dintre rotirile efectuate de articulațiile plastice formate pe reazeme este cea a articulației plastice de pe reazemul central al grinzii continue cu două deschideri egale, simplu rezemate la extremități [2]. Schema unei astfel de grinzi este reprezentată în figura 1*a*, unde cu *1* s-a notat secțiunea

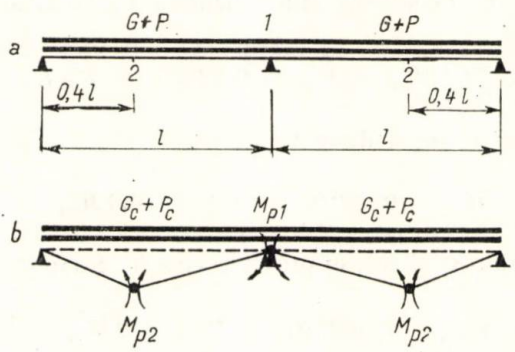


Fig. 1

critică de pe reazemul central și cu 2 secțiunile critice din cîmpuri. Acestea din urmă se consideră situate la o distanță egală cu 0,4 *l* de reazemele marginale.

Pentru secțiunea critică *1*, schema de încărcare cea mai defavorabilă este cea în care atît încărcarea permanentă, cît și încărcarea temporară sînt uniform distribuite pe lungimea ambelor deschideri ale grinzii. Această schemă de încărcare conduce la valoarea maximă a rotirii produse de încărcările permanente și temporare de calcul în articulația plastică formată în dreptul secțiunii critice *1* [2].

Considerînd ca încărcări de referință încărcarea permanentă G și încărcarea temporară P aplicate pe lungimea unei singure deschideri, pentru rotirea maximă a articulației plastice din dreptul secțiunii critice *1* se obține expresia

$$\theta_1 = \frac{0{,}25(G_c + P_c)\, l^2 - 2M_{p1} l}{3K}. \tag{2}$$

Modulul de rigiditate K se ia egal cu valoarea lui minimă, care corespunde secțiunilor critice *2* cînd acestea sînt solicitate de momentul lor plastic [2].

Expresia acestui modul este deci

$$K = K_2 = \frac{\eta_2}{\varepsilon_{ac}} M_{p2} h_0, \tag{3}$$

în care

$$\eta_2 = 1 - \frac{x_{p2}}{h_0}. \tag{4}$$

Coeficientul η_2 se ia egal cu valoarea medie 0,7, cînd secțiunile critice *2* sînt dreptunghiulare, și cu valoarea medie 0,9, cînd secțiunile critice *2* sînt în formă de T [2].

Ecuația de echilibru plastic a unei deschideri, în ipoteza transformării acesteia în mecanism sub acțiunea încărcărilor de calcul, este (fig. 1*b*)

$$0{,}4M_{p1} + M_{p2} = 0{,}120(G_c + P_c)\, l. \tag{5}$$

Din această ecuație se deduce

$$M_{p2} = 0{,}120(G_c + P_c)\, l - 0{,}4M_{p1}. \tag{6}$$

Considerînd relațiile (3) și (6), expresia rotirii θ_1 devine

$$\frac{\eta_2}{t}\theta_1 = \frac{0{,}25(G_c + P_c)\, l - 2M_{p1}}{0{,}36(G_c + P_c)\, l - 1{,}2M_{p1}}, \tag{7}$$

în care

$$t = \frac{l}{h_0}\varepsilon_{ac}. \tag{8}$$

Pe de altă parte, în teoria redistribuției minime de momente [1] momentul plastic M_{p1} este dat de relația

$$M_{p1} = \nu_1 M_{e1}. \tag{9}$$

Pentru grinda continuă din figura 1, momentul M_{e1} are valoarea

$$M_{e1} = 0{,}125\ (G_c + P_c)\ l. \tag{10}$$

Cu notația

$$\varphi_1 = \frac{\theta_{p1}}{t}, \tag{11}$$

și ținînd seama de relațiile (7), (9) și (10), din condiția (1) se deduce

$$\nu_1 \geqslant \frac{1 - 1{,}44\ \eta_2 \varphi_1}{1 - 0{,}6\ \eta_2 \varphi_1}. \tag{12}$$

În mod acoperitor, condiția (12) poate fi aplicată tuturor secțiunilor critice de pe reazemele elementelor încovoiate simplu ale structurilor continue de beton armat, ea căpătînd, prin generalizare, următoarea formă:

$$\nu_j \geqslant \frac{1 - 1{,}44\ \eta \varphi_j}{1 - 0{,}6\ \eta \varphi_j}, \tag{13}$$

în care

$$\varphi_j = \frac{\theta_{pj}}{t_j} \tag{14}$$

și

$$t_j = \frac{l_j}{h_0}\ \varepsilon_{ac}. \tag{15}$$

Valoarea coeficientului η din condiția (13) este 0,7 la elementele de secțiune dreptunghiulară, și, respectiv, de 0,9 la elementele cu secțiunea în formă de T.

Valorile coeficientului φ_j se iau din tabela 1 (secțiunile critice de pe reazeme fiind întotdeauna dreptunghiulare), modul lor de stabilire fiind prezentat anterior [2].

Valorile minime ale coeficientului ν_j, care satisfac condiția (13), sînt date în tabela 3 pentru elementele continue cu secțiunea în formă de T.

4. ARTICULAȚII PLASTICE FORMATE ÎN CÎMPURI

La grinzile continue ale căror deschideri se transformă în mecanisme sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul, cea mai mare dintre rotirile efectuate de articulațiile plastice formate în cîmpuri

este cea a articulațiilor din cîmpurile deschiderilor intermediare ale grinzii continue cu un număr infinit de deschideri egale [2].

Schema unei astfel de grinzi este reprezentată în figura 2*a*.

Schema de încărcare cea mai defavorabilă pentru articulațiile plastice din cîmpuri este cea în care încărcarea permanentă se aplică pe toată lungimea grinzii, iar încărcarea temporară se aplică din două în două

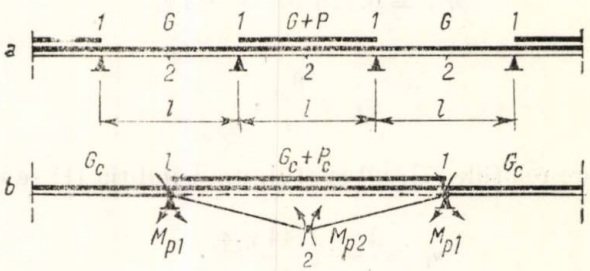


Fig. 2

deschideri (în șah), ca în figura 2. Pentru o astfel de schemă de încărcare, primele articulații plastice se formează simultan în mijlocul deschiderilor intermediare în care se aplică atît încărcarea permanentă, cît și încărcarea temporară. Această particularitate de comportare face ca rotirea uneia dintre articulațiile plastice formate în mijlocul unei deschideri intermediare să fie egală cu suma rotirilor capetelor libere ale grinzii cu două console reprezentate în figura 3. Această grindă constituie rezultatul izolării din grinda continuă, reprezentată în figura 2, a porțiunii cuprinse între două articulații plastice consecutive (forțele tăietoare din aceste articulații plastice sînt nule, datorită simetriei pe care o prezintă deformata fiecărei deschideri intermediare în raport cu axa perpendiculară pe mijlocul deschiderii respective).

La grinda continuă din figura 2 s-au notat cu *1* secțiunile critice de pe reazemele intermediare și cu *2* secțiunile critice din mijlocul deschiderilor intermediare.

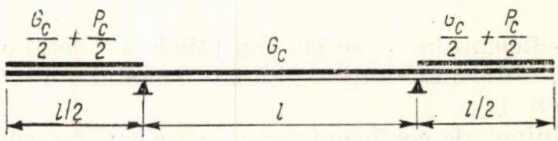


Fig. 3

Pentru explicitarea condiției (1), se iau ca încărcări de referință încărcarea permanentă G și încărcarea temporară P, aplicate pe lungimea unei singure deschideri a grinzii.

Pentru rotirea θ_2 a articulației plastice formate în mijlocul unei deschideri intermediare a grinzii continue din figura 2 (a cărei valoare este

egală cu suma rotirilor capetelor libere ale grinzii cu console din figura 3), se obține expresia

$$\theta_2 = \frac{(G_c + 2P_c)\, l^2 - 24 M_{p2} l}{12K}. \tag{16}$$

Modulul de rigiditate K se ia, în mod acoperitor, egal cu valoarea lui minimă, care corespunde secțiunilor critice *1* cînd acestea sînt solicitate de momentul lor plastic [2].

Expresia acestui modul este deci

$$K = K_1 = \frac{\eta_1}{\varepsilon_{ac}} M_{p1} h_0, \tag{17}$$

în care

$$\eta_1 = 1 - \frac{x_{p1}}{h_0}. \tag{18}$$

Întrucît secțiunile critice *1* au întotdeauna formă dreptunghiulară, pentru coeficientul η_1 se ia valoarea medie

$$\eta_1 = 0{,}7. \tag{19}$$

Ecuația de echilibru plastic al unei deschideri intermediare, corespunzătoare transformării acesteia în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul, este (fig. 2*b*)

$$M_{p1} + M_{p2} = 0{,}125(G_c + P_c)\, l. \tag{20}$$

Din această ecuație se deduce

$$M_{p1} = 0{,}125(G_c + P_c)\, l - M_{p2}. \tag{21}$$

Considerînd relațiile (17), (19) și (20), expresia rotirii θ_2 devine

$$\frac{\theta_2}{t} = \frac{(G_c + 2P_c)\, l - 24 M_{p2}}{1{,}05(G_c + P_c)\, l - 8{,}4 M_{p2}}, \tag{22}$$

în care coeficientul t este dat de relația (8).

Pe de altă parte, conform teoriei redistribuției minime a momentelor [1], momentul plastic M_{p2} poate fi scris sub forma

$$M_{p2} = \nu_2 M_{e2}. \tag{23}$$

Momentul M_{e2} are valoarea

$$M_{e2} = \frac{(G_c + 2P_c)\, l}{24}. \tag{24}$$

Cu notația

$$\varphi_2 = \frac{\theta_{p2}}{t} \tag{25}$$

și ținînd seama de relațiile (16), (17), (19) și (22) — (24), din condiția (1) se deduce

$$\nu_2 \geqslant \frac{1 - 1{,}05\varphi_2 \dfrac{1 + H_c}{1 + 2H_c}}{1 - 0{,}35\varphi_2}. \tag{26}$$

În mod acoperitor, condiția (26) poate fi aplicată tuturor secțiunilor critice din cîmpurile elementelor încovoiate simplu ale structurilor continue de beton armat, ea căpătînd, prin generalizare, următoarea formă

$$\nu_k \geqslant \frac{1 - 1{,}05\varphi_k \dfrac{1 + H_c}{1 + 2H_c}}{1 - 0{,}35\varphi_k}, \tag{27}$$

în care

$$\varphi_k = \frac{\theta_{pk}}{t_k} \tag{28}$$

și

$$t_k = \frac{l_k}{h_0}\,\varepsilon_{ac}. \tag{29}$$

Valoarea coeficientului φ_k se ia din tabela 1 cînd secțiunea critică k este dreptunghiulară și respectiv din tabela 2 cînd secțiunea critică k este în formă de T. Ambele tabele sînt reproduse din lucrarea [2].

Valorile minime ale coeficientului ν_k, care satisfac condiția (27), sînt date în tabela 4 pentru elementele continue cu secțiunea în formă de T, la care $H_c \leqslant 4$.

5. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră o grindă continuă de beton armat cu secțiunea constantă, simplu rezemată la extremități, avînd trei deschideri egale. Grinda are secțiunea în formă de T și este solicitată de încărcări permanente și temporare aplicate concentrat în fiecare deschidere, punctele de aplicație împărțind deschiderile în cîte patru părți egale. Încărcările permanente sînt egale între ele și se aplică simultan în toate deschiderile grinzii. Încărcările temporare sînt, de asemenea, egale între ele, dar pot fi aplicate în una, două sau în toate deschiderile grinzii, formînd în acest fel toate

Tabela 1

Secțiuni critice de formă dreptunghiulară. Coeficientul φ_i

ε_{ac}	α'_i	α_i							
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
0,0010	0,00	1,377	0,671	0,428	0,305	0,229	0,178	0,139	0,107
	0,05	1,378	0,903	0,669	0,427	0,304	0,229	0,178	0,139
	0,10	—	0,969	0,835	0,668	0,426	0,304	0,229	0,178
	0,15	—	—	0,902	0,808	0,666	0,425	0,303	0,229
	0,20	—	—	—	0,862	0,790	0,665	0,424	0,303
0,0015	0,00	0,908	0,437	0,275	0,192	0,141	0,106	0,079	0,059
	0,05	0,909	0,566	0,413	0,273	0,191	0,140	0,106	0,079
	0,10	—	0,614	0,502	0,401	0,272	0,190	0,140	0,105
	0,15	—	—	0,553	0,468	0,393	0,271	0,189	0,139
	0,20	—	—	—	0,512	0,450	0,389	0,270	0,189
0,0020	0,00	0,674	0,321	0,198	0,136	0,097	0,071	0,050	0,035
	0,05	0,675	0,399	0,278	0,197	0,135	0,096	0,070	0,050
	0,10	—	0,437	0,338	0,259	0,195	0,133	0,095	0,069
	0,15	—	—	0,377	0,307	0,246	0,194	0,132	0,095
	0,20	—	—	—	0,344	0,287	0,238	0,193	0,132

Tabela 2

Secțiuni critice în formă de T. Coeficientul φ_i

ε_{ac}	β	α_i							
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
0,0010	2	2,791	1,375	0,901	0,667	0,520	0,421	—	—
	4	5,804	2,790	1,867	1,373	1,096	0,898	0,764	0,662
	6	8,721	4,344	2,790	2,099	1,679	1,372	1,174	1,024
	8	10,91	5,804	3,773	2,790	2,209	1,866	1,583	1,372
	10	14,56	7,263	4,831	3,468	2,790	2,331	1,999	1,672
0,0015	2	1,851	0,907	0,590	0,435	0,336	0,270	—	—
	4	3,860	1,851	1,235	0,906	0,721	0,589	0,499	0,431
	6	5,806	2,887	1,851	1,391	1,110	0,906	0,774	0,673
	8	7,264	3,860	2,507	1,851	1,464	1,235	1,046	0,905
	10	7,695	4,833	3,212	2,303	1,851	1,545	1,324	1,157
0,0020	2	1,382	0,673	0,436	0,318	0,244	0,194	—	—
	4	2,889	1,382	0,920	0,673	0,534	0,434	0,367	0,316
	6	4,347	2,159	1,382	1,036	0,826	0,672	0,573	0,498
	8	5,442	2,889	1,873	1,382	1,091	0,920	0,778	0,672
	10	7,265	3,618	2,402	1,721	1,381	1,152	0,986	0,861

schemele posibile de încărcare. Secțiunile critice ale grinzii sînt situate în dreptul reazemelor intermediare și în mijlocul fiecărei deschideri, ele fiind numerotate cu *1*, *2* și *3*.

Schema generală a grinzii este reprezentată în figura 4.

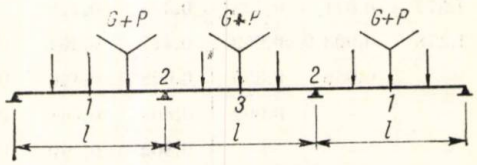


Fig. 4

Ca încărcări de referință se iau încărcarea permanentă G și încărcarea temporară P aplicate concentrat în unul din punctele care împart fiecare deschidere în cîte patru părți egale.

Date de calcul

— lungimea fiecărei deschideri a grinzii, $l = 5{,}60$ m;

— valoarea de calcul a încărcării permanente de referință, $G_c = 4$ tf;

— valoarea de calcul a încărcării temporare de referință, $P_c = 5$ tf;

— lățimea de calcul a tălpii secțiunilor critice din cîmpuri, $b' = 160$ cm;

— grosimea aripilor secțiunilor critice din cîmpuri, $h_p = 8$ cm;

— valoarea de calcul a rezistenței de rupere la compresiune din încovoiere a betonului, $R_i = 120$ kgf/cm² (beton B 250);

— valoarea de calcul a limitei de curgere a armăturii, $\sigma_c = 2900$ kgf/cm² (oțel PC 52).

Expresia generală a momentului plastic dintr-o secțiune critică i a grinzii ($i = 1, 2, 3$), calculată pe baza principiului redistribuției minime a momentelor [1], este

$$M_{pi} = \nu_i M_{ei}, \tag{30}$$

unde momentul M_{ei} este dat de relația

$$M_{ei} = (a_i + b_i H_c)\, G_c l. \tag{31}$$

Pentru grinda considerată, coeficientul H_c are valoarea

$$H_c = \frac{P_c}{G_c} = 1{,}25, \tag{32}$$

iar coeficienții a_i și b_i sînt dați în tabela 5, ei fiind reproduși din lucrarea [3].

Calculul plastic al grinzii, efectuat pe baza principiului redistribuției minime a momentelor [1], conduce la următoarele rezultate:

$$M_{e1} = 0{,}821\ G_c l,$$

$$M_{e2} = 0{,}922\ G_c l, \tag{33}$$

$$M_{e3} = 0{,}516\ G_c l,$$

$$\nu_1 = 0{,}932, \quad \nu_2 = \nu_3 = 0{,}782 \tag{34}$$

și

$$M_{p1} = 0{,}765\ G_c l = 17{,}14 \text{ tf.m},$$

$$M_{p2} = 0{,}721\ G_c l = 16{,}15 \text{ tf.m}, \tag{35}$$

$$M_{p3} = 0{,}404\ G_c l = 9{,}05 \text{ tf.m}.$$

La dimensionarea structurilor de beton armat calculate în domeniul plastic, momentele de rupere ale secțiunilor critice se iau egale cu momentele plastice respective. Alegînd dimensiunile 20×55 pentru inima secțiunilor critice și o înălțime utilă a acestora de 51 cm, prin utilizarea tabelului din anexa II a *Normativului condiționat* [4], se obțin următoarele arii necesare de armătură întinsă:

$$A_1 = 11{,}75 \text{ cm}^2,$$

$$A_2 = 12{,}90 \text{ cm}^2, \tag{36}$$

$$A_3 = 6{,}20 \text{ cm}^2.$$

Considerînd că jumătate din armătura întinsă din cîmp trece peste reazem, în zona comprimată a secțiunilor critice 2 apare aria de armătură

$$A_2' = \frac{A_3}{2} = 3{,}10 \text{ cm}^2. \tag{37}$$

(Dintre $\frac{A_1}{2}$ și $\frac{A_3}{2}$ s-a luat, în mod acoperitor, valoarea cea mai mică.)

Coeficienții α_i și α_i' au în acest caz următoarele valori:

$$\alpha_1 = 0{,}278, \quad \alpha_2 = 0{,}305,$$

$$\alpha_3 = 0{,}147, \quad \alpha_2' = 0{,}073. \tag{38}$$

Tabela 3

Coeficientul ν_j pentru $\eta = 0{,}9$

ε_{ac}	α'_i	α_i							
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
0,0010	0,00	0,000	0,204	0,579	0,724	0,802	0,851	0,886	0,914
	0,05	0,000	0,000	0,208	0,580	0,725	0,802	0,851	0,886
	0,10	—	0,000	0,000	0,210	0,582	0,725	0,802	0,851
	0,15	—	—	0,000	0,000	0,210	0,583	0,726	0,802
	0,20	—	—	—	0,000	0,000	0,216	0,584	0,726
0,0015	0,00	0,000	0,568	0,756	0,838	0,885	0,915	0,938	0,954
	0,05	0,000	0,384	0,598	0,758	0,839	0,886	0,915	0,938
	0,10	—	0,306	0,479	0,613	0,759	0,840	0,886	0,916
	0,15	—	—	0,404	0,527	0,623	0,760	0,841	0,886
	0,20	—	—	—	0,465	0,551	0,628	0,761	0i841
0,0020	0,00	0,199	0,706	0,832	0,889	0,923	0,944	0,961	0,973
	0,05	0,197	0,616	0,753	0,833	0,890	0,923	0,945	0,961
	0,10	—	0,568	0,687	0,772	0,835	0,892	0,924	0,946
	0,15	—	—	0,642	0,722	0,786	0,836	0,893	0,924
	0,20	—	—	—	0,681	0,743	0,794	0,837	0,893

Tabela 4

Coeficientul ν_k pentru $\eta = 0{,}9$ şi $H_c \leqslant 4$

ε_{ac}	β	α_k							
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
0,0010	2	0,000	0,382	0,693	0,797	0,852	0,885	—	—
	4	0,000	0,000	0,000	0,383	0,585	0,694	0,757	0,799
	6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,050	0,384	0,535	0,628
	8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,165	0,384
	10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,0015	2	0,000	0,690	0,827	0,880	0,911	0,930	—	—
	4	0,000	0,000	0,492	0,690	0,775	0,827	0,859	0,882
	6	0,000	0,000	0,000	0,368	0,576	0,690	0,752	0,795
	8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,299	0,492	0,615	0,691
	10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,215	0,424	0,546
0,0020	2	0,375	0,795	0,880	0,917	0,938	0,951	—	—
	4	0,000	0,375	0,683	0,795	0,847	0,881	0,902	0,917
	6	0,000	0,000	0,375	0,621	0,729	0,795	0,833	0,859
	8	0,000	0,000	0,000	0,375	0,588	0,683	0,751	0,795
	10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,376	0,550	0,649	0,712

Pentru $\varepsilon_{ac} = \frac{\sigma_c}{E_a} = 0{,}00138$ și $\beta = \frac{b'}{b} = 8$ din tabela 4 se deduc, prin interpolare liniară, următoarele valori ale coeficienților ν_1 și ν_3:

$$\nu_1 = 0{,}309, \quad \nu_3 = 0{,}000. \tag{39}$$

Pentru secțiunea critică *2*, din tabelul 3 se obține

$$\nu_2 = 0{,}845. \tag{40}$$

Compararea coeficienților plastici dați de teoria redistribuției minime de momente cu cei rezultați din condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice arată că această din urmă condiție afectează numai secțiunea critică *2*, coeficientul plastic al acestei secțiuni trebuind a fi luat egal cu valoarea dată de relația (40).

În consecință, noul moment plastic al secțiunilor critice *2* va fi

$$M_{p2} = 0{,}845 \times 0{,}922\ G_c l = 17{,}45 \text{ tf.m}, \tag{41}$$

căruia îi corespunde aria de armătură întinsă necesară

$$A_2 = 14{,}20 \text{ cm}^2. \tag{42}$$

Observație. Teoretic, condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice corespunzătoare secțiunilor critice *2* trebuie verificată din nou, ca urmare a sporirii ariei de armătură întinsă din aceste secțiuni. Practic însă, sporul de armătură este suficient de mic pentru ca o astfel de verificare să nu mai fie necesară.

Tabela 5

Coeficienții de influență a_i și b_i

Secțiunea critică i	a_i	b_i
1	0,313	0,406
2	0,375	0,438
3	0,125	0,313

Observația de mai sus are un caracter general, ea fiind specifică tuturor secțiunilor critice de beton armat solicitate la încovoiere simplă.

6. CONCLUZII

În lucrare s-au stabilit limitările care apar în calculul plastic al structurilor continue de beton armat, efectuat pe baza principiului redistribuției minime a momentelor, rezultate din îndeplinirea condiției de

compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice sub acțiunea încărcărilor de calcul. Studiul s-a referit la structurile solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate vertical, a căror comportare plastică se caracterizează prin formarea de articulații plastice numai în secțiunile critice solicitate la încovoiere simplă. Rezultatele obținute sînt, de asemenea, aplicabile și în cazul cînd se efectuează redistribuirea plastică a momentelor de pe reazemele elementelor încovoiate simplu ale structurilor de beton armat cu o singură deschidere, sau de pe reazemele elementelor încovoiate simplu ale structurilor continue la care încărcările permanente și temporare formează doar o singură schemă de încărcare (se aplică simultan în toate deschiderile).

Soluția practică a problemei compatibilității rotirilor articulațiilor plastice a putut fi exprimată într-o formă generalizată, acoperitoare pentru toate situațiile întîlnite în practică, ca urmare a deducerii ei din tratarea a două grinzi continue ale căror articulații plastice de pe reazeme și respectiv din cîmpuri dezvoltă cele mai mari rotiri posibile sub acțiunea încărcărilor de calcul.

Cercetarea efectuată arată că, în calculul plastic efectuat prin aplicarea teoriei redistribuției minime de momente, condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice conduce la o limitare inferioară a valorilor coeficienților plastici ν_i.

Relațiile (13) și (27), cu care se determină valorile coeficienților ν_j și ν_k, își păstrează sensul lor fizic atît timp cît numărătorii lor au valori pozitive. Cînd acești numărători devin negativi, aceasta înseamnă că articulațiile plastice respective au capacități de rotire mult mai mari decît rotirile ce rezultă din calculul plastic efectuat pe baza principiului redistribuției minime a momentelor.

★

Autorul mulțumește matematicienei Silvia Minea pentru ajutorul prețios acordat la efectuarea calculului automat al coeficienților ν_j și ν_k, cuprinși în tabelele 3 și 4.

Preimită la redacție la 27 februarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. V. Petcu, *Teoria redistribuției minime de momente a structurilor continue de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **28**, *4*, 845–865 (1969).
2. — *Compatibilitatea rotirilor articulațiilor plastice în calculul plastic optim al structurilor continue de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **30**, *3*, 645–672 (1971).
3. C.N. Avram, *Grinzi continue*, București, Edit. tehnică, 1965.
4. * * *, *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stări limită*, Vol. I, partea a III-a: Calculul și alcătuirea constructivă a elementelor de construcții civile și industriale din beton, beton armat și beton precomprimat (P. 8–62). București, Edit. tehnică, 1963.

CONSIDERAȚII ASUPRA DETERMINĂRII COEFICIENȚILOR DE INFLUENȚĂ AI UNEI BARE ÎN CONSOLĂ

de VIRGIL BOGDAN
Institutul politehnic București

Lucrarea cuprinde o metodologie de calcul pentru coeficienții de influență ai unei structuri în formă de bară rezemată în consolă.
Ținînd seama de faptul că la o structură în formă de bară rezemată în consolă, torsorul forțelor din orice secțiune transversală este o mărime static determinată și, în plus, adoptînd ipoteza lui Bernoulli, se stabilesc coeficienții de influență la flexibilitate corespunzători unui tronson arbitrar al structurii.
Metoda propusă se pretează la calculul coeficienților de influență la flexibilitate și la rigiditate cu ajutorul calculatoarelor.

1. INTRODUCERE

Se consideră o bară (fig. 1) asupra căreia acționează sarcinile unitare $F = 1$ și $M = 1$ în secțiunea de coordonată ζ. Sub acțiunea acestor sarcini, secțiunea de coordonată x capătă următoarele deplasări, denumite coeficienți de influență la flexibilitate:

$C_{x\zeta}^{fF}$ — săgeata secțiunii x datorită forței unitare $F = 1$ aplicată în secțiunea ζ;

$C_{x\zeta}^{\varphi F}$ — rotirea secțiunii x datorită forței unitare $F = 1$ aplicată în secțiunea ζ;

$C_{x\zeta}^{fM}$ — săgeata secțiunii x datorită momentului unitar $M = 1$ aplicat în secțiunea ζ;

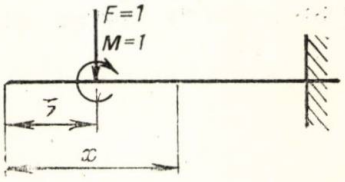


Fig. 1

$C_{x\zeta}^{\varphi M}$ — rotirea secțiunii x datorită momentului unitar $M = 1$ aplicat în secțiunea ζ.

Pe baza relațiilor de definiție ale coeficienților de influență la flexibilitate se pot calcula deplasările (săgeți și rotiri) pentru orice sarcină (forță sau cuplu) care nu produce depășirea limitei de proporționalitate.

Ca exemplu, dacă în secțiunea ζ acționează sarcina M, în secțiunea x se produc :

$$\text{rotirea} \quad \varphi_M = M \cdot C_{x\zeta}^{\varphi M},$$

$$\text{săgeata} \quad f_M = M \cdot C_{x\zeta}^{fM}.$$

Inversii acestor coeficienți, legați de coeficienții de influență prin relații de forma

$$K_{\zeta x}^{M\varphi} = \frac{M}{\varphi_M} = \frac{1}{C_{x\zeta}^{\varphi M}},$$

sînt numiți coeficienți de influență la rigiditate și reprezintă sarcinile (forțe sau cupluri) care produc deplasări (săgeți sau rotiri) unitare.

Coeficienții de influență la rigiditate intervin în calculele de vibrații. Ei constituie elementele matricei $[K]$ din ecuația de vibrații

$$[\mu]\ddot{x} + [d]\dot{x} + [K]x = [F].$$

Considerînd ca și mai înainte (fig. 1) sarcinile aplicate în secțiunea ζ și deplasările produse de acestea în secțiunea x, coeficienții de influență la rigiditate se definesc astfel :

$K_{\zeta x}^{Ff}$ — forța care aplicată în secțiunea ζ produce o săgeată unitară în secțiunea x,

$K_{\zeta x}^{F\varphi}$ — forța care aplicată în secțiunea ζ produce o rotire unitară în secțiunea x,

$K_{\zeta x}^{Mf}$ — momentul care aplicat în secțiunea ζ produce o săgeată unitară în secțiunea x,

$K_{\zeta x}^{M\varphi}$ — momentul care aplicat în secțiunea ζ produce o rotire unitară în secțiunea x.

În unele cazuri, structurile analizate pot fi considerate ca avînd forma unei bare și fiind rezemate în consolă (fig. 2). Această ipoteză se poate face, de exemplu, pentru fuselajul unui avion care, pentru analiza deplasărilor, poate fi asimilat cu o bară încastrată în regiunea de asamblare cu aripa (ipoteze adoptate de Bisplinghoff, Vallat și alții).

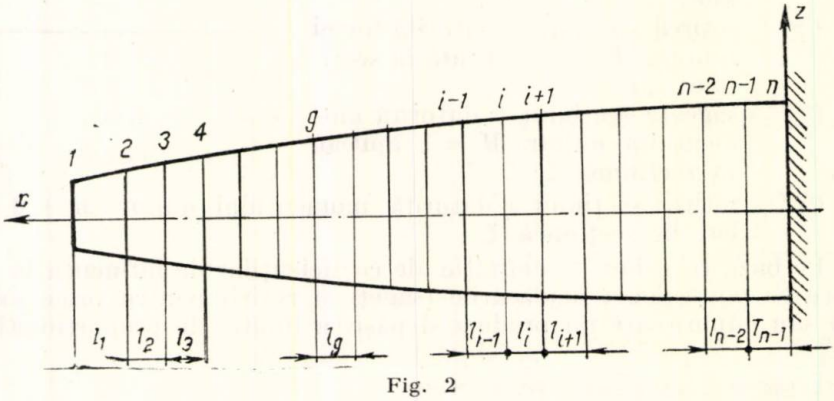


Fig. 2

Dacă bara este în consolă, torsorul eforturilor este o mărime static determinată în orice secțiune transversală și se poate determina cu ajutorul metodei secțiunilor, scriind condiția de echilibru pentru tronsonul din bară rămas nerezemat după secționare.

Folosind proprietatea enunțată mai sus și adoptînd ipoteza lui Bernoulli, se pot determina coeficienții de influență corespunzători unui tronson din structură delimitat de două secțiuni transversale alese arbitrar. Cunoscînd coeficienții de influență corespunzători fiecărui tronson al structurii analizate, se va stabili un algoritm pentru calculul coeficienților de influență ai întregii structuri.

2. DEPLASĂRILE CORESPUNZĂTOARE UNUI TRONSON

În primul rînd se analizează deplasările (săgeți și rotiri) corespunzătoare unui tronson delimitat de secțiunile arbitrare i și $i + 1$ (fig. 2). Secțiunile $2, 3, \ldots, g, \ldots, i, i + 1, \ldots, n$ pot fi alese în funcție de diferite criterii, cum ar fi modificarea legii de variație a secțiunilor transversale, secțiuni în care se caută caracteristicile elastice sau de vibrații ale structurii sau alte criterii.

Pentru determinarea deplasărilor corespunzătoare tronsonului $(i, i + 1)$, datorite încărcărilor cu sarcinile F_g sau M_g aplicate în secțiunea g, se analizează tronsonul $(g, \ldots, i + 1)$, considerînd extremitatea $i + 1$ a acestuia imobilizată (încastrată). Se presupune, de asemenea, că sînt cunoscute materialul, forma și dimensiunile barei analizate.

2.1. ROTIREA SECȚIUNII i PRODUSĂ DE MOMENTUL M_g APLICAT ÎN SECȚIUNEA g

Se consideră tronsonul delimitat de secțiunile g și $i + 1$ (fig. 3) cu secțiunea $i + 1$ imobilizată solicitat cu momentul M_g aplicat în secțiunea g. Deoarece analiza se referă la tronsonul $(i, i + 1)$ se poate face reducerea momentului M_g din secțiunea g la secțiunea i după care se obține schema de încărcare de din figura 4 (fără momentul unitar). Funcția de moment corespunzătoare acestei încărcări este

$$M = M_g$$

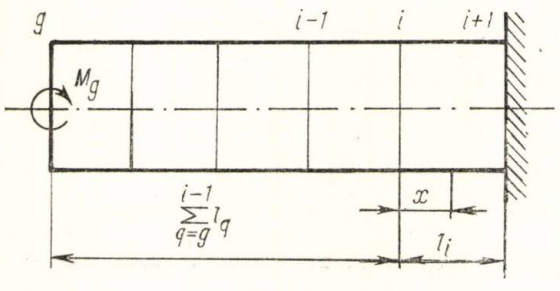


Fig. 3

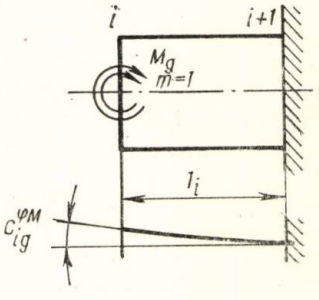


Fig. 4

Rotirea secţiunii i faţă de secţiunea $i + 1$ se poate determina cu ajutorul integralei Mohr-Maxwell. Introducînd în secţiunea i momentul unitar $m = 1$, se obţine ca funcţie de moment

$$m = 1.$$

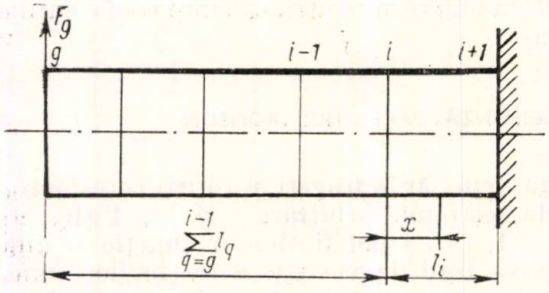


Fig. 5

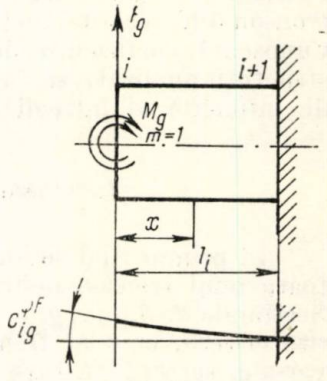


Fig. 6

Expresia rotirii secţiunii i faţă de secţiunea $i + 1$, produsă de momentul M_g aplicat în secţiunea g devine

$$(\varphi_i^{i+1})_g^M = \int_{l_i} \frac{M \cdot m}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x = \int_{l_i} \frac{M_g \cdot 1}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x. \tag{1}$$

2.2. ROTIREA SECŢIUNII i PRODUSĂ DE FORŢA F_g APLICATĂ ÎN SECŢIUNEA g

Se consideră de asemenea, tronsonul delimitat de secţiunile (g, ..., $i + 1$) cu secţiunea $i + 1$ imobilizată (fig. 5) solicitat de forţa F_g aplicată în secţiunea g. Întrucît se cercetează rotirea secţiunii i faţă de secţiunea $i + 1$, se poate reduce forţa F_g la secţiunea i şi se obţine schema de sarcini din figura 6 (în afara momentului unitar), în care

$$M_g = F_g(l_g + l_{g+1} + \ldots + l_{i-1}) = F_g \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q .$$

Datorită acestei încărcări, funcţia de moment din intervalul (i, $i + 1$) are expresia

$$M = M_g + F_g \cdot x = F_g\left(x + \sum_{q=g}^{i-1} l_q\right). \tag{2}$$

Pentru determinarea rotirii secţiunii i cu ajutorul integralei Mohr-Maxwell, în secţiunea i se introduce momentul unitar $m = 1$. Expresia

rotirii secțiunii i față de secțiunea $i+1$, produsă de forța F_g aplicată în secțiunea g va fi

$$(\varphi_{i\,i+1})_g^F = \int_{l_i} \frac{M \cdot m}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x = \int_{l_i} \frac{F_g \left(x + \sum_{q=g}^{i-1} l_q \right) \cdot 1}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= F_g \left[\int_{l_i} \frac{x \cdot \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i} + \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q \right) \cdot \int_{l_i} \frac{\mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i} \right]. \tag{3}$$

2.3. SĂGEATA SECȚIUNII i PRODUSĂ DE MOMENTUL M_g APLICAT ÎN SECȚIUNEA g

Se consideră tronsonul delimitat de secțiunile g și $i+1$ (fig. 7) cu secțiunea $i+1$ imobilizată, asupra căruia acționează momentul M_g aplicat în secțiunea g. Făcînd reducerea momentului M_g la secțiunea i, se obține schema de sarcini din figura 8 (fără forța unitară).

Pentru determinarea deplasării secțiunii i cu ajutorul integralei Mohr-Maxwell, în secțiunea i se introduce forța unitară $\bar{f} = 1$. Datorită acesteia, în secțiunea x se produce momentul

$$m = \bar{f} \cdot x = x.$$

Expresia săgeții secțiunii i față de secțiunea $i+1$, produsă de momentul M_g aplicat în secțiunea g este

$$(f_i^{i+1})_g^M = \int_{l_i} \frac{M \cdot m}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x = \int_{l_i} \frac{M_g \cdot x}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x = M_g \int_{l_i} \frac{x \cdot \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i}. \tag{4}$$

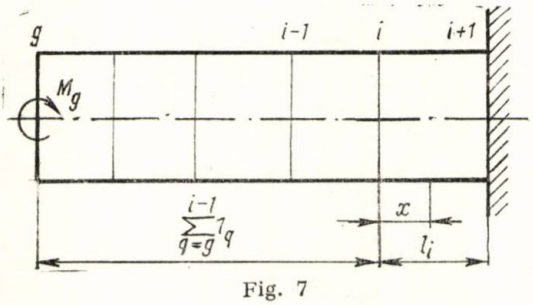


Fig. 7

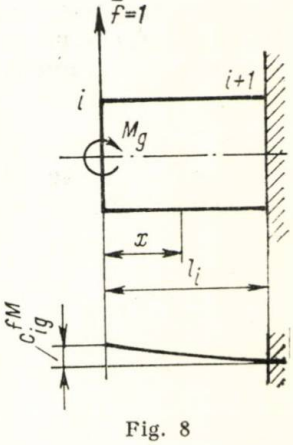


Fig. 8

2.4. SĂGEATA SECȚIUNII i PRODUSĂ DE FORȚA F_g APLICATĂ ÎN SECȚIUNEA g

Se consideră tronsonul delimitat de secțiunile g și $i+1$ (fig. 9) cu secțiunea $i+1$ imobilizată, asupra căruia acționează forța F_g aplicată

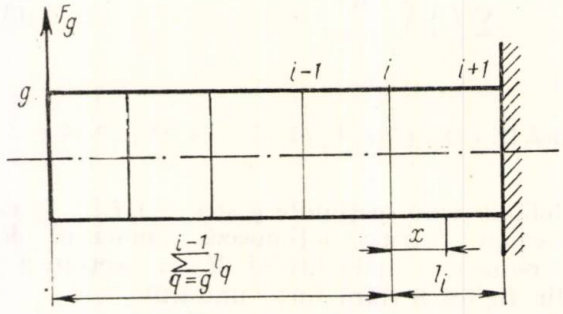


Fig. 9

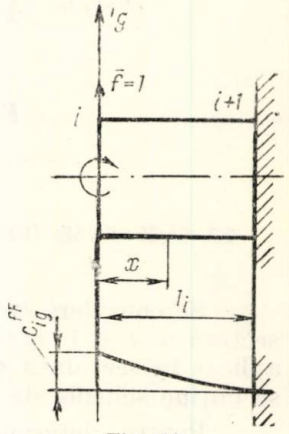


Fig. 10

în secțiunea g. Reducînd forța F_g la secțiunea i se obține schema de sarcini din figura 10 (fără forța unitară), în care

$$M_g = F_g(l_g + l_{g+1} + \ldots + l_{i-1}) = F_g \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q .$$

Momentul din secțiunea x produs de forța F_g este

$$M = F_g \cdot x + M_g = F_g\left(x + \sum_{q=g}^{i-1} l_q\right). \tag{5}$$

Pentru determinarea săgeții secțiunii i cu ajutorul integralei Mohr-Maxwell, în secțiunea i se introduce forța unitară $\bar{f} = 1$, care produce în secțiunea x momentul

$$m = \bar{f} \cdot x = x.$$

Expresia săgeții secțiunii i față de secțiunea $i+1$ produsă de forța F_g aplicată în secțiunea g este

$$(f_i^{i+1})_g^F = \int_{l_i} \frac{M \cdot m}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x = \int_{l_i} \frac{F_g\left(x + \sum_{q=g}^{i-1} l_q\right) \cdot x}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= F_g\left[\int_{l_i} \frac{x^2}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x + \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q\right) \int_{l_i} \frac{x}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x\right]. \tag{6}$$

Coeficienții de influență la flexibilitate, corespunzători tronsonului $(i, i+1)$, se pot determina din relațiile (1), (3), (4) și (6), făcînd înlocuiri $M_g = 1$, respectiv, $F_g = 1$, și se obțin expresiile

$$c_{ig}^{\varphi M} = \int_{l_i} \frac{\mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i}, \tag{7}$$

$$c_{ig}^{\varphi F} = \int_{l_i} \frac{x + \sum_{q=g}^{i-1} l_q}{E_i \cdot I_i} \cdot \mathrm{d}x = \left[\int_{l_i} \frac{x \cdot \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i} + \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q \right) \int_{l_i} \frac{\mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i} \right], \tag{8}$$

$$c_{ig}^{fM} = \int_{l_i} \frac{x \cdot \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i}, \tag{9}$$

$$c_{ig}^{fF} = \int_{l_i} \frac{\left(x^2 + \sum_{q=g}^{i-1} l_q \cdot x \right) \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i} = \int_{l_i} \frac{x^2 \cdot \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i} + \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q \right) \cdot \int_{l_i} \frac{x \cdot \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i}. \tag{10}$$

Cum era de așteptat, acești coeficienți depind de materialul tronsonului (E_i), de forma și de dimensiunile tronsonului (I_i, l_i) și de poziția sarcinii față de tronson (direcțiile sarcinilor M_g sau F_g și distanța dintre secțiunile g și i).

Pentru cele ce urmează este util să se facă notațiile

$$B_0^i = \int_{l_i} \frac{\mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i}; \qquad B_1^i = \int_{l_i} \frac{x \cdot \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i}; \qquad B_2^i = \int_{l_i} \frac{x^2 \cdot \mathrm{d}x}{E_i \cdot I_i}. \tag{11}$$

Cu aceste notații relațiile (7)—(10) capătă forma

$$c_{ig}^{\varphi M} = B_0^i, \tag{12}$$

$$c_{ig}^{\varphi F} = B_1^i + B_0^i \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q, \tag{13}$$

$$c_{ig}^{fM} = B_1^i, \tag{14}$$

$$c_{ig}^{fF} = B_2^i + B_1^i \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q. \tag{15}$$

Parametrii B_0^i, B_1^i și B_2^i sînt mărimi care depind de materialul, forma și dimensiunile fiecărui tronson al structurii analizate. Valorile lor se calculează pentru fiecare tronson în parte considerînd structura divi-

zată în cele $n-1$ tronsoane. Aceste valori pot fi înscrise într-o tabelă (tabela 1).

Tabela 1

Valorile parametrilor B_0^i, B_1^i, B_2^i

Parametrul \ Tronsonul	1	2	...	g	...	i	...	$n-1$
B_0^i	B_0^1	B_0^2		B_0^g		B_0^i		B_0^{n-1}
B_1^i	B_1^1	B_1^2		B_1^g		B_1^i		B_1^{n-1}
B_2^i	B_2^1	B_2^2		B_2^g		B_2^i		B_2^{n-1}

Cu aceste precizări, coeficienţii de influenţă la flexibilitate corespunzători tronsonului $(i,\ i+1)$ depind numai de parametrii B_0^i, B_1^i, B_2^i şi de lungimile l_q, aşa cum rezultă şi din relaţiile (12)—(15).

3. COEFICIENŢII DE INFLUENŢĂ LA FLEXIBILITATE AI STRUCTURII

3.1. COEFICIENŢII DE INFLUENŢĂ LA FLEXIBILITATE $C_{ig}^{\varphi M}$

Se consideră întreaga structură analizată (fig. 2 şi 11) încastrată în secţiunea n. Rotirile pe care le produce momentul unitar $M_g = 1$ aplicat în secţiunea g asupra fiecăruia din tronsoanele $(i,\ i+1)$, $(i+1,\ i+2)$, ..., $(n-1,\ n)$ se deduc din relaţia (12) şi au expresiile

$$\begin{aligned} c_{ig}^{\varphi M} &= B_0^i, \\ c_{i+1,g}^{\varphi M} &= B_0^{i+1}, \\ c_{i+2,g}^{\varphi M} &= B_0^{i+2}, \\ &\vdots \\ c_{n-1,g}^{\varphi M} &= B_0^{n-1}, \\ c_{ng}^{\varphi M} &= B_0^n = 0 \qquad \text{(pentru că } l_n = 0)^*). \end{aligned} \tag{16}$$

Unghiul de rotire al secţiunii i faţă de secţiunea de încastrare n, produs de momentul de încovoiere unitar $M_g = 1$ aplicat în secţiunea g, este de fapt coeficientul de influenţă la flexibilitate $C_{ig}^{\varphi M}$ şi, după cum se vede din figura 11, se poate obţine prin sumarea expresiilor (16)

$$C_{ig}^{\varphi M} = c_{ig}^{\varphi M} + c_{i+1,g}^{\varphi M} + \ldots + c_{n-1,g}^{\varphi M} + c_{ng}^{\varphi M} = B_0^i + B_0^{i+1} + \ldots + B_0^{n-1} + B_0^n,$$

adică

$$C_{ig}^{\varphi M} = \sum_{p=i}^{n} B_0^p. \tag{17}$$

Pentru stabilirea expresiei coeficientului de influenţă $C_{gi}^{\varphi M}$ care reprezintă rotirea secţiunii g produsă de un moment unitar $M_i = 1$ aplicat

*) Într-un caz mai general, termenul $c_{ng}^{\varphi M} = B_0^n \neq 0$ poate să reprezinte un unghi de rotire al reazemului n, dat prin condiţii iniţiale.

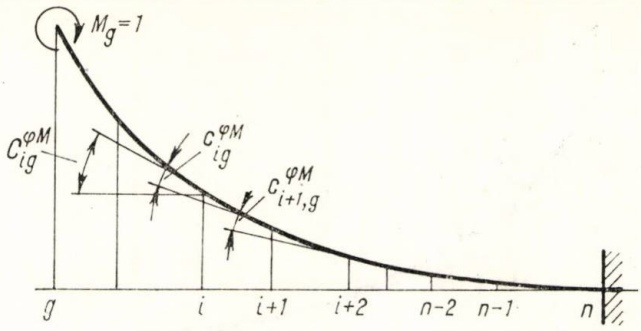


Fig. 11

în secțiunea i, se determină mai întîi rotirea secțiunii i datorită momentului unitar $M_i = 1$ aplicat în secțiunea i. Din figura 11 se vede că panta din secțiunea i are aceeași valoare pentru orice $g \leqslant i$, adică

$$C_{ii}^{\varphi M} = C_{ig}^{\varphi M}. \tag{a}$$

Totodată, tronsonul $(g, \ldots, i)$, fiind nesolicitat, are panta constantă și egală cu panta secțiunii i, deci

$$C_{gi}^{\varphi M} = C_{ii}^{\varphi M}. \tag{b}$$

Din egalitățile (a) și (b) rezultă

$$C_{gi}^{\varphi M} = C_{ig}^{\varphi M}. \tag{18}$$

Egalitatea (18) decurge din teorema reciprocității deplasărilor (teorema lui Maxwell).

3.2. COEFICIENȚII DE INFLUENȚĂ LA FLEXIBILITATE $C_{ig}^{\varphi F}$ ȘI $C_{ii}^{\varphi F}$

Luînd în considerare relația (13) se pot deduce rotirile produse de forța unitară $F_g = 1$ aplicată în secțiunea g (fig. 2 și 12) asupra fiecăruia din tronsoanele $(i,\ i+1)$, $(i+1,\ i+2)$, $\ldots$, $(n-1,\ n)$,

$$\begin{aligned}
c_{ig}^{\varphi F} &= B_1^i + B_0^i \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q, \\
c_{i+1,g}^{\varphi F} &= B_1^{i+1} + B_0^{i+1} \cdot \sum_{q=g}^{i} l_q, \\
c_{i+2,g}^{\varphi F} &= B_1^{i+2} + B_0^{i+2} \cdot \sum_{q=g}^{i+1} l_q, \\
&\vdots \\
c_{n-1,g}^{\varphi F} &= B_1^{n-1} + B_0^{n-1} \cdot \sum_{q=g}^{n-2} l_q, \\
c_{ng}^{\varphi F} &= B_1^n + B_0^n \cdot \sum_{q=g}^{n-1} l_q = 0 \quad \text{(pentru că } l_n = 0\text{)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

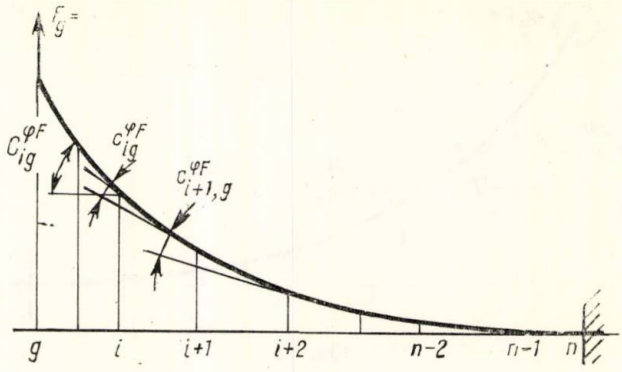


Fig. 12

Unghiul de rotire al secțiunii i față de secțiunea de încastrare n, produs de forța unitară $F_g = 1$ aplicată în secțiunea g, este coeficientul de influență la flexibilitate $C_{ig}^{\varphi F}$ și, așa cum se vede din figura 12, este suma expresiilor (19)

$$C_{ig}^{\varphi F} = c_{ig}^{\varphi F} + c_{i+1,g}^{\varphi F} + \ldots + c_{n-1,g}^{\varphi F} + c_{ng}^{\varphi F} = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + \sum_{p=i}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=g}^{p-1} l_q$$

sau, scoțînd în față semnul Σ, se obține

$$C_{ig}^{\varphi F} = \sum_{p=i}^{n}\left(B_1^p + B_0^p \cdot \sum_{q=g}^{p-1} l_q\right) \qquad \text{(pentru } g \leqslant i \leqslant n\text{).} \qquad (20)$$

Expresia (20) a fost stabilită pentru situațiile în care secțiunea i unde se determină coeficientul de influență $C_{ig}^{\varphi F}$ este cuprinsă în intervalul dintre secțiunea g în care se aplică forța unitară și reazemul n considerat încastrat.

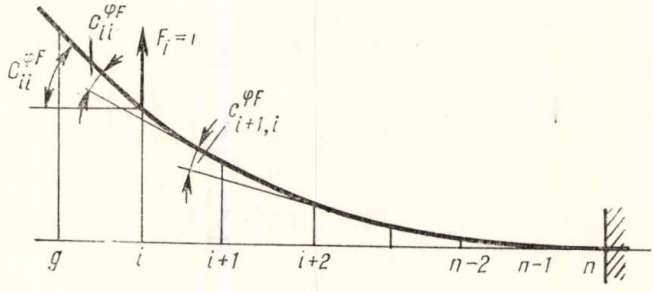


Fig. 13

Pentru determinarea coeficientului de influență, $C_{gi}^{\varphi F}$, care reprezintă rotirea secțiunii g produsă de forța $F_i = 1$ aplicată în secțiunea i (fig. 13), se observă mai întîi că acesta are aceeași expresie ca și coeficientul

de influență $C_{ii}^{\varphi F}$, întrucît prin aplicarea sarcinii $F_i = 1$ în secțiunea i, tronsonul $(g, \ldots, i)$ este nesolicitat, deci axa lui rămîne dreaptă. Expresia coeficientului $C_{ii}^{\varphi F}$ se poate deduce din relația (20) făcînd $g = i$ și se obține

$$C_{ii}^{\varphi F} = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q$$

și, pentru că

$$C_{gi}^{\varphi F} = C_{ii}^{\varphi F},$$

rezultă

$$C_{gi}^{\varphi F} = \sum_{p=i}^{n} \left(B_1^p + B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q \right) \quad \text{(pentru } g \leqslant i \leqslant n\text{)} \qquad (21)$$

3.3. COEFICIENȚII DE INFLUENȚĂ LA FLEXIBILITATE C_{ig}^{fM} ȘI C_{gi}^{fM}

Săgeata secțiunii i față de secțiunea de încastrare n (fig. 14) depinde de săgețile și de rotirile tuturor tronsoanelor cuprinse în intervalul $(i, \ldots, n)$. Dacă această săgeată este produsă de un moment unitar $M_g = 1$ aplicat în secțiunea g, atunci ea reprezintă coeficientul de influență la flexibilitate C_{ig}^{fM}.

Expresia coeficientului de influență C_{ig}^{fM} din secțiunea i poate fi considerată ca sumă a următorilor termeni:

$$C_{ig}^{fM} = c_{ig}^{fM} + l_i \cdot C_{i+1,g}^{\varphi M} + C_{i+1,g}^{fM},$$

a căror semnificație rezultă din figura 14. La rîndul lui, termenul $C_{i+1,g}^{fM}$ este format din suma termenilor,

$$C_{i+1,g}^{fM} = c_{i+1,g}^{fM} + l_{i+1} \cdot C_{i+2,g}^{\varphi M} + C_{i+2,g}^{fM}$$

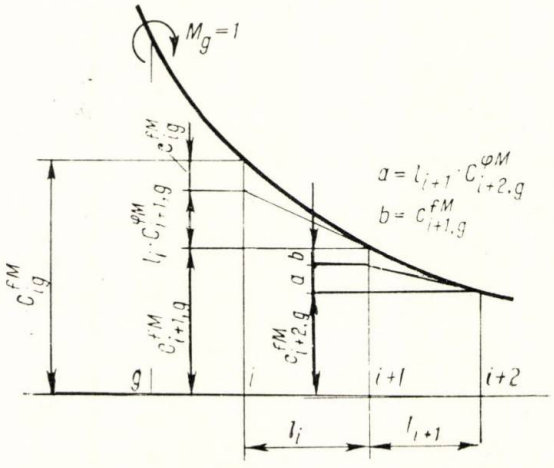


Fig. 14

şi aşa şi mai departe. Aceşti termeni pot fi puşi sub forma indicată prin relaţia (*c*). Prin însumarea lor, termenii din stînga egalităţii se reduc doi cîte doi şi se obţine relaţia (22) :

$$\begin{aligned}
C_{ig}^{fM} - C_{i+1,g}^{fM} &= c_{ig}^{fM} + l_i \cdot C_{i+1,g}^{\varphi M}, \\
C_{i+1,g}^{fM} - C_{i+2,g}^{fM} &= c_{i+1,g}^{fM} + l_{i+1} \cdot C_{i+2,g}^{\varphi M}, \\
C_{i+2,g}^{fM} - C_{i+3,g}^{fM} &= c_{i+2,g}^{fM} + l_{i+2} \cdot C_{i+3,g}^{\varphi M}, \\
&\vdots \\
C_{n-2,g}^{fM} - C_{n-1,g}^{fM} &= c_{n-2,g}^{fM} + l_{n-2} \cdot C_{n-1,g}^{\varphi M}, \\
C_{n-1,g}^{fM} - C_{ng}^{fM} &= c_{n-1,g}^{fM} + l_{n-1} \cdot C_{ng}^{\varphi M};
\end{aligned} \tag{c}$$

$$C_{ig}^{fM} = C_{nj}^{fM} + \sum_{p=i}^{n-1} c_{pg}^{fM} + \sum_{p=i}^{n-1} (l_p \cdot C_{p+1,g}^{\varphi M}). \tag{22}$$

Termenul C_{ng}^{fM} din relaţia (22) reprezintă săgeata secţiunii extreme n şi, ca atare, este echivalent cu c_{ng}^{fM}. Dacă structura este încastrată în secţiunea n şi secţiunea n este imobilă, atunci

$$C_{ng}^{fM} = c_{ng}^{fM} = 0.^{*})$$

Cu aceste precizări, termenii unu şi doi din partea dreaptă ai expresiei (22) se pot scrie

$$C_{nj}^{fM} + \sum_{p=i}^{n-1} c_{pg}^{fM} = c_{nj}^{fM} + \sum_{p=i}^{n-1} c_{pj}^{fM} = \sum_{p=i}^{n} c_{pg}^{fM} = \sum_{p=i}^{n} B_1^p,$$

ultimul termen obţinîndu-se din relaţia (14).

Înlocuind în ultimul termen al relaţiei (22) cantitatea $C_{p+1,g}^{\varphi M}$ cu valoarea ei din relaţia (17) aceasta capătă forma

$$\sum_{p=i}^{n-1} (l_p \cdot C_{p+1,g}^{\varphi M}) = \sum_{p=i}^{n-1} l_p \cdot \sum_{q=p+1}^{n} B_0^q,$$

care, sub formă dezvoltată devine :

$$\begin{aligned}
&l_i (B_0^{i+1} + B_0^{i+2} + B_0^{i+3} + \cdots + B_0^{n-1} + B_0^n) + \\
&l_{i+1} (\quad B_0^{i+2} + B_0^{i+3} + \cdots + B_0^{n-1} + B_0^n) + \\
&l_{i+2} (\quad B_0^{i+3} + \cdots + B_0^{n-1} + B_0^n) + \\
&\vdots \\
&l_{n-2} (\quad B_0^{n-1} + B_0^n) + \\
&l_{n-1} (\quad B_0^n).
\end{aligned}$$

*) Într-un caz mai general, $c_{nj}^{fM} \neq 0$ poate să reprezinte o săgeată a reazemului încastrat n, dată prin condiţiile iniţiale.

Reînsumînd termenii acestui tablou după coloane, se obține

$$\sum_{p=1}^{n-1} l_p \cdot \sum_{q=p+1}^{n} B_0^q = l_i \cdot B_0^{i+1} + (l_i + l_{i+1}) \cdot B_0^{i+2} + (l_i + l_{i+1} + l_{i+2}) \cdot B_0^{i+3} + \cdots$$

$$\cdots + (l_i + l_{i+1} + l_{i+2} + \cdots + l_{n-2} + l_{n-1}) \cdot B_0^n = \sum_{p=i+1}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q .$$

Înlocuind aceste rezultate în relația (22), se obține

$$C_{ig}^{fM} = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + \sum_{p=i+1}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q \qquad \text{(pentru } g \leqslant i \leqslant n\text{).} \quad (23)$$

Dacă se desface paranteza din relația (21) și se scrie separat primul termen din a doua sumă se obține

$$C_{gi}^{\varphi F} = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + \sum_{p=i}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + B_0^i \cdot \sum_{q=i}^{i-1} l_q + \sum_{p=i+1}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q .$$

Din punct de vedere matematic, suma $\sum_{q=i}^{i-1} l_q$ nu are sens. Din punct de vedere fizic corespunde cazului în care sarcina unitară $F_i = 1$ acționează în secțiunea i și, ca atare, momentul ei în raport cu această secțiune este nul. Pentru aceste motive, în cele ce urmează se va introduce convenția

$$\sum_{q=i}^{i-1} l_q = 0 .$$

Cu convenția introdusă, relația (21) se poate scrie

$$C_{gi}^{\varphi F} = C_{ig}^{fM} = \sum_{p=i}^{n} \left(B_1^p + B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q \right) \qquad \text{(pentru } g \leqslant i \leqslant n\text{).} \quad (24)$$

Acest rezultat este necesar în virtutea teoremei reciprocității deplasărilor.

Coeficientul de influență C_{gi}^{fM} care reprezintă săgeata secțiunii g produsă de momentul unitar $M_i = 1$ aplicat în secțiunea i se poate exprima prin suma

$$C_{gi}^{fM} = C_{ii}^{fM} + \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q \right) \cdot C_{ii}^{\varphi M}, \quad (d)$$

a căror semnificație rezultă din figura 15. Expresia primului termen din partea dreaptă a relației (d) se poate deduce din relația (23) făcînd $g = i$ și se obține

$$C_{ii}^{fM} = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + \sum_{p=i+1}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q, \tag{e}$$

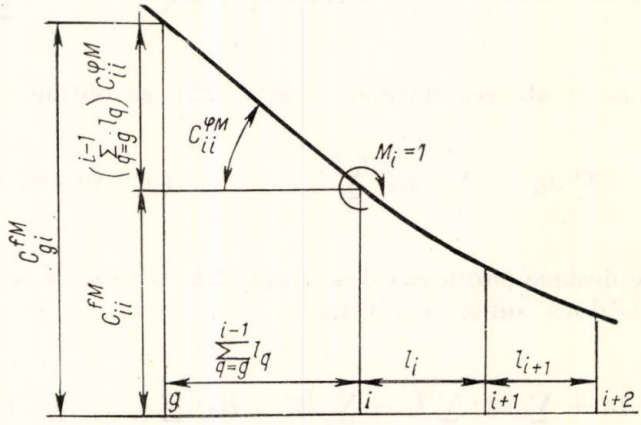


Fig. 15

adică

$$C_{ii}^{fM} = C_{ig}^{fM},$$

care sînt egali, deoarece săgeata C_{ig}^{fM} din secțiunea i (fig. 16) rămîne aceeași. oricare ar fi secțiunea $g \leqslant i$ în care se aplică momentul unitar $M_g = 1$, Înlocuind și factorul $C_{ii}^{\varphi M}$ din relația (d) cu expresia lui din relațiile (a) și (17), relația (d) devine

$$C_{gi}^{fM} = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + \sum_{p=i+1}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_b + \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q\right)\left(\sum_{p=i}^{n} B_0^p\right) =$$

$$= \sum_{p=i}^{n} B_1^p + B_0^i \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q + \sum_{p=i+1}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=g}^{p-1} l_q. \tag{24'}$$

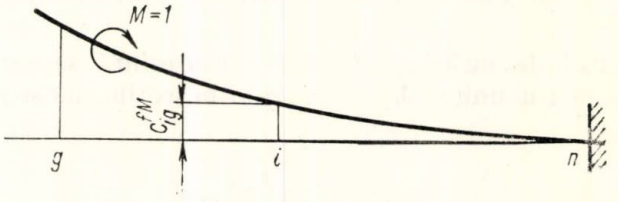


Fig. 16

Reluînd expresia (20), asupra ei se pot efectua următoarele transformări:

$$C_{ig}^{\varphi F} = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + \sum_{p=i}^{n} B_0^p \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q + \sum_{q=i_j}^{p-1} l_q \right) = \sum_{p=i}^{n} B_1^p + B_0^i \cdot \sum_{q=i}^{i-1} l_q +$$

$$+ \sum_{p=i+1}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q + \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q \right) \left(\sum_{p=i}^{n} B_0^p \right) = C_{gi}^{fM},$$

care verifică, de asemenea, teorema reciprocității deplasărilor.

3.4. COEFICIENȚII DE INFLUENȚĂ LA FLEXIBILITATE C_{ig}^{fF}

Expresia coeficientului de influență la flexibilitate C_{ig}^{fF}, care reprezintă săgeata secțiunii i față de secțiunea de încastrare n provocată de sarcina $F_g = 1$ aplicată în secțiunea g, poate fi considerată ca sumă a termenilor

$$C_{ig}^{fF} = c_{ig}^{fF} + l_i \cdot C_{i+1,g}^{\varphi F} + C_{i+1,g}^{fF},$$

a căror semnificație rezultă din figura 17. Din nou termenul $C_{i+1,g}^{fF}$ se poate descompune în termenii

$$C_{i+1,g}^{fF} = c_{i+1,g}^{fF} + l_{i+1} \cdot C_{i+2,g}^{\varphi F} + C_{i+2,g}^{fF},$$

descompunerea continuîndu-se pentru $C_{i+2,g}^{fF}$, și următorii. Dacă acești termeni se aranjează în forma indicată prin relațiile (*f*) și apoi se însumează, se obține relația (25)

$$\begin{aligned}
C_{ig}^{fF} - C_{i+1,g}^{fF} &= c_{ig}^{fF} + l_i \cdot C_{i+1,g}^{\varphi F}, \\
C_{i+1,g}^{fF} - C_{i+2,g}^{fF} &= c_{i+1,g}^{fF} + l_{i+1} \cdot C_{i+2,g}^{\varphi F}, \\
&\vdots \\
C_{n-1,g}^{fF} - C_{ng}^{fF} &= c_{n-1,g}^{fF} + l_{n-1} \cdot C_{ng}^{\varphi F};
\end{aligned} \tag{f}$$

$$C_{ig}^{fF} = C_{ng}^{fF} + \sum_{p=1}^{n-1} c_{pg}^{fF} + \sum_{p=i}^{n-1} (l_p \cdot C_{p+1,g}^{\varphi F}). \tag{25}$$

Pentru aceleași motive $C_{ng}^{fF} = c_{ng}^{fF} = 0$, iar primii doi termeni din partea dreaptă ai relației (25) se pot scrie

$$C_{ng}^{fF} + \sum_{p=i}^{n-1} c_{pg}^{fF} = \sum_{p=i}^{n} c_{pg}^{fF} = \sum_{p=i}^{n} \left[B_2^p + \sum_{q=g}^{p-1} l_q \cdot B_1^p \right].$$

Expresia ultimului termen al relației (25) se poate obține din relația (20), înlocuind indicii de sumare i cu $p+1$ și p cu r,

$$\sum_{p=i}^{n-1}\left[l_p\cdot\sum_{r=p+1}^{n}\left(B_1^r+B_0^r\cdot\sum_{q=g}^{r-1}l_q\right)\right]'\cdot \tag{g}$$

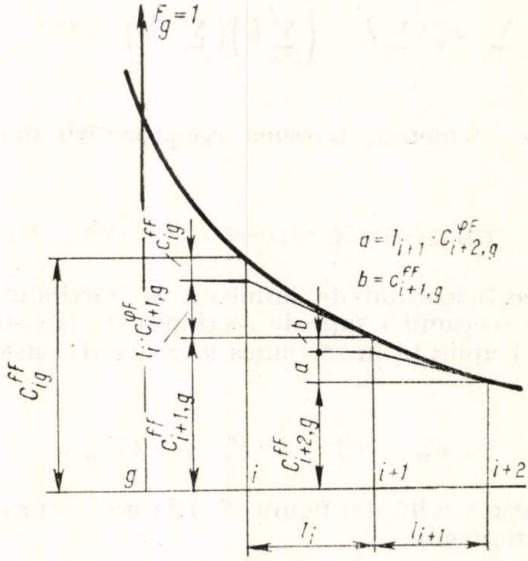


Fig. 17

Înlocuind aceste rezultate în relația (25) se obține

$$C_{ig}^{fF}=\sum_{p=i}^{n}\left[B_2^p+B_1^p\cdot\sum_{q=g}^{p-1}l_q\right]+\sum_{p=i}^{n-1}\left[l_p\cdot\sum_{r=p+1}^{n}\left(B_1^r+B_0^r\cdot\sum_{q=g}^{r-1}l_q\right)\right]. \tag{26}$$

Coeficientul de influență C_{gi}^{fF} care reprezintă săgeata secțiunii g produsă de forța unitară $F_i=1$ aplicată în secțiunea i (fig. 18) se poate exprima prin suma

$$C_{gi}^{fF}=C_{ii}^{fF}+C_{ii}^{\varphi F}\cdot\sum_{q=g}^{i-1}l_q. \tag{h}$$

Primul termen din partea dreaptă a relației (h) se obține din relația (26) făcînd $g=i$

$$C_{ii}^{fF}=\sum_{p=i}^{n}\left(B_2^p+B_1^p\cdot\sum_{q=i}^{p-1}l_q\right)+\sum_{p=i}^{n-1}\left[l_p\cdot\sum_{r=p+1}^{n}\left(B_1^r+B_0^r\cdot\sum_{q=i}^{r-1}l_q\right)\right]. \tag{i}$$

Cantitatea $C_{ii}^{\varphi F}$ se obține din relația (21) făcînd $g=i$,

$$C_{ii}^{\varphi F}=\sum_{p=i}^{n}\left[B_1^p+B_0^p\cdot\sum_{q=i}^{p-1}l_q\right]. \tag{j}$$

Înlocuind expresiile (i), (j) în relația (h) se obține

$$C_{gi}^{ff} = \sum_{p=i}^{n}\left(B_2^p + B_1^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q\right) + \sum_{p=1}^{n-1}\left[l_p \cdot \sum_{r=p+1}^{n}\left(B_1^r + B_0^r \cdot \sum_{q=i}^{r-1} l_q\right)\right] +$$

$$+\left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q\right) \cdot \sum_{p=i}^{n}\left(B_1^p + B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q\right) \cdot \qquad (27)$$

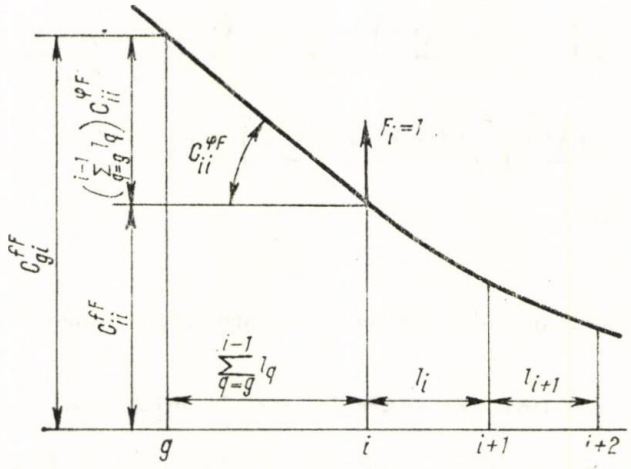


Fig. 18

Pornind de la relația (26), aceasta se poate transforma în modul următor :

$$C_{ig}^{ff} = \sum_{p=i}^{n}\left(B_2^p + B_1^p \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q + B_1^p \cdot \sum_{q=1}^{p-1} l_q\right) +$$

$$+ \sum_{p=i}^{n-1}\left[l_p \cdot \sum_{r=p+1}^{n}\left(B_1^r + B_0^r \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q + B_0^r \cdot \sum_{q=i}^{r-1} l_q\right)\right] =$$

$$= \sum_{p=i}^{n}\left(B_2^p + B_1^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q\right) + \sum_{p=i}^{n-1} l_p \cdot \sum_{r=p+1}^{n}\left(B_1^r + B_0^r \cdot \sum_{q=i}^{r-1} l_q\right) +$$

$$+\left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q\right) \cdot \sum_{p=i}^{n}\left(B_1^p + l_p \cdot \sum_{r=p+1}^{n} B_0^r\right) \cdot \qquad (k)$$

Termenul $\sum_{p=i}^{n} l_p \cdot \sum_{r=p+1}^{n} B_0^r$ se poate scrie

$$\sum_{p=i}^{n} l_p \cdot \sum_{r=p+1}^{n} B_0^r = l_i\,(B_0^{i+1} + B_0^{i+2} + \cdots + B_0^{n-1} + B_0^n) +$$

$$+ l_{i+1}(\quad B_0^{i+2} + \cdots + B_0^{n-1} + B_0^n) +$$

$$\vdots$$

$$+ l_{n-1}(\quad B_0^n) =$$

$$= l_i \cdot B_0^{i+1} + (l_i + l_{i+1}) B_0^{i+2} + \cdots + (l_i + l_{i+1} + \cdots + l_{n-1}) B_0^n =$$

$$= \sum_{p=i+1}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q = \sum_{p=i}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q .$$

Înlocuind acest rezultat în relația (k), rezultă

$$C_{ig}^{fF} = \sum_{p=i}^{n} \left(B_2^p + B_1^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q \right) + \sum_{p=i}^{n-1} l_p \cdot \sum_{r=p+1}^{n} \left(B_1^r + B_0^r \cdot \sum_{q=i}^{r-1} l_q \right) +$$

$$+ \left(\sum_{q=g}^{i-1} l_q \right) \cdot \sum_{p=i}^{n} \left(B_1^p + B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q \right) = C_{gi}^{fF} .$$

Egalitatea

$$C_{ig}^{fF} = C_{gi}^{fF}$$

decurge, de asemenea, din teorema reciprocității deplasărilor.

4. MATRICEA COEFICIENȚILOR DE INFLUENȚĂ

Recapitulînd, pentru coeficienții de influență la flexibilitate s-au obținut următoarele expresii:

$$C_{ig}^{fF} = C_{gi}^{fF} = \sum_{p=i}^{n} \left[B_2^p + B_1^p \left(2 \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q + \sum_{q=g}^{i-1} l_q \right) + l_p \cdot \sum_{r=p+1}^{n} B_0^r \cdot \sum_{q=g}^{r-1} l_q \right],$$

$$C_{ig}^{fM} = C_{gi}^{\varphi F} = \sum_{p=i}^{n} \left(B_1^p + B_0^p \cdot \sum_{q=i}^{p-1} l_q \right), \tag{28}$$

$$C_{ig}^{\varphi F} = C_{gi}^{fM} = \sum_{p=i}^{n} \left(B_1^p + B_0^p \cdot \sum_{q=g}^{p-1} l_q \right) = C_{ig}^{fM} + \sum_{p=i}^{n} B_0^p \cdot \sum_{q=g}^{i-1} l_q ,$$

$$C_{ig}^{\varphi M} = C_{gi}^{\varphi M} = \sum_{p=i}^{n} B_0^p$$

valabile în condițiile $g \leqslant i \leqslant n$, $l_n = 0$ și $B_1^i \cdot \sum_{q=i}^{i-1} l_q = 0$.

Mulțimea acestor coeficienți constitue elementele matricei coeficienților de influență la flexibilitate $[C_{ig}]$

$$[C_{ig}] = \begin{bmatrix} [C_{ig}^{fF}] & [C_{ig}^{\varphi F}] \\ [C_{ig}^{fM}] & [C_{ig}^{\varphi M}] \end{bmatrix}_{\mathbf{z}} \tag{29}$$

Așa cum rezultă și din relațiile (28), matricea $[C_{ig}]$ este o matrice simetrică, submatricile $[C_{ig}^{TF}]$ și $[C_{ig}^{\varphi M}]$ sînt fiecare în parte simetrice, iar submatricile de pe a doua diagonală sînt una transpusă celeilalte.

Inversa matricei coeficienților de influență la flexibilitate reprezintă coeficienții de influență la rigiditate $[K]$

$$[K] = [C]^{-1}. \tag{30}$$

Coeficienții matricelor $[C]$ și $[K]$ pot fi determinați cu ajutorul unui calculator, introducînd programe pentru calculul sumelor (28), precum și un program pentru inversarea matricei $[C]$.

Primită la redacție la 5 mai 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Angot A., *Complemente de matematici*, București, Edit. tehnică, 1965.
2. Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L., *Aeroelasticity*, Cambridge, Mass. Addison-Wesley Publishing Comp., 1955.
3. Bisplinghoff R.L., Ashley H., *Principles of Aeroelasticity*, New York—London, John Wiley and Sons, Inc., 1962.
4. Frazer R.A., Duncan W. J., Collar A.R., *Elementary Matrices*, London, Cambridge, Univ. Press, 1955.
5. Ghelfand I.M., *Lecții de algebră liniară*, București, Edit. tehnică, 1953.
6. Lee J., *Numerical Analysis for Computers*, New York, Reinhold Publishing Corporation, 1966.
7. Petre A., *Asupra deformațiilor barelor cu pereți subțiri cu profil închis*, St. cerc. mec. apl., *2*, **15**, (1964).
8. Petre A., Atanasiu M., *Bare cu pereți subțiri*, București, Edit. tehnică, 1960.
9. Petre A., *Teoria aeroelasticității*, București, Edit. Academiei, 1966.
10. Ponomariov S.D. ș.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. I, București, Edit. tehnică, 1964.

INFLUENȚA ARMĂTURII COMPRIMATE ASUPRA RIGIDITĂȚII ELEMENTELOR ÎNCOVOIATE DIN BETON UȘOR

de TRAIAN ONEȚ
Institutul politehnic Cluj

Se prezintă rezultatele unui studiu teoretic și experimental privind influența pe care o are armătura comprimată asupra rigidității la încovoiere a grinzilor din beton ușor cu agregate de granulit, sub acțiunea încărcărilor de scurtă durată, și se fac aprecieri asupra capacității de rotire plastică a grinzilor.

1. INTRODUCERE

Armarea zonei comprimate a elementelor încovoiate din beton de granulit avînd marca B200-B300 nu este rațională sub aspectul capacității portante [1]. Prevederea unei armături în zona comprimată a acestor elemente este impusă pe considerente de ordin constructiv (armătura de montaj) sau pe considerente de transport a elementelor prefabricate.

Cercetările efectuate arată că armătura comprimată contribuie la sporirea rigidității elementelor încovoiate realizate din betoane foarte ușoare [2], [3] sau din betoane grele atît în cazul încărcărilor de lungă durată [8], cît și a celor de scurtă durată [9].

Studiul de față urmărește să pună în evidență *efectul armăturii comprimate asupra rigidității elementelor încovoiate din beton ușor de granulit* (produs de fabrica—Mureșeni), *sub acțiunea încărcărilor de scurtă durată*.

2. EVALUAREA EFECTULUI ARMĂTURII COMPRIMATE ASUPRA RIGIDITĂȚII LA ÎNCOVOIERE

Încercările anterioare efectuate de autor [11] au scos în evidență faptul că valorile experimentale ale rigidității elementelor încovoiate, simplu armate din beton ușor se situează între valorile calculate în ipoteza comportării elastice a betonului comprimat, cu neglijarea efectului lucrului betonului întins dintre fisuri și, respectiv, în ipoteza comportării

elastoplastice a betonului comprimat, cu considerarea efectului lucrului betonului întins dintre fisuri.

Cazul A : *Rigiditatea la încovoiere (K)* a unei secțiuni dublu armate, solicitată în stadiul II, *în ipoteza comportării elastice a betonului*, se calculează [2] cu relația

$$K = E_a\, bh_0^3\left[\mu(1-\xi)\left(1-\frac{\xi}{3}\right)+\mu'(\xi-\delta')\left(\frac{\xi}{3}-\delta'\right)\right], \qquad (1)$$

în care E_a reprezintă modulul de elasticitate al oțelului;

b, h_0 — lățimea, respectiv, înălțimea utilă a secțiunii,

$$\mu = \frac{A_a}{bh_0}, \qquad \mu' = \frac{A'_a}{bh_0},$$

A_a, A'_a — aria secțiunii transversale a armăturii întinse, respectiv, comprimate;

$$\xi = \frac{x}{h_0} = -(\alpha+\alpha') + \sqrt{(\alpha+\alpha')^2 + 2(\alpha+\alpha'\delta')}, \qquad (2)$$

$$\alpha = n\mu, \qquad \alpha' = n\mu'.$$

$$n = \frac{E_a}{E_b} \text{ — coeficient de echivalență;}$$

E_b — modulul de elasticitate al betonului,

$$\delta' = \frac{a'}{h_0};$$

a' — distanța de la centrul de greutate al armăturii comprimate pînă la fibra extremă comprimată a secțiunii.

Valorile reduse ale rigidității ($K/E_a\, bh_0^3$), calculate pentru diferite procente de armare μ și μ', admițînd că $n=15$ și $\delta' = 0{,}1$, sînt prezentate în figura 1.

Se observă că rigiditatea este cu atît mai mare cu cît procentul de armare μ este mai mare și cu cît raportul μ'/μ este mai mare. Dublînd procentul de armătură întinsă μ de la 1% la 2%, rigiditatea secțiunii simplu armate crește cu 53,5%.

Păstrînd constant procentul de armătură întinsă $\mu = 1\%$ și introducînd în secțiune un procent de armătură comprimată $\mu' = 1\%$, rigiditatea secțiunii crește doar cu 14,3%.

Dacă procentul de armare μ crește de la 2% la 3%, rigiditatea crește cu 24,7%, iar dacă $\mu = 2\%$ și μ' crește de la 0 la 1%, rigiditatea crește cu 18,2%. Cu alte cuvinte, creșterea rigidității prin adăugarea de armătură comprimată este funcție de procentul de armătură întinsă, respectiv, de înălțimea zonei comprimate a betonului.

Pentru a vedea cum trebuie distribuită armătura între zona întinsă și comprimată a secțiunii, în vederea obținerii rigidității maxime la un consum de armătură dat, s-a reprezentat în figura 2 variația rigidității (reduse) în funcție de procentul total de armare ($\mu+\mu'$) și de raportul μ'/μ.

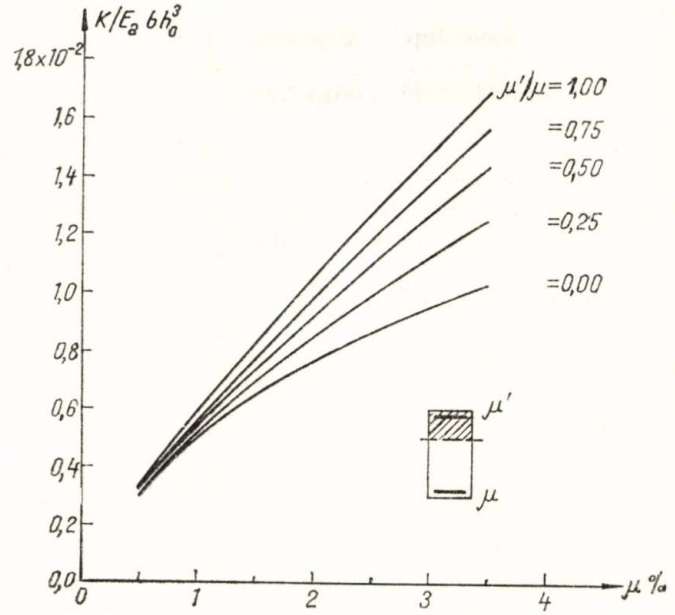


Fig.1. — Efectul armăturii comprimate asupra rigidității la încovoiere, după calculul elastic.

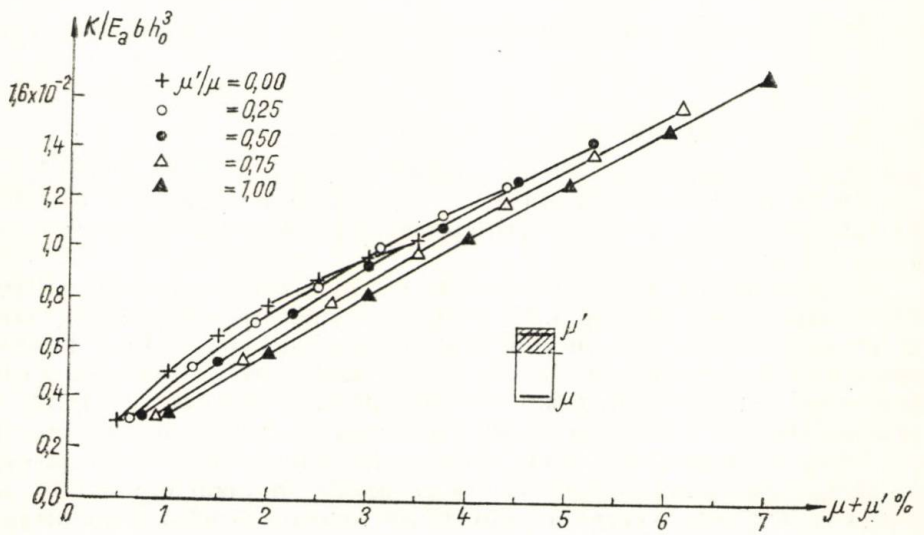


Fig. 2. — Variația rigidității la încovoiere în funcție de procentul total de armare și de raportul μ'/μ, după calculul elastic.

Rezultă din figură că pentru un procent total de armare dat, $(\mu + \mu') < 3\%$, cea mai favorabilă situație din punct de vedere al rigidității este aceea de a se așeza toată armătura în zona întinsă a secțiunii ($\mu'/\mu = 0$) și cea mai defavorabilă este de a se împărți armătura în mod egal între zona întinsă și comprimată ($\mu'/\mu = 1$). Constatarea corespunde sub aspect calitativ cu aceea referitoare la capacitatea portantă [1].

La valori $(\mu + \mu')$ ce depășesc procentul maxim de armare a secțiunilor încovoiate simplu armate (practic peste 3%), cea mai mare rigiditate se obține armînd și zona comprimată a secțiunii.

Cazul B : *Calculul rigidității la încovoiere în stadiul de exploatare, în ipoteza comportării elastoplastice a betonului comprimat*, cu considerarea efectului lucrului betonului întins dintre fisuri [4] și admițînd o diagramă triunghiulară de eforturi în betonul comprimat [6], se face cu relația

$$K = \frac{E_a}{\psi} b h_0^3 \left[\mu (1 - \xi) \left(1 - \frac{\xi}{3} \right) + \mu' (\xi - \delta') \left(\frac{\xi}{3} - \delta' \right) \right], \tag{3}$$

în care ψ și ξ pot fi calculate cu relațiile din STAS 8000-67 [6]

$$\psi = 1 - \bar{\beta} \frac{A_{bt} R_t^n}{A_a \sigma_a}, \tag{4}$$

$$\xi = \frac{x}{h_0} = -(n'\mu + n'\mu') + \sqrt{(n'\mu + n'\mu')^2 + 2(n'\mu + n'\mu'\delta')} \tag{5}$$

$$n' = n \left(1 + \frac{\mu}{40} R_a \right). \tag{6}$$

$\bar{\beta} = 0{,}3$ — pentru oțel PC 52,
$= 0{,}2$ — pentru oțel OB 38,

$A_{bt} = \frac{bh}{2}$,

R_t^n — rezistența normată la întindere axială, pentru marca B 250 [6],

$\sigma_a = \frac{R_a}{\bar{n}} = \frac{R_a}{1{,}3}$,

R_a — rezistența de calcul a armăturii [6],

Pentru $\mu' = 0$, relația (3) devine identică cu cea din STAS 8000-67.

În figura 3 sînt prezentate valorile reduse ale rigidității, calculate cu relația de mai sus, pentru diferite procente de armare μ și μ', considerînd că $n = 15$ și $\delta' = 0{,}1$.

Comparînd figurile 1 și 3 rezultă că, în cazul *B*, armătura întinsă influențează într-o măsură mai mică, iar armătura comprimată într-o măsură mai mare asupra mărimii rigidității la încovoiere. Prin dublarea procentului de armare μ de la 1% la 2% rigiditatea secțiunii simplu armate crește cu 10,6% în cazul oțelului PC 52, respectiv, cu 18,2% în cazul oțelului OB 38. Dacă procentul de armătură întinsă rămîne constant $\mu = 1\%$ și se introduce în zona comprimată o armătură într-un procent $\mu' = 1\%$, rigiditatea secțiunii crește cu 28,6% în cazul oțelului PC 52, respectiv, cu 25,8% în cazul oțelului OB 38. Sporirea armăturii comprimate este, în cazul de față, mai eficientă decît creșterea corespunzătoare a armăturii întinse.

Situaţia se datoreşte faptului că operîndu-se în cazul B cu n' în loc de n, valoarea coeficientului ξ din relaţia (5) rezultă mai mare decît cea dată de relaţia (2), ceea ce face ca primul termen din relaţia (3) să scadă (acesta fiind şi motivul pentru care curbele din figura 3 se opresc la $\mu = 2{,}5\%$), iar al doilea termen să crească.

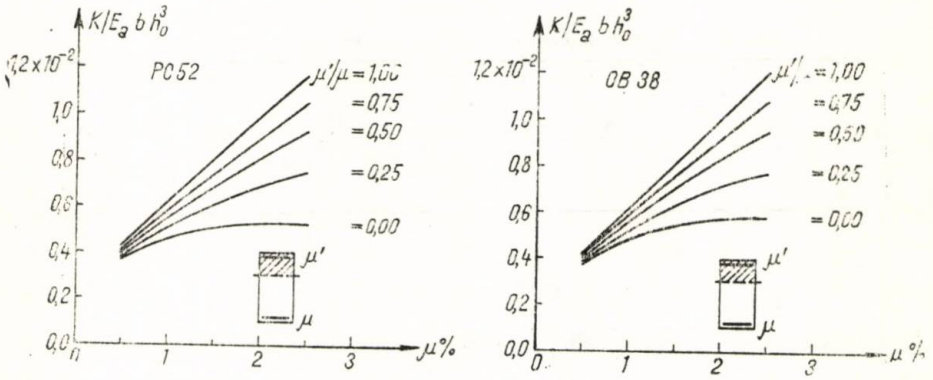


Fig. 3. — Efectul armăturii comprimate asupra rigidităţii la încovoiere, după calculul elastoplastic.

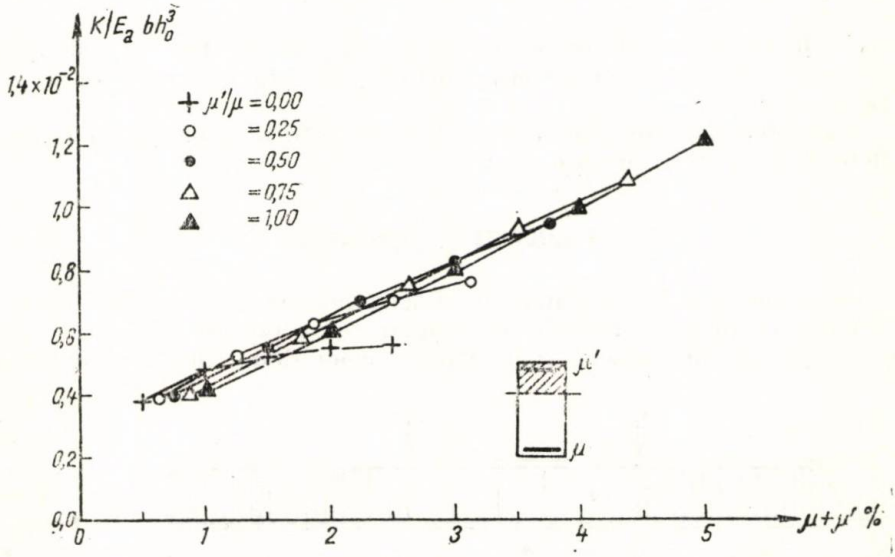


Fig. 4. — Variaţia rigidităţii la încovoiere în funcţie de procentul total de armare şi de raportul μ'/μ, după calculul elastoplastic.

Cu ajutorul figurii 4 se poate stabili modul de repartizare a armăturii între zona întinsă şi comprimată a secţiunii, astfel încît să se obţină cea mai mare rigiditate la un consum de armătură dat. Întrucît calitatea oţelului influenţează într-o măsură redusă valoarea rigidităţii la încovoiere, curbele din figura 4 s-au trasat pentru o calitate medie de oţel.

După cum rezultă din figură, pentru procente totale de armare mai mari decît 1%, armarea zonei comprimate devine rațională din punct de vedere al rigidității la încovoiere.

Recomandările C.A.E.R. [5] conțin o metodă de calcul a rigidității la încovoiere care ține seama de aportul armăturii din zona comprimată

Tabela 1

Valorile rigidității la încovoiere K (10^9 kgfcm^2), calculate pentru $\mu=2{,}5\%$

$\frac{\mu'}{\mu}$	Relația (1)	Δ%	Oțel PC 52				Oțel OB 38			
			Relația (3)	Δ%	C.A.E.R.	Δ%	Relația (3)	Δ%	C.A.E.R	Δ%
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
—	5,39	—	3,20	—	4,87	—	3,66	—	4,83	—
0,25	6,17	+14,5	4,65	+ 45,4	6,00	+23,2	4,88	+ 33,3	5,92	+22,6
0,50	6,80	+26,2	5,77	+ 80,4	6,86	+40,8	5,97	+ 63,1	6,80	+40,8
0,75	7,38	+37,0	6,58	+105,5	7,57	+55,4	6,80	+ 85,8	7,57	+56,8
1,00	7,78	+44,4	7,23	+126,0	8,18	+68,0	7,55	+106,2	8,17	+69,2

Notă. Cu Δ s-a notat creșterea rigidității prin armarea zonei comprimate.

a secțiunii. Cu toate că, în principiu, metoda corespunde cazului B, rezultatele ei sînt apropiate de cele obținute în cazul A, așa cum se vede în tabela 1.

Aplicarea metodei este relativ dificilă datorită numărului mare de coeficienți pe care-l conține.

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

S-au încercat 45 de grinzi cu dimensiunile și armarea din figura 5.

Grinzile au fost echipate cu comparatoare pentru măsurarea săgeților la mijlocul deschiderii și în dreptul celor două forțe concentrate ș

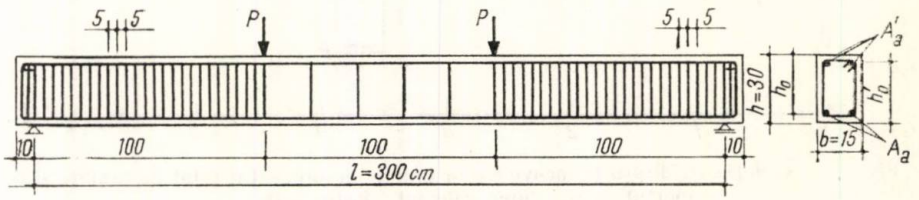


Fig. 5. — Armarea grinzilor experimentale.

cu tensometre mecanice (avînd baza de măsură de 20 cm) în întreaga zonă de moment constant a grinzii, pentru măsurarea deformațiilor pe înălțimea secțiunii.

Caracteristicile grinzilor încercate sînt date în tabelele 2 și 3.

Tabela 2

Caracteristicile grinzilor experimentale armate cu oțel PC 52

Indicativ	Armarea longitudinală				Etrieri	h_0 cm	h'_0 cm	ρ kg/m³	R_b kgf/cm²	R_{ti} kgf/cm²	E_b tf/cm²
	A_a	μ%	A'_a	$\mu'_{\%}$							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G3—1			—	—	—		—	1810	250	31,2	155
G3—1a			2Ø6	0,14			27,7	1790	267	36,9	163
G3—1b	2Ø12	0,55	2Ø8	0,24	Ø 6/10	27,4	27,6	1790	267	36,9	163
G3—1c			2Ø10	0,38			27,5	1785	238	38,4	132
G3—1d			2Ø12	0,55	Ø 6/20		27,4	1785	238	38,4	132
G3—2			—	—	—		—	1800	196	27,9	114
G3—2a			2Ø8	0,24	Ø 8/10		27,6	1790	253	32,0	150
G3—2b	2Ø16	0,98	2Ø12	0,55		27,2	27,4	1790	253	32,0	150
G3—2c			2Ø14	0,75	Ø 8/20		27,3	1820	245	32,0	147
G3—2d			2Ø16	0,98			27,2	1820	245	32,0	147
G3—3			—	—	—		—	1620	206	27,8	124
G3—3a			3Ø8	0,36	Ø 8/10		27,6	1795	258	34,5	162
G3—3b	3Ø16	1,48	3Ø12	0,83		27,2	27,4	1795	258	34,5	162
G3—3c			3Ø14	1,12	Ø 8/20		27,3	1780	240	35,1	125
G3—3d			3Ø16	1,48			27,2	1780	240	35,1	125
G3—4			—	—	—		—	1590	189	23,0	127
G3—4a			3Ø8	0,36	Ø10/10		27,6	1800	274	33,5	144
G3—4b	3Ø18	1,88	3Ø12	0,83		27,1	27,4	1800	274	33,5	144
G3—4c			3Ø16	1,48	Ø10/20		27,2	1790	227	42,0	138
G3—4d			3Ø18	1,88			27,1	1790	227	42,0	138

Notă. Vîrsta betonului la data încercării a fost cuprinsă între 25 și 37 de zile.

Tabela 3

Caracteristicile grinzilor experimentale armate cu oțel OB 38

Indicativ	Armarea longitudinală				Etrieri	h_0	h'_0	ρ	R_b	R_{ti}	E_b
	A_a	$\mu\%$	A'_a	$\mu'_{\%}$		cm	cm	kg/m³	kgf/cm²	kgf/cm²	tf/cm²
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G4—1			—	—	—		—	1698	241	30,1	152
G4—1a			2Ø6	0,14			27,7	1702	233	39,2	134
G4—1b	2Ø12	0,55	2Ø8	0,24	Ø 6/10	27,4	27.6	1702	233	39,2	134
G4—1c			2Ø10	0,36			27,5	1740	236	28,0	135
G4—1d			2Ø12	0,55	Ø 6/20		27,4	1740	236	28,0	135
G4—2			—	—	—		—	1715	259	33,4	136
G4—2a			2Ø8	0,24	Ø 8/10		27,6	1720	227	28,8	129
G4—2b	2Ø16	0,98	2Ø12	0,55		27,2	27,4	1720	227	28,8	129
G4—2c			2Ø14	0,75	Ø 8/20		27,3	1820	242	28,9	143
G4—2d			2Ø16	0,98			27,2	1820	242	28,9	143
G4—3			—	—	—		—	1810	231	35,6	134
G4—3a			3Ø8	0,36	Ø 8/10		27,6	1800	256	32,8	139
G4—3b	3Ø16	1,48	3Ø12	0,83		27,2	27,4	1800	256	32,8	139
G4—3c			3Ø14	1,12	Ø 8/20		27,3	1830	268	28,8	142
G4—3d			3Ø16	1,48			27,2	1830	268	28,8	142
G4—4			—	—	—		—	1705	221	34,0	146
G4—4a			3Ø8	0,36	Ø10/10		27,6	1715	198	27,1	138
G4—4b	3Ø18	1,88	3Ø12	0,83		27,1	27,4	1730	244	31,8	125
G4—4c			3Ø16	1,48	Ø10/20		27,2	1715	198	27,1	138
G4—4d			3Ø18	1,88			27,1	1730	244	31,8	125
G4—5			—	—	—		—	1695	220	31,5	122
G4—5a			3Ø10	0,57	Ø10/10		27,5	1830	274	32,0	161
G4—5b	3Ø20	2,32	3Ø14	1,12		27,0	27,3	1830	274	32,0	161
G4—5c			3Ø18	1,88	Ø10/20		27,1	1790	261	35,4	139
G4—5d			3Ø20	2,32			27,0	1790	261	35,4	139

Notă. Vîrsta betonului la data încercării a fost cuprinsă între 24 și 34 de zile.

În aceste tabele s-au făcut următoarele notații :

ρ — densitatea aparentă a betonului ;
R_b — rezistența betonului la compresiune ;
R_{ti} — rezistența betonului la întindere din încovoiere ;
h'_0 — distanța de la centrul de greutate al armăturii întinse la fibra extremă comprimată.

Rezultatele obținute la determinarea mărcii betonului sînt interpretate statistic în figura 6, după metoda propusă de H. Rüsch [7]. Valoarea coeficientului de omogenitate a betonului k_b, pentru un nivel de încredere de 99,7%, se calculează cu relația

$$k_b = 1 - 3\ C_v = 0{,}65 \qquad (7)$$

și indică o omogenitate corespunzătoare a betonului [13]. În relația (7), C_v reprezintă coeficientul de variație al rezistenței la compresiune a betonului. Caracteristicile oțelului din care s-au confecționat armăturile sînt reprezentate în figurile 7 și 8. Curbele caracteristice au fost obținute cu ajutorul unei mașini universale de încercare tip REH-50 T.V. Shimadzu Seisakusho Ltd, Kyoto Japan.

Încercarea grinzilor pînă la rupere s-a făcut cu ajutorul unei mașini universale tip Dr. M.B. 300 tf, în trepte de 1/10 din sarcina de rupere prezumată.

Valorile experimentale ale rigidității grinzilor, determinate pe baza săgeților măsurate, în stadiul de exploatare (definit de un moment încovoietor obținut prin împărțirea momentului de rupere efectiv la 1,8), sînt prezentate în figura 9. Se observă din figură că sporirea procentului de armare μ' de la 0 la 0,98%, pentru $\mu = 0{,}98\%$, conduce la sporirea rigidității cu 10,4% pentru PC 52 și cu 13,7% pentru OB 38, ceea ce corespunde aprecierii teoretice a fenomenului făcută pe baza calculului elastic. Efectul armăturii comprimate asupra rigidității este puțin influențat de calitatea oțelului.

Aprecierea rigidității elementelor încovoiate se poate face, deopotrivă, pe baza rotirii secțiunilor, respectiv, pe baza curburii fibrei medii deformate a grinzii.

Variația rotirii totale pe porțiunea de moment constant a grinzii, în funcție de treapta de încărcare (M/M_r) și de gradul de armare al zonei comprimate (μ'/μ), la un procent de armare $\mu = 0{,}98\%$, este dată în figura 10, pentru grinzile armate cu oțel PC 52, și în figura 11, pentru cele armate cu oțel OB 38.

Rotirile au fost evaluate pe baza deformațiilor liniare măsurate pe înălțimea secțiunii, în zona în care s-a produs ruperea grinzilor.

Rotirile cresc proporțional cu intensitatea încărcării pînă la intrarea în curgere a armăturii. Limita de proporționalitate a fost cuprinsă între 0,8 M_r, în cazul procentelor mici, și 0,9 M_r, în cazul procentelor mari de armătură întinsă. Caracterul elastic pronunțat de deformare a grinzilor se datorește solicitării betonului comprimat din grinzile dublu armate încercate sub limita sa de capacitate (μ/μ_{max}), ceea ce face ca deformațiile neelastice să se manifeste într-o măsură mult mai redusă decît în elementele încovoiate simplu armate [11].

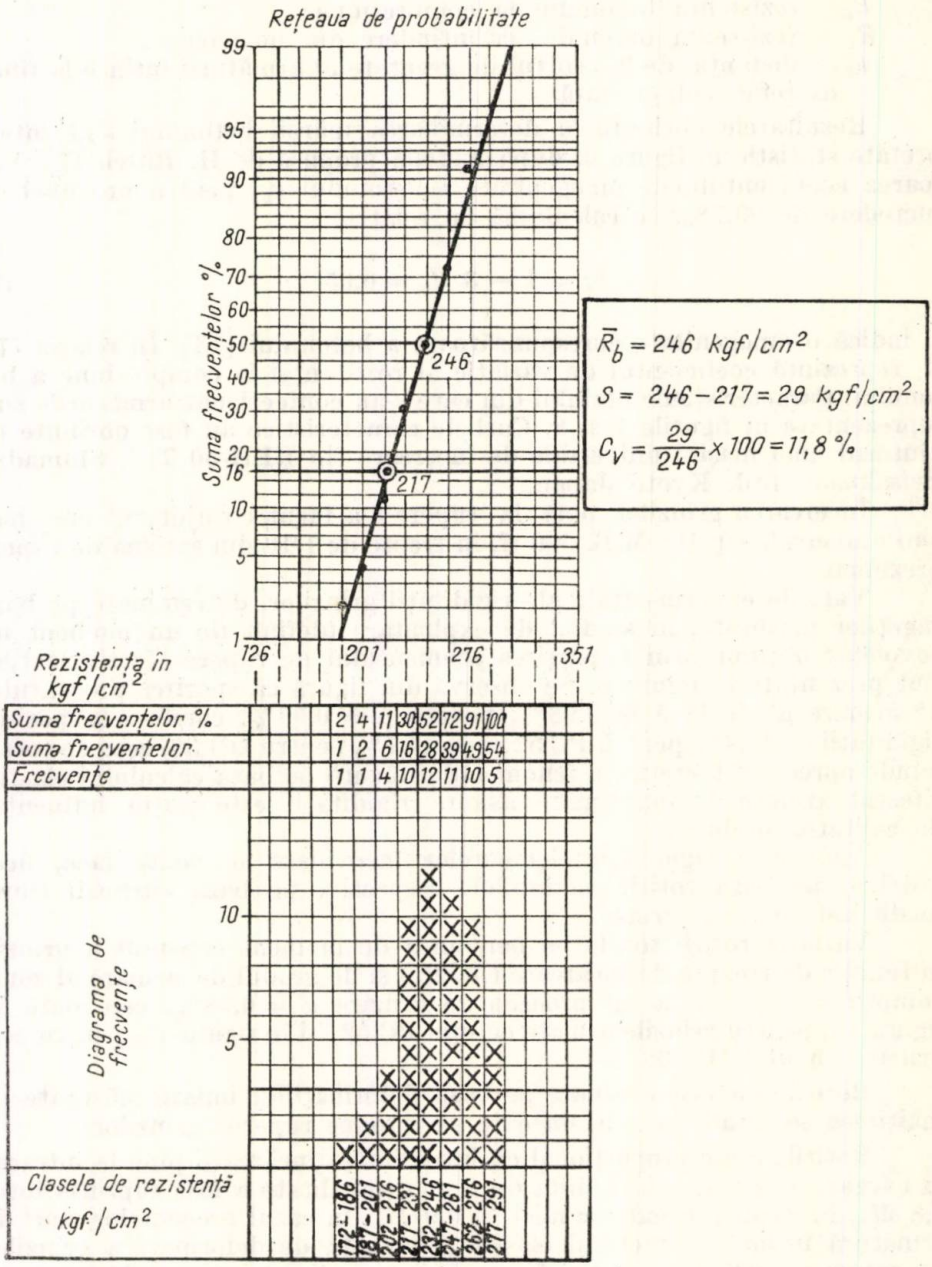


Fig. 6. — Interpretarea statistică a rezultatelor obținute la determinarea calității betonului.

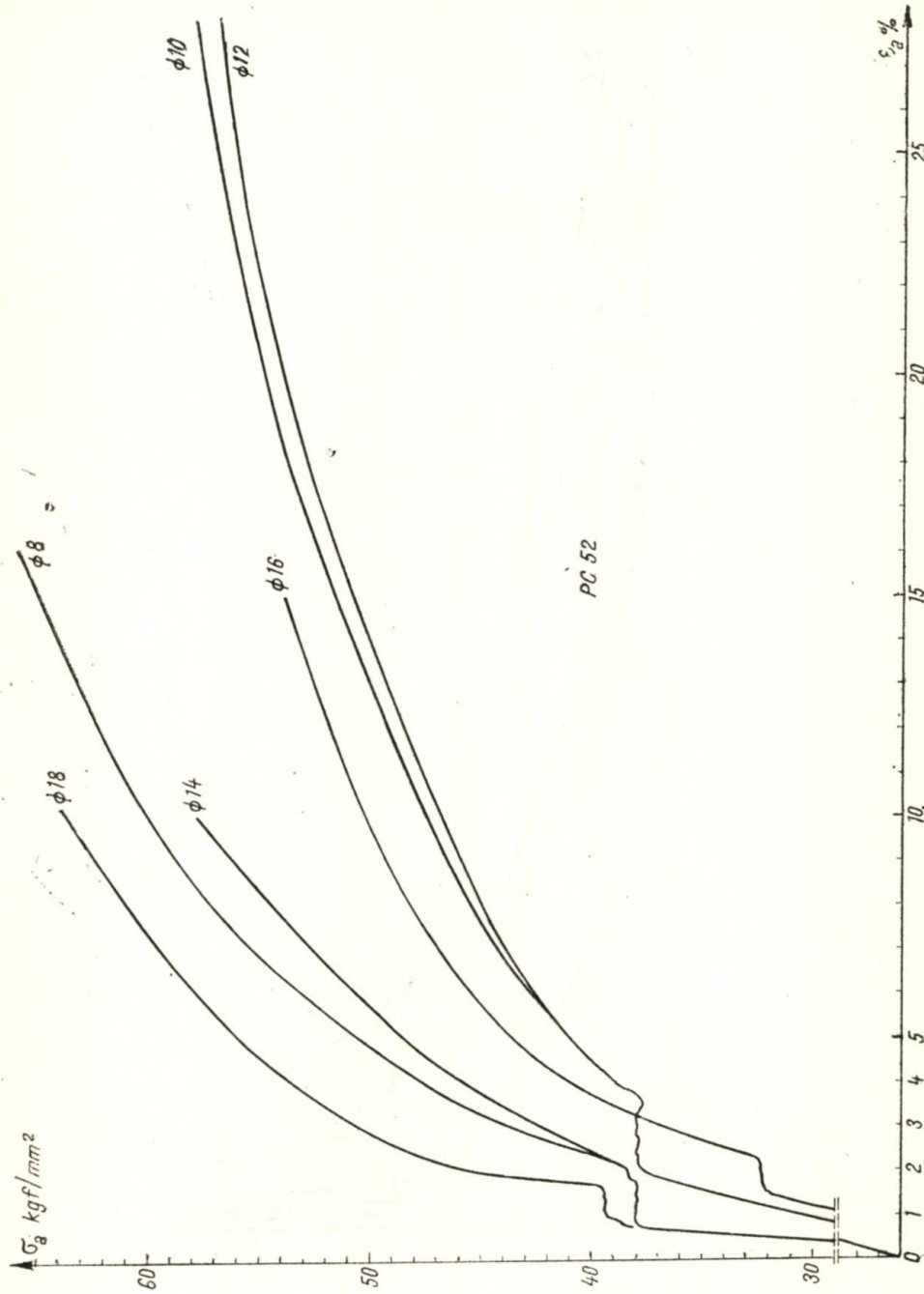


Fig. 7. — Curbele caracteristice înregistrate pentru barele de oțel PC 52.

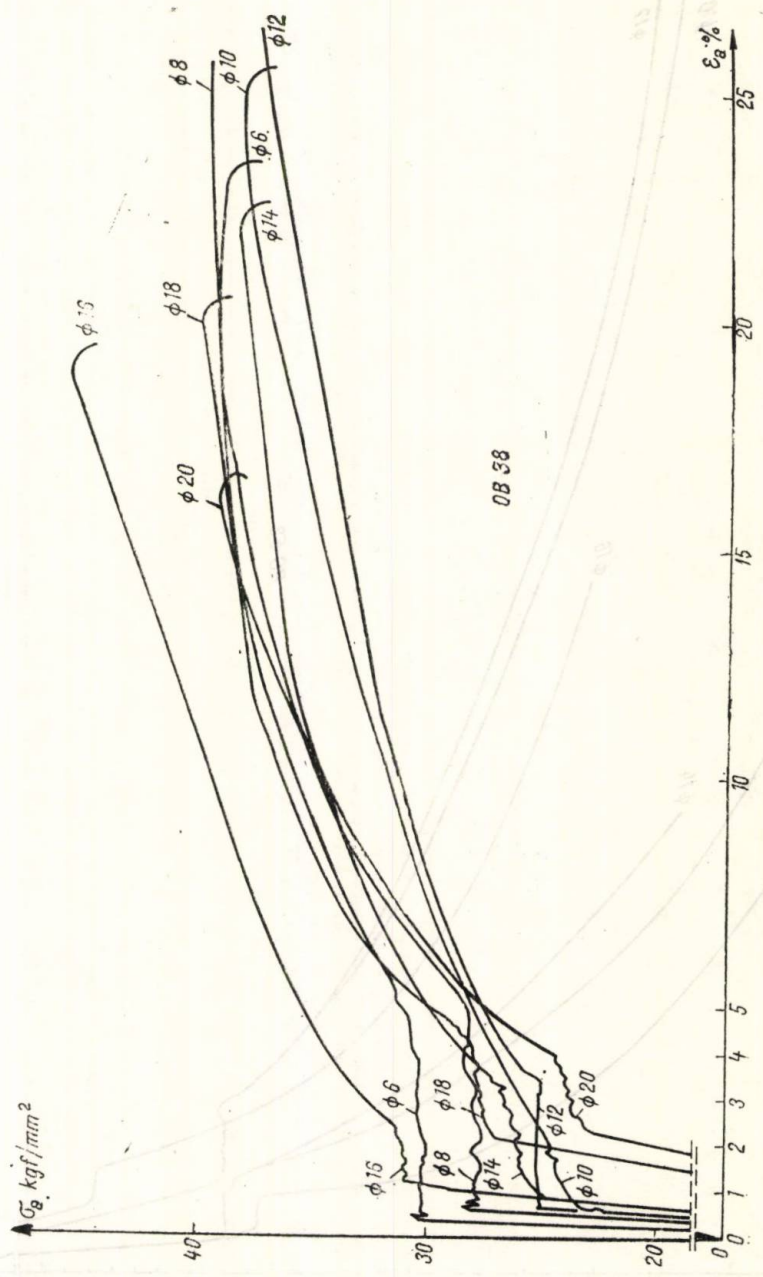


Fig. 8. — Curbele caracteristice înregistrate pentru barele de oțel OB 38.

Notînd cu θ_c rotirea totală corespunzătoare intrării în curgere a armăturii și cu θ_r rotirea totală în momentul ruperii grinzii, diferența $\theta_p = (\theta_r - \theta_c)$ caracterizează capacitatea de rotire plastică a grinzii. Așa după cum rezultă din figura 12, această capacitate de rotire plastică

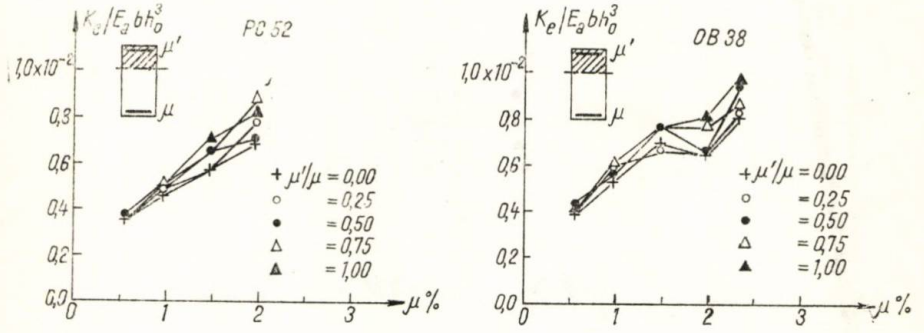


Fig. 9. — Efectul armăturii comprimate asupra rigidității la încovoiere, determinat pe cale experimentală.

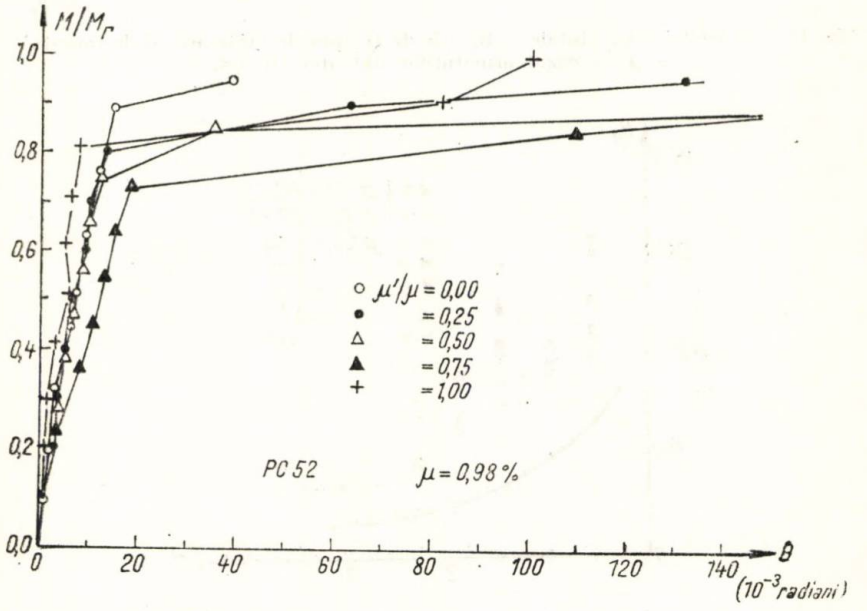


Fig. 10. — Variația rotirii totale în funcție de treapta de încărcare și de raportul μ'/μ, în cazul armăturilor din oțel PC 52.

a grinzilor din beton ușor armat scade pe măsură ce procentul de armare al zonei întinse a grinzilor crește și este aproximativ dublă față de cea a grinzilor din beton greu [10].

Influența armării zonei comprimate asupra capacității de rotire plastică este greu sesizabilă.

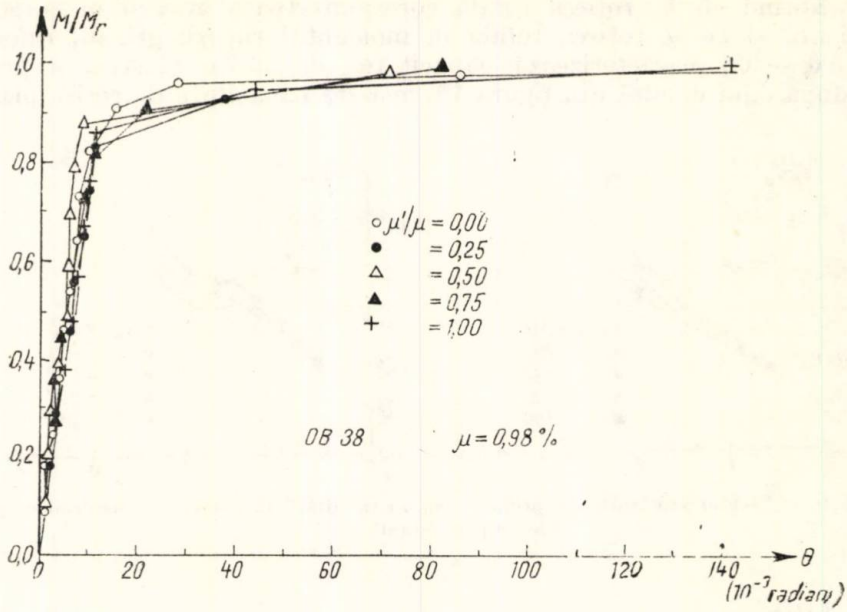


Fig. 11. — Variația rotirii totale în funcție de treapta de încărcare și de raportul μ'/μ, în cazul armăturilor din oțel OB 38.

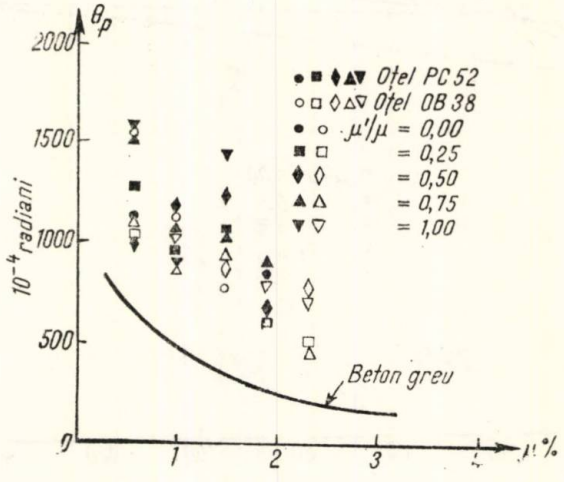


Fig. 12. — Variația capacității de rotire plastică în funcție de procentul de armare.

4. CONCLUZII

Armătura comprimată sporește rigiditatea de exploatare a elementelor încovoiate din beton ușor de granulit, pe măsură ce armarea zonelor întinsă și comprimată a grinzii este mai puternică. Sporul maxim

de rigiditate înregistrat la încercarea de scurtă durată a elementelor experimentale dublu armate a fost de 30%.

Majorarea armăturii comprimate este însă mai puțin eficientă din punct de vedere al rigidității la încovoiere decît o majorare corespunzătoare a armăturii întinse.

Aprecierea teoretică a fenomenului făcută pe baza calculului elastic este confirmată de rezultatele experimentale atît sub aspect cantitativ, cît și calitativ.

Neglijarea în calcule a efectului armăturii comprimate asupra rigidității la încovoiere a elementelor din beton armat ușor conduce la o eroare maximă de 10% în cazul procentelor de armare $\mu \leqslant 0{,}5\%$, indiferent de cantitatea de armătură din zona comprimată a secțiunii sau în cazul procentelor de armare $\mu \leqslant 1{,}0\%$, atunci cînd armătura comprimată reprezintă maximum 50% din cea întinsă.

Primită la redacție la 25 mai 1970

BIBLIOGRAFIE

1. I. Tertea, T. Oneț, *Influența armăturii comprimate asupra capacității portante a elementelor încovoiate din beton ușor*, Comunicare la Sesiunea Științifică a Institutului politehnic-Cluj, dec. 1969 ; Bul. științ. Inst. politehnic Cluj, **13**, 1970.
2. H. Granholm, *Reinforced Light — Weight Concrete*, Simposium RILEM, Göteborg, 1960.
3. S. Nilsson, *Compresive Reinforcement of Light-Weight Concrete*, Simposium RILEM, Göteborg, 1960.
4. В. И. Мурашев, *Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона*, Машстройиздат, Москва, 1950.
5. * * * *C.A.E.R., Norme de proiectare pentru elemente de construcții din beton și beton armat*, R.S. 119—64, Buletinul CSCAS *10—11*, 1967.
6. * * * *STAS* 8000-67, *Calculul elementelor de beton, beton armat și beton precomprimat. Metoda la stări limită.*
7. * * * *CEB, Recommandations pratiques unifiées pour le calcul et l'exécution des ouvrages en beton armé*, Paris, 1964.
8. I. Tertea, *Contribuții la studiul rigidității de durată a elementelor încovoiate de beton armat*, Teză de disertație, Timișoara, 1961.
9. W. Dilger, *Veränderlichkeit der Biege — und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluss auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung*, Heft **129** des DAfSt., Berlin, 1966.
10. J.C. Maldague, *Détermination éxperimentale des lois moments'-courbures des poutres en béton armé*, AITBTP *209*, mai 1965.
11. T. Oneț, *Considerații asupra rigidității grinzilor încovoiate din beton ușor armat sub încărcări de scurtă durată*, Comunicare la Sesiunea Științifică a Institutului politehnic-Cluj. dec. 1969.
12. * * * *Normativ experimental pentru proiectarea și executarea elementelor de construcții din beton armat cu agregate de granulit*, Redactarea I, INCERC, dec. 1962.
13. * * * *STAS 1275-62 : Încercări de laborator ale betoanelor.*
14. V. Petcu, *Articulația plastică în calculul plastic al structurilor de beton armat*, St. cerc. mec. apl., *1*, 1963.

UNELE ASPECTE PRIVIND OPTIMIZAREA PRELUCRĂRII PE MAŞINILE DE GĂURIT CU COMANDĂ NUMERICĂ

de GH. ZGURĂ, AL. DORIN
Institutul politehnic Bucureşti

Lucrarea reprezintă un studiu privind optimizarea prelucrării pe maşinile de găurit cu comandă numerică. Problemele studiate — stabilirea regimului optim de aşchiere şi a succesiunii operaţiilor — sînt rezolvate cu ajutorul calculatorului numeric. Criteriul folosit pentru optimizarea regimului de aşchiere este criteriul obţinerii productivităţii maxime. Pentru optimizarea succesiunii operaţiilor s-a utilizat criteriul drumului minim pe baza algortimului lui Little.

Prelucrarea în condiţii optime pe maşinile-unelte presupune realizarea unei productivităţi maxime la un preţ de cost cît mai redus, obţinerea rugozităţii prescrise pentru suprafeţele prelucrate şi utilizarea raţională a utilajului.

Aceste condiţii sînt determinate de o serie de factori ca, de exemplu, forma şi dimensiunile piesei, materialul de prelucrat, parametrii geometrici ai sculei şi natura acesteia, performanţele maşinii-unelte, organizarea procesului tehnologic etc.

În cazul maşinilor-unelte cu comandă numerică, stabilirea şi respectarea condiţiilor optime de prelucrare intră în cadrul operaţiei de programare; prin programare se înţelege punerea sub o formă asimilabilă pentru maşina-unealtă a tuturor informaţiilor de care aceasta are nevoie pentru executarea ciclului de lucru.

Procesul de programare se poate înţelege în sens restrîns cuprinzînd numai întocmirea şi confecţionarea programului, iar elaborarea tehnologiei de prelucrare fiind efectuată de inginerul tehnolog, şi în sens larg considerînd că programarea începe în momentul primirii desenului piesei şi se încheie cu obţinerea portprogramului.

În general, datele care se iau în considerare la întocmirea unui program pot fi:

a) date asupra formei piesei, adică informaţii care determină traiectoria de deplasare a sculei aşchietoare sau a piesei;

b) date asupra tehnologiei de prelucrare, reprezentînd informații în legătură cu elementele regimului de așchiere (t, s, v), schimbarea sculelor, natura și succesiunea operațiilor de prelucrare etc.

Ținînd cont de faptul că datele necesare înscrise în program vor diferi de la piesă la piesă, se vor lua în considerare următoarele aspecte pentru optimizarea proceselor de prelucrare:

a) stabilirea operațiilor de prelucrare într-o succesiune rațională;

b) determinarea regimului optim de așchiere pentru fiecare element de traiectorie, în concordanță cu tehnologia de prelucrare (degroșare, finisare), ținînd cont de materialul de prelucrat, de scula așchietoare, de mașina-unealtă, pornind de la date inițiale cunoscute;

c) efectuarea programării într-un timp cît mai scurt.

Pentru întocmirea unui program este necesar să se rezolve următoarele probleme:

1) proiectarea tehnologiei de prelucrare a piesei pe mașina-unealtă aleasă, înțelegînd prin aceasta stabilirea succesiunii operațiilor de prelucrare și a parametrilor regimului optim de așchiere;

2) elaborarea și optimizarea comenzilor necesare pentru realizarea deplasărilor relative dintre sculă și piesă;

3) obținerea portprogramului în funcție de codul ales sau impus de sistemul de comandă numerică al mașinii-unelte.

În cadrul lucrării se prezintă rezolvarea primelor două probleme privind optimizarea procesului de prelucrare și programarea cu ajutorul calculatoarelor numerice, în cazul mașinilor de găurit cu comandă numerică.

Optimizarea regimului de așchiere.

Regimul de așchiere este determinat de valorile unor parametri (t, s, v, T), între care există o anumită dependență exprimată de obicei cu ajutorul unor relații matematice.

Determinarea regimului optim de așchiere în general se face cu ajutorul unor relații cunoscute dintre care cele mai folosite sînt [1]:

$$\frac{P_z \cdot v}{6120} \leqslant N_{maș} \cdot \eta, \tag{1}$$

unde η reprezintă randamentul transmisiilor din lanțul cinematic principal,

$N_{maș}$ — puterea motorului electric de antrenare

$$R_z\,(s, \ldots) \leqslant R_{z\,adm} \tag{2}$$

$$v_{ef} = v_{opt}\,(t,\ s,\ T_{opt}, \ldots). \tag{3}$$

Relația (1) exprimă condiția ca puterea efectivă de așchiere să fie cel mult egală cu puterea admisă de solicitarea mecanismelor din lanțul cinematic principal al mașinii.

Relația (2) exprimă condiția ca rugozitatea efectivă a suprafeței prelucrate să fie cel mult egală cu rugozitatea prescrisă a acesteia.

Relația (3) exprimă condiția ca viteza efectivă a sculei să fie egală cu viteza care dă productivitatea maximă sau costul minim al operației.

Pentru stabilirea regimului optim de așchiere cu ajutorul calculatorului se recurge la „programarea" liniară [2]—[4].

În cazul problemelor de „programare" liniară se cere să se determine valorile a n variabile: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, care optimizează funcția liniară C

$$C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n, \tag{4}$$

cu condiția ca să fie satisfăcut sistemul de relații liniare limitative (5) impuse variabilelor

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1,\\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_n = b_k,\\
&a_{k+1,1} x_1 + a_{k+1,2} x_2 \times \ldots + a_{k+1,n} x_n \leqslant b_{k+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leqslant b_m.
\end{aligned} \tag{5}$$

În cazul considerat, necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din sistemul (5) semnifică parametrii regimului de așchiere. Pentru prelucrarea pe mașinile de găurit necunoscutele problemei se consideră turația n și avansul s.

Pentru stabilirea ecuațiilor de forma (5) s-au luat în considerare relațiile (1) și (3).

Viteza de așchiere v se calculează cu relația

$$v = \frac{\pi D n}{1000} \text{ m/min}, \tag{6}$$

unde D este diametrul sculei.

Forța tangențială P_z se determină în cazul operațiilor de găurire cu formula

$$P_z = C_{P_z} \cdot D^{x_{P_z}} \cdot s^{y_{P_z}}, \tag{7}$$

unde C_{P_z}, x_{P_z}, y_{P_z} sînt mărimi determinate în funcție de materialul de prelucrat și de condițiile de așchiere.

Înlocuind în relația (1) pe v și P_z cu expresiile date de (6), respectiv (7) se obține

$$\frac{\pi D n C_{P_z} D^{x_{P_z}} s^{y_{P_z}}}{1000 \cdot 6120} \leqslant N_{\text{maș}} \cdot \eta. \tag{8}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1848

Relaţia (8) se poate scrie sub forma

$$ns^{y_{P_z}} \leqslant \frac{1000 \cdot 6120\, N_{mas}\, \eta}{\pi \cdot D^{x_{P_z}-1} \cdot C_{P_z}}. \tag{8'}$$

Viteza de aşchiere economică se calculează cu relaţia

$$v = \frac{C_v D^{z_v}}{T_{opt}^m \cdot s^{y_v}}. \tag{9}$$

Egalarea relaţiilor (6) şi (9) duce la

$$\frac{\pi D n}{1000} = \frac{C_v \cdot D^{z_v}}{T_{opt}^m \cdot s^{y_v}} \tag{10}$$

sau

$$ns^{y_v} = \frac{1000\, C_v D^{z_v-1}}{\pi T_{opt}^m}. \tag{10'}$$

Prin logaritmarea relaţiilor (8') şi (10') acestea devin liniare, şi anume

$$\ln n + y_{P_z} \ln s \leqslant \ln \frac{6120 \cdot 1000\, N_{mas}\, \eta}{\pi \cdot C_{P_z} D^{x_{P_z}+1}}, \tag{11}$$

$$\ln n + y_v \ln s = \ln \frac{1000\, C_v\, D^{z_v-1}}{\pi \cdot T_{opt}^m}. \tag{11'}$$

Pentru ca durabilitatea T_{opt} a sculei aşchietoare să nu scadă sub valoarea durabilităţii economice şi puterea absorbită în timpul prelucrării să nu depăşească puterea dată de motorul electric din lanţul cinematic principal, este necesar să fie îndeplinite următoarele condiţii:

$$\ln n + y \ln_{P_z} s \leqslant \ln \frac{6120 \cdot 1000\, N_{mas}\, \eta}{\pi \cdot C_{P_z} \cdot D^{x_{P_z}+1}}, \tag{12}$$

$$\ln n + y_v \ln s \leqslant \ln \frac{1000\, C_v \cdot D^{z_v-1}}{\pi T_{opt}^m}. \tag{12'}$$

Relaţiile (12), (12') la care se adaugă inecuaţiile (13), care ţin cont de posibilităţile maşinii-unelte pe care se face prelucrarea, formează un sistem de forma (5).

$$\begin{aligned} \ln n &\leqslant \ln n_{max} \\ \ln n &\geqslant \ln n_{min} \\ \ln s &\leqslant \ln s_{max} \\ \ln s &\geqslant \ln s_{min}. \end{aligned} \tag{13}$$

În cazul în care la prelucrarea unei găuri se impune respectarea unei anumite rugozități, este necesar să se introducă o relație matematică suplimentară, corespunzătoare lui (2) pe baza căreia să se condiționeze mărimea avansului și, eventual, a turației de mărimea lui R_z.

Optimizarea prelucrării în condițiile precizate în lucrare se face prin minimizarea relației timpului de mașină, t_m

$$t_m = \frac{L}{ns}, \tag{14}$$

unde L reprezintă spațiul parcurs de scula aşchietoare pentru prelucrarea unei găuri.

Logaritmînd relația (14) se obține

$$\ln t_m = \ln L - (\ln n + \ln s) \tag{15}$$

Pentru ca această funcție să fie minimă, trebuie ca suma din paranteză să fie maximă, adică

$$f = \ln n + \ln s = \max. \tag{16}$$

Relațiile (12), (12'), (13) și (16) reprezintă modelul matematic pentru tratarea problemei pe un calculator numeric.

Interpretarea geometrică a relațiilor care exprimă optimizarea prelucrării pe mașinile de găurit conduce la obținerea unui poligon ale cărui vîrfuri sînt punctele de intersecție ale dreptelor care satisfac toate egalitățile de forma (12), (12'), (13). Punctele din interiorul poligonului astfel obținut satisfac relațiile de mai sus, iar valorile optime se găsesc pe dreapta ce aparține fasciculului de drepte (16) care intersectează laturile poligonului și pentru care $f = \max$.

Pentru obținerea valorilor n și s ce caracterizează regimul optim de aşchiere, cu ajutorul calculatorului, este necesar să fie introduse în memoria acestuia valorile C_{P_z}, C_v, x_{P_z}, y_{P_z}, y_v, z_v, m și menționate ca date de intrare în programul de calculator valorile n_{max}, n_{min}, s_{max}, s_{min}, N_{mas}, T_{opt}.

Optimizarea ciclului de prelucrare.

La stabilirea succesiunii fazelor de prelucrare cu ajutorul mașinilor electronice de calcul, rezultatele sînt mai puțin concludente, dat fiind complexitatea problemei. La programare, stabilirea operațiilor și fazelor de prelucrare este la latitudinea programatorului. În funcție de configurația și complexitatea piesei și de rutina programatorului, programul întocmit conform deciziilor sale tehnice rareori va conține soluțiile optime ale problemelor tehnologice.

Legat de necesitatea automatizării stabilirii succesiunii operațiilor ciclului de lucru și optimizării programării pentru mașinile de găurit cu comandă numerică, în lucrarea de față se propune rezolvarea problemei prin metoda drumului minim.

La elaborarea acestei metode în vederea alegerii și folosirii algoritmului de calcul necesar soluționării problemei, s-a luat în considerare criteriul drumului optim. Se consideră cazul cel mai general în care vor trebui să fie prelucrate n găuri ce necesită n scule. Conform acestui criteriu va exista un drum optim care va conține toate cele n puncte prin care se va

trece o singură dată. Succesiunea fazelor de lucru va fi dată de succesiunea drumurilor elementare ce compun drumul optim.

Din punct de vedere matematic, problema tehnologică enunțată mai sus este o problemă de optimizare.

Înainte de tratarea metodei de rezolvare trebuie făcute unele precizări referitoare la sistemul de coordonate folosit și la modul în care se face poziționarea piesei pe masa mașinii-unelte :

a) Se consideră sistemul de coordonate, sistemul recomandat de ISO [5] creat în scopul simplificării programării.

Planul definit de axele Ox, Oy (fig. 1) va fi planul de referință, în care se vor găsi pentru simplificare toate punctele în care sculele vor fi poziționate succesiv.

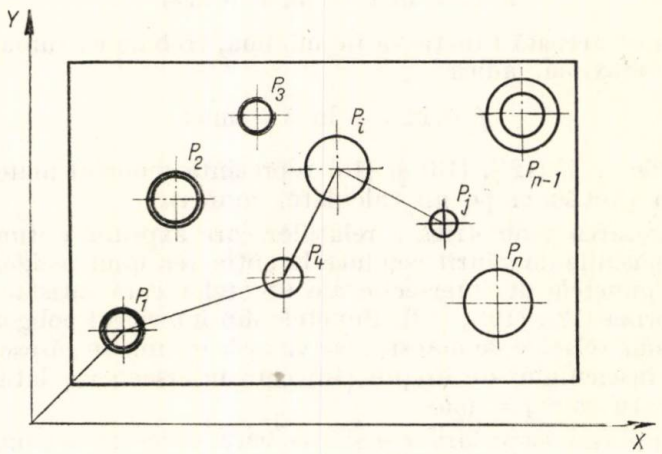


Fig 1

b) Poziționarea piesei în sistemul de referință stabilit va fi prima etapă ce trebuie parcursă la alegerea succesiunii optime a fazelor de prelucrare. Acest lucru este absolut necesar, în primul rînd deoarece pentru fiecare poziție a piesei în raport cu axele Ox, Oy va exista o succesiune optimă, în al doilea rînd, în funcție de poziția stabilită a piesei, determinarea distanțelor dintre punctele P_i, P_j va putea fi efectuată în mod precis, aceste distanțe fiind mărimi de intrare pentru algoritmul problemei, în al treilea rînd, pentru ca relația matematică cu programul numeric stabilit să fie valabilă.

Un alt aspect de care trebuie ținut cont este deplasarea punctului de zero. Deplasarea punctului de zero este funcție de sistemul de măsurare [6].

Dacă la mașina-unealtă cu comanda numerică nu este posibilă deplasarea punctului de zero, atunci poziția piesei în sistemul de coordonate să fie perfect determinată în raport cu axele unei găuri alese arbitrar. Dacă punctul de zero poate fi deplasat pe întreg domeniul de măsurare, este recomandabil ca acesta să coincidă cu unul din punctele în care se face prelucrarea.

Se consideră cazul general, deplasarea punctului de zero neputîndu-se efectua (fig. 1). Rezolvarea problemei prin metoda drumului minim se propune a se efectua prin aplicarea algoritmului lui Little [7] (vezi anexa).

Piesa supusă prelucrării este reprezentată în figura 2.

Pe această figură se notează cu P_1 originea sistemului de coordonate sau punctul de referință față de care se face poziționarea și prereglarea sistemului de scule folosit, cu $P_2 - P_n$ centrele găurilor ce vor fi prelucrate sau pozițiile în care se vor găsi sculele respective în momentul prelucrării.

Se determină distanțele d_{ij} ținînd cont de poziția piesei în sistemul de coordonate al mașinii-unelte. Cu aceste distanțe d_{ij} se întocmește matricea distanțelor mutuale d_{ij} dintre punctele P_i, unde $i = 1 \div n$.

Se stabilesc perechile de puncte care sînt impuse. Este cazul pieselor care au grupuri de găuri cu aceleași caracteristici, pentru care în mod logic nu este necesară schimbarea sculei.Pe baza acestor condiții inițiale, ordinul matricei inițiale se reduce corespunzător.

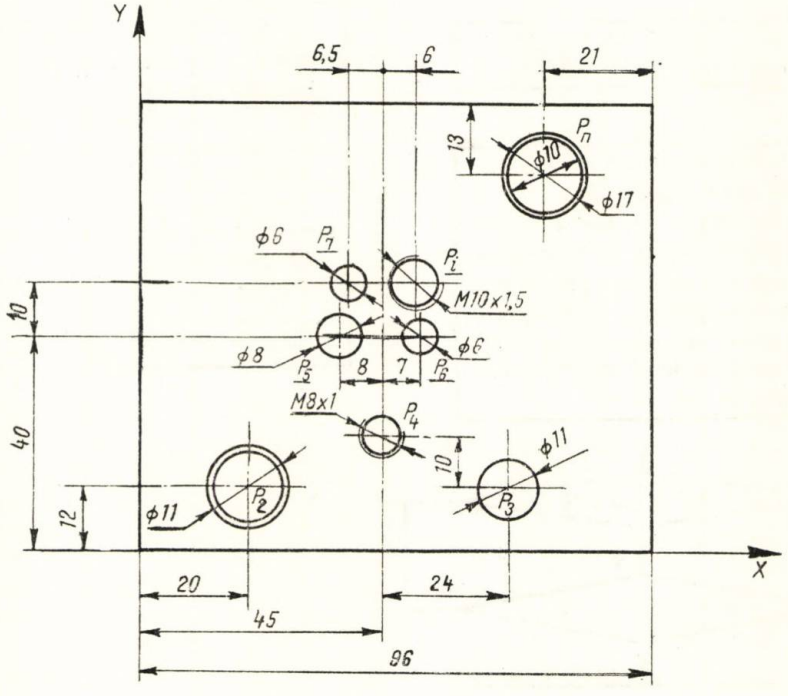


Fig 2

Rezolvarea problemei în continuare comportă efectuarea operațiilor de reducere a ordinului matricei conform algoritmului, în final obținîndu-se o matrice de tip (2×2), ale cărei elemente sînt 0 și ∞. Ultimele puncte corespunzătoare matricei (2×2) închid un circuit care conține toate punctele în care se efectuează prelucrarea, dispuse într-o succesiune ce reprezintă drumul minim determinat prin aplicarea acestei metode.

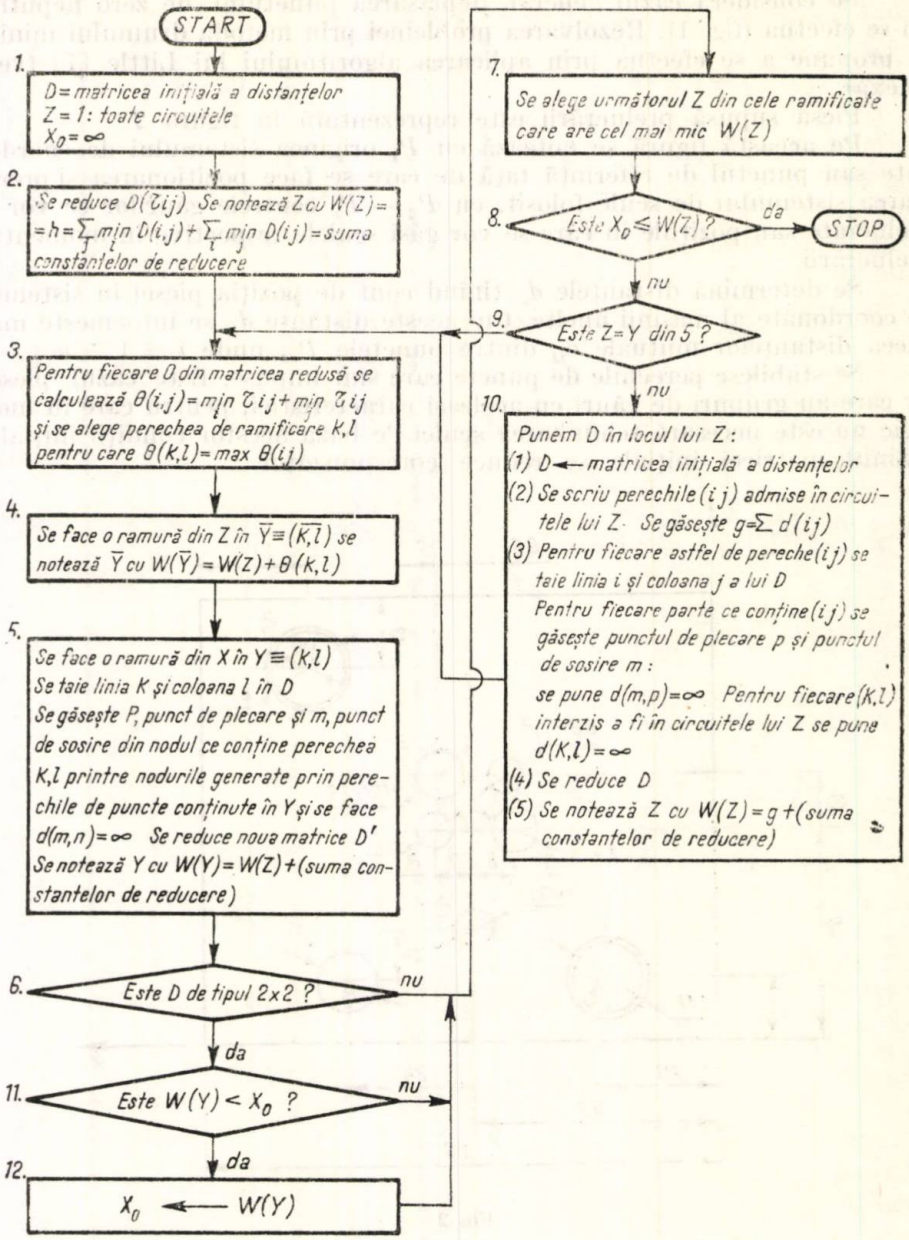


Fig. 3

Metoda propusă permite programarea problemei și rezolvarea ei fie manual, fie cu ajutorul calculatorului numeric. În figura 3 este prezentată schema logică a algoritmului pentru rezolvarea problemei pe calculator. Schema conține 12 pași, care conduc calculul iterativ pînă la soluția

finală. Timpul de rezolvare a problemei pe calculator funcție de complexitatea piesei este foarte scurt, circa 2—4 minute.

Metoda permite rezolvarea problemei și în cazurile frecvent întîlnite în prelucrarea unor piese avînd un număr de găuri cu același diametru. În acest caz, vor diferi condițiile inițiale. Pentru prelucrarea unei astfel de piese se va impune inițial ca să existe o succesiune în funcție de numărul minim de schimbări ale sculelor. În acest caz, nu se va mai obține drumul minim, dar va rezulta drumul optim corespunzător, pentru care nu este impusă schimbarea frecventă a sculelor. Bineînțeles, condițiile inițial impuse se vor alege în funcție de avantajele care se vor obține în programare.

În cazul în care rotirea mesei mașinii-unelte este comandată numeric, se poate determina succesiunea fazelor în funcție de complexitatea piesei și precizia aparatului matematic, utilizînd o altă metodă. În acest caz, sistemul de coordonate folosit va fi un sistem de coordonate polare, pozițiile centrelor găurilor de prelucrat sînt determinate de mărimile ρ și θ.

În funcție de modul de alegere a polului O, problema poate fi soluționată pe două căi :

a) În cazul în care polul este plasat în afara suprafeței delimitate de găurile de prelucrat (fig. 4) se propune rezolvarea problemei începînd prelucrarea de la o rază minimă (maximă) și ajungînd la o rază maximă (minimă).

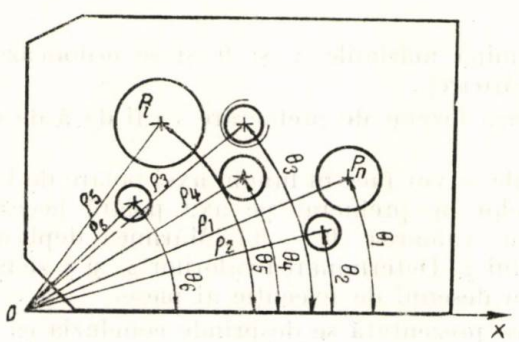


Fig. 4

Pentru a se trece de la o poziție de prelucrare la următoarea, piesa urmează să fie rotită cu un unghi $\Delta\theta$ într-un sens sau altul, rezultat în urma ordonării pozițiilor de prelucrare în ordine crescătoare (descrescătoare) a razelor polare.

b) În cazul în care polul se găsește în interiorul suprafeței delimitate de găurile de prelucrat (de obicei, în cazul pieselor care au găuri dispuse pe circumferințe), (fig. 5), problema se poate rezolva, începînd prelucrarea de la un unghi minim, ajungîndu-se la un unghi maxim, trecîndu-se prin valori intermediare ale acestora obținute prin ordonarea lor în ordine

crescătoare. În vederea aducerii sculei în poziția de lucru se va efectua deplasarea radială corespunzătoare a acesteia.

În concluzie, pentru întocmirea programului cu metoda prezentată mai sus se procedează astfel:

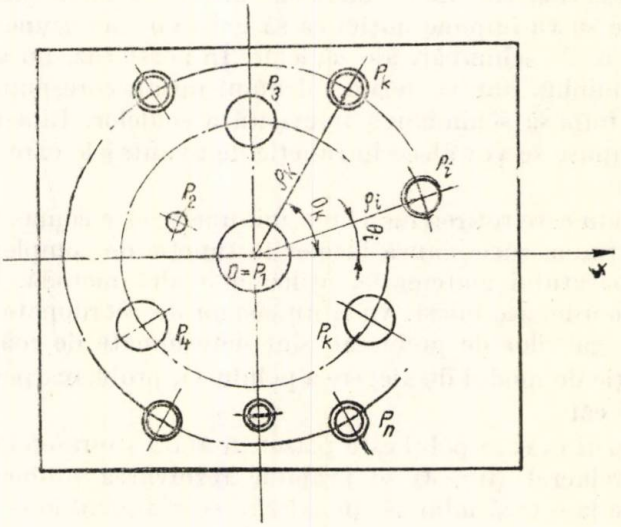


Fig. 5

1. se determină mărimile ρ_i și θ_i și se ordonează în ordine crescătoare (descrescătoare);

2. succesiunea fazelor de prelucrare va fi dată de succesiunea mărimilor ρ_i sau θ_i;

3. deplasările se vor face în lungul axei polare de la o poziție la alta. Aducerea punctelor de prelucrat pe axa polară necesită rotirea masei corespunzător cu valoarea $(\theta_k - \theta_i)$. Mărimea deplasării este $\rho_k - \rho_i$, unde ρ_k urmează lui ρ_i. Determinarea valorilor ρ_k și ρ_i se face după mărimile cotelor înscrise în desenul de execuție al piesei.

Din lucrarea prezentată se desprinde concluzia că problema optimizării prelucrării pe mașinile-unelte cu comandă numerică devine din ce în ce mai actuală, datorită necesităților ce decurg din raționalizarea procesului de programare și a reducerii timpului necesar efectuării ciclului de lucru.

ANEXĂ

ALGORITMUL LUI LITTLE

Algoritmul lui Little servește la soluționarea problemelor de următorul tip: se caută o succesiune optimă de n elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a căror raporturi mutuale sînt descrise cu ajutorul unei matrice de tipul $(n \times n)$ notată $D = (d_{ij})$, unde $d_{ij} \geqslant 0$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Fie d o succesiune de indici, $d = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$, unde $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$ și $i_1, i_2, \ldots, i_n = 1 \div n$

Problema se poate enunța în felul următor : să se găsească

$$X_0 = \min X(d), \tag{1}$$

unde

$$X(d) = \sum_{(i,j)\in d} d_{ij}.$$

Algoritmul lui Little constă în :

1. RAMIFICAREA DE LA UN NOD LA NOI NODURI

Nodul inițial Ω conține toate circuitele posibile (d), adică un număr de $n!$ soluții. A ramifica din acest nod înseamnă a se crea două noi noduri notate $(\overline{i, j})$ și (i, j) (fig. 6). Nodul (i,j) reprezintă mulțimea circuitelor din Ω care conțin perechea de indici i, j, iar nodul $(\overline{i, j})$ reprezintă mulțimea circuitelor ce nu conține această pereche.

Procesul de ramificare se continuă similar pentru fiecare din aceste noduri, adică a ramifica, de pildă, nodul (i,j) înseamnă a crea două noi noduri (k, l) și $(\overline{k, l})$, astfel încît nodul (k, l) reprezintă mulțimea circuitelor din Ω care nu conține perechea de indici (i, j), dar conține perechea (k, l), iar $(\overline{k, l})$ este mulțimea circuitelor care nu conține nici perechea (i, j), nici perechea (k, l).

2. DETERMINAREA MARGINILOR INFERIOARE

Pentru aceasta se folosește metoda reducerii.

Fie (d) un circuit oarecare. Pentru acest circuit, funcția obiectiv X va avea valoarea $X(d)$. Dacă se scade o constantă C din fiecare element al unei linii l din matricea D, vom obține o nouă matrice, $\overline{D}$, din care calcularea valorii funcției obiectiv pentru același circuit (d) va da o valoare $\overline{X}(d)$ mai mică cu C decît valoarea $X(d)$ și aceasta întrucît în fiecare circuit (d) este implicat cîte un singur element din fiecare linie și coloană a matricei D. Rezultă că dacă (d) este un circuit optim pentru matricea D, adică satisface relația (1), atunci (d), este un circuit optim și pentru matricea $\overline{D}$.

Acest proces de scădere a celui mai mic element din fiecare linie și similar din fiecare coloană conduce la o matrice D_R, numită „matricea redusă", care are pe fiecare linie și pe fiecare coloană cel puțin un element nul. În acest fel, valorile funcției obiectiv pentru circuitul (d) calculate în matricele D și D_R sînt legate prin următoarea relație :

$$X(d) = X_R(d) + h, \tag{2}$$

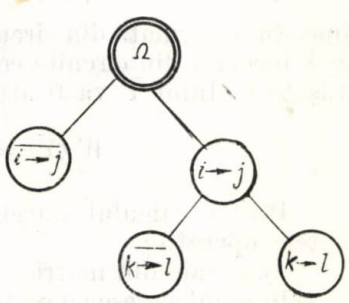


Fig. 6

unde

$$h = \sum_{i=1}^{n} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} d_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (d_{ij} - \min_{1 \leqslant j \leqslant n} d_{ij}), \tag{3}$$

reprezintă suma constantelor de reducere pe linii și coloane. Prin urmare rezultă că

$$X(d) \geqslant h \tag{4}$$

întrucît în relația (2) $X(d)$, $X_R(d)$ și h sînt pozitive; se obține astfel o margine inferioară pentru lungimile circuitelor (h nu depinde de d); se atașează această margine inferioară nodului inițial Ω.

Pentru a calcula marginile inferioare în celelalte noduri, se procedează în felul următor: fie Z un nod oarecare. Se notează $D(Z)$ matricea redusă corespunzătoare nodului Z și prin $W(Z)$ marginea inferioară atașată lui. Prin ramificarea din nodul Z se creează două noi noduri (conform procedeului anterior) Y și $\overline{Y}$. Această ramificare revine la a se găsi o pereche de indici (k, l), astfel ca circuitele din Z care conțin aceste perechi de indici să dea funcției obiectiv o valoare cît mai mică, iar circuitele din Z care nu conțin această pereche să dea funcției obiectiv o valoare cît mai mare.

Din matricea redusă $D(Z)$ se observă că circuitele din Z pentru care funcția obiectiv este mică sînt acelea care conțin perechile de indici (i, j) cu $d_{i,j} = 0$.

Va trebui ca din mulțimea $\{(i, j);\ 1 \leqslant i, j \leqslant n;\ d_{ij} = 0\}$ să se calculeze acea pereche (k, l) pentru care circuitele ce nu o conțin să facă funcția obiectiv cît mai mare. Pentru aceasta se va atribui pe rînd elementelor nule d_{ij} valoarea infinit și se vor reduce matricele corespunzătoare astfel obținute. Se va lua drept pereche (k, l) acea pereche pentru care suma constantelor de reducere pe linia k și coloana l este maximă. Este clar că în acest caz circuitele care nu conțin perechea (k, l) fac funcția obiectiv cît mai mare.

Determinarea perechii (k, l) necesită calcularea pentru fiecare element nul $d_{ij} = 0$ din matricea redusă $D(Z)$ a următorului număr: $\theta(i, j)$ = (cel mai mic element de pe linia i diferit de d_{ij}) + (cel mai mic element de pe coloana j diferit de d_{ij}); și de a lua drept pereche (k, l) aceea pentru care $\theta(k, l) = \max_{i,j} \theta(i, j)$. Se notează acum cu Y submulțimea lui Z formată din circuite care conțin perechea (k,l) și $\overline{Y}$ submulțimea lui Z formată din circuite ce nu conțin perechea (k, l). Marginea inferioară atașată nodului $\overline{Y}$ va fi atunci:

$$W(\overline{Y}) = W(\overline{k,l}) = W(Z) + \theta(k,l).$$

Pentru calculul marginii inferioare atașate nodului Y se fac următoarele operații:

a) se taie din matricea $D(Z)$ linia k și coloana l;

b) se înlocuiesc cu ∞ toate elementele din $D(Z)$ care permit formarea de subcircuite;

c) se reduce matricea astfel obținută, scriind o nouă matrice redusă $D\ (Y)$ și se calculează $h\ (Y)$ care reprezintă suma constantelor de reducere.

Atunci matricea inferioară atașată nodului Y va fi

$$W\ (Y) = W\ (k,\ l) = W\ (Z) + h\ (Y).$$

Operația (a) se justifică prin faptul că odată aleasă perechea $(k,\ l)$ nu mai este necesară linia k și coloana l, întrucît în fiecare circuit nu intră decît un singur element dintr-o linie și o coloană.

Referitor la operația (b) se face observația că dacă perechea de indici $(k,\ l)$ împreună cu alte perechi deja găsite stabilesc un circuit cu mai puțin de n indici ale cărui capete sînt m și n, atunci se va lua $d_{mn} = \infty$ pentru a se evita posibilitatea formării de subcircuite.

Dacă nu s-au mai găsit și alte perechi sau dacă nu există posibilitatea conectării între perechile deja găsite și perechea $(k,\ l)$, atunci se ia $d_{kl} = \infty$ din aceleași motive.

Operația (c) dă posibilitatea obținerii noii matrice reduse $D\ (Y)$, întrucît matricea $D\ (Z)$ în urma operațiilor anterioare (a) și (b) poate să nu fie sub formă redusă (adică nu mai conține cel puțin un element nul în fiecare linie și coloană).

3. ALEGEREA NODULUI PENTRU NOI RAMIFICĂRI

Ramificarea se continuă din acel nod notat cu Z a cărui limită inferioară $W\ (Z)$ este minimă.

4. RECUNOAȘTEREA UNUI NOD CARE CONȚINE NUMAI SOLUȚII NEADMISIBILE SAU NEOPTIMALE

Se spune că o soluție este neadmisibilă dacă s-a creat un subcircuit. Acest lucru se înlătură în modul în care se construiesc matricele reduse asociate nodurilor. Dacă se vor obține totuși $W\ (Z) = \infty$ pentru un nod oarecare Z, atunci acest nod are doar soluții neadmisibile.

Soluțiile neoptimale se recunosc comparînd $W\ (Z)$ cu circuitul (d) care a dat cea mai mică valoare funcției obiectiv X. Dacă $W\ (Z) > X\ (d)$, atunci nodul Z are doar soluții neoptimale.

5. RECUNOȘTEREA UNUI NOD FINAL CARE NU CONȚINE SOLUȚIA OPTIMĂ

Un nod final corespunzător unei permutări (d) care fixează o anumită succesiune a celor n elemente este nodul care dă soluția optimă dacă $X\ (d) \leqslant W\ (Z)$, oricare ar fi nodul Z din care încă nu s-a ramificat.

Primită la redacție la 6 octombrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Z. Duca, *Bazele teoretice ale prelucrărilor pe mașini-unelte*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1969.
2. B.M. Kogan, T.M. Ter-Mikaelian, *Rezolvarea problemelor inginerești cu calculatoare numerice*, București, Edit. tehnică, 1965.
3. G.K. Goranskii, *Rascet rejimov rezanika pri pomosci elektronovicislitelinih mașin*, Gos. izd. SSSR, Minsk, 1963.
4. N.I. Reznicov, *Ispolizovanie E.V.M. dlia opredelenia optimalinih rejimov rezania*, Vestnik mașinostroenia, *12* (1966).
5. I.S.O., Reccomendation R. 841, *Axis and motion nomenclature for numerically controlled machines.*
6. W. Simon, *Conducerea numerică a mașinilor-unelte*, București, Edit. tehnică, 1967.
7. J.D.C., Little, K.G. Murty, D.W. Sweerey, C. Karel, *An Algoritm for the Traveling Salesman Problem Operations Researchs*, II, *6* (1963).

RECENZII

UWE CLAUSSEN, *Konstruieren mit Rechnen* (Proiectare cu calculatoare). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971, VIII + 260 p., 143 fig., 36 DM.

În această lucrare este tratată o problemă deosebit de interesantă și anume aceea a utilizării calculatoarelor moderne în activitatea de proiectare, în special a organelor de mașini și a mașinilor. Problema fiind nouă, autorul nu are pretenția de a epuiza subiectul sau de a da o colecție completă de rețete, așa cum se exprimă el însuși în introducere, ci mai mult de a prezenta posibilitățile actuale de prelucrare a datelor cu ajutorul calculatoarelor, în vederea obținerii unor rezultate utile în proiectare.

Din cele trei diviziuni ale cărții, prima are un caracter introductiv, fiind consacrată unei prezentări a principiilor de funcționare și de utilizare a calculatoarelor digitale și analogice.

Partea a doua se ocupă de formularea și tratarea problemelor de proiectare. După o definire a conținutului activității de proiectare în accepția modernă, se face o prezentare, cu un caracter oarecum istoric, a unor metodici de proiectare, ultima fiind aceea modernă propusă de Rodenacker. Se trece apoi la formularea matematică a problemei, pentru calculator, și la prezentarea metodelor matematice de rezolvare. Sînt trecute astfel, pe rînd, în revistă, metodele clasice, metodele care utilizează cercetarea operațională și acelea bazate pe analiza marginală.

Partea a treia, cea mai importantă ca volum, tratează aplicarea calculatoarelor în proiectare. Diversele probleme care trebuie rezolvate în cursul proiectării sînt prezentate pe rînd, cu indicații, asupra rezolvării lor cu ajutorul calculatoarelor. Atrage atenția în special capitolul care se ocupă de optimizare într-un cîmp de posibilități, problemă de un deosebit interes în proiectare. Exemplele tratate în fiecare capitol sînt bine alese și sugestive.

O amplă bibliografie completează această lucrare, bine scrisă și care se urmărește cu ușurință și interes. Bazată pe metode matematice moderne, cartea oferă exemple reușite de aplicare a acestora în tehnică. O considerăm deosebit de utilă pentru proiectanți și în general pentru aceia care se ocupă de utilizarea calculatoarelor în tehnică.

Teodor Oroveanu

Proceedings of the conference on tower shaped structures. Publicațiile conferinței asupra structurilor în formă de turn), Haga, 24—26 aprilie 1969. Editori: A. M. Hass (Universitatea Tehnologică Delft). H. van Koten (Organizația pentru cercetarea științifică aplicată din Olanda) TNO Delft 1969, 392 pagini.

În continuarea lucrărilor simpozionului organizat de I.A.S.S. (Asociația Internațională pentru Structuri din Plăci Curbe Subțiri), a avut loc, sub auspiciile aceleiași organizații, o reuniune a grupului internațional de lucru privind structurile în formă de turn. Reuniunea s-a ținut la Haga, în zilele de 24—26 aprilie 1969.

Scopul acestei reuniuni a fost limitat în principal la dezvoltările recente privind încărcarea cu vînt și ghiață la structuri cum ar fi turnurile de televiziune, coșuri, construcții înalte, turnuri de răcire, etc.

Principalele teme dezbătute au fost : concepţii stohastice ale acţiunii vîntului, încărcarea în direcţia vîntului, încărcarea perpendiculară pe direcţia vîntului, încărcarea cu ghiaţă şi acţiunea vîntului asupra turnurilor de răcire.

Lucrările prezentate, în număr de 25, au fost reunite în volumul de faţă şi au autorii şi titlurile următoare.

1. *A. G. Davenport:* Concepţii statistice ale acţiunii vîntului.
2. *P. J. Rijkoort, J. Wieringa:* Proiecte de turnuri pentru cercetări meteorologice.
3. *M. Pirner, J. Svejda:* Răspunsul dinamic al unei grinzi sub sarcini mobile întîmplătoare.
4. *F. Simácek:* Rotiri la turnuri de televiziune.
5. *C. Scruton:* Sucţiunea şi presiunea vîntului.
6. *J. Novotny :* Vibraţii laterale.
7. *R. Reidat:* Formarea gheţii pe turnuri.
8. *H. van Koten:* Excitaţia prin vîrtejuri.
9. *M. Novak:* Instabilitatea aeroelastică a corpurilor prismatice.
10. *L.R. Wootton:* Oscilaţiile produse de vînt la antene circulare.
11. *D.J. Johns, C.B. Sharma, S. Parthan, G. K. Brave-Boy:* Asupra stabilităţilor produse de vînt.
12. *M. Pirner:* Limitarea vibraţiilor autoinduse.
13. *H. von Ruscheweyh:* Măsurători asupra presiunii vîntului la turnuri de răcire.
14. *W.B. Krätzig, H. L. Peters:* Acţiunea vîntului asupra turnurilor de răcire.
15. *M. van Laethem:* Echilibrul turnurilor de răcire hiperbolice.
16. *H.J. Nieman:* Măsurători asupra presiunii vîntului la turnuri de răcire.
17. *K. Zahradnik:* Încercarea turnurilor de răcire în tunel aerodinamic.
18. *B.G. Korenev, S.R. Bukeikhanov:* Vibraţiile barelor cu secţiune variabilă
19. *B. G. Korenev, L. R. Rezniakov:* Reducerea vibraţiilor prin amortizori dinamici
20. *O. Fischer:* Vibraţia forţată a grinzilor cu amortizare.
21. *J. Ledwón, A. Scruba:* Deformaţia unui coş datorită însoririi.
22. *J. Kozak:* Turnul de la Bratislava.
23. *R. Ciesielski:* Măsurarea săgeţilor coşurilor.
24. *A.M. Haas:* Stabilitatea plăcilor curbe subţiri.
25. *B.P. Th. Veltman* : Analiza statistică pentru parametrii dinamici ai sistemelor.

Comunicările sînt de un înalt nivel ştiinţific, iar volumul trebuie apreciat ca o contribuţie remarcabilă la cunoaşterea mai corectă a acţiunii unor sarcini climatice asupra construcţiilor în formă de turn.

Mircea V. Soare

ACHIM MOLKENTHIN, ***Einflussfelder zweifeldriger Platten mit freien Längsröndern. Influence Surfaces of Two-Span Continuous Plates with Free Longitudinal Edges.*** (Suprafeţe de influenţă pentru plăci plane continue pe două deschideri cu marginile longitudinale libere) Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1971 31 figuri şi 165 planşe.

Extinderea liniilor de influenţă de la grinda dreaptă la plăcile plane a dus la un nou concept, acela de suprafeţe de influenţă. Preconizate în 1938 de Adolf Pucher, suprafeţele de influenţă au devenit un instrument indispensabil de calcul, cunoscînd o largă dezvoltare. Sînt cunoscute, de exemplu, volumele publicate de editura Springer din R.F.G. şi anume

— A. Pucher : Suprafeţe de influenţă pentru plăcile plane elastice (ed. 3-a, cu text în l. germană şi l. engleză), 1964 ;

— G. Hoeland : Suprafeţe de influenţă pentru momentele pe reazeme ale plăcilor continue, 1957 ;

— S. Krug, P. Stein : Suprafeţe de influenţă ale plăcilor ortogonal anizotrope (cu text în l. germană şi l. engleză), 1961.

Acestor trei volume le urmează recentul volum al lui A. Molkenthin, de care ne ocupăm în recenzia de faţă.

Plăcile continui cu marginile longitudinale libere sînt întîlnite în special în construcţia de poduri, dar pot fi utilizate şi în alte construcţii industriale sau speciale de beton armat.

Suprafeţele de influenţă sînt reprezentate prin curbe de nivel, valorile fiind determinate cu ajutorul metodei singularităţilor, utilizînd serii trigonometrice. Volumul uriaş de calcule a fost posibil doar cu ajutorul programării la un computer.

Textul introductiv cuprinde lămuriri asupra suprafeţelor de influenţă, modul de evaluare a rezultatelor pentru diferite tipuri de încărcare (sarcini distribuite pe suprafaţă, sarcini liniare, forţe concentrate), exemple de aplicare, alte posibilităţi de aplicare (extinderi) a suprafeţelor date în volum şi date teoretice (formule) pentru calculul suprafeţelor de influenţă.

Textul este urmat de 193 planşe care determină suprafeţele de influenţă pentru momente în puncte caracteristice ale plăcilor continue pe două deschideri.

Raportul laturilor a fost luat 0,5 ; 0,8 1,0 ; 1,2 ; 1,5 ; 2,0 şi 3,0, fiind variat şi raportul laturilor longitudinale. A fost examinat şi cazul limită al plăcilor continue pe o direcţie, întinzîndu-se pînă la infinit în cealaltă direcţie.

Lucrarea se va dovedi un instrument indispensabil de lucru pentru proiectarea plăcilor continue, scutind proiectantului un volum uriaş de calcule de rutină, bazate pe cunoştinţe de matematici superioare. Faţă de lucrarea amintită a lui Krug şi Stein, se remarcă lipsa unor recomandări pentru interpolări, în situaţii în care dimensiunile concrete ale plăcilor de dimensionat nu conduc la rapoartele pentru care au fost pregătite planşele. Aceasta rămîne încă în sarcina proiectantului.

Mircea V. Soare

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 31, nr. 2 1972

SUMAR

STUDII

Pag.

L. LIBRESCU şi TR. BĂDOIU, Asupra flutterului supersonic al structurilor plane, dreptunghiulare, anizotrope, eterogene 235

N. GRĂDINARU, O metodă de determinare a frecvenţelor proprii ale plăcilor conice circulare închise, în ipoteza Vlasov-Muştari 251

A. MANOLACHI, Încovoierea plăcilor plane nemărginite, compuse din două materiale anizotrope 257

N. ŢOPA, Studiul conlucrării spaţiale, printr-un calcul în două etape, a unor grinzi în *T*, aşezate pe o singură direcţie 273

A. OPREAN, FL. IONESCU, L. MĂSĂLAR şi M. DOBRE, Studiul dinamicii motoarelor hidrostatice rotative 297

I. SZÉKELY şi A. ANTAL, Analiza şi sinteza mecanismului cu mişcare intermitentă, fără forţă percutantă 317

N. URSU, Asupra utilizării operatorului dual cvaternionic la studiul mecanismelor spaţiale cu cuple cinematice superioare 327

D. CATRINA, Viteza patinei presei cu genunchi 339

PETRE ALEXANDRU, Studiul cinematic al mecanismului de direcţie cu trei bare transversale şi al celui cu cremalieră 347

AL. VAICUM, Capacitatea portantă a fundaţiilor cu efort predominant axial pentru stîlpii L.E.A. 385

AL. MARINESCU şi V. CARDOŞ, Intrarea în timp minim a vehiculelor spaţiale în atmosfera planetară 413

T. OROVEANU, Asupra unor probleme de mişcare nestaţionară a unui fluid vîscos 429

D. PANTAZOPOL şi DUMITRU GHEORGHE, O metodă grafo-analitică de determinare a diagramei Weibull-Alan-Plait în cazul unei împrăştieri mari a datelor experimentale 443

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

S. RĂUTU şi V. BĂNUŢ, Direcţii de cercetare în proiectarea optimă a structurilor de rezistenţă 451

RECENZII 473

ASUPRA FLUTTERULUI SUPERSONIC AL STRUCTURILOR PLANE, DREPTUNGHIULARE, ANIZOTROPE, ETEROGENE

de L. LIBRESCU şi TR. BĂDOIU
IMFCA

Este prezentat un studiu analitic asupra problemei flutterului liniar al panourilor plane, subţiri, construite simetric dintr-un număr impar de straturi anizotrope (*neortotrope*).
Curentul de gaz supersonic în care este plasată structura se presupune a fi coplanar, de direcţie arbitrară.
După ce sînt stabilite ecuaţiile de flutter şi se prezintă criteriul de obţinere a caracteristicelor critice de flutter, sînt trase o serie de concluzii privind influenţa diverşilor parametri luaţi în considerare.

1. INTRODUCERE

Într-o serie de lucrări recente, în cadrul analizei problemei stabilităţii aeroelastice a panourilor plane, eterogene, construite simetric din straturi ortotrope s-a presupus că :

a) axele principale de ortotropie ale materialului fiecărui strat coincid în fiecare punct cu axele geometrice ale panoului ;

b) panoul este plasat într-un curent de gaz supersonic, vectorul vitezei curentului neperturbat fiind paralel direcţiei $O\xi_1$.

În cele ce urmează, analiza problemei de flutter a structurilor plane, eterogene, simetric construite din straturi ortotrope va fi întreprinsă luînd în considerare efectul orientării arbitrare a ortotropicităţii, precum şi efectul orientării arbitrare a curentului de gaz (care se consideră a fi coplanar) asupra caracteristicilor de flutter ale panoului.

2. CONSIDERAŢII GEOMETRICE, IZOTROPE, ECUAŢII DE BAZĂ

Fie o placă plană dreptunghiulară ($a \times b$), a cărei faţă exterioară este expusă unui curent de gaz supersonic, coplanar, de direcţie arbitrară (fig. 1*b*).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 2, 1972, P. 235–250

Panoul este presupus construit simetric din $2l+1$ ($l = 1,2,\ldots$) straturi elastice, al căror material este presupus omogen și ortotrop, axele principale ($\bar{\xi}_1^{(j)}$, $\bar{\xi}_2^{(j)}$) corespunzînd materialului fiecărui strat fiind considerate rotite în raport cu axele geometrice (ξ_1, ξ_2) cu unghiul $\Phi^{(j)}$ (vezi fig. 1*a*)*.

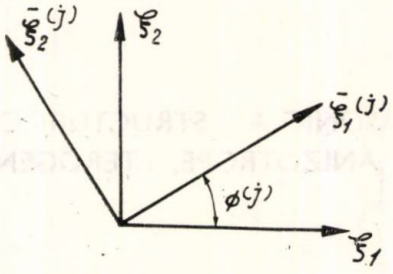


Fig. 1a

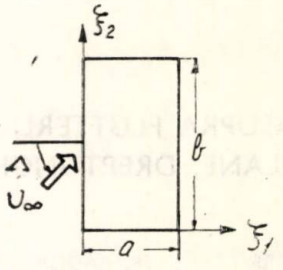


Fig. 1b

Dar, după cum este bine știut (vezi în acest sens, de exemplu, [1]), în cazul în care componentele tensorului modulelor de elasticitate sînt referite la axele geometrice ale panoului, axe ce se presupun că nu coincid cu cele de ortotropie principale, materialul fiecărui strat este caracterizat de șase constante elastice, ceea ce corespunde anizotropiei de tipul simetriei elastice în raport cu suprafața $\xi_3 = \text{const}$.

În acest caz, așa cum rezultă atît în cazul abordării diverselor probleme de elastostatică și dinamică a panourilor plane *anizotrope* (omogene sau eterogene; vezi în acest sens Bert și Mayberry [2], Ashton [3] și Waddoups [4]), cît și în cazul abordării problemei flutterului supersonic al panourilor plane *anizotrope* (vezi Calligeros și Dugundji [5] și Ketter [6]), metoda Galerkin încetează a mai constitui instrumentul eficient de abordare a problemelor menționate mai sus.

În schimb metoda Rayleigh-Ritz, folosită în legătură cu principiul minimului energiei potențiale, se dovedește a fi în contextul problemelor sus-menționate un instrument de abordare potrivit și eficient. Aceasta este metoda pe care o vom folosi și noi în analiza problemei enunțate.

Pe această linie, adoptînd ipoteza Love-Kirchhoff pentru structura în ansamblu, funcționala energiei este dată de (vezi Ambartsumian [7]).

$$\mathfrak{I} = U - W, \tag{1}$$

unde

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b [D_{11}(w_{,11})^2 + 2D_{12}w_{,11}w_{,22} + D_{22}(w_{,22})^2 + 4D_{66}(w_{,12})^2 + 4(D_{16}w_{,11} + D_{26}w_{,22})w_{,12} - T_{11}^0(w_{,1})^2 - T_{22}^0(w_{,2})^2]\,d\xi_1\,d\xi_2 \tag{2}$$

* Simetria geometrică și fizico-mecanică a structurii în raportc u planul median al panoului include și valorile unghiurilor de orientare a ortotropicității corespunzînd materialului straturilor simetrice.

reprezintă energia potențială totală datorită încovoierii transversale și sarcinilor T_{11}^0 și T_{22}^0 din planul plăcii (considerate pozitive în compresiune), iar

$$W = \int_0^a \int_0^b pw \, d\xi_1 \, d\xi_2 \tag{2'}$$

este energia potențială datorită sarcinilor transversale;

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{l+1} B_{ik}^{(j)} (\xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3) \qquad (i, k = 1, 2, 6) \tag{3}$$

reprezintă rigiditățile de încovoiere, putînd fi exprimate prin intermediul constantelor $\bar{B}_{ik}$, $(i, k = 1, 2)$ referite la axele principale $(\bar{\xi}_1^{(j)}, \bar{\xi}_2^{(j)})$, și a unghiurilor $\Phi^{(j)}$ cu ajutorul formulelor (5) din [1], adaptate pentru cazul teoriei structurilor simetric construite.

În ceea ce privește expresia presiunii aerodinamice, aceasta, în cazul unui curent de gaz supersonic, coplanar, de direcție arbitrară Λ, va fi dată prin

$$\Delta p = -\frac{\varkappa p_\infty}{c_\infty} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \cos \Lambda + \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \sin \Lambda \right) \right]. \tag{4}$$

Cu aceasta sarcina transversală globală $p(\xi_1, \xi_2, t)$ intervenind în funcționala energiei este exprimată prin

$$p(\xi_1, \xi_2, t) = -\frac{\varkappa p_\infty}{c_\infty} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \cos \Lambda + \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \sin \Lambda \right) \right] -$$

$$- m_0 \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{5}$$

În scopul folosirii metodei Rayleigh-Ritz vom exprima deplasarea transversală $w(\xi_1, \xi_2, t)$ sub forma

$$w(\xi_1, \xi_2, t) = \sum_{m, n} C_{mn} f_{mn}(\xi_1, \xi_2) \, e^{\omega t}, \tag{6}$$

unde funcțiile modale $f_{mn}(\xi_1, \xi_2)$ trebuie să satisfacă toate condițiile la limită cinematice.

În cazul considerării panoului simplu rezemat pe întregul contur (caz la care ne vom limita în analiza ce va urma), funcțiile modale,

$$f_{mn}(\xi_1, \xi_2) = \sin \frac{m\pi \xi_1}{a} \sin \frac{n\pi \xi_2}{b}, \tag{7}$$

permit satisfacerea corespunzătoare a condițiilor la limită cinematice.

Ţinînd seama de relaţiile (2) — (7) în [1], efectuînd integrarea şi, în acord cu principiul minimului energiei potenţiale, impunînd condiţia

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial C_{mn}} = 0, \tag{8}$$

se obţine următorul sistem de ecuaţii pentru coeficienţii C_{mn}:

$$\left(\frac{D_{11}}{\overline{D}_{11}} m^4 + 2\varphi^2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\overline{D}_{11}} m^2 n^2 + \frac{D_{22}}{\overline{D}_{11}} n^4 \varphi^4 - R_{11} m^2 - R_{22} n^2 \varphi^2 - Z\right) C_{mn} -$$

$$- \lambda \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{4m(2p+1-m)}{(2p+1)(2p+1-2m)} C_{2p+1-m;\, n} \cos \Lambda + \right.$$

$$\left. + \varphi \sum_{t=1}^{\infty} \frac{4n(2t+1-n)}{(2t+1)(2t+1-2n)} C_{m;\, 2t+1-n} \sin \Lambda \right] -$$

$$- \frac{32}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{mn(2p+1-m)(2t+1-n)}{(2p+1)(2t+1)(2p+1-2m)(2t+1-2n)} \times$$

$$\times \left[(m^2 + (2p+1-m)^2) \frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}} \varphi + (n^2 + (2t+1-n)^2) \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}} \varphi^3 \right] C_{2p+1-m;\, 2t+1-n} = 0, \tag{9}$$

unde

$$R_{11} = \frac{T_{11}^0 a^2}{\pi^2 \overline{D}_{11}}, \qquad R_{22} = \frac{T_{22}^0 a^2}{\pi^2 \overline{D}_{11}}, \tag{10}$$

iar

$$-Z = \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 + \varepsilon_T \frac{\omega}{\Omega_0}, \quad \text{parametrul legat de valorile proprii,} \tag{11}$$

$\lambda = \varkappa p_\infty M a^3/(\overline{D}_{11}\pi^4)$ parametrul de viteză,

$\Omega_0^2 = \pi^4 \overline{D}_{11}/(m_0 a^4)$ frecvenţa de referinţă,

$\varepsilon_T = \varepsilon/\Omega_0 + \varkappa p_\infty/(m_0 c_\infty \Omega_0)$ parametrul de amortizare totală.

Referitor la ecuaţiile obţinute se remarcă următoarele:

a) în cazul în care $\Phi^{(j)} = 0$ şi $\Lambda = 0$, cuplarea modurilor în direcţia $O\xi_1$ este pur aerodinamică;

b) în cazul în care $\Phi^{(j)} \neq 0$ şi $\Lambda = 0$, cuplarea modurilor poate fi de natură aerodinamică şi elastică (cuplarea elastică avînd loc atît în modurile din direcţia $0\xi_1$, cît şi în cele din direcţia $0\xi_2$).

În cazul $\Lambda \neq 0$, este prezentă în plus cuplarea modurilor din direcția $0\xi_2$, intervenind în termenii pur aerodinamici.

De asemenea, este demn de menționat că sistemul de ecuații (9), particularizat în diverse cazuri speciale, coincide cu:

A) Cel obținut de Bohon [8] și de Kordes și Noll [9] în cazul considerării panoului omogen și ortotrop (axele elastice de ortotropie fiind presupuse că coincid cu cele geometrice) și, respectiv, în cazul panoului omogen și izotrop, în ambele cazuri panoul fiind presupus plasat într-un curent de gaz, coplanar, de direcție arbitrară.

B) Cu cel obținut de Calligeros și Dugundji [5] pentru cazul considerării panoului omogen și a curentului de gaz dirijat paralel direcției $0\xi_1$ ($\Lambda = 0$).

C) Este în acord cu sistemul de ecuații obținut de Ketter [6].

Revenind la sistemul ecuațiilor de flutter, condiția de netrivialitate a soluției impune ca determinantul coeficienților lui C_{mn} să fie zero.

Restrîngînd analiza la cazul primelor două moduri atît în direcția $0\xi_1$, cît și în direcția $0\xi_2$ ($m = 1, 2$; $n = 1, 2$), determinantul caracteristic devine

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}^2 - Z & -\frac{8\lambda}{3}\cos\Lambda & -\frac{8\lambda\varphi}{3}\sin\Lambda & \left[-\frac{640}{9\pi^2}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)\right] \\ \frac{8\lambda}{3}\cos\Lambda & \omega_{21}^2 - Z & \left[\frac{640}{9\pi^2}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)\right] & -\frac{8\lambda\varphi}{3}\sin\Lambda \\ \frac{8\lambda\varphi}{3}\sin\Lambda & \left[\frac{640}{9\pi^2}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)\right] & \omega_{12}^2 - Z & -\frac{8\lambda}{3}\cos\Lambda \\ \left[-\frac{640}{9\pi^2}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)\right] & \frac{8\lambda\varphi}{3}\sin\Lambda & \frac{8\lambda}{3}\cos\Lambda & \omega_{22}^2 - Z \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

unde

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D_{11}}{\overline{D}_{11}} m^4 + 2\varphi^2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\overline{D}_{11}} m^2 n^2 + \frac{D_{22}}{\overline{D}_{11}} n^4 \varphi^4 - R_{11} m^2 - R_{22} n^2 \varphi^2 \tag{13}$$

reprezintă frecvenţele naturale obţinute în cazul absenţei curentului de gaz, al amortizării şi al cuplării elastice.

Dezvoltarea determinantului conduce la următoarea ecuaţie în parametrul de viteză λ:

$$\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^4(\cos^2\Lambda-\varphi^2\sin^2\Lambda)^2+\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2\{\cos^2\Lambda[(\omega_{11}^2-Z)(\omega_{21}^2-Z)+$$

$$+(\omega_{12}^2-Z)(\omega_{22}^2-Z)]+\varphi^2\sin^2\Lambda[(\omega_{11}^2-Z)(\omega_{12}^2-Z)+$$

$$+(\omega_{22}^2-Z)(\omega_{21}^2-Z)]\}+(\omega_{11}^2-Z)(\omega_{22}^2-Z)(\omega_{12}^2-Z)(\omega_{21}^2-Z)+$$

$$+\frac{32^4\times 20^4}{9^4\pi^8}\left(\frac{D_{16}}{D_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{D_{11}}\varphi^3\right)^4-\frac{32^2\times 20^2}{9^2\pi^4}\left(\frac{D_{16}}{D_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{D_{11}}\varphi^3\right)^2\times$$

$$\times((\omega_{11}^2-Z)(\omega_{22}^2-Z)+(\omega_{12}^2-Z)(\omega_{21}^2-Z))+$$

$$+\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2\frac{2\times 32^2\times 20^2}{9^2\pi^4}\left(\frac{D_{16}}{D_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{D_{11}}\varphi^3\right)^2(\cos^2\Lambda+\varphi^2\sin^2\Lambda)-$$

$$-\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2\frac{64\times 20}{9\pi^2}\varphi\left(\frac{D_{16}}{D_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{D_{11}}\varphi^3\right)\cos\Lambda\sin\Lambda((\omega_{11}^2-Z)+$$

$$+(\omega_{22}^2-Z)+(\omega_{12}^2-Z)+(\omega_{21}^2-Z))=0. \tag{14}$$

3. FORMULAREA PROBLEMEI STABILITĂŢII AEROELASTICE

După cum se ştie, studiul stabilităţii aeroelastice a panourilor în formulare liniară permite determinarea acelei valori a vitezei gazului numită viteză de flutter, definită astfel: Pentru intervalul $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_*$ frecvenţele corespunzătoare ω satisfac inegalitatea $\mathrm{Re}\,\omega\leqslant 0$ pentru care soluţia (6) este stabilă sau neutral stabilă, în timp ce în vecinătatea dreaptă a lui λ_* există valorile lui λ pentru care cel puţin o soluţie (6) posedă un ω ce satisface inegalitatea $\mathrm{Re}\,\omega>0$. În acest ultim caz soluţia (6) este instabilă, panoul avînd oscilaţii de tip flutter.

Se poate arăta (vezi în acest sens Movcian [10], [11] şi Krumhaar [12]) că determinarea condiţiilor conducînd la definirea caracteristicilor critice de flutter se poate reduce la analiza dependenţei valorilor proprii $Z_n\equiv Z_n(\lambda)$ ale problemei la limită de parametrul de viteză λ, ceilalţi parametri fiind fixaţi.

Pentru o valoare proprie $Z_n(\lambda)$*) a problemei la limită, din (11) se obţin două frecvenţe $\omega_{n_1}(\lambda)$ şi $\omega_{n_2}(\lambda)$ date prin

$$\omega_{n_1,\,2}(\lambda)=-\frac{1}{2}\varepsilon_T\Omega_0\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_T\Omega_0\right)^2-\Omega_0^2Z_n(\lambda)} \tag{15}$$

*) Se subliniază faptul că pentru o valoare a lui $\lambda\geqslant 0$ şirul de valori proprii $Z_1(\lambda)$, $Z_2(\lambda)$, ... este numărabil.

Una din aceste două rădăcini, fie ω_{n_1}, satisface inegalitatea $\mathrm{Re}(\omega_{n_1}) < 0$ pentru λ arbitrar, inegalitatea decurgînd din faptul că $\omega_{n_1} + \omega_{n_2} = -\varepsilon_T \Omega_0$. A doua frecvență, ω_{n_2}, satisface condițiile

$$\mathrm{Re}(\omega_{n_2}) < 0 \quad \text{sau} \quad \mathrm{Re}(\omega_{n_2}) = 0 \quad \text{sau} \quad \mathrm{Re}(\omega_{n_2}) > 0 \tag{16}$$

dacă și numai dacă $Z_n(\lambda)$ se găsește, respectiv, în interiorul, pe frontiera sau în exteriorul parabolei de stabilitate.

În cazul în care se consideră condițiile ce corespund apariției pragului de instabilitate ($\mathrm{Re}(\omega_{n_2})=0$), din (15), ținînd seama că

$$Z = \mathrm{Re}Z + i\mathrm{Im}Z, \tag{17}$$

se obține

$$\mathrm{Re}Z = \Omega_0^{-2}(\mathrm{Im}(\omega_{n_2}))^2, \qquad \mathrm{Im}Z = -\Omega_0^{-1}\varepsilon_T \mathrm{Im}(\omega_{n_2}). \tag{17'}$$

Relațiile (17') în planul complex Z delimitează punctele parabolei definite de

$$Z_I^2 = \varepsilon_T^2 Z_R \qquad (Z_I \equiv \mathrm{Im}Z\,;\; Z_R \equiv \mathrm{Re}Z), \tag{18}$$

denumită *parabola de stabilitate**).

Domeniul interior parabolei de stabilitate corespunde valorilor proprii pentru care ambele soluții ω_{n_1} și ω_{n_2} au părți reale negative, iar cel exterior valorilor proprii pentru care $\mathrm{Re}(\omega_{n_2}) > 0$. Astfel, problema determinării vitezei critice de flutter corespunzînd clasei de soluții (6) se reduce la analiza modului cum sînt dispuse valorile proprii Z ale problemei la limită în raport cu parabola de stabilitate (18).

Considerațiile de mai sus permit studiul problemei de flutter propuse. Astfel, pornind de la ecuația caracteristică obținută (14), ținînd seama de (17) în această ecuație și separînd partea reală de cea imaginară, rezultă două ecuații exprimate atît prin intermediul lui Z_R, cît și al lui Z_I, ecuații care trebuie satisfăcute identic, astfel încît determinantul (11) să fie nul.

Pe de altă parte, așa cum s-a menționat anterior, condițiile pentru apariția flutterului se obțin dacă și numai dacă Z_R și Z_I constituie coordonatele unui punct plasat pe parabola de stabilitate. Ținînd seama de (18) în ecuațiile menționate mai sus, se obține sistemul de ecuații exprimat

*) Conceptul de *parabolă de stabilitate* a fost introdus pentru prima dată în studiul stabilității aeroelastice a panourilor de Movcian [10], Krumhaar [12] Stepanov [13] și folosită în același domeniu de Houbolt [14], Grigoliuk și Michailov [15], Calligeros și Dugundji [5], Dowell [16], Ketter [6], Vasiliev [17]. Într-un cadru mai larg al stabilității sistemelor neconservative în general, noțiunea de parabolă de stabilitate a fost introdusă și generalizată de Leipholz [18], [19].

numai prin intermediul lui Z_R, precum urmează :

$$\text{Re}: \left(\frac{8\lambda}{3}\right)^4 (\cos^2\Lambda - \varphi^2\sin^2\Lambda)^2 + \left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 \{\cos^2\Lambda[2(Z_R^2 - \varepsilon_T^2 Z_R) -$$

$$- Z_R(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{22}^2+\omega_{21}^2)+\omega_{11}^2\omega_{21}^2+\omega_{12}^2\omega_{22}^2] + \varphi^2\sin^2\Lambda[2(Z_R^2-\varepsilon_T^2 Z_R) -$$

$$- Z_R(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{22}^2+\omega_{21}^2)+\omega_{11}^2\omega_{12}^2+\omega_{22}^2\omega_{21}^2]\} +$$

$$+\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 \frac{2\times 32^2\times 20^2}{9^2\pi^4}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)^2 (\cos^2\Lambda + \varphi^2\sin^2\Lambda) -$$

$$-\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 \frac{64\times 20}{9\pi^2}\varphi\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)\sin\Lambda\cos\Lambda(\omega_{11}^2+\omega_{22}^2+\omega_{12}^2+$$

$$+ \omega_{21}^2 - 4Z_R) + \frac{32^4\times 20^4}{9^4\pi^8}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)^4 -$$

$$-\frac{32^2\times 20^2}{9^4\pi^4}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)^2 [2(Z_R^2 - \varepsilon_T^2 Z_R) -$$

$$- Z_R(\omega_{11}^2+\omega_{22}^2+\omega_{12}^2+\omega_{21}^2)+\omega_{11}^2\omega_{22}^2+\omega_{12}^2\omega_{21}^2]+$$

$$+ Z_R^4 - 6\varepsilon_T^2 Z_R^3 + \varepsilon_T^4 Z_R^2 - (Z_R^3 - 3\varepsilon_T^2 Z_R^2)(\omega_{11}^2+\omega_{22}^2+\omega_{12}^2+\omega_{21}^2)+$$

$$+ (Z_T^2 - \varepsilon_T^2 Z_R)[(\omega_{11}^2+\omega_{21}^2)(\omega_{22}^2+\omega_{12}^2)+\omega_{11}^2\omega_{21}^2+\omega_{22}^2\omega_{12}^2] -$$

$$- Z_R[\omega_{11}^2\omega_{21}^2(\omega_{22}^2+\omega_{12}^2)+\omega_{12}^2\omega_{22}^2(\omega_{21}^2+\omega_{11}^2)] + \omega_{11}^2\omega_{22}^2\omega_{12}^2\omega_{21}^2 = 0, \qquad (19)$$

$$\text{Im}: \left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 (\cos^2\Lambda + \varphi^2\sin^2\Lambda)(4Z_R - \omega_{11}^2 - \omega_{22}^2 - \omega_{12}^2 - \omega_{21}^2) -$$

$$-\frac{32^2\times 20^2}{9^2\pi^4}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)(4Z_R - \omega_{11}^2 - \omega_{22}^2 - \omega_{12}^2 - \omega_{21}^2) +$$

$$+\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 \frac{64\times 80}{9\pi^2}\varphi\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi + \frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)\cos\Lambda\sin\Lambda +$$

$$+ 4Z_R^3 - 4Z_R^2\varepsilon_T^2 + 2Z_R[(\omega_{11}^2+\omega_{21}^2)(\omega_{22}^2+\omega_{12}^2)+\omega_{11}^2\omega_{21}^2 +$$

$$+ \omega_{22}^2\omega_{12}^2] - (3Z_R^2 - Z_R\varepsilon_T^2)(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{21}^2+\omega_{22}^2) -$$

$$- [\omega_{11}^2\omega_{21}^2(\omega_{12}^2+\omega_{22}^2)+\omega_{12}^2\omega_{22}^2(\omega_{11}^2+\omega_{21}^2)] = 0.$$

Orice valoare a lui Z_R satisfăcînd ambele ecuaţii (19), corespunde unui punct de flutter. Criteriul de instabilitate dinamică se reduce astfel la faptul că sistemul (19) să aibă cel puţin o rădăcină comună, condiţie care este satisfăcută dacă şi numai dacă determinantul lui Sylvester, constituit din coeficienţii ecuaţiilor de mai sus, este zero. O metodă aproximativă de obţinere a rădăcinilor comune ale celor două ecuaţii o constituie metoda grafică care constă în reprezentarea celor două polinoame în planul parametrilor (Z_R, λ) şi în alegerea punctului de intersecţie corespunzînd cazului celui mai critic de flutter.

În cazul amortizării $\varepsilon_T \approx 0$, parametrul Z, jucînd rolul valorilor proprii, se exprimă prin

$$Z = -\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \tag{20}$$

şi condiţiile ce corespund flutterului incipient se reduc la $\mathrm{Im}\, Z \cong 0$.

În acest caz în locul sistemului de ecuaţii (19) obţinem

$$\mathrm{Re}: \left(\frac{8\lambda}{3}\right)^4 (\cos^2\Lambda - \varphi^2 \sin^2\Lambda)^2 + \left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 \{\cos^2\Lambda[2Z_R^2 - Z_R(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+$$

$$+\omega_{21}^2+\omega_{21}^2)+\omega_{11}^2\omega_{21}^2+\omega_{12}^2\omega_{22}^2]+\varphi^2\sin^2\Lambda[2Z_R^2-$$

$$-Z_R(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{21}^2+\omega_{21}^2)+\omega_{11}^2\omega_{12}^2+\omega_{22}^2\omega_{21}^2]\}+$$

$$+\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 \frac{2\times 32^2\times 20^2}{9^2\pi^4}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{D_{11}}\varphi^3\right)^2(\cos^2\Lambda+\varphi^2\sin^2\Lambda)-$$

$$-\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 \frac{64\times 20}{9\pi^2}\varphi\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)\sin\Lambda\cos\Lambda(\omega_{1}^2+\omega_{22}^2+$$

$$+\omega_{12}^2+\omega_{21}^2-4Z_R)+\frac{32^4\times 20^4}{9^4\pi^8}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)^4-$$

$$-\frac{32^2\times 20^2}{9^2\pi^4}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)^2[2Z_R^2-$$

$$-Z_R(\omega_{11}^2+\omega_{22}^2+\omega_{12}^2+\omega_{21}^2)+\omega_{11}^2\omega_{22}^2+\omega_{12}^2\omega_{21}^2]+$$

$$+Z_R^4-Z_R^3(\omega_{11}^2+\omega_{22}^2+\omega_{12}^2+\omega_{21}^2)+Z_R^2[(\omega_{11}^2+\omega_{21}^2)(\omega_{22}^2+\omega_{12}^2)+$$

$$+\omega_{11}^2\omega_{21}^2+\omega_{22}^2\omega_{12}^2]-Z_R[\omega_{11}^2\omega_{21}^2(\omega_{22}^2+\omega_{12}^2)+$$

$$+\omega_{12}^2\omega_{22}^2(\omega_{21}^2+\omega_{11}^2)]+\omega_{11}^2\omega_{22}^2\omega_{12}^2\omega_{21}^2=0,$$

$$\mathrm{Im}: \left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2(\cos^2\Lambda+\varphi^2\sin^2\Lambda)(4Z_R-\omega_{11}^2-\omega_{22}^2-\omega_{12}^2-\omega_{21}^2)-$$

$$-\frac{32^2\times 20^2}{9^2\pi^4}\left(\frac{D_{16}}{\overline{D}_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{\overline{D}_{11}}\varphi^3\right)^2(4Z_R-\omega_{11}^2-\omega_{22}^2-\omega_{12}^2-\omega_{21}^2)+$$

$$+\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^2 \frac{64\times 80}{9\pi^2}\varphi\left(\frac{D_{16}}{D_{11}}\varphi+\frac{D_{26}}{D_{11}}\varphi^3\right)\sin\Lambda\cos\Lambda+$$

$$+4Z_R^3+2Z_R[(\omega_{11}^2+\omega_{21}^2)(\omega_{22}^2+\omega_{12}^2)+\omega_{11}^2\omega_{21}^2+\omega_{22}^2\omega_{12}^2)]-$$

$$-3Z_R^2(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\omega_{21}^2+\omega_{22}^2)-[\omega_{11}^2\omega_{21}^2(\omega_{12}^2+\omega_{22}^2)+$$

$$+\omega_{12}^2\omega_{22}^2(\omega_{11}^2+\omega_{21}^2)]=0,$$

sistem ce se caracterizează prin aceea că ecuația $(21)_2$ se obține în mod exact din $(21)_1$ prin derivare în raport cu Z_R. Aceasta pune în lumină faptul că, în cazul $\varepsilon_T \approx 0$, parametrii critici de flutter, corespunzînd soluțiilor simultane ale celor două ecuații, corespunde vîrfului diagramei reprezentînd variația lui λ ca funcție de Z_R sau, ceea ce este echivalent, punctului în care două ramuri ale spectrului de frecvențe naturale fuzionează.

APLICAȚIE NUMERICĂ, CONCLUZII

Efectul variației unghiului de orientare a ortotropicității asupra mărimilor critice de flutter va fi pus în evidență în cazul panoului plan, construit simetric din trei straturi ortotrope, straturile exterioare fiind considerate avînd grosimea $h_1=h_3=\delta$, iar stratul median grosimea $h_2=4\delta$ (grosimea totală $h=4\delta$). Straturile exterioare se consideră a fi confecționate dintr-un material cu ortotropie de tipul 1, iar stratul median dintr-un material cu ortotropie de tipul 2 (vezi tabela 1).

Tabela 1

Tipul de ortotropie	$\bar{E}_1$	$\bar{E}_2$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{G}_{12}$
Tipul 1	E	$10E$	0,0349	0,349	0,5
Tipul 2	$10E$	E	0,349	0,0349	0,5

În ceea ce privește unghiurile de orientare ale ortotropicității corespunzînd materialului celor trei straturi, acestea se consideră a fi $\Phi^{(2)} = \Phi^{(3)} \equiv \Phi''$; $\Phi^{(1)} \equiv \Phi'$.

Direcția de scurgere a curentului de gaz se consideră paralelă axei $O\xi_1$.

În cadrul exemplului considerat se obține variația vitezei de flutter λ_* în funcție de unghiul de ortotropicitate Φ'' pentru diferite valori ale unghiului Φ' și diferite valori ale parametrilor φ, R_{11}, ε_T.

Concluzia principală rezultînd din curbele obținute este aceea că valoarea maximă a vitezei critice de flutter nu rezultă în cazul general atunci cînd axele principale de ortotropie coincid cu axele geometrice ale panoului (vezi în acest sens fig. 2 — 6). Acest fapt reflectă capacitatea potențială a acestor structuri de realizare a unor condiții de optimum din punctul de vedere al cerințelor de flutter.

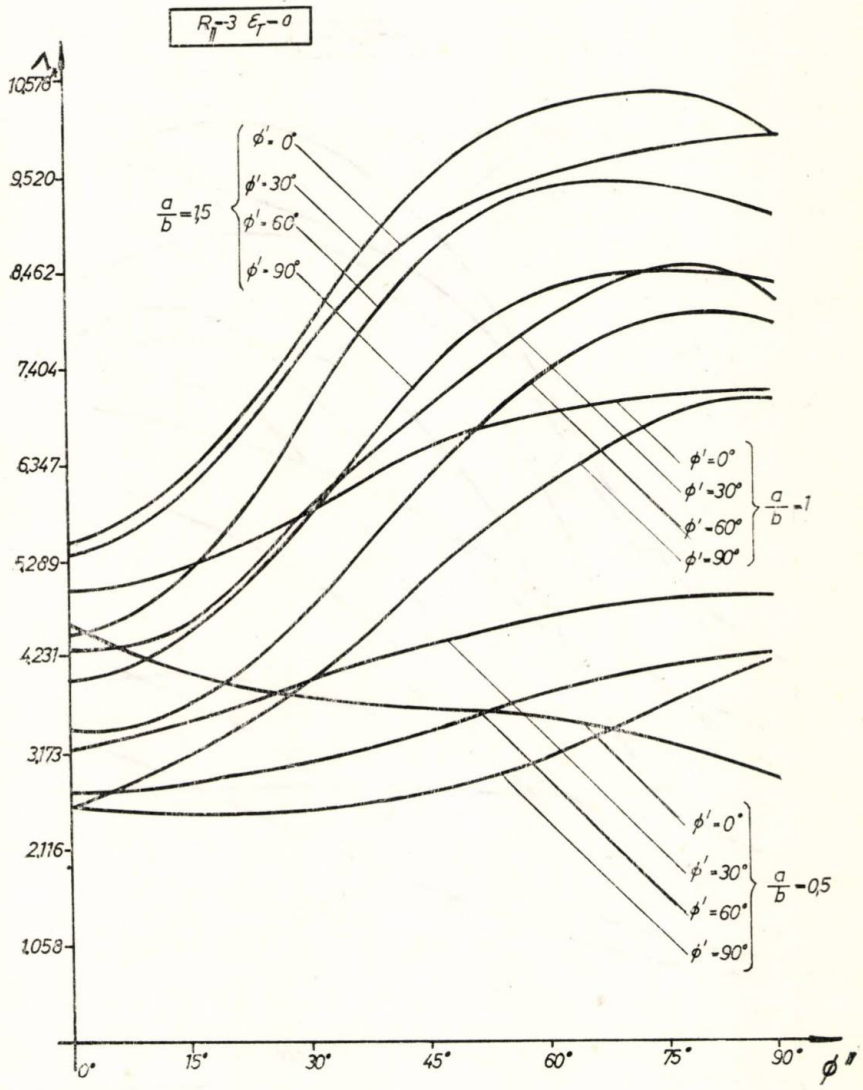

$R_{\parallel}=3$ $\varepsilon_T=0$
Λ
10,578
9,520
8,462
7,404
6,347
5,289
4,231
3,173
2,116
1,058
$\frac{a}{b}=1,5$
$\phi'=0°$
$\phi'=30°$
$\phi'=60°$
$\phi'=90°$
$\frac{a}{b}=1$
$\phi'=0°$
$\phi'=30°$
$\phi'=60°$
$\phi'=90°$
$\frac{a}{b}=0,5$
$\phi'=0°$
$\phi'=30°$
$\phi'=60°$
$\phi'=90°$
0°
15°
30°
45°
60°
75°
90°
$\phi_{//}$

Fig. 2

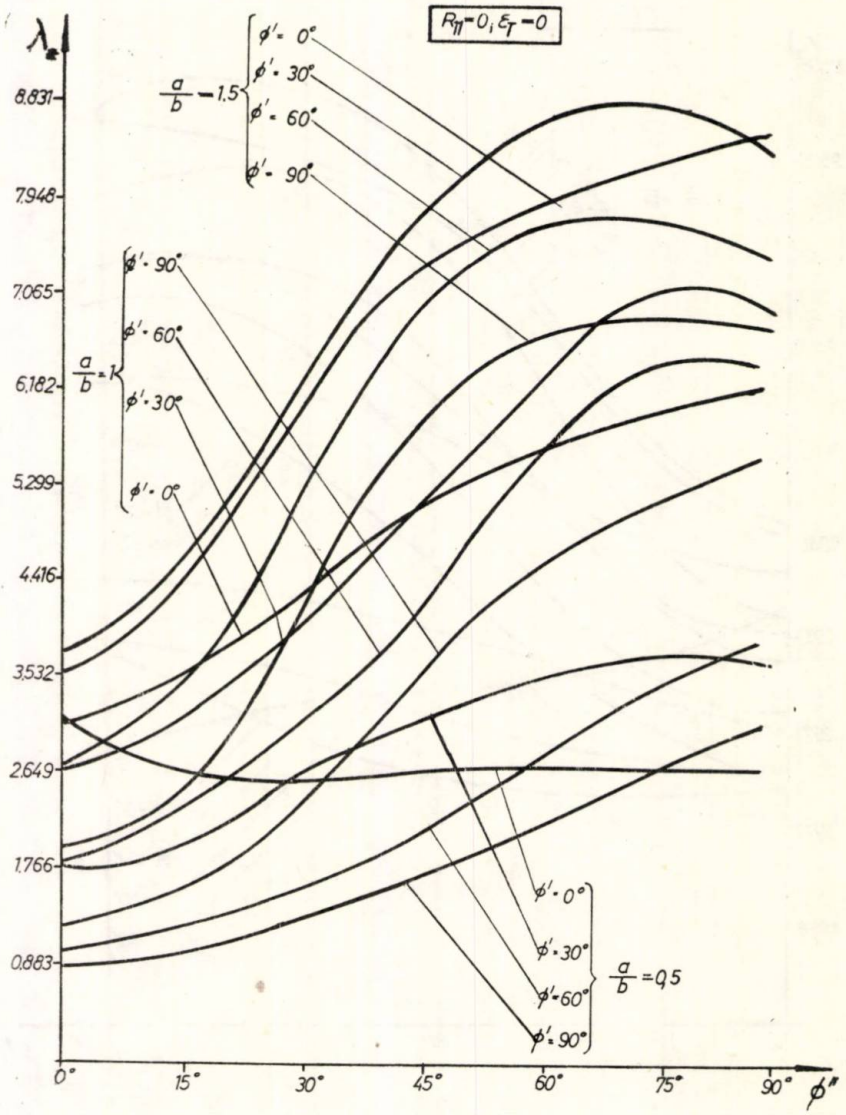

$R_{II}=0, \xi_T=0$
λ_e
8.831
7.948
7.065
6.182
5.299
4.416
3.532
2.649
1.766
0.883
$\frac{a}{b}=1.5$
$\phi'=0°$
$\phi'=30°$
$\phi'=60°$
$\phi'=90°$
$\frac{a}{b}=1$
$\phi'=90°$
$\phi'=60°$
$\phi'=30°$
$\phi'=0°$
$\frac{a}{b}=0.5$
$\phi'=0°$
$\phi'=30°$
$\phi'=60°$
$\phi'=90°$
0°
15°
30°
45°
60°
75°
90°
ϕ''

Fig. 3

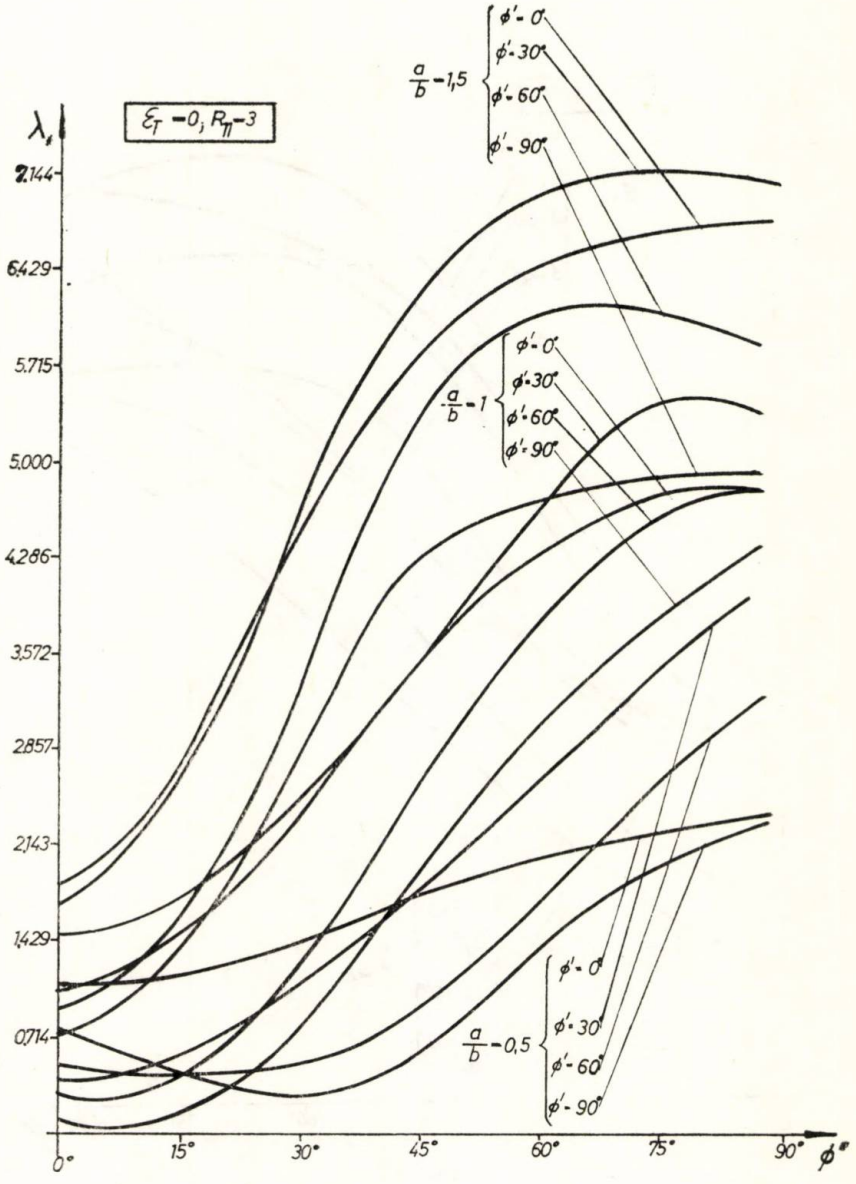
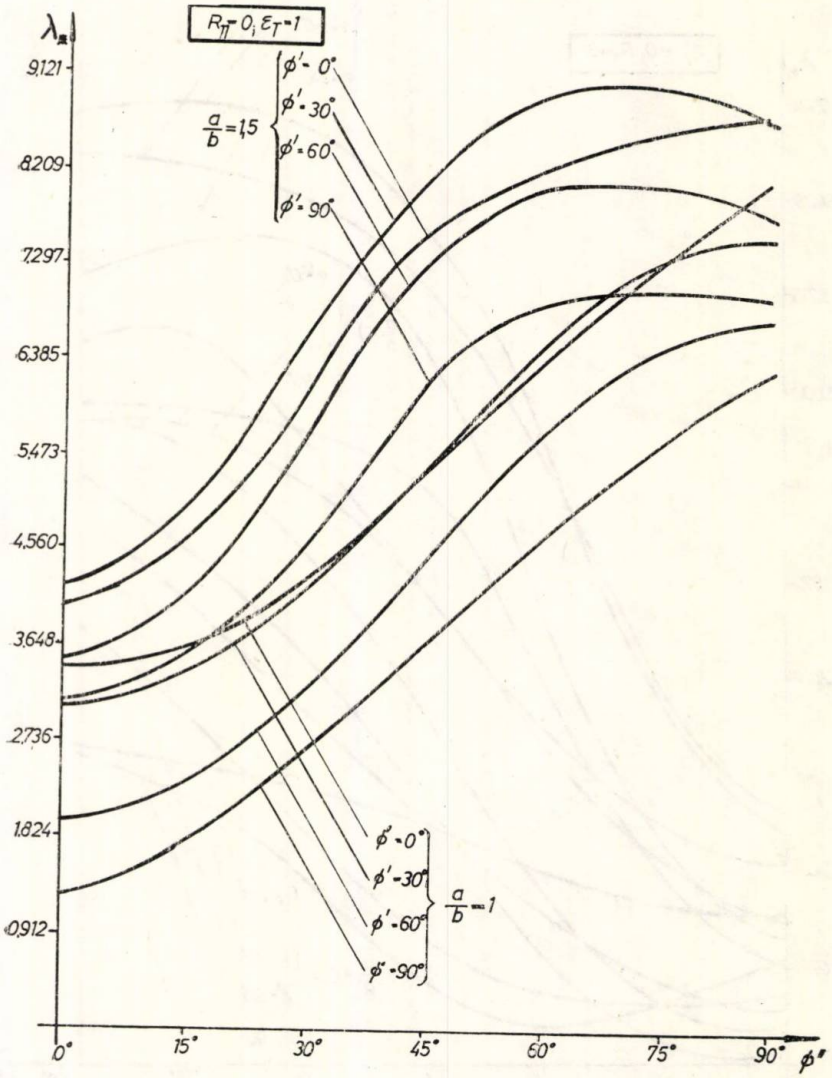
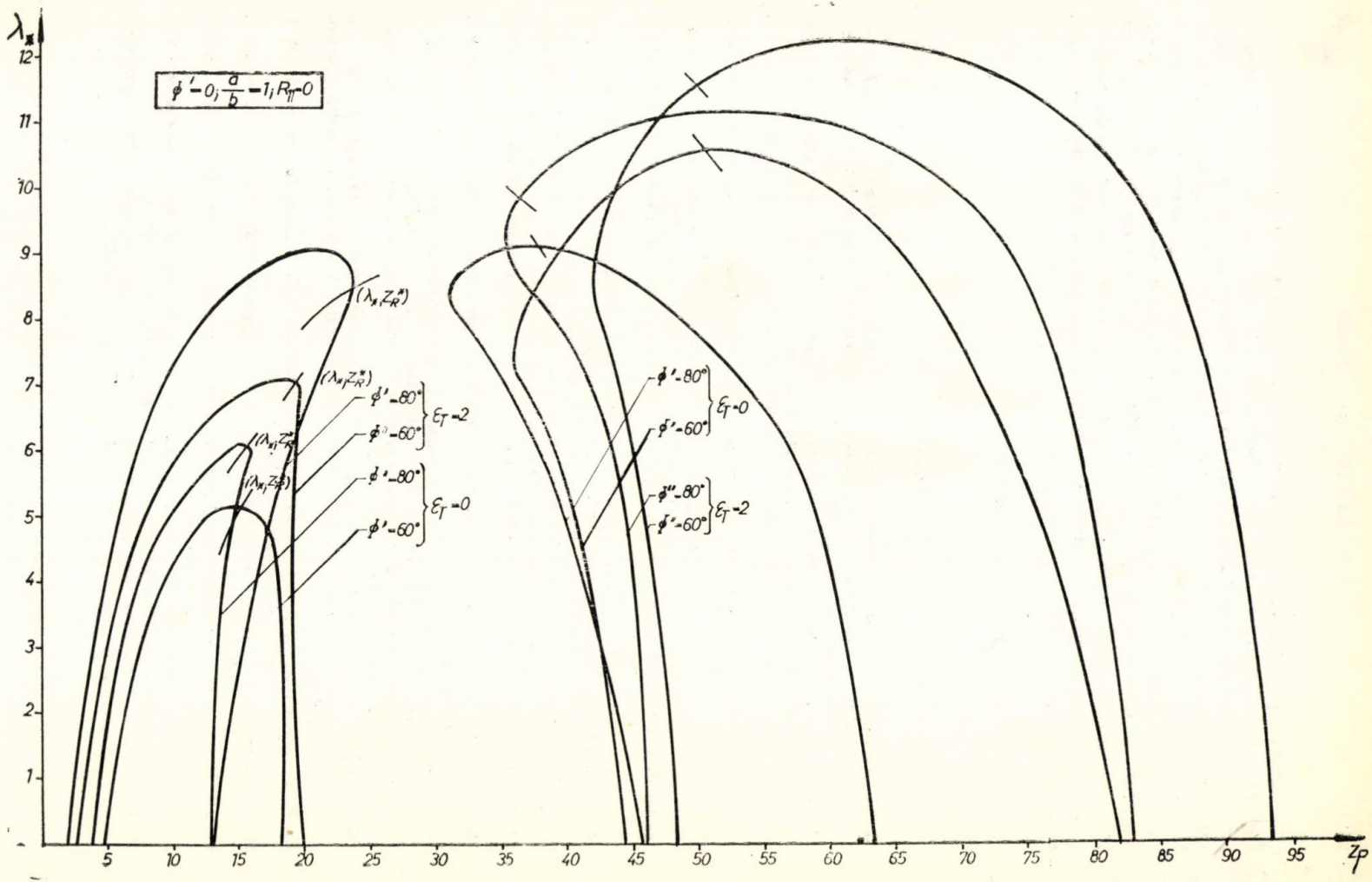

$\varepsilon_T = 0; R_\eta = 3$
λ_s
2.144
6.429
5.715
5.000
4.286
3.572
2.857
2.143
1.429
0.714
$\frac{a}{b} = 1{,}5$
$\frac{a}{b} = 1$
$\frac{a}{b} = 0{,}5$
$\phi' = 0°$
$\phi' = 30°$
$\phi' = 60°$
$\phi' = 90°$
0°
15°
30°
45°
60°
75°
90°
ϕ

Fig. 4



$R_{\Pi}=0;\ \varepsilon_T=1$
$\lambda_{\text{ж}}$
9,121
8,209
7,297
6,385
5,473
4,560
3,648
2,736
1,824
0,912
$\frac{a}{b}=1{,}5$
$\phi'=0°$
$\phi'=30°$
$\phi'=60°$
$\phi'=90°$
$\frac{a}{b}=1$
0°
15°
30°
45°
60°
75°
90°
ϕ''

Fig. 5



$\phi' = 0;\ \frac{a}{b} = 1;\ R_{\pi} = 0$
λ_*
Z_p
(λ_*, Z_R^*)
$\phi' = 80°$
$\phi'' = 60°$
$\varepsilon_T = 2$
$\varepsilon_T = 0$

Fig. 6

Aceleaşi diagrame pun în evidenţă o creştere a vitezei critice de flutter ce corespunde creşterii raportului $\varphi = a/b$; acelaşi lucru rezultă şi în cazul creşterii parametrului de amortizare ε_T. În ceea ce priveşte efectul lui R_{11} asupra vitezei critice de flutter, figurile 2 şi 4 şi, respectiv, fig. 2 şi 3 arată că, în timp ce creşterea sarcinilor de întindere ($R_{11}<0$) este favorabilă, efectul creşterii sarcinilor de compresiune ($R_{11}>0$) este defavorabil. Figura 6 conţine reprezentări ale curbelor de frecvenţă ce pun în evidenţă punctele corespunzînd condiţiilor celor mai critice de flutter, puncte obţinute prin intersecţia curbelor decurgînd din reprezentarea ecuaţiilor $(19)_1$ şi $(19)_2$.

Primită la redacţie la 24 septembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. L. Librescu, Tr. Bădoiu, *Efectul orientării ortotropicităţii în problema flutterului supersonic al structurilor subţiri, eterogene, cilindrice circulare, de lungime infinită*, St. cerc. mec. apl., **31**, *5* (1971).
2. C. W. Bert, B. L. Mayberry, *Free vibrations of unsymetrically laminated anisotropic plates with clamped edges*, J. Composite Materials *3*, 282–293 (1969).
3. J. E. Ashton, *Analysis of Anisotropic Plates II*, J. Composite Materials *3*, 470–479 (1969).
4. J. E. Ashton, M. E. Waddoups, *Analysis of Anisotropic Plates*, J. Composite Materials *3*, 148–165 (1969).
5. J. M. Calligeros, J. Dugundji, *Supersonic Flutter of Rectangular Orthotropic Panels with Arbitrary Orientation of Orthotropicity*, APOSR TR 5328 (1963).
6. D. J. Ketter, *Flutter of Flat Rectangular, Orthotropic Panels*, AIAA Journal **5**, *1*, 116–124 (1967).
7. S. A. Ambartsumian, *Teoria anizotropnih obolocec*, Fizmatghiz, Moskva, (1961).
8. H. L. Bohon, *Flutter of Flat Rectangular Orthotropic Panels with Biaxial Loading and Arbitrary Flow Direction*, NASA TN D-1949 (1963).
9. E. E. Kordes, R. B. Noll, *Theoretical Flutter Analysis of Flat Rectangular Panels in Uniform Coplanar Flow with Arbitrary Direction*, NASA TN D-1156 (1962).
10. A. A. Movcian, *O Kolebaniah plastinki, dvijusceisea v gaze*, Priklad. Matem. i Mehan. **20**, *2* (1956).
11. A. A. Movcian, *Ob ustoicivosti panelei dvijuşcihsea v gaze*, Priklad. Matem. i Mehan. **21**, *2* (1957).
12. H. Krumhaar, *Supersonic Flutter of Circular Cilindrical Shell of Finite Length in an Axisymmetrical Mode*, Int. J. Solids Structures *1*, 23–57 (1965).
13. R. D. Stepanov, *O flattere tilindriceskih obolocek i panelei, dvijuşcihsea v potoke gaza*, Priklad. Matem. i Mehan. **21**, *5* (1957).
14. J. C. Houbolt, *A Study of Several Aerothermoelastic Problems of Aircraft Structures in High-Speed Flight*, *5*, MItt. Inst. Flugzeugstatik Leichthan. Leemann (Zürich) (1958).
15. E. I. Grigoliuk, A. P. Michailov, *Flatter trehsloinoi krugovoi koniceskoi obolociki*, Dokl. AN SSSR, 163, *5*, 1100–1103 (1965).
16. E. H. Dowell, *Flutter of Multibay Panels at High Supersonic Speeds*, AIAA Journal **2**, *10* (1969).
17. Iu. V. Vasiliev, *Sverhzvukovoi flatter ţilindricekih sloistah obolocek*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. **15**, *4* (1970).
18. H. Leipholz, *Ueber den Einfluss der Dämpfung bei nichtkonservativen Stabilitätsproblemen elastischer Stäbe*, Ingenieur-Archiv, **33**, *5*, 308–321 (1969).
19. H. Leipholz, *Grundzüge einer Stabilitätstheorie für elastischer Systeme unter nichtkonservativen Belastung*, Ingenieur-Archiv, *4*, *1*, 56–68 (1965).

O METODĂ DE DETERMINARE A FRECVENȚELOR PROPRII ALE PLĂCILOR CONICE CIRCULARE ÎNCHISE, ÎN IPOTEZA VLASOV-MUȘTARI

de N. GRĂDINARU
Centrul de mecanică a solidelor

Se prezintă o metodă de integrare a sistemului de ecuații în domeniul dinamic al plăcilor conice circulare închise, în ipoteza Vlasov-Mușstari. Metoda se aseamănă cu procedeul de integrare a ecuațiilor de tip Fuchs. Pot fi impuse condiții de margine generale.

1. Vibrațiile libere vor fi considerate ca vibrații de tip armonic, orice cantitate fizică E_f putînd fi dată sub forma $\mathcal{E}_f e^{i\omega t}$.

La plăcile de mică curbură, conform ipotezei Vlasov-Mușstari, va fi neglijată influența forțelor tăietoare și a forțelor de inerție tangențiale în primele două ecuații de echilibru în forțe.

Utilizînd funcția de tensiune c [1] pentru o placă de mică curbură referită la liniile principale de curbură, sistemul general de ecuații în domeniul dinamic se poate reduce la următoarele două ecuații cu derivate parțiale [2]:

$$L(c) - h_0^2 \Delta\Delta W + \Omega^2 W = 0, \tag{1.1}$$

$$L(W) + \Delta\Delta c = 0, \tag{1.2}$$

unde

$$L = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial\beta}\right), \tag{1.3}$$

$$\Delta = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right), \tag{1.4}$$

$$h_0 = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}, \tag{1.5}$$

h fiind semigrosimea plăcii, iar ν — coeficientul lui Poisson,

$$W = 2Eh \cdot w, \tag{1.6}$$

$$\Omega^2 = m\omega^2/2Eh, \tag{1.7}$$

unde

E reprezintă modul de elasticitate,
w — deplasarea după normală la placă,
m — masa unității de suprafață,
A, B — coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței mediane,
$1/R_1, 1/R_2$ — curburile principale după direcțiile α, β.

Pentru placa conică circulară din figură putem adopta următorul sistem de coordonate izoterme:

$$x = r_0 e^{\alpha \sin\psi} \cos\beta\,;\; y = r_0 e^{\alpha \sin\psi} \sin\beta\,;\; z = H_T - r_0(e^{\alpha \sin\psi} - 1)\,\mathrm{ctg}\psi, \tag{1.8}$$

unde

$$r_0 e^{\alpha \sin\psi} = r_0 + \bar{\alpha} \sin\psi. \tag{1.9}$$

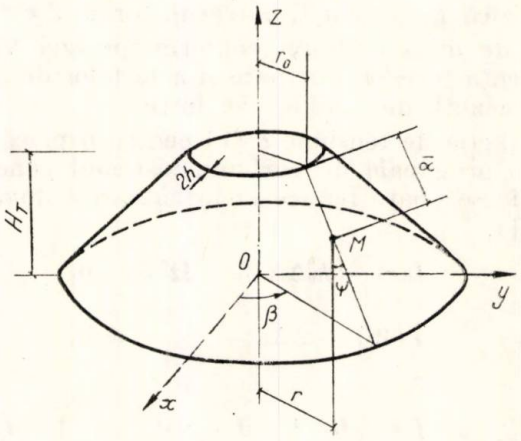


Fig. 1

Coeficienții primei forme fundamentale și curburile principale devin

$$A = B = r_0 e^{\alpha \sin\psi}, \tag{1.10}$$

$$1/R_1 = 0\,;\; 1/R_2 = \cos\psi / r_0 e^{\alpha \sin\psi}. \tag{1.11}$$

Deoarece placa conică circulară pe care o studiem este închisă, putem căuta soluții de forma

$$c = \sum_{n}^{0,\infty} (c_n^1 \cos n\beta + c_n^2 \sin n\beta), \tag{1.12}$$

$$W = \sum_{n}^{0,\infty} (W_n^1 \cos n\beta + W_n^2 \sin n\beta), \tag{1.13}$$

unde c_n^1, c_n^2, W_n^1, W_n^2 sînt funcții numai de α.

Modul de determinare a necunoscutelor c_n^2, W_n^2 este similar cu modul de determinare a necunoscutelor c_n^1, W_n^1. Din cauza aceasta ne limităm numai la acestea din urmă și, în plus, la cazul $n \neq 0$.

Conform cu (1.12) și (1.13) este de ajuns să determinăm soluțiile corespunzătoare celei de a n—a armonici pentru a afla soluția generală.

Adoptăm drept noi necunoscute mărimile

$$f_1 = c_n^1 / r_0, \tag{1.14}$$

$$f_2 = W_n^1. \tag{1.15}$$

2. Ținînd seama de (1.10), (1.11), (1.14), (1.15), sistemul de ecuații (1.1), (1.2) devine

$$\cos\psi\, l(f_1) - \varepsilon^2 m^{(2)}(f_2) + p^2 f_2 = 0, \tag{2.1}$$

$$\cos\psi\, l(f_2) + m^{(2)}(f_1) = 0, \tag{2.2}$$

cu

$$l = e^{-3\varkappa\sin\psi}\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - \sin\psi\frac{d}{d\alpha}\right), \tag{2.3}$$

$$m = e^{-2\varkappa\sin\psi}\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2\right), \tag{2.4}$$

$$\varepsilon = h_0/r_0; \qquad p = \Omega r_0. \tag{2.5}$$

Este ușor de văzut că mărimile ε și p sînt adimensionale, iar necunoscutele f_1 și f_2 au aceeași dimensiune (de forță). Dată fiind structura operatorilor l și m, căutăm necunoscutele sub forma unor dezvoltări în serie de puteri

$$f_1 = e^{\tau\alpha\sin\psi} \sum_{j}^{0,\infty} a_j e^{j\alpha\sin\psi}, \tag{2.6}$$

$$f_2 = e^{\tau\alpha\sin\psi} \sum_{j}^{0,\infty} b_j e^{j\alpha\sin\psi}, \tag{2.7}$$

unde τ este un număr deocamdată nedeterminat.

Introducînd (2.6), (2.7) în (2.1) şi (2.2), obţinem

$$\sum_{j}^{0,\infty} [\cos\psi\, l_j a_j\, e^{(j-3)\alpha\sin\psi} - \varepsilon^2 m_j b_j\, e^{(j-4)\alpha\sin\psi} + p^2 b_j\, e^{j\alpha\sin\psi}] = 0, \tag{2.8}$$

$$\sum_{j}^{0,\infty} [\cos\psi\, l_j b_j\, e^{(j-3)\alpha\sin\psi} + m_j a_j\, e^{(j-4)\alpha\sin\psi}] = 0, \tag{2.9}$$

cu

$$l_j = (j+\tau)(j+\tau-1)\sin^2\psi, \tag{2.10}$$

$$m_j = [(j+\tau)^2 - \lambda_n^2][(j+\tau-2)^2 - \lambda_n^2]\sin^4\psi, \tag{2.11}$$

cu $\lambda_n = n/\sin\psi$.

Identificînd coeficienţii aceloraşi puteri ale lui e, obţinem următorul sistem infinit pentru determinarea coeficienţilor a_j, b_j :

$$m_0 b_0 = 0, \tag{2.12}$$

$$m_0 a_0 = 0, \tag{2.13}$$

$$\cos\psi\, l_i a_i - \varepsilon^2 m_{i+1}\, b_{i+1} = 0, \tag{2.14}$$

$$\cos\psi\, l_i b_i + m_{i+1}\, a_{i+1} = 0 \qquad (i=0,1,2), \tag{2.15}$$

$$\cos\psi\, l_j a_j - \varepsilon^2 m_{j+1}\, b_{j+1} + p^2 b_{j-3} = 0, \tag{2.16}$$

$$\cos\psi\, l_j b_j + m_{j+1}\, a_{j+1} = 0 \qquad (j=3,4,\ldots\infty). \tag{2.17}$$

După cum se vede, nu putem considera $a_0 = b_0 = 0$ deoarece în acest caz toţi coeficienţii a_i, b_i, a_j, b_j vor fi nuli.

Prin urmare, trebuie ca $m_0 = 0$; aceasta ne conduce la patru valori distincte pentru τ, şi anume

$$\tau_{1,2} = \pm\lambda_n, \tag{2.18}$$

$$\tau_{3,4} = 2 \pm \lambda_n. \tag{2.19}$$

Deci pentru fiecare valoare a lui τ vom avea două constante distincte, $a_{0\tau}$ şi $b_{0\tau}$, în funcţie de care se pot exprima toţi ceilalţi coeficienţi $a_{j\tau}$, $b_{j\tau}$ (dată fiind structura sistemului de ecuaţii (2.12) — (2.17)). Aceasta înseamnă de fapt că pentru fiecare valoare a lui τ putem determina două funcţii $f_{1\tau}$, $f_{2\tau}$, care depind doar de două constante distincte.

Deoarece τ prezintă patru valori distincte, înseamnă că c_n^1, W_n^1 vor depinde de opt constante, cu ajutorul cărora pot fi îndeplinite condiţii generale de margine în lungul cercurilor paralele.

Sistemul condiţiilor de margine fiind omogen şi de acelaşi ordin de mărime cu numărul constantelor distincte, anularea determinantului acestui sistem ne va conduce la determinarea frecvenţelor proprii ale celei de a n—a armonici.

3. Mergînd cu soluționarea sistemului (2.12) — (2.17) pînă la $j=4$ și renotînd constantele, obținem următoarele expresii pentru funcția de tensiune c_n^1 și deplasarea după normala plăcii, w_n^1:

$$c_n^1 = 2Ehh_0r_0 \sum_i^{1,4} [A_i\Phi_{1i} - \varepsilon B_i(\Phi_{2i} + K^2\varphi_{12}^i)], \tag{3.1}$$

$$w_n^1 = r_0 \sum_i^{1,4} [A_i(\Phi_{2i} + K^2\varphi_{21}^i) + \varepsilon B_i(\Phi_{1i} + K^2\varphi_{22}^i)], \tag{3.2}$$

cu

$$\Phi_{1i} = \xi^{\tau_i}(1 - t_1t_0\xi^2 + t_3t_2t_1t_0\xi^4), \tag{3.3}$$

$$\Phi_{2i} = t_0\xi^{\tau_i+1}(1 - t_2t_1\xi^2 + t_4t_3t_2t_1\xi^4), \tag{3.4}$$

$$\varphi_{12}^i = t_4\xi^{\tau_i+5}/m_4; \quad \varphi_{21}^i = t_0\xi^{\tau_i+5}/m_5; \quad \varphi_{22}^i = \xi^{\tau_i+4}/m_4 \tag{3.5}$$

și

$$\xi = r/h_0; \; K = \Omega h_0, \tag{3.6}$$

$$t_i = l_i \cos\psi/m_{i+1} \tag{3.7}$$

(constantele A_i, B_i sînt adimensionale).

Primită la redacție la 10 februarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. V. Visarion, *Elemente pentru calculul plăcilor curbe subțiri elastice*, București, Edit. Academiei, 1961.
2. V. V. Bolotin, *Kraevoi effekt pri kolebaniah uprughih obolocek*, PMM, **XXIV**, 5 (1960).

ÎNCOVOIEREA PLĂCILOR PLANE NEMĂRGINITE, COMPUSE DIN DOUĂ MATERIALE ANIZOTROPE

de A. MANOLACHI
Universitatea „Al. I. Cuza" Iaşi

Se studiază problema echilibrului elastic al unei plăci plane subţiri de grosime h, compusă din două materiale omogene anizotrope diferite, în ipoteza că feţele sale sînt acţionate numai cu tensiuni normale, iar frontiera plăcii este încastrată. Presupunîndu-se că fiecare material este cu un plan de simetrie elastică şi utilizînd teoria clasică a plăcilor plane subţiri, se arată că soluţionarea problemei la limită ce caracterizează încovoierea plăcii în condiţiile menţionate se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii integrale singulare a cărui soluţie există şi este unică. Se discută apoi problemele de încovoiere ale unei plăci în cazurile cînd frontiera acesteia este liberă de tensiuni sau este supusă la condiţii de tip mixt.

1. ECUAŢII FUNDAMENTALE

a) Fie D_1 şi D_2 domeniile din secţiunea mediană a plăcii ocupate de cele două materiale care o compun şi L_1, L_0, L_2 frontierele lor. În consideraţiile noastre, L_1 L_2 sînt curbe deschise, iar L_0, comună celor două domenii, este rectilinie şi se identifică cu linia de discontinuitate a omogenităţii plăcii.

Ataşăm plăcii un reper triortogonal cartezian $OxyZ$ avînd axa OZ perpendiculară pe planul median, care, în starea nedeformată, coincide cu planul xOy. Axa Ox se consideră dirijată în lungul liniei L_0.

În acest reper, ecuaţiile liniilor L_1, L_0, L_2 sînt, respectiv, $y = \varphi_1(x)$, $y = 0$, $y = \varphi_2(x)$, iar D_1 şi D_2 sînt domeniile plane:

$$(D_1) \qquad -\infty < x < +\infty, \quad \varphi_1(x) < y < 0,$$

$$(D_2) \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < \varphi_2(x).$$

Toate mărimile din problema noastră vor purta indicele $k=1, 2$, după cum ele se referă, respectiv, la D_1 sau la D_2.

În cele ce urmează vom presupune că L_1 și L_2 sînt curbe simple cu curbură de clasă H și, în plus, satisfac condițiile

$$\Pi_1(0) \leqslant \pi, \quad \Pi_2(0) \leqslant \pi,$$

$$\min |\varphi_1(x)| \gg h, \quad \min |\varphi_2(x)| \gg h, \text{*)}$$

în care $\Pi_1(0)$, $\Pi_2(0)$ sînt unghiurile sub care se văd din origine curbele L_1 și L_2, respectiv.

b) În reperul ales, încovoierea elastică a plăcii este descrisă de ecuația [1], p. 248 :

$$D_{11}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12}^{(k)} + 2D_{66}^{(k)}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ 4D_{26}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y), \tag{1.1}$$

în care $w(x, y)$ este deplasarea în lungul axei OZ a unui punct generic din planul median, $D_{11}^{(k)}, \ldots, D_{66}^{(k)}$ sînt rigiditățile la încovoiere ale plăcii, iar $p(x, y)$ încărcarea normală a fețelor acesteia.

Despre aceasta din urmă vom presupune că este funcție continuă pentru orice $x, y \in D_1 + D_2 + L_0$, iar pentru $|x|, |y| \to \infty$, $|p(x, y)| \to 0$ uniform în raport cu x și y.

Se știe că soluția generală a ecuației (1.1) depinde de rădăcinile ecuației algebrice

$$D_{22}^{(k)} \mu^4 + 4D_{26}^{(k)} \mu^3 + 2(D_{12}^{(k)} + 2D_{66}^{(k)}) \mu^2 + 4D_{16}^{(k)} \mu + D_{11}^{(k)} = 0, \tag{1.2}$$

care sînt întotdeauna complexe, conjugate două cîte două [2]. Notînd cu μ_{k1}, μ_{k2}, $\bar{\mu}_{k1}$, $\bar{\mu}_{k2}$ aceste rădăcini și introducînd variabilele complexe

$$z_{kj} = x + \mu_{kj} y, \quad \bar{z}_{kj} = x + \bar{\mu}_{kj} y$$

$$(\mu_{kj} = \alpha_{kj} + i\beta_{kj}, \ \beta_{kj} > 0, \ i = \sqrt{-1}, \ j = 1, 2), \tag{*}$$

*) Primele două condiții au interpretare geometrică. Ele semnifică faptul că L_1 și L_2 nu interesează L_0 în nici un punct la distanță finită. Impunînd al doilea grup de condiții, se elimină efectul de strat-limită din vecinătatea curbelor L_1, L_2 asupra condițiilor de pe linia L_0.

integrala generală a ecuației (1.1) se poate oricînd exprima în maniera

$$w_k(x, y) = W_k^0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \{w_{k1}(z_{k1}) + w_{k2}(z_{k2})\}, \tag{1.3}$$

dacă $\mu_{k1} \neq \mu_{k2}$, sau

$$w_k(x, y) = W_k^0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \{w_{k1}(z_{k1}) + \bar{z}_{k1} w_{k2}(z_{k1})\}, \tag{1.4}$$

dacă $\mu_{k1} = \mu_{k2}$.

În reprezentările de mai sus, $W_k^0(x, y)$ sînt soluții particulare ale ecuației (1.1), a căror formă depinde de încărcarea $p(x, y)$, iar $w_{kj}(z_{kj})$ sînt funcții arbitrare, analitice de z_{kj} în domeniile D_{kj}, imagini ale domeniilor D_k prin transformările afine (*).

c) De îndată ce funcțiile $W_k^0(x, y)$ și $w_{kj}(z_{kj})$ sînt cunoscute, momentele de încovoiere m_x, m_y, momentul de torsiune m_{xy} și forțele transversale q_x, q_y într-un punct generic al secțiunii mediane a plăcii se calculează cu formulele [1], p. 250 :

$$\begin{aligned}
m_x^{(k)} &= \mathring{m}_x^{(k)} - 2 \operatorname{Re} [p_{k1} W'_{k1}(z_{k1}) + p_{k2} W'_{k2}(z_{k2})], \\
m_y^{(k)} &= \mathring{m}_y^{(k)} - 2 \operatorname{Re} [q_{k1} W'_{k1}(z_{k1}) + q_{k2} W'_{k2}(z_{k2})], \\
m_{xy}^{(k)} &= \mathring{m}_{xy}^{(k)} - 2 \operatorname{Re} [r_{k1} W'_{k1}(z_{k1}) + r_{k2} W'_{k2}(z_{k2})], \\
q_x^{(k)} &= \mathring{q}_x^{(k)} - 2 \operatorname{Re} [\mu_{k1} s_{k1} W''_{k1}(z_{k1}) + \mu_{k2} s_{k2} W''_{k2}(z_{k2})], \\
q_y^{(k)} &= \mathring{q}_y^{(k)} + 2 \operatorname{Re} [s_{k1} W''_{k1}(z_{k1}) + s_{k2} W''_{k2}(z_{k2})],
\end{aligned} \tag{1.5}$$

în care $\mathring{m}_x^{(k)}, \ldots, \mathring{q}_y^{(k)}$ corespund soluției particulare W_k^0 (x, y),

$$W_{kj}(z_{kj}) = \frac{\mathrm{d}w_{kj}}{\mathrm{d}z_{kj}}, \quad W'_{kj}(z_{kj}) = \frac{\mathrm{d}W_{kj}}{\mathrm{d}z_{kj}}, \ldots, \tag{1.6}$$

iar

$$p_{kj} = D_{11}^{(k)} + D_{12}^{(k)} \mu_{kj}^2 + 2 D_{16}^{(k)} \mu_{kj}, \quad s_{kj} = \frac{D_{11}^{(k)}}{\mu_{kj}} + 3 D_{16}^{(k)} + D_{12}^{(k)} + 2 D_{66}^{(k)}) \mu_{kj} + D_{26}^{(k)} \mu_{kj}^2,$$

$$q_{kj} = D_{12}^{(k)} + D_{22}^{(k)} \mu_{kj}^2 + 2 D_{26}^{(k)} \mu_{kj}, \quad s_{kj} - r_{kj} = \frac{p_{kj}}{\mu_{kj}}, \quad s_{kj} + r_{kj} = - q_{kj} \mu_{kj}.$$

$$r_{kj} = D_{16}^{(k)} + D_{26}^{(k)} \mu_{kj}^2 + 2 D_{66}^{(k)} \mu_{kj},$$

2. FORMULAREA PROBLEMEI DE ÎNCOVOIERE

a) În cele ce urmează vom presupune $\mu_{k1} - \mu_{2k}$ *) și existența unor soluții particulare $W_k^0(x, y)$, $(x, y) \in D_k$ ale ecuației (1.1), care, împreună cu derivatele lor pînă la ordinul al doilea inclusiv, sînt continue pe L_k și L_0, hölderiene în toate punctele acestor curbe, iar pentru r suficient de mare

$$W_k^0(x, y) = 0\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.1}$$

În finalul lucrării indicăm două exemple în care condițiile precedente sînt îndeplinite.

Odată găsite $W_k^0(x, y)$, rămîn de determinat perechile de funcții $W_{kj}(z_{kj})$ astfel încît valorile lor limită să satisfacă condițiile date pe frontiera plăcii, precum și condițiile de continuitate geometrice și mecanice pe linia ce separă cele două componente ale plăcii. Ne ocupăm în continuare de aceste condiții.

b) *Condiții la limită.* Considerăm cazul cînd frontiera plăcii este încastrată. Din punct de vedere matematic, aceasta revine la a cere ca

$$w_1(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial n} = 0 \text{ pe } L_1 (y = \varphi_1(x)) \tag{2.2}$$

și

$$w_2(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial n} = 0 \text{ pe } L_2 (y = \varphi_2(x)). \tag{2.3}$$

Egalitățile precedente pot fi înlocuite pînă la o constantă arbitrară, care din punct de vedere mecanic reprezintă o translație prin condițiile

$$\frac{\partial w_1}{\partial s} = \frac{\partial w_1}{\partial n} = 0 \text{ pe } L_1 \text{ și } \frac{\partial w_2}{\partial s} = \frac{\partial w_2}{\partial n} = 0 \text{ pe } L_2. \tag{2.4}$$

În cele din urmă, utilizînd (1.3), (2.4) se exprimă prin valorile la limită ale funcțiilor $W_{kj}(z_{kj})$ sub forma

$$2 \operatorname{Re} [W_{k1}(t_{k1}) + W_{k2}(t_{k2})] = f_k(t_k), \tag{2.5}$$

$$2 \operatorname{Re} [\mu_{k1} W_{k1}(t_{k1}) + \mu_{k2} W_{k2}(t_{k2})] = g_k(t_k), \; t_{kj} \in L_{kj}, \; t_k \in L_k,$$

*) Cînd $\mu_{k1} = \mu_{k2}$, problema poate fi redusă cu ușurință la cazul izotrop printr-o transformare afină [3] sau poate fi rezolvată printr-o modificare neesențială a metodelor folosite în cazul plăcilor izotrope.

unde L_{kj} sînt imaginile curbelor L_k prin transformările afine (*), t_{kj} și t_k sînt afixele unor puncte generice de pe aceste curbe, iar

$$f_k(t_k) = -\frac{\partial W_k^0}{\partial s}, \quad g_k(t_k) = -\frac{\partial W_k^0}{\partial n}, \quad t_k = x + i\varphi_k(x).$$

Alcătuind cu (2.5) combinațiile complexe

$$(1 + i\mu_{k1})\, W_{k1}(t_{k1}) + (1 + i\bar{\mu}_{k1})\overline{W_{k1}(t_{k1})} + (1 + i\mu_{k2}) W_{k2}(t_{k2}) +$$

$$+ (1 + i\bar{\mu}_{k2})\overline{W_{k2}(t_{k2})} = f_k(t_k) + i g_k(t_k)$$

și eliminînd între acestea și conjugatele lor funcțiile $\overline{W_{k2}(t_{k2})}$, obținem o formă echivalentă a condițiilor (2.5):

$$W_{k2}(t_{k2}) + a_k W_{k1}(t_{k1}) + b_k \overline{W_{k1}(t_{k1})} = F_k(t_k) \text{ pe } L_k, \tag{2.5'}$$

utilă în cele ce urmează și în care

$$a_k = \frac{\bar{\mu}_{k2} - \mu_{k1}}{\bar{\mu}_{k2} - \mu_{k2}}, \quad b_k = \frac{\bar{\mu}_{k2} - \bar{\mu}_{k1}}{\bar{\mu}_{k2} - \mu_{k2}}, \quad F_k(t_k) = \frac{\bar{\mu}_{k2} f_k(t_k) - g_k(t_k)}{\bar{\mu}_{k2} - \mu_{k2}}.$$

c) *Condiții de continuitate.* În afară de condițiile (2.5) vom cere ca funcțiile $w_k(x, y)$ să satisfacă și condițiile ce exprimă analitic faptul că de-a lungul liniei L_0 nu se produc discontinuități în cursul deformării plăcii. Aceste condiții implică egalitățile

$$w_1(x, 0) = w_2(x, 0), \qquad \left[\frac{\partial w_1}{\partial y}\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial w_2}{\partial y}\right]_{y=0},$$

$$m_y^{(1)}(x, 0) = m_y^{(2)}(x, 0), \quad \bar{q}_y^{(1)}(x, 0) = \bar{q}_y^{(2)}(x, 0), \tag{2.6}$$

unde $\bar{q}_y^{(k)} = q_k^{(k)} + \frac{\partial m_{xy}^{(k)}}{\partial x}$ sînt forțele transversale generalizate.

Urmînd un raționament similar cu cel de mai sus, vom înlocui condițiile (2.6) prin

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad y = 0,$$

$$\int^x m_y^{(1)}(\xi, 0)\, d\xi = \int^x m_y^{(2)}(\xi, 0)\, d\xi,$$

$$\int^x \int^\xi \bar{q}_y^{(1)}(\eta, 0)\, d\eta d\xi = \int^x \int^\xi \bar{q}_y^{(2)}(\eta, 0)\, d\eta d\xi.$$

Ţinînd acum seama de (1.3) şi (1.5), din precedentele obţinem cel de-al doilea grup de condiţii pe care trebuie să le satisfacă valorile-limită ale funcţiilor necunoscute $W_{kj}(z_{kj})$:

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re}\,[W_{11}(x) + W_{12}(x)] &= 2\,\mathrm{Re}\,[W_{21}(x) + W_{22}(x)] + h_1(x),\\
2\,\mathrm{Re}\,([\mu_{11}W_{11}(x) + \mu_{12}W_{12}(x)] &= 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_{21}W_{21}(x) +\\
&\quad + \mu_{22}W_{22}(x)] + h_2(x), \qquad (2.7)\\
2\,\mathrm{Re}\,[q_{11}W_{11}(x) + q_{12}W_{12}(x)] &= 2\,\mathrm{Re}\,[q_{21}W_{21}(x) +\\
&\quad + q_{22}W_{22}(x)] + h_3(x),\\
2\,\mathrm{Re}\,[m_{11}W_{11}(x) + m_{12}W_{12}(x)] &= 2\,\mathrm{Re}\,[m_{21}W_{21}(x) +\\
&\quad + m_{22}W_{22}(x)] + h_4(x),\ x \in L_0,
\end{aligned}$$

în care am notat

$$h_1(x) = \left[\frac{\partial W_2^0}{\partial x}\right]_{y=0} - \left[\frac{\partial W_1^0}{\partial x}\right]_{y=0},\ h_2(x) = \left[\frac{\partial W_2^0}{\partial y}\right]_{y=0} - \left[\frac{\partial W_2^0}{\partial y}\right]_{y=0},$$

$$h_3(x) = \int^x \mathring{m}_y^{(1)}(\xi, 0) - \mathring{m}_y^{(2)}(\xi, 0)]\,\mathrm{d}\xi,$$

$$h_4(x) = \int^x \int^\xi [\mathring{q}_y^{(1)}(\eta, 0) - \mathring{q}_y^{(2)}(\eta, 0)]\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi,\ m_{kj} = \frac{p_{kj}}{\mu_{kj}}.$$

Acum, problema matematică ce caracterizează fenomenul fizic al deformării plăcii revine la *determinarea a patru funcţii* $W_{kj}(z_{kj})$, *analitice şi uniforme în domeniile* D_{kj}, *ale căror valori-limită satisfac condiţiile* (2.5) *şi* (2.7), *iar la infinit se anulează.*

d) *Observaţii.* 1. Ultima condiţie poate fi întotdeauna îndeplinită, deoarece în problema pe care o studiem funcţiile $W_{kj}(z_{kj})$ se determină pînă la o constantă arbitrară care se poate alege astfel încît $W_{kj}(\infty) = 0$ [4], p. 344, 39.

2. Deoarece, prin ipoteză, tensiunile ce acţionează asupra plăcii la infinit sînt nule, funcţiile $W_{kj}(z_{kj})$ trebuie să aibă, pentru $|z_{kj}|$ suficient de mare, forma [4], p. 345

$$W_{kj}(z_{kj}) = 0\left(\frac{1}{z_{kj}}\right). \qquad (2.8)$$

3. Din cele de mai sus şi din (2.1), (1.6), (1.3) urmează că derivatele de ordinul al doilea ale funcţiilor $w_k(x, y)$ au la infinit ordinul de mărime $\frac{1}{r^2}$. Aceeaşi comportare la infinit o au momentele de încovoiere, momentele de torsiune şi forţele generalizate (1.5).

e) TEOREMĂ. *Soluția problemei la limită* (1.1), (2.5), (2.7) *este unică.*

Demonstrație. Fie w_{1k} și w_{2k} două soluții ale acestei probleme care satisfac condițiile menționate în secțiunea precedentă. Atunci, funcțiile $V_k(x, y) = w_{1k} - w_{2k}$ satisfac, în D_k (1.1) (cu $p(x, y) = 0$) și pe L_k, L_0 condițiile (2.2), (2.3), (2.6) omogene. În virtutea acestora și a observației 3 este lesne de obținut, folosind formula lui Green, egalitatea

$$2\sum_{k=1}^{2}\int_{D_k} E(V_k)\,\mathrm{d}S_k = \sum_{k=1}^{2}\int_{L_k}\left(V_k\overline{Q}_n^{(k)} - \frac{\partial V_k}{\partial n}M_n^{(k)}\right)\mathrm{d}s_k + \\ + \int_{L_0}\left[(V_1 - V_2)Q_n^{(1)} - (M_n^{(1)} - M_n^{(2)})\frac{\partial V_2}{\partial n}\right]\mathrm{d}x, \qquad (2.9)$$

în care $E(V_k)$ sînt energiile de deformare raportate la unitatea de suprafață mediană pentru mediile ce ocupă domeniile D_k, iar $\overline{Q}_n^{(k)}$, $M_n^{(k)}$ sînt forțele transversale generalizate, respectiv momentele de încovoiere, calculate cu funcțiile $V_k(x, y)$, [1], p. 247.

În baza condițiilor la limită și de continuitate, egalitatea (2.9) se reduce la

$$2\sum_{1}^{2}\int_{D_k} E(V_k)\,\mathrm{d}S_k = 0,$$

de unde, $E(V_k)$ fiind forme pătratice pozitiv definite în derivatele de ordinul al doilea ale funcțiilor V_k, deducem că acestea din urmă trebuie să fie liniare în x și y. În plus, deoarece V_k se anulează pe L_k și satisfac pe L_0 condițiile (2.5), urmează $V_1 = V_2 = 0$ peste tot în D_k și deci $w_{1k} = w_{2k}$. QED.

3. SOLUȚIA PROBLEMEI

a) Rezolvări ale unor probleme particulare de încovoiere a plăcilor plane compuse din mai multe materiale au fost date în [1], [4], [5], prin metoda seriilor de puteri, a transformărilor integrale etc. Deoarece asemenea procedee nu sînt aplicabile în cazul nostru, pentru găsirea soluției vom folosi metoda reducerii la ecuații integrale, care ne oferă în același timp și o teoremă de existență. În acest scop căutăm funcțiile necunoscute $W_{kj}(z_{kj})$ sub forma

$$W_{k1}(z_{k1}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_{k_1}}\frac{\omega_k(t_k)}{t_{k1} - z_{k1}}\,\mathrm{d}t_k + \\ + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(\mu_{k2} - \mu_{k1})}\int_{L_0}\frac{\mu_{k2}\overline{\omega}_k(u) - \sigma_k(u)}{u - z_{k1}}\,\mathrm{d}u, \qquad (3.1)$$

$$W_{k2}(z_{k2}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_{k2}}\frac{b_k\omega_k(t_k) - a_k\omega_k(t_k)}{t_{k2} - z_{k2}}\,\mathrm{d}t_k + \\ + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(\mu_{k2} - \mu_{k1})}\int_{L_0}\frac{\sigma_k(u) - \mu_{k1}\overline{\omega}_k(u)}{u - z_{k2}}\,\mathrm{d}u, \qquad (3.2)$$

unde a_k şi b_k sînt constantele din (2.5'),

$$t_{kj} \in L_{kj},\ t_k \in L_k,\ u \in L_0,$$

iar $\omega_k(t_k)$, $\varpi_k(u)$, $\sigma_k(u)$ sînt funcţii necunoscute (ω_k — complexe, ϖ_k şi σ_k — reale) care satisfac următoarele condiţii :

(*) sînt continue împreună cu primele lor derivate pe L_k, L_0 şi hölderiene în orice punct la distanţă finită pe aceste curbe,

(**) $t_k\omega_k(t_k)$, $u\varpi_k(u)$, $u\sigma_k(u)$, $t_k^2\omega_k'(t_k)$, $u^2\varpi_k'(u)$, $u^2\sigma_k'(u)$ sînt hölderiene în vecinătatea punctului de la infinit.

Se poate vedea uşor că dacă condiţiile precedente sînt îndeplinite, atunci funcţiile $W_{kj}(z_{kj})$ date de (3.1), (3.2) şi derivatele acestora $W_{kj}'(z_{kj})$ sînt continue pe L_{kj} şi L_0, iar la infinit au ordinul de mărime specificat în (2).

b) Să stabilim acum ce ecuaţii trebuie să satisfacă noile funcţii necunoscute, astfel ca (3.1) şi (3.2) să verifice (2.5) şi (2.7) sau, ceea ce este acelaşi lucru, (2.5') şi (2.7).

În acest scop introducem mai întîi valorile la limită ale funcţiilor $W_{kj}(z_{kj})$ calculate cu ajutorul formulelor lui Plemelj [6], p. 109 în (2.5') şi ţinem seama că atunci cînd $z_{kj} \to t_{kj}^0 \in L_{kj}(z_{kj} \in D_{kj})$, $z \to t_k \in L_k(z \in D_k)$. După efectuarea calculelor, obţinem, pentru determinarea funcţiilor $\omega_k(t_k)$, ecuaţiile integrale Fredholm de specia a doua :

$$\overline{\omega_k(t_k^0)} + \frac{a_k}{2\pi i b_k}\int_{L_k} \omega_k(t_k)\,\mathrm{dln}\,\frac{t_{k1}-t_{k1}^0}{t_{k2}-t_{k2}^0} - \frac{1}{2\pi i}\,\overline{\omega_k(t_k)}\,\mathrm{dln}\,\frac{\bar{t}_{k1}-\bar{t}_{k1}^0}{t_{k2}-t_{k2}^0} +$$

$$+ \mathcal{A}_k^*[t_k^0;\ \omega_k,\ \sigma_k] = F_k(t_k^0), \tag{3.3}$$

unde $\mathcal{A}_k^*[\ldots]$ sînt operatorii integrali :

$$\mathcal{A}_k^*[t_k^0;\ \varpi_k,\ \sigma_k] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\left[\frac{\mu_{k2}a_k}{(\mu_{k2}-\mu_{k1})(u-t_{k1}^0)} - \frac{\bar{\mu}_{k2}b_k}{(\bar{\mu}_{k2}-\bar{\mu}_{k1})(u-\bar{t}_{k1}^0)} -\right.$$

$$\left. - \frac{\mu_{k1}}{(\mu_{k2}-\mu_{k1})(u-t_{k2}^0)}\right]\varpi_k(u)\,du + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\left[\frac{1}{(\mu_{k2}-\mu_{k1})(u-t_{k2}^0)} -\right.$$

$$\left. - \frac{a_k}{(\mu_{k2}-\mu_{k1})(u-t_{k1}^0)} + \frac{b_k}{(\bar{\mu}_{k2}-\bar{\mu}_{k1})(u-\bar{t}_{k1}^0)}\right]\sigma_k(u)\,du,$$

în care trebuie să punem $2t_{kj}^0 = (1-i\mu_{kj})\,t_k^0 + (1+i\mu_{kj})\,\bar{t}_k^0$.

Dacă funcţiile ϖ_k şi σ_k ar fi cunoscute, atunci rezolvînd (3.3) am putea determina funcţiile $\omega_k(t_k)$ şi apoi, în mod unic, funcţiile $W_{kj}(z_{kj})$ prin formulele (3.1) şi (3.2).

Pentru a găsi pe $\widetilde{\omega}_k$ și σ_k, vom impune ca $W_{kj}(z_{kj})$ să satisfacă și condițiile de continuitate (2.7). Trecînd la valori-limită pentru $z_{kj} \to x \in L_0$, $(z_{kj} \in D_{kj})$ în (3.1), (3.2), introducînd cele obținute în (2.7) și folosind egalitățile

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{m_{k1}\mu_{k2} - m_{k2}\mu_{k1}}{\mu_{k2} - \mu_{k1}}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{q_{k1} - q_{k2}}{\mu_{k2} - \mu_{k1}}\right\} = 0,$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{m_{k1} - m_{k2}}{\mu_{k2} - \mu_{k1}}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{q_{k1}m_{k2} - q_{k2}m_{k1}}{\mu_{k2} - \mu_{k1}}\right\},$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{q_{k1}\mu_{k2} - q_{k2}\mu_{k1}}{\mu_{k2} - \mu_{k1}}\right\} = -\operatorname{Re}\left\{\frac{m_{k1} - m_{k2}}{\mu_{k2} - \mu_{k1}}\right\},$$

care se obțin cu ușurință din (1.5), deducem că funcțiile $\widetilde{\omega}_k$ și σ_k trebuie să reprezinte soluția sistemului de ecuații integrale singulare:

$$a_{rs}\widetilde{\omega}_j(x) + b_{rs}\,\sigma_s(x) + \frac{c_{rs}}{\pi}\int_{L_0}\frac{\widetilde{\omega}_s(u)}{u - x}\,\mathrm{d}u +$$

$$+\frac{d_{rs}}{\pi}\int_{L_0}\frac{\sigma_s(u)}{u - x}\,\mathrm{d}u + \mathcal{B}_r[x;\ \omega_1, \omega_2] = h_r(x), \tag{3.4}$$

$$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ s = 1,\ 2,$$

în care

$$a_{11} = -b_{11} = 1,\ a_{12} = b_{12} = c_{1s} = d_{1s} = 0,$$

$$a_{21} = b_{21} = c_{2s} = d_{2s} = 0,\ a_{22} = -b_{22} = 1,$$

$$a_{31} = \operatorname{Re}\left\{\frac{q_{11}\mu_{12} - q_{12}\mu_{11}}{\mu_{12} - \mu_{11}}\right\},\quad b_{31} = \operatorname{Re}\left\{\frac{q_{21}\mu_{22} - q_{22}\mu_{21}}{\mu_{22} - \mu_{21}}\right\},\ a_{32} = b_{32} = 0,$$

$$c_{31} = \operatorname{Im}\left\{\frac{q_{11}\mu_{12} - q_{12}\mu_{11}}{\mu_{12} - \mu_{11}}\right\},\quad d_{31} = \operatorname{Im}\left\{\frac{q_{21}\mu_{22} - q_{22}\mu_{21}}{\mu_{22} - \mu_{21}}\right\},$$

$$c_{32} = \operatorname{Im}\left\{\frac{q_{12} - q_{11}}{\mu_{12} - \mu_{11}}\right\},\qquad d_{32} = \operatorname{Im}\left\{\frac{q_{22} - q_{21}}{\mu_{22} - \mu_{21}}\right\},$$

$$a_{41} = b_{41} = 0,\ a_{42} = a_{31},\qquad b_{42} = b_{31},\ c_{42} = -c_{31},\ d_{42} = -d_{31},$$

$$c_{41} = \operatorname{Im}\left\{\frac{m_{11}m_{12} - m_{12}m_{11}}{\mu_{12} - \mu_{11}}\right\},\quad d_{41} = \operatorname{Im}\left\{\frac{m_{21}\mu_{22} - m_{22}\mu_{21}}{\mu_{22} - \mu_{21}}\right\},$$

$$\mathcal{B}_r[x;\ \omega_1,\ \omega_2] = \operatorname{Re}\left\{\frac{K_r^{(1)}}{\pi i}\int_{L_{11}}\frac{\omega_1(t_1)}{t_{11}-x}\,dt_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{M_r^{(1)}}{\pi i}\int_{L_{12}}\frac{b_1\overline{\omega_1(t_1)} - a_1\omega_1(t_1)}{t_{12}-x}\,dt_1\right\} - \operatorname{Re}\left\{\frac{K_r^{(2)}}{\pi i}\int_{L_{21}}\frac{\omega_2(t_2)}{t_{21}-x}\,dt_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{M_r^{(2)}}{\pi i}\int_{L_{22}}\frac{b_2\overline{\omega_2(t_2)} - a_2\omega_2(t_2)}{t_{22}-x}\,dt_2\right\},$$

$$K_1^{(1)} = K_1^{(2)} = M_1^{(1)} = M_1^{(2)} = 1,$$

$$K_2^{(1)} = \mu_{11},\ K_2^{(2)} = \mu_{21},\ M_2^{(1)} = \mu_{12},\ M_2^{(2)} = \mu_{22},$$

$$K_3^{(1)} = q_{11},\ K_3^{(2)} = q_{21},\ M_3^{(1)} = q_{12},\ M_3^{(2)} = q_{22},$$

$$K_4^{(1)} = m_{11},\ K_4^{(2)} = m_{21},\ M_4^{(1)} = m_{12},\ M_4^{(2)} = m_{22}.$$

Rezultă deci că W_{kj} vor satisface egalităţile (2.5), (2.7) de îndată ce funcţiile ω_k, $\overline{\omega}_k$ şi σ_k satisfac sistemul de ecuaţii integrale singulare compus din (3.3) şi (3.4).

Introducînd, pentru simplificarea scrierii, matricele

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \overline{\omega}_1 \\ \overline{\omega}_2 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix},\qquad \boldsymbol{T}(\tau;\ \omega) = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_3 \\ \mathcal{B}_4 \end{Vmatrix},\qquad \boldsymbol{F} = \begin{Vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & -b_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & 0 & -b_{31} \end{Vmatrix},\quad \boldsymbol{B} = i\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & d_{31} & d_{32} \\ 0 & 0 & c_{41} & -c_{31} & d_{41} & -d_{31} \end{Vmatrix}, \qquad (3.5)$$

unde

$$\mathcal{A}_k = \frac{a_k}{2\pi i b_k}\int_{L_k} \omega_k(t_k)\,\mathrm{dln}\,\frac{t_{k1}-t_{k1}^0}{t_{k2}-t_{k2}^0} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \overline{\omega_k(t_k)}\,\mathrm{dln}\,\frac{\bar{t}_{k1}-\bar{t}_{k2}^0}{t_{k2}-t_{k2}^0} + \mathcal{A}_k^*\,[\ldots],$$

sistemul în chestiune se scrie sub forma

$$A\,\omega(\tau) + \frac{B}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega(u)}{u-\tau}\,du + \boldsymbol{T}(\tau;\,\omega) = \boldsymbol{F}(\tau),\quad \tau = \begin{cases} t_k^0 \text{ pe } L_k \\ x \text{ pe } L_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

în care $\boldsymbol{T}(\tau;\,\omega)$ este un operator vectorial de tip Fredholm.

Să observăm că în baza ipotezelor făcute asupra funcţiilor $W_k^0(x, y)$ (secţiunea 2, pct. a), vectorul $\boldsymbol{F}$ şi derivata sa $\boldsymbol{F}'$ sînt de clasă H pe domeniile lor de existenţă în orice punct la distanţa finită, iar produsele $\tau\boldsymbol{F}(\tau)$, $\tau^2\boldsymbol{F}'(\tau)$ sînt hölderiene la infinit. De aici deducem în mod direct, ţinînd seama de structura operatorului $\boldsymbol{T}(x;\,\omega)$, că soluţia $\omega(\tau)$ a ecuaţiei (3.6) satisface condiţiile (*) şi (**) şi deci funcţiile $W_{kj}(z_{kj})$ calculate cu această soluţie sînt regulate în sensul arătat în (2).

4. EXISTENŢA ŞI UNICITATEA SOLUŢIEI SISTEMULUI (3.6)

Proprietăţile soluţiei sistemului de ecuaţii integrale (3.6) depind de matricele A şi B, care intervin în partea caracteristică a acestuia. Calculînd determinanţii matricelor fundamentale [6], p. 412, 414,

$$S = A + iB,\quad D = A - iB,$$

şi indicele sistemului

$$n = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det S}{\det D}\right]_{-\infty}^{+\infty},$$

găsim

$$\det S\,(=\det D) = (a_{31}-b_{31})^2 + (c_{31}+d_{31})^2 +$$

$$+ (c_{32}+d_{32})(c_{41}+d_{41}) > 0 \text{ şi } n = 0,$$

ceea ce ne permite să studiem existenţa şi unicitatea soluţiei acestuia cu ajutorul teoremei lui Fredholm.

TEOREMĂ. *Sistemul de ecuaţii integrale*

$$A\,\omega(\tau) + \frac{B}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega(u)}{u-\tau}\,du + \boldsymbol{T}(\tau;\,\omega) = 0 \tag{4.1}$$

admite numai soluţia $\omega(\tau) \equiv 0$.

Demonstrație. Să presupunem că $\omega^0(\overline{\omega_1^0}, \overline{\omega_2^0}\overline{\omega}_1^0, \overline{\omega}_2^0, \sigma_1^0, \sigma_2^0)$ este o soluție a sistemului (4.1), regulată în sensul arătat în (3). Atunci ea determină prin (3.1) și (3.2) un sistem de funcții analitice și uniforme în D_{kj} — să le notăm $W_{kj}^0(z_{kj})$ — ale căror valori-limită există și satisfac egalitățile

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\,[W_{k1}^0(t_{k1}) + W_{k2}^0(t_{k2})] = 0,\\
&\operatorname{Re}\,[\mu_{k1}W_{k1}^0(t_{k1}) + \mu_{k2}W_{k2}^0(t_{k2})] = 0,\\
&2\operatorname{Re}\,[W_{11}^0(x) + W_{12}^0(x)] = 2\operatorname{Re}\,[W_{21}^0(x) + W_{22}^0(x)],\\
&2\operatorname{Re}\,[\mu_{11}W_{11}^0(x) + \mu_{12}W_{12}^0(x)] = 2\operatorname{Re}\,[\mu_{21}W_{21}^0(x) + \mu_{22}W_{22}^0(x)], \qquad (4.2)\\
&2\operatorname{Re}\,[q_{11}W_{11}^0(x) + q_{12}W_{12}^0(x)] = 2\operatorname{Re}\,[q_{21}W_{21}^0(x) + q_{22}W_{22}^0(x)],\\
&2\operatorname{Re}\,[m_{11}W_{11}^0(x) + m_{12}W_{12}^0(x)] = 2\operatorname{Re}\,[m_{21}W_{21}^0(x) + m_{22}W_{22}^0(x)].
\end{aligned}$$

Cum (4.2) reprezintă condițiile la limită ce corespund problemei de încovoiere a unei plăci plane, compusă din două materiale omogene anizotrope încastrată de-a lungul frontierei și acționată pe fețe și la infinit cu tensiuni nule, trebuie să avem în mod necesar

$$W_{kj}^0(z_{kj}) \equiv 0 \text{ pentru } z_{kj} \in D_{kj}. \qquad (4.3)$$

Ținînd seama de (4.3), din (3.1) și (3.2) deducem:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{k1}} \frac{\omega_k^0(t_k)}{t_{k1} - z_{k1})}\,dt_k + \frac{1}{2\pi i\,(\mu_{k2} - \mu_{k1})}\int_{L_0} \frac{\mu_{k2}\overline{\omega}_k^0(u) - \sigma_k^0(u)}{u - z_{k1}}\,du = 0,\\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{k2}} \frac{b_k\omega_k^0(t_k) - a_k\omega_k^0(t_k)}{t_{k2} - z_{k2}}\,dt_k +\\
&\quad + \frac{1}{2\pi i\,(\mu_{k2} - \mu_{k1})}\int_{L_0} \frac{\sigma_k^0(u) - \mu_{k1}\overline{\omega}_k^0(u)}{u - z_{k2}}\,du = 0. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Să punem acum în (4.4) $k = 1$, să notăm cu S^+ și S^- semiplanele $y > 0$ și, respectiv, $y < 0$ și să introducem funcțiile

$$\begin{aligned}
\varphi_{11}(z_{11}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{11}} \frac{\omega_1^0(t_1)}{t_{11} - z_{11}}\,dt_1,\\
\varphi_{12}(z_{12}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{12}} \frac{b_1\overline{\omega_1^0(t_1)} - a_1\omega_1^0(t_1)}{t_{12} - z_{12}}\,dt_1, \qquad (4.5)\\
-\Psi_{11}(z_{11}) &= \frac{1}{2\pi i\,(\mu_{12} - \mu_{11})}\int_{L_0} \frac{\mu_{12}\overline{\omega}_1^0(u) - \sigma_1^0(u)}{u - z_{11}}\,du,\\
-\Psi_{12}(z_{12}) &= \frac{1}{2\pi i\,(\mu_{12} - \mu_{11})}\int_{L_0} \frac{\sigma_1^0(u) - \mu_{11}\overline{\omega}_1^0(u)}{u - z_{12}}\,du. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Avem, din (4.4),

$$\varphi_{11}(z_{11}) = \Psi_{11}(z_{11}),\ \varphi_{12}(z_{12}) = \Psi_{12}(z_{12}) \text{ pentru } z_{1j} \in D_{1j}.$$

Deoarece funcţiile φ_{1j} şi Ψ_{1j} sînt olomorfe în punctele curbelor L_0 şi, respectiv, L_{1j}, egalităţile precedente se prelungesc analitic în S^+ şi, respectiv, în $S^- - D_{1j}$. Cum în S^+ $\Psi_{1j}(z_{1j}) = 0$, iar în $S^- - D_{1j}$ $\varphi_{1j}(z_{1j}) = 0$, vom avea succesiv $\varphi_{1j}(z_{1j}) = 0$ dacă $z_{1j} \in S^+$ şi $\Psi_{1j}(z_{1j}) = 0$ dacă $z_{1j} \in S^- - D_{1j}$. Din acestea şi din analiticitatea funcţiilor φ_{1j} şi Ψ_{1j} în domeniile lor de definiţie decurge

$$\varphi_{1j}(z_{1j}) = 0 \text{ pentru } z_{1j} \in S^+ + D_{1j}, \tag{4.7}$$

$$-\Psi_{1j}(z_{1j}) = 0 \text{ pentru } z_{1j} \in S^+. \tag{4.8}$$

Punînd în (4.4) $k=2$ şi introducînd de data aceasta funcţiile $\varphi_{2j}(z_{2j})$ şi $\Psi_{2j}(z_{2j})$ în manieră asemănătoare celor din (4.5) şi (4.6), stabilim, printr-un raţionament similar cu precedentul,

$$\varphi_{2j}(z_{2j}) = 0 \text{ pentru } z_{2j} \in S^- + D_{2j}, \tag{4.9}$$

$$-\Psi_{2j}(z_{2j}) = 0 \text{ pentru } z_{2j} \in S^-. \tag{4.10}$$

Ţinînd seama de (4.5), egalităţile (4.7) ne arată că funcţiile $\omega_1^0(t_1)$ şi $b_1\overline{\omega_1^0(t_1)} - a_1\omega_1^0(t_1)$ sînt valorile la limită ale unor funcţii olomorfe în domeniile $\mathcal{D}_{1j} \equiv S^- - D_{1j}$ care corespund domeniului $\mathcal{D}_1 \equiv S^- - D_1$ prin transformările (*). Notînd aceste funcţii cu $i\chi_{11}(z_{11})$ şi $i\chi_{12}(z_{12})$, avem

$$i\chi_{11}(t_{11}) = \omega_1^0(t_1),$$

$$i\chi_{12}(t_{12}) = b_1\overline{\omega_1^0(t_1)} - a_1\omega_1^0(t_1),\ t_{1j} \in L_{1j},\ t_1 \in L_1. \tag{4.11}$$

Eliminînd de aici funcţia $\omega_1^0(t_1)$, obţinem

$$\chi_{12}(t_{12}) + a_1\chi_{11}(t_{11}) + b_1\overline{\chi_{11}(t_{11})} = 0, \text{ pe } L_1. \tag{4.12}$$

Considerînd o placă plană omogenă şi anizotropă a cărei secţiune mediană este domeniul $\mathcal{D}_1$, condiţia (4.12) exprimă faptul că frontiera sa este fixată, în timp ce tensiunile pe feţe şi la infinit sînt nule. În baza teoremei de unicitate rezultă că placa se găseşte în stare nedeformată şi deci funcţiile $\chi_{1j}(z_{1j})$ nu pot fi decît nişte constante. Cum $\chi_{1j}(\infty) = 0$, urmează

$$\chi_{1j}(z_{1j}) \equiv 0 \text{ pentru } z_{1j} \in \mathcal{D}_{1j} + L_{1j}.$$

Din (4.11), ţinînd seama de precedentele, urmează imediat

$$\omega_1^0(t_1) \equiv 0,\ t_1 \in L_1. \tag{4.13}$$

Luînd în studiu acum (4.8) şi ţinînd seama de (4.6), deducem existenţa unor funcţii $i\Omega_{11}(z_{11})$ şi $i\Omega_{12}(z_{12})$, analitice şi uniforme în S^+, astfel încît avem

$$i\Omega_{11}(u) = \mu_{12}\overline{\omega}_1^0(u) - \sigma_1^0(u),$$

$$i\Omega_{12}(u) = \sigma_1^0(u) - \mu_{11}\overline{\omega}_1^0(u), \quad u \in L_0. \tag{4.14}$$

Eliminînd din (4.14) şi conjugatele lor funcţiile $\overline{\omega}_1^0(u)$ şi $\sigma_1^0(u)$, obţinem

$$2\,\mathrm{Re}\,[\Omega_{11}(u) + \Omega_{12}(u)] = 0,$$

$$2\,\mathrm{Re}\,[\mu_{11}\Omega_{11}(u) + \mu_{12}\Omega_{12}(u)] = 0, \quad u \in L_0. \tag{4.15}$$

Recunoaştem în egalităţile (4.15) condiţiile la limită ce caracterizează echilibrul unei plăci plane omogene anizotrope semiinfinite a cărei secţiune mediană este S^+, liberă de tensiuni pe feţe şi la infinit şi cu frontiera încastrată. Apelînd din nou la teorema de unicitate, deducem şi de astă dată

$$\Omega_{1j}(z_{1j}) \equiv 0 \text{ pentru } z_{1j} \in S^+ + L_0. \tag{4.16}$$

Deoarece, prin ipoteză, $\mu_{12} \neq \mu_{11}$, substituind (4.16) în (4.14), deducem în mod necesar

$$\overline{\omega}_1^0(u) = \sigma_1^0(u) \equiv 0, \quad u \in L_0. \tag{4.17}$$

Din (4.9) şi (4.10) obţinem, prin raţionamente identice cu precedentele, două probleme de încovoiere : prima — a unei plăci de secţiune mediană $S^+ - D_2$, a doua — a unei plăci a cărei secţiune mediană este S^-, ambele libere de tensiuni şi avînd frontiera încastrată. Studiind aceste probleme, găsim, în acelaşi mod ca mai sus,

$$\omega_2^0(t_2) = 0, \quad t_2 \in L_2,$$

$$\overline{\omega}_2^0(u) = \sigma_2^0(u) = 0, \quad u \in L_0. \tag{4.18}$$

Acum, teorema noastră rezultă strîngînd la un loc egalităţile (4.13), (4.17) şi (4.18). QED.

În baza primei părţi a alternativei lui Fredholm, urmează că sistemul (3.6) are soluţie unică oricare ar fi vectorul $\boldsymbol{F}$, ce satisface condiţiile de regularitate menţionate în § 3.

5. OBSERVAŢII

1. La punctul a) al paragrafului 2 am presupus că soluţiile particulare $W_k^0(x, y)$ satisfac unele condiţii de regularitate necesare pentru rezolvarea problemei noastre. Pe de altă parte, aceste funcţii, depinzînd de încărcarea normală $p(x, y)$, depind de înseşi proprietăţile acesteia din urmă.

În cele ce urmează indicăm două cazuri în care condițiile de regularitate menționate sînt îndeplinite:

a) placa este acționată numai pe o porțiune finită a sa, care se proiectează în planul median după un domeniu D^*, tensiunea normală $p(x, y)$ variază continuu în $\overline{D^*}$ și se anulează pe frontiera acestuia și în exterior;

b) placa este supusă la încovoiere de către un sistem de tensiuni normale discontinue:

$$p(x, y) = \begin{cases} p_1(x, y), & x, y \in \overline{D^*}, \\ 0 & \text{în rest}, \end{cases}$$

$p_1(x, y)$ fiind continuă în $\overline{D^*}$.

În primul caz se pot lua drept soluții particulare ale ecuației (1.1) funcțiile

$$W_k^0(x, y) = \iint\limits_{D^* \cap D_k} p(\xi, \eta)\, \Psi_k(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

în care [7], p. 152

$$\Psi_k(x, y; \xi, \eta) = \operatorname{Im}\left\{\sum_{s=1}^{2} A_{ks}\sigma_{ks}^2 \ln \sigma_{ks}\right\},$$

$\sigma_{ks} = (x - \xi) + \mu_{ks}(y - \eta)$, iar A_{ks} se exprimă în funcție de constantele μ_{ks}. Funcțiile W_k^0 astfel construite satisfac toate condițiile cerute de problemă.

În al doilea caz, soluțiile particulare W_k^0 se pot construi printr-o adaptare la problema studiată mai sus a metodei dezvoltate în [8].

2. Deoarece unicitatea este asigurată și în cazurile cînd frontiera plăcii este liberă de tensiuni (pînă la o mișcare rigidă) sau este supusă la condiții mixte, metoda de rezolvare a problemelor la limită ce corespund acestor cazuri este identică cu cea pe care am expus-o aici. Vor apărea modificări numai în ceea ce privește modul de alegere a funcțiilor $W_{kj}(z_{kj})$. Astfel, dacă frontiera plăcii este liberă de tensiuni (sau este acționată de un moment încovoietor și o forță transversală ce formează un sistem echilibrat), vom căuta rezolvarea problemei de încovoiere cu funcțiile

$$W_{k1}(z_{k1}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{k_1}} \frac{\omega_k(t_k)}{t_{k1} - z_{k1}}\, dt_k + \\ + \frac{1}{2\pi i(q_{k2} - q_{k1})}\int_{L_0} \frac{q_{k2}\overline{\omega}_k(u) - \sigma_k(u)}{u - z_{k1}}\, du, \tag{5.1}$$

$$W_{k2}(z_{k2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{k_2}} \frac{\overline{b_k\omega_k(t_k)} - a_k\omega_k(t_k)}{t_{k2} - z_{k2}}\, dt_k + \\ + \frac{1}{2\pi i(q_{k2} - q_{k1})}\int_{L_0} \frac{\sigma_k(u) - q_{k1}\overline{\omega}_k(u)}{u - z_{k2}}\, du, \tag{5.2}$$

în care

$$a_k = \frac{\overline{q}_{k2} - q_{k1}}{\overline{q}_{k2} - q_{k2}}, \quad b_k = \frac{\overline{q}_{k2} - \overline{q}_{k1}}{\overline{q}_{k2} - q_{k2}}.$$

Dacă L_1 este fixată, iar L_2 este liberă (sau invers), atunci vom alege funcțiile W_{11}, W_{12} sub forma (3.1), (3.2), iar W_{21}, W_{22} sub forma (5.1), (5.2) (sau invers).

În ambele cazuri problema se reduce la un sistem de ecuații integrale singulare pentru care se pot demonstra existența și unicitatea soluției.

Primită la redacție la 15 martie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. С. Г. Лехнитский, *Анизотропные пластинки*, Москва, 1957 (2-е издание).
2. — *О некоторых вопросах, связных с теорией изгиба тонких плит*, ПММ, **2** (1938), стр. 181.
3. С. Г. Михлин, *Плоская деформация в анизотропной среде*. Тр. Сейсмолог. ин-та, АН СССР, *76* (1936).
4. G. N. Savin, *Stress Concentration Around Holes*, London, 1961.
5. М. М. Фридман, *Изгиб тонкой изотропной плиты с впаяной крупной изотропной шайбой из другого материала*. ПММ, **IV**, *4* (1950).
6. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные уравнения, граничные задачи теорий функций и некоторые их приложения к математической физике*, М.-Л., 1946 (3-е издание, 1968).
7. C. I. Borș, *Teoria elasticității corpurilor anizotrope*, București, 1970. Edit. Academiei.
8. A. Manolachi, *Asupra încovoierii plăcilor plane anizotrope cu tensiuni normale discontinue*, An. șt. Univ. Iași, **XVI**, *1* (1970).

STUDIUL CONLUCRĂRII SPAȚIALE PRINTR-UN CALCUL ÎN DOUĂ ETAPE, A UNOR GRINZI ÎN *T*, AȘEZATE PE O SINGURĂ DIRECȚIE

de N. ȚOPA
Institutul de construcții București

În lucrare autorul studiază posibilitatea de calcul la un grup de grinzi (cum ar fi cele din tablierele de poduri) care nu au grinzi transversale de legătură nici în cîmp, nici pe reazem, la care deci conlucrarea se face exclusiv prin placă.

Într-o serie de preocupări mai vechi [1], [2], concretizate într-un studiu de sinteză [3], autorul a dat o formulare generală privitoare la studiul conlucrării spațiale a grinzilor din tablierele de poduri fără antretoaze (grinzi transversale de legătură) în cîmp, avînd însă antretoaze pe reazem.

Existența antretoazelor pe reazem are o importanță deosebită, deoarece, dată fiind distanța relativ mică dintre grinzile longitudinale, ele asigură, practic, o încastrare perfectă a grinzilor longitudinale la torsiune pe reazem, fapt care influențează, evident, toată comportarea grinzilor.

Pentru economie de spațiu și evitarea repetării inutile a unor calcule vom presupune cunoscută de cititor lucrarea [3] și vom face trimiterile necesare ori de cîte ori va fi nevoie.

De asemenea vom folosi toate notațiile din lucrarea citată.

Pentru a putea alege procedeul de calcul este necesar să analizăm mai întîi condițiile de rezemare ale grinzilor pe reazem. În funcție de condițiile particulare de rezemare deosebim trei scheme care pot reprezenta comportarea reală a grinzilor:

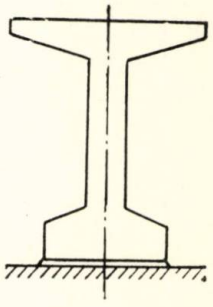


Fig. 1

a) Lățimea de rezemare a grinzilor și îngroșarea inimii în zona de rezemare (care se folosesc destul de des în practică) sînt destul de importante, astfel încît, datorită acțiunii greutății permanente a lățimii de rezemare în sens transversal și a îngroșării inimii, se poate conta pe împiedicarea rotirii secțiunii de reazem (fig. 1). Acest lucru este cu atît mai

aproape de realitate cu cît la sarcina permanentă nu există tendință de răsucire a grinzii în jurul propriei sale axe pe reazem, iar la sarcini mobile nu toate grinzile sînt solicitate simultan și în aceeași direcție la răsucire pe reazem, astfel încît tendințele de răsucire sînt în mare parte compensate prin placă, care transmite această tendință la toate grinzile.

Schema de calcul va putea fi luată, în cazul acesta, ca fiind un grup de grinzi simplu rezemate la încovoiere pe reazem, dar încastrate la torsiune.

Determinarea eforturilor se poate face, în acest caz, pornind de la sistemul general de ecuații stabilit în [3], în care necunoscutele $\mathfrak{M}^1$ și $\mathfrak{M}^2$ sînt nule (vezi observația 5 după relațiile (13) din lucrarea citată). Se ajunge la n sisteme de ecuații cu cîte $4(m-1)$ necunoscute, unde n este numărul de termeni din seriile care aproximează funcțiile, iar m numărul grinzilor. Eforturile sînt trecute în figura 4. Ele sînt eforturi secționale în placă și au expresiile următoare:

$$M_i = \sum_j m_i^j \sin \frac{j\pi}{l} x,$$

$$N_i = \sum_j \nu_i^j \sin \frac{j\pi}{l} x,$$

$$Q_i = \sum_j q_i^j \sin \frac{j\pi}{l} x, \tag{1}$$

$$T_i = \sum_j t_i^j \cos \frac{j\pi}{l} x.$$

Indicele i indică poziția pe grindă, iar indicele j rangul termenului din serie.

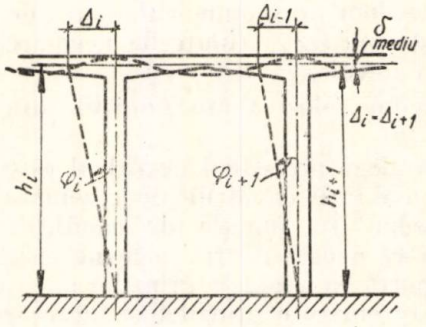


Fig. 2

b) Lățimea de rezemare a grinzilor pe reazeme este mică (fig. 2), astfel încît nu se poate conta pe o împiedicare completă a răsucirii pe reazeme. Greutatea permanentă asigură însă o forță de frecare suficientă pentru a asigura nedeplasarea pe orizontală în sens transversal a bazei

grinzilor. Secțiunea de pe reazem a grupului de grinzi se comportă deci astfel, încît ia naștere o deplasare comună pentru toate grinzile (fig. 2), identitatea deplasării fiind asigurată prin placă.

c) Dacă, pentru cazul precedent, nu se poate asigura o fixare laterală a bazei grinzii (bunăoară dacă prin sistemul de rezemare în sens transversal este împiedicată realizarea frecării și este permisă deplasarea liberă), atunci fiecare grindă are un unghi propriu de răsucire (fig. 3)

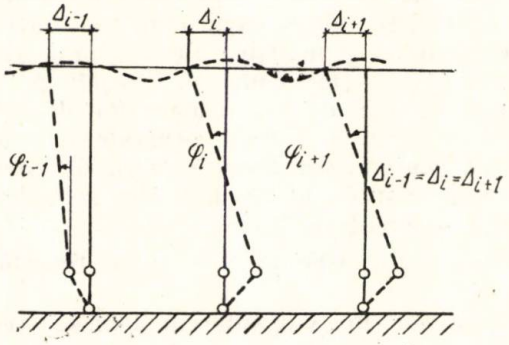


Fig. 3

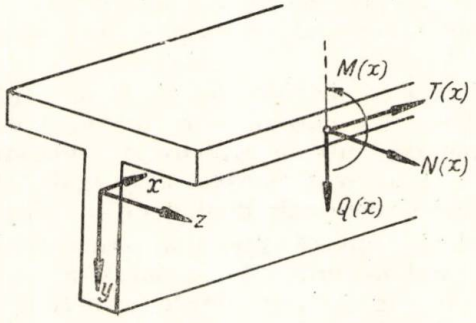


Fig. 4

și, în plus, există o deplasare unică pentru toate grinzile. În acest fel va exista un număr de 2 $(m+1)$ parametri geometrici (2 m unghiuri de răsucire pe reazeme și două deplasări laterale pe cele două reazeme), care vor caracteriza poziția finală a grupului de grinzi (m fiind numărul de grinzi).

Examinînd însă modurile practice, efective, de realizare a rezemărilor, constatăm că tipurile curente folosite pentru rezemarea grinzilor (rezemare directă, rezemare prin plăci metalice de reazem, penduli de beton armat sau penduli blindați cu plăci curbe, rezemare prin rulouri metalice etc.) asigură totdeauna, în cazul unei tendințe de deplasare, apariția unei forțe de frecare suficientă pentru a împiedica deplasarea laterală a bazei grinzilor pe reazem.

De aceea din cazurile enumerate mai sus vom reține, ca interesante, numai cazurile a) și b). Cum cazul a) este epuizat în [3] după cum am arătat mai sus, în lucrarea de față ne vom referi numai la cazul b).

În esență deci obiectul lucrării de față va fi studiul unui grup de grinzi în T legate prin placă, simplu rezemate la încovoiere, care au posibilitatea să se răsucească pe reazem astfel, încît să existe o deplasare laterală comună, avînd baza fixă în sens transversal, așa cum e arătat în figura 2.

În cele ce urmează ne vom ocupa de o clasă particulară a unui asemenea grup de grinzi, și anume cazul cînd toate grinzile sînt identice ca deschidere, caracteristici geometrice ale secțiunii transversale (fig. 7) și caracteristici fizice (E, G). De asemenea, întrucît în [2] și [3] am arătat că cea mai bună metodă de a considera forțele exterioare în calcul este de a le introduce printr-o sarcină echivalentă uniform distribuită, încărcarea exterioară poate fi considerată ca fiind simetrică față de planul vertical ce trece prin mijlocul deschiderilor grinzilor. Acest caz este, de altfel, și cel mai frecvent întîlnit.

În consecință, comportarea pe cele două reazeme a grupului de grinzi este identică.

Secțiunile de pe reazeme vor suferi o deplasare comună la nivelul plăcii (fig. 2), care aduce o deplasare comună a centrului de încovoiere-torsiune, precum și o răsucire comună a tuturor grinzilor. Ambele mărimi (deplasarea și răsucirea) sînt de fapt dependente de un același parametru : deplasarea în dreptul plăcii. Deplasările Δ_1 și Δ_2 pe cele două reazeme sînt însă egale, conform celor spuse mai sus (vezi fig. 6, unde $\varphi_1 = \varphi_2$).

Diferența deci față de sistemul descris la punctul a) (grinzi simplu rezemate la încovoiere, dar încastrate la torsiune) este că grinzile au pe cele două reazeme unghiuri de răsucire și deplasări ale centrului de încovoiere-torsiune egale în sens transversal și egale între cele două reazeme. Aceste unghiuri și deplasări depind de un *singur parametru*.

Metoda de calcul propusă constă în următoarele : se admite ca formă de bază sistemul de grinzi dublu încastrate la torsiune și simplu rezemate la încovoiere (fig. 5 *a*), se admite ca necunoscută unică deplasarea comună Δ_1 la nivelul plăcii pe cele două reazeme, se folosește principiul deplasărilor virtuale, analog cu folosirea acestui principiu în metoda deplasărilor pentru exprimarea condiției de echilibru [4].

$$\bar{L}_{11}\Delta_1 + \bar{L}_{10} = 0. \tag{2}$$

Motivele pentru care am ales această cale sînt următoarele :

— metodologia de rezolvare a unui asemenea sistem de bază, pentru forțele exterioare, este deja stabilită în [3];

— determinarea eforturilor pe această formă de bază din acțiunea forțelor exterioare conduce la o simplificare substanțială [3], și anume pentru stabilirea ecuațiilor de condiție se ajunge la scrierea cîte unui sistem *independent* de ecuații pentru fiecare termen j al seriilor (1) ce aproximează eforturile secționale necunoscute;

— modul de punere a problemei reproduce principial metoda uzual folosită în *Statica construcțiilor*, ceea ce ușurează aplicarea ei.

Pentru scrierea și rezolvarea ecuației de tip (2) este necesară deci determinarea pe forma de bază a eforturilor din acțiunea forțelor exterioare și apoi din acțiunea *rotirii de nod* necunoscute Δ_1.

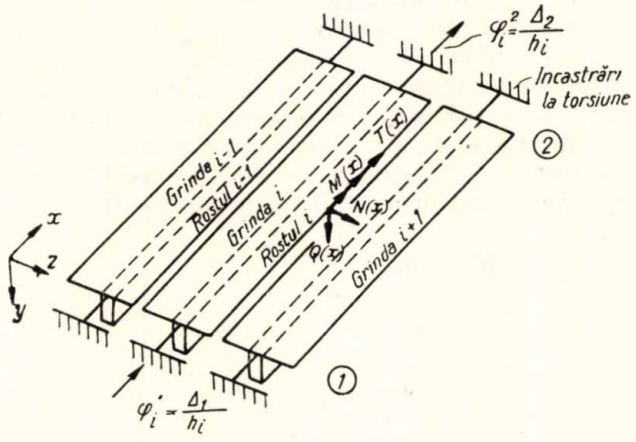


Fig. 5 *a*

În ceea ce privește acțiunea forțelor exterioare pe forma de bază, problema este integral rezolvată în [3], unde, cu ajutorul relațiilor (14) și considerînd toate mărimile $M_i (i = 1, 2, \ldots, m-1)$ nule, se pot determina eforturile în orice punct.

Rămîne să determinăm acțiunea rotirii secțiunii de reazem pentru valoarea $\Delta_1 = 1$ pe forma de bază.

ACȚIUNEA DEPLASĂRII $\Delta_1 = 1$

Este vorba de un grup de grinzi identice între ele, care suferă o răsucire identică pe cele două reazeme și o deplasare comună a punctelor omologe.

Vom folosi pentru rezolvare, similar ca în [3], metoda eforturilor, luînd ca formă de bază grupul de grinzi dublu încastrate la torsiune, simplu rezemate la încovoiere, în plăcile cărora s-au practicat secțiuni longitudinale (fig. 5 *a*), care au permis punerea în evidență a eforturilor de tipul celor din figura 4.

Modul specific de „încărcare" cu deplasarea necunoscută $\Delta_1 = 1$ de pe reazeme arată însă că eforturile nu mai pot fi exprimate sub forma (1).

În cele ce urmează vom presupune că în secțiunea transversală există multe grinzi.

Examinînd figura 2, constatăm că fiecare grindă se află într-o situație aproximativ identică de deformare, care presupune crearea unor articulații cilindrice în lungul plăcii aflate în cazul unor grinzi identice, la mijlocul deschiderii dintre două grinzi.

Acest mod de comportare este cu atît mai adevărat cu cît grinda se află mai departe de margine.

Pentru grinzile acestea putem considera cu oarecare aproximație că sînt deformate antisimetric față de planul vertical ce trece printr-o secțiune, ceea ce ne permite să afirmăm că momentul încovoietor este $M_i = 0$ (în lungul liniei de inflexiune din placă, considerată la mijlocul secțiunii). De asemenea, din aceleași motive, două grinzi vecine comportîndu-se identic, forța axială secțională este $N_i = 0$ în orice punct în lungul grinzii. În al treilea rînd, datorită faptului că solicitarea exclude tendința de forfecare în lungul liniilor de inflexiune, forța tangențială este $T_i = 0$. În ceea ce privește forța tăietoare Q_i, ea nu este nulă, dar nu poate avea forma din (1), care presupune anularea pe reazeme, ci o formă care să conducă și la valori nenule ale forței Q_i pe reazeme. În consecință propunem următorul grup de necunoscute :

$$\begin{aligned} M_i &= 0, \\ N_i &= 0, \\ Q_i &= q_i^0 + \sum_j q_i^j \sin \frac{j\pi}{l} x, \\ T_i &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

unde $j = 1, 3, 5, \ldots$, din cauza simetriei în lungul lui x [3]. Grupul de necunoscute (3) ascunde o aproximație. Aceasta constă în faptul că am considerat $N_i = 0$. În realitate acesta nu trebuie să fie nul din următorul motiv. Forța Q_i nu poate fi constantă în sens transversal ($i = 1, 2, \ldots, m-1$).

Acest fapt poate fi explicat ușor dacă pornim de la margine. Grinda marginală este supusă numai dintr-o parte efectelor forțelor Q_1, pe cînd grinda a doua și următoarele au acțiuni din ambele părți. Răsucirea grinzii a doua și a celorlalte va fi mai pronunțată deci decît a grinzii de margine.

Grinzile neavînd tendința de răsucire identică, nu se poate afirma deci că la nivelul plăcii tendințe de deplasare relativă pe orizontală nu există. Înseamnă că iau naștere forțe axiale N_i și, implicit, acestea provocînd o încovoiere, s-ar naște și forțe T_i.

Efectul acesta scade însă foarte repede pe măsură ce ne depărtăm de margine și la un număr mai mare de grinzi putem considera, cu oarecare aproximație, că toate grinzile se comportă la fel și deci $N_i = 0$, iar Q_i este constant (independent de i) :

$$Q_i = q^0 + \sum_{j=1}^{n} q^j \sin \frac{j\pi}{l} x \quad (j = 1, 3, 5, \ldots). \tag{4}$$

Modelul care ar reflecta strict apariția eforturilor de tip (3) cu specificarea (4) ar fi un grup de grinzi, *indiferent numărul lor*, identice ca geometrie și caracteristici fizice, avînd, la plăcile în consolă de la prima

și ultima grindă, afectate niște resorturi elastice de aceleași caracteristici cu grinzile existente. Un alt model ar fi un grup de grinzi făcînd parte dintr-o serie foarte mare de grinzi dispuse paralel.

Cum putem intui că efectul de margine se stinge foarte repede, acceptăm și legea de variație (3) cu specificarea (4).

Putem deci conchide că eforturile Q_i care iau naștere nu depind esențial de numărul de grinzi și le putem determina ca pentru o singură grindă deformată, ca în figura 2, deci ca și cum plăcile ar fi articulate în lungul liniei de inflexiune de la mijlocul deschiderii.

Avem $n + 1$ necunoscute $(q^0, q^1, q^2, \ldots, q^n)$.

Încărcînd forma de bază cu „cauzele" date (rotirea secțiunii de reazem) și cu forțele de legătură (4), vom exprima pe forma de bază (fig. 5) la care ne referim, numai la o grindă, echilibrul cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual în varianta forțelor virtuale [3] și [4].

ECUAȚIA DE TIP q^0

Vom încărca sistemul de bază cu o forță virtuală de tip q^0, și anume

$$\overline{q}^0 = \overline{1}, \tag{5}$$

prezentă în amîndouă rosturile după sensul forței Q_i, și vom exprima echilibrul scriind că

$$\overline{L}_{ef} = \overline{L}_{ext}, \tag{6}$$

$\overline{L}_{ef}$ fiind lucrul mecanic virtual efectuat de eforturile virtuale provocate de (5) parcurgînd deplasările elastice corespunzătoare din încărcarea reală (4), iar $\overline{L}_{ext}$ lucrul mecanic virtual efectuat de reacțiunile virtuale asupra grinzii provocate de (5) parcurgînd deplasările reale (deplasările aduse de $\Delta_1 = 1$ a secțiunilor de pe reazem).

Acțiunea încărcării (5) nu conduce la momente încovoietoare în grindă M_z sau M_y, deoarece sînt două forțe egale și de sens contrar.

Efectul acestor forțe va fi numai încovoierea plăcii și răsucirea grinzii.

LUCRUL MECANIC DIN ÎNCOVOIEREA PLĂCII

Vom avea

$$\overline{L}'_{ef} = \frac{2}{EI_{pl}} \int_0^l \int_0^{b_0} \left[q^0 + \sum_j q^j \sin \frac{j\pi}{l} x \right] z^2 \, dz \, dx. \tag{7}$$

Coeficientul 2 provine din încărcarea pe ambele părți. Dezvoltînd (7), avem

$$\overline{L}'_{ef} = \frac{8lb_0^3}{E\delta^3} q^0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{16lb_0^3}{E\delta^3} \left(\frac{1}{j\pi} \right) q^j. \tag{8}$$

LUCRUL MECANIC DIN RĂSUCIREA GRINZII

$$\overline{L}''_{ef} = \frac{2}{GI_t}\int_0^l \left[q^0 \frac{b^2}{4}(l-2x)^2 + \sum_j q^j \frac{l}{j\pi}\frac{b^2}{2}(l-2x)\cos\frac{j\pi}{l}x\right]\mathrm{d}x. \tag{9}$$

La (9) se ajunge ştiind că (5) conduce la

$$\overline{M}_t = \frac{b}{2}(l-2x), \tag{10}$$

iar (4) conduce la

$$M_t = q^0 \cdot \frac{b}{2}(l-2x) + \sum_j q^j \frac{l}{j\pi} b \cos\frac{j\pi}{l}x, \tag{11}$$

iar coeficientul 2 se explică ca la (7).

Dezvoltînd relaţia (9), avem

$$\overline{L}''_{ef} = \frac{b^2 l^3}{6GI_t} q^0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{4b^2 l^3}{GI_t} \cdot \left(\frac{1}{j\pi}\right)^3 \cdot q^j. \tag{12}$$

Pentru determinarea lui $\overline{L}_{ext}$ din (6) vom considera necunoscuta Δ_1 fiind îndreptată în sensul pozitiv al axei z.

Reacţiunile *asupra grinzii*, deduse din (10),

$$M_0 = \frac{bl}{2}\cdot$$

$$M_l = -\frac{bl}{2}, \tag{13}$$

sînt date numai de forţa $\overline{q}^0 = 1$ din dreapta, unde semnele sînt ca în [4].

Rotirea reală pe fiecare din cele două reazeme este

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_1}{h} = \frac{1}{h}\cdot \tag{14}$$

În consecinţă, lucrul mecanic este

$$\overline{L}_{ext} = -2\frac{bl}{2}\cdot\frac{1}{h} - 2\frac{bl}{2}\frac{1}{h} = -\frac{2bl}{h}\cdot \tag{15}$$

Ecuația de tip q^0 se va obține deci scriind

$$\overline{L}_{ef} = \overline{L}'_{ef} + \overline{L}''_{ef} = \overline{L}_{ext},$$

adică

$$\left(\frac{8lb_0^3}{E\delta^3} + \frac{b^2l^3}{6GI_t}\right)q^0 + \frac{16\,lb_0^3}{E\delta^3}\sum_j \frac{1}{j\pi}q^j + \\ + \frac{4\,b^2l^3}{GI_t}\sum_j \frac{1}{(j\pi)^3}q^j = -\frac{2bl}{h}. \tag{16}$$

Înmulțim toată relația (16) cu $\frac{EI^0}{l^5}$, I_0 fiind un moment de inerție arbitrar, și, notînd cu

$$\rho = \frac{E}{G},$$

avem

$$\left[8\left(\frac{b_0}{\delta}\right)^3 \cdot \frac{I_0}{l^4} + \frac{1}{6}\rho\frac{I_0}{I_t}\left(\frac{b}{l}\right)^2\right]q^0 + 16\left(\frac{b_0}{\delta}\right)^3\frac{I_0}{l^4}\sum_j \frac{1}{j\pi}q^j + \\ + 4\rho\frac{I_0}{I_t}\left(\frac{b}{l}\right)^2\sum_j \frac{1}{(j\pi)^3}q^j = -2\frac{b}{h}\cdot\frac{I_0}{l^4}E. \tag{17}$$

Mai sintetic putem scrie

$$\alpha^0 \cdot q^0 + \beta^0\sum_j \frac{1}{j\pi}q^j + \gamma^0\sum_j \frac{1}{(j\pi)^3}q^j = \delta^0 E, \tag{18}$$

unde

$$\alpha^0 = 8\left(\frac{b_0}{\delta}\right)^3\frac{I_0}{l^4} + \frac{1}{6}\rho\frac{I_0}{I_t}\left(\frac{b}{l}\right)^2,$$

$$\beta^0 = 16\left(\frac{b_0}{\delta}\right)^3\frac{I_0}{l^4},$$

$$\gamma^0 = 4\rho\frac{I_0}{I_t}\left(\frac{b}{l}\right)^2, \tag{19}$$

$$\delta^0 = -2\frac{b}{h}\cdot\frac{I_0}{l^4}.$$

ECUAȚIA DE TIP q^j

Vom încărca sistemul de bază cu o forță virtuală de tip q^j:

$$\overline{q}^j = \overline{1} \cdot \sin \frac{j\pi}{l} x, \tag{20}$$

prezentă în amîndouă rosturile grinzii i avînd sensul lui Q_i.

Acțiunea încărcării virtuale (20) nu conduce la momente încovoietoare M_z sau M_y, ci numai la încovoierea plăcii și torsiunea grinzii.

LUCRUL MECANIC DIN ÎNCOVOIEREA PLĂCII

$$\overline{L}'_{ef} = \frac{2}{EI_{pl}} \int_0^l \int_0^{b_0} \left(q^0 + \sum_j q^j \sin \frac{j\pi}{l} x\right)\left(\sin \frac{j\pi}{l} x\right) z^2 \, dx \, dz. \tag{21}$$

Ținînd seama de

$$I = \int_0^l \sin \frac{j\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx = 0 \qquad (j \neq k) \tag{22}$$

și de

$$I = \frac{l}{2} \qquad (j = k), \tag{23}$$

vom avea

$$\overline{L}'_{ef} = 16 \frac{b_0^3 l}{E\delta^3} \frac{1}{j\pi} q^0 + \frac{4 b_0^3}{E\delta^3} l q^j. \tag{24}$$

LUCRUL MECANIC DIN RĂSUCIREA GRINZII

$$\overline{L}''_{ef} = \frac{2}{GI_t} \int_0^l \left(\frac{l}{j\pi} \cdot b \cdot \cos \frac{j\pi}{l} x\right)\left[q^0 \frac{b}{2}(l - 2x) + \sum_j q^j \frac{l}{j\pi} \cdot b \cdot \cos \frac{j\pi}{l} x\right] dx. \tag{25}$$

La relația (25) s-a ajuns pornind de la (11) și de la momentul de torsiune determinat de (20):

$$\overline{M}_t = \frac{l}{j\pi} b \cos \frac{j\pi}{l} x. \tag{26}$$

Ținînd seama de ortogonalitatea funcțiilor, similar cu (22) și (23), vom avea

$$\overline{L}''_{ef} = \frac{4b^2}{GI_t}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^3 q^0 + \frac{b^2 l}{GI_t}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2 q^j. \tag{27}$$

Pentru determinarea lui L_{ext} vom considera reacțiunile asupra grinzii (momente de torsiune) aduse de (20) (vezi (26)) :

$$M_0 = \frac{lb}{j\pi}, \tag{28}$$

$$M_1 = -\frac{bl}{j\pi}. \tag{29}$$

Considerînd apoi (28) și (29) — cu semnele ca în *Statica construcțiilor* — și (14), avem

$$\overline{L}_{ext} = -2\frac{bl}{j\pi}\frac{1}{h} - \frac{2bl}{j\pi}\frac{1}{h} = -\frac{4bl}{h}\frac{1}{j\pi}. \tag{30}$$

Ecuația (6) pentru încărcarea (20) devine

$$\left[16\frac{lb_0^3}{E\delta^3}\frac{1}{j\pi} + \frac{4b^2}{GI_t}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^3\right]q^0 + \left[\frac{4b_0^3}{E\delta^3}l + \frac{b^2l}{GI_t}\left(\frac{l}{j\pi}\right)^2\right]q^j = -\frac{4bl}{h}\cdot\frac{1}{j\pi}. \tag{31}$$

Înmulțind relația (31) cu $\frac{EI_0}{l^5}$ se obține

$$\left[16\left(\frac{b_0}{\delta}\right)^3\cdot\frac{I_0}{l^4}\frac{1}{j\pi} + 4\rho\left(\frac{b}{l}\right)^2\cdot\frac{1}{(j\pi)^3}\cdot\frac{I_0}{I_t}\right]q^0 +$$

$$+\left[4\left(\frac{b_0}{\delta}\right)^3\cdot\frac{I_0}{l^4} + \rho\frac{I_0}{I_t}\left(\frac{b}{l}\right)^2\frac{1}{(j\pi)^2}\right]q^j = -4\frac{b}{h}\frac{I_0}{l^4}\frac{1}{j\pi}E. \tag{32}$$

Mai sintetic putem scrie

$$\alpha^j\cdot q^0 + \beta^j\cdot q^j + \gamma^j\cdot q^j = \delta^j E, \tag{33}$$

unde

$$\alpha^j = 16\left(\frac{b_0}{\delta}\right)^3\cdot\frac{I_0}{l^4}\frac{1}{j\pi} + 4\rho\left(\frac{b}{l}\right)^2\frac{1}{(j\pi)^3}\cdot\frac{I_0}{I_t},$$

$$\beta^j = 4\left(\frac{b_0}{\delta}\right)^3\frac{I_0}{l^4},$$

$$\gamma^j = \rho\frac{I_0}{I_t}\left(\frac{b}{l}\right)^2\frac{1}{(j\pi)^2}, \tag{34}$$

$$\delta^j = -4\frac{b}{h}\frac{I_0}{l^4}\frac{1}{j\pi}.$$

Ecuația (33) scrisă pentru $j = 1, 2, \ldots, n$ constituie un sistem de n ecuații cu cîte 2 necunoscute din care una e aceeași q^0.

Putem scrie, pornind de la (33),

$$q^j = \frac{\delta^j E - \alpha^j \cdot q^0}{\beta^j + \gamma^j} = \frac{\delta^j E}{\beta^j + \gamma^j} - \frac{\alpha^j}{\beta^j + \gamma^j} q^0$$

sau

$$q^j = A^j E + B^j q^0, \tag{35}$$

unde

$$A^j = \frac{\delta^j}{\beta^j + \gamma^j}, \tag{36}$$

$$B^j = -\frac{\alpha^j}{\beta^j + \gamma^j}.$$

Să introducem (35) în (18):

$$\alpha^0 \cdot q^0 + \beta^0 \sum_j \frac{1}{j\pi}(A^j E + B^j q^0) + \gamma^0 \cdot \sum_j \frac{1}{(j\pi)^3}(A^j E + B^j q^0) = \delta^0 \cdot E$$

sau

$$q^0 \left[\alpha^0 + \beta^0 \sum_j \frac{1}{j\pi} B^j + \gamma^0 \sum_j \frac{1}{(j\pi)^3} B^j \right] =$$

$$= \left[\delta^0 - \beta^0 \sum_j \frac{1}{j\pi} A^j - \gamma^0 \sum_j \left(\frac{1}{j\pi} \right)^3 \cdot A^j \right] E,$$

$$q^0 = \frac{C^0}{D^0} E = \eta^0 E, \tag{37}$$

unde

$$\eta^0 = \frac{C^0}{D^0},$$

$$C^0 = \delta^0 - \beta^0 \sum_j \frac{1}{j\pi} A^j - \gamma^0 \cdot \sum_j \frac{1}{(j\pi)^3} A^j,$$

$$D^0 = \alpha^0 + \beta^0 \cdot \sum_j \frac{1}{j\pi} B^j + \gamma^0 \cdot \sum_j \frac{1}{(j\pi)^3} B^j. \tag{38}$$

În consecință

$$q^j = \eta^j E, \tag{39}$$

unde

$$\eta^j = \frac{A^j D^0 + B^j C^0}{D^0}. \tag{40}$$

Putem apoi cu (4) să determinăm toate eforturile.

REZOLVAREA ECUAȚIEI (2)

Această ecuație este de tipul ecuațiilor din metoda deplasărilor [4]. Vom calcula pe $\overline{L}_{11}$ dînd o deplasare elastică $\Delta_1 = 1$ care produce în sistem o serie de eforturi, printre altele o serie de momente de torsiune în blocajele de pe reazem. Apoi introducem articulații la răsucire și înlăturăm legătura la deplasare orizontală din dreptul centrului în încovoiere-torsiune evidențiind momentele.

În cazul încărcării cu $\Delta_1 = 1$ nu există decît momente de răsucire.

Vom da apoi o deplasare cinematică numai blocajelor $\overline{\Delta}_1 = 1$. $\overline{L}_{11}$ va fi lucrul mecanic efectuat de momentele de torsiune din blocaje din $\Delta_1 = 1$ parcurgînd deplasările corespunzătoare $\overline{\Delta}_1 = 1$.

Momentele de torsiune sînt, pornind de la (11),

$$M_t(0) = q^0 \frac{bl}{2} + \sum_j q^j \frac{l}{\pi j} b \qquad \text{pentru } x = 0,$$

$$M_t(l) = -\, q^0 \frac{bl}{2} - \sum_j q^j \frac{l}{j\pi} \cdot b \qquad \text{pentru } x = l, \tag{41}$$

semnele fiind cele uzuale [4], iar q^0 și q^j fiind date în (37) și respectiv (39).

Ținînd seama că momentele de torsiune pozitive au vectorul cu sensul intrînd în secțiune, vom avea

$$\overline{L}_{11} = 2\left(\frac{q^0\, bl}{2} + \sum_j q^j \frac{l}{j\pi} b\right)\frac{1}{h} \cdot 2\, m. \tag{42}$$

Folosind (37) și (39), avem

$$\overline{L}_{11} = \frac{Ebl}{h}\left[\eta^0 + 2\sum_j \frac{\eta^j}{j\pi}\right]2m$$

sau

$$\overline{L}_{11} = 2\,\frac{E\,bl}{h} \cdot \lambda^0, \tag{43}$$

$$\lambda^0 = \left(\eta^0 + 2\sum_j \frac{\eta^j}{j\pi}\right) \cdot m, \tag{44}$$

m fiind numărul de grinzi.

În ceea ce privește pe $\overline{L}_{10}$, vom folosi [3] relațiile (14), din care vom prelua expresiile care ne dau pe $M_x = M_t$ și T_{xz} și vom avea

$$M_x^i(0) = -\sum_j \frac{l}{j\pi}(m_i^j - m_{i-1}^j - \nu_i^j a_c + \nu_{i-1}^j a_c - q_i^j b - q_{i-1}^j b - \alpha_i^j e_i) = \mathfrak{M}_i,$$

$$M_x^i(l) = -M_x^i(0) = -\mathfrak{M}_i, \tag{45}$$

$$T_{xz}(0) = \sum_j \frac{l}{j\pi}(\nu_i^j - \nu_{i-i}^j) = \mathfrak{T}_i,$$

$$T_{xz}^i(l) = -T_{xz}^i(a) = -\mathfrak{T}_i.$$

În relațiile (45) semnele sînt cele definite în *Statica construcțiilor* [4]. Dacă există și forțe orizontale, ele intervin în M_x analog ultimului termen din paranteză, iar în T_{xz} în paranteză va trebui adăugat un termen analog cu cel de la T_{xy} ([3], relațiile (14)) :

$$\overline{L}_{10} = \sum_i \left[2\,\mathfrak{M}_i \frac{1}{h} + 2\,\mathfrak{T}_i \frac{1}{h}(h - a_c)\right]$$

sau

$$\overline{L}_{10} = \frac{2}{h} \sum_i [\mathfrak{M}_i + \mathfrak{T}_i (h - a_c)]. \tag{46}$$

Din (43), (46) și (2) rezultă

$$\Delta_1 = -\frac{\overline{L}_{10}}{\overline{L}_{11}} = -\frac{\sum_i [\mathfrak{M}_i + \mathfrak{T}_i (h - a_c)]}{Ebl \cdot \lambda^0}. \tag{47}$$

Odată determinat Δ_1, putem determina orice efort folosind suprapunerea efectelor între relațiile (14) din [3] (unde $M_{1i} = 0$, $M_{2i} = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, m$) și eforturile provenind din încărcarea (4) multiplicate cu Δ_1.

Din examinarea acestora rezultă că toate expresiile eforturilor din [3] rămîn valabile, cu excepția momentelor de torsiune M_x (la care trebuie adăugate cele corespunzătoare relației (11) multiplicate cu Δ_1) și a momentelor din placă, la care trebuie adăugate cele corespunzătoare eforturilor aduse de (4), și anume :

$$M_{y1} = \pm \left(q^0 + \sum_j q^j \cdot \sin \frac{j\pi}{l} x\right) z \cdot \Delta_1, \tag{48}$$

z fiind distanța de la rost la un punct oarecare.

De remarcat faptul că momentele de torsiune, care se modifică, provin, în final, din suprapunerea efectelor pe sistemul de bază (fig. 5 *a*),

determinate de încărcarea exterioară, pe de o parte — relațiile (14) din [3] —, și din efectul deplasării — relațiile (11) multiplicate cu Δ_1, din prezenta lucrare —, pe de altă parte.

Prima componentă, relațiile (14) din [3], are o variație oarecare în lungul axei z, pe cînd a doua componentă, relațiile (11), este constantă în raport cu z, ceea ce înseamnă că în orice caz vom avea momente de încastrare la torsiune, pentru fiecare grindă.

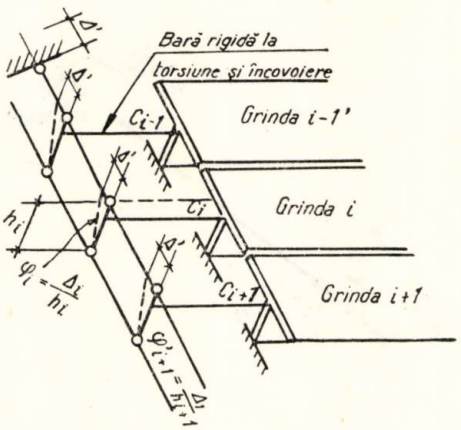


Fig. 5 *b*

Dacă imaginăm forma de bază ca în figura 5 *b*, care evidențiază faptul că rotirea secțiunii de pe reazem depinde de un singur parametru, atunci deducem că, în final, nu va exista nici o reacțiune orizontală în pendulul marginal al șirului de bare care realizează încastrarea, deoarece aceasta a fost, în fond, condiția pusă prin (2).

În barele de legătură dintre grinzi vor exista însă forțe de compresiune sau întindere determinate de prezența momentelor de torsiune finale. Întrucît aceste bare sînt imaginate de noi pentru a construi forma de bază, înseamnă că aceste forțe de legături marginale se dezvoltă în zona marginală a plăcilor, valorile lor putînd fi determinate din descompunerea momentelor de torsiune în cuple.

Ordinea operațiilor ar fi deci următoarea:

a) — Se determină eforturile cu metodologia indicată în [3], inclusiv mărimile (45).

b) — Se calculează caracteristicile (19) luînd pentru I_0 o mărime arbitrară, cel mai convenabil $I_0 = l^4$.

c) — Se calculează caracteristicile (34) pentru $j = 1, 3, 5, \ldots, n$, n fiind numărul de termeni din seria care aproximează funcțiile necunoscute (4).

d) — Se determină mărimile (36) pentru fiecare termen al seriei.

e) — Se determină mărimile (38) și apoi q^0 (37).

f) — Se determină mărimea (40) şi apoi q^i (39).

g) — Se calculează (44) şi apoi (43).

h) — Idem (45) şi (46).

i) — Se determină Δ_1 cu (47).

j) — Se determină apoi momentele de torsiune, suplimentare faţă de calculul din [3], cu (11) multiplicînd cu Δ_1 de la i.

k) — Se calculează apoi momentele de încovoiere a plăcii, suplimentare faţă de [3], cu (48).

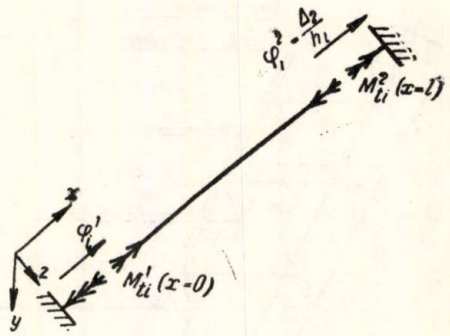


Fig. 6

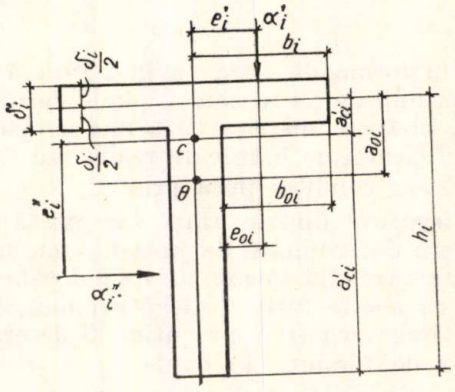


Fig. 7

EXEMPLIFICARE NUMERICĂ

Pentru ilustrarea elementelor teoretice şi obţinerea unor indicaţii practice de calcul, dăm în cele ce urmează un exemplu numeric.

Fie un grup de şapte grinzi în T, de beton armat, realizînd tablierul unei deschideri de pod. Exemplul este dat în [2], unde sînt analizate diverse ipoteze de calcul.

Vom reține cazul *B*, cînd se consideră antretoaza prin rigiditatea ei la încovoiere, dar se neglijează rigiditatea ei la torsiune. Grinzile sînt deci încastrate la torsiune, dar simplu rezemate la încovoiere.

În felul acesta acest grup constituie tocmai forma de bază din prezenta lucrare pentru cazul cînd și rigiditatea la încovoiere a antretoazei pe reazem ar fi nulă (cazul pe care-l tratăm acum).

Ne propunem să calculăm modificările eforturilor față de situația cu antretoază pe reazem dintr-o încărcare uniform distribuită $p = 1$ kg/cm dispusă pe grinda marginală ($i = 1$).

CARACTERISTICILE GEOMETRICE

$l = 1200$ cm,
$m = 7$,
$b = 50$ cm,
$b_0 = 37{,}5$ cm,
$\delta = 11$ cm,
$h = 90$ cm,
$a_c = 8{,}06$ cm,
$I_t = 426000$ cm^4,
$\varrho = 2{,}3$,
$I_0 = l^4$ (fiind arbitrar).

Pentru definirea eforturilor vom folosi cinci termeni în serie ($j = 1, 3, 5, 7, 9$ deoarece încărcarea uniform distribuită pe grinda marginală este simetrică în raport cu mijlocul deschiderii).

MĂRIMILE (19)

Folosind datele numerice date mai sus introduse în (19), obținem
$\alpha^0 = 3.556$,
$\beta^0 = 632$,
$\gamma^0 = 77.800$,
$\delta^0 = 1{,}1111$.

MĂRIMILE (34)

j	1	3	5	7	9
α^j	2712	160,5	60,5	35,2	26
β^j	158	158	158	158	158
γ^j	1975	219	79,1	40,3	24,4
δ^j	−0,707	−0,235	−0,1415	−0,101	−0,0785

MĂRIMILE (36)

j	1	3	5	7	9
A^j	$-\frac{0,332}{10^3}$	$-\frac{0,624}{10^3}$	$-\frac{0,597}{10^3}$	$-\frac{0,510}{10^3}$	$-\frac{0,430}{10^3}$
B^j	$-1,271$	$-0,426$	$-0,255$	$-0,178$	$-0,142$

MĂRIMILE (38)

$$C^0 = -0,047$$

$$D^0 = 17,$$

$$\eta^0 = -2,77 \cdot 10^{-3}.$$

COEFICIENȚII η^j – RELAȚIA (39)

j	1	3	5	7	9
η^j	$3,18 \cdot 10^{-3}$	$0,552 \cdot 10^{-3}$	$0,106 \cdot 10^{-3}$	$-0,0194 \cdot 10^{-3}$	$-0,039 \cdot 10^{-3}$

EXPRESIA (44)

$$\lambda^0 = \left[-2,77 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{3,14} \left(\frac{3,18}{1} + \frac{0,552}{3} + \frac{0,106}{5} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{0,019}{7} - \frac{0,039}{9} \right) \right] \cdot 7 = -4,34.10^{-3}.$$

EXPRESIA (43)

$$\overline{L}_{11} = -\frac{2}{h} \cdot 261 \cdot E.$$

În ceea ce privește acțiunea forțelor exterioare pe forma de bază, vom folosi elementele care au stat la baza calculelor din [2], din care reproducem elementele de care avem nevoie obținute la calculatorul electronic pentru încărcarea grinzii marginale ($i = 1$) cu o sarcină uniform distribuită unitară.

Pentru această încărcare, necunoscutele din rosturi, de tip (1), sînt :

$j = 1$

Rost i	1	2	3	4	5	6
$\overline{m}_i^1$	0,00620	0,01041	0,00174	−0,00083	−0,00122	−0,00105
ν_i^1	−0,23278	−0,65402	−0,83811	−0,71941	−0,43671	−0,13799
q_i^1	−0,45046	−0,14549	−0,11111	−0,08357	−0,06833	−0,04726
t_i^1	−1,92091	−1,45461	−0,02940	0,85435	1,22542	0,97974

$j = 3$

Rost i	1	2	3	4	5	6
$\overline{m}_i^3$	−0,00002	−0,00019	−0,00002	−0,00001	−0,00000	−0,00001
ν_i^3	−0,15186	−0,36976	−0,41592	−0,32726	−0,18845	−0,05778
q_i^3	−0,01909	−0,01130	−0,00350	−0,00851	−0,00974	−0,00795
t_i^3	−0,41252	−0,16670	−0,04748	+0,15775	0,18619	0,13685

În tabelele de mai sus am notat, ca în [3], prin $\overline{m}$ mărimile

$$\overline{m}_i^1 = \frac{m_i^1}{l}\ ; \qquad \overline{m}_i^3 = \frac{m_i^3}{l}\ ,$$

lucru de care vom ține seama la calculul eforturilor.

Nu s-au mai calculat valorile pentru $j = 5, 7 \ldots$, deoarece devin neglijabile.

Calculul momentelor de torsiune, de încastrare perfectă, se face cu expresiile (45).

Pentru $j = 1$ (folosind primul tabel de mai sus)

$$i=1 \quad M_{t1}^1 = -\frac{1200}{1\cdot 3{,}14}[0{,}0062\cdot 1200-(-0{,}23278)\,8{,}06-(-0{,}45046)\,50] =$$

$$= -12\cdot 150 \text{ kgcm},$$

$$i=2 \quad M_{t2}^1 = -\frac{1200}{1\cdot 3{,}14}[1200(0{,}01041-0{,}00620)-8{,}06(-0{,}65402+$$

$$+\,0{,}23278)-50(-0{,}14549-0{,}45046)] = -14\cdot 600 \text{ kgcm}$$

și, analog,

$$M_{t3}^1 = -1470 \text{ kgcm},$$
$$M_{t4}^1 = -2200 \text{ kgcm},$$
$$M_{t5}^1 = -1850 \text{ kgcm},$$
$$M_{t6}^1 = -1290 \text{ kgcm},$$
$$M_{t7}^1 = -985 \text{ kgcm}.$$

Pentru $j=3$ (folosind al doilea tabel de mai sus)

$$M_{t1}^3 = -\frac{1200}{3 \cdot 3{,}14}\,[1200(-0{,}00002) - 8{,}06(-0{,}15186) - 50(-0{,}01909)] =$$

$$= -274 \text{ kgcm},$$

$$M_{t2}^3 = -\frac{1200}{3 \cdot 3{,}14}\,[1200(-0{,}00019+0{,}00002) - 8{,}06(-0{,}36976 +$$

$$+0{,}15186) - 50 \cdot (0{,}01130 - 0{,}01909)] = -248 \text{ kgcm}$$

și, analog,

$$M_{t3}^3 = -23 \text{ kgcm},$$
$$M_{t4}^3 = +11 \text{ kgcm},$$
$$M_{t5}^3 = +27 \text{ kgcm},$$
$$M_{t6}^3 = +22 \text{ kgcm},$$
$$M_{t7}^3 = +10 \text{ kgcm}.$$

Se constată aportul mic adus de cel de-al doilea termen al seriei ($j = 3$), fapt pentru care ne-am oprit aci.

În final vom avea

$$M_{t1} = -12150 - 274 = -12424 \text{ kgcm},$$
$$M_{t2} = -14600 - 248 = -14848 \text{ kgcm}$$

și, analog,

$$M_{t3} = -1493 \text{ kgcm},$$
$$M_{t4} = -2189 \text{ kgcm},$$
$$M_{t5} = -1823 \text{ kgcm},$$
$$M_{t6} = -1268 \text{ kgcm},$$
$$M_{t7} = -975 \text{ kgcm}.$$

Procedînd la calculul expresiei (46), vom calcula întîi primul termen din paranteză :

$$\sum_{i=1}^{7} \mathfrak{M}_i = -35020 \text{ kgcm.}$$

Observație importantă. La același rezultat ajungem mult mai repede dacă observăm următoarele. Mărimile $\mathfrak{M}_i$ din (45) trebuie sumate conform relației (46) în raport cu indicele i. Observînd că grinzile sînt identice (mărimile geometrice care intervin nu variază în raport cu i), prin aplicarea $\sum_i$ la $\mathfrak{M}_i$ din (45) o serie de termeni din paranteză se sting reciproc și în final rămîne,
pentru $j=1$,

$$\sum_{i=1}^{7} \mathfrak{M}_i^1 = \frac{bl}{\pi} 2 \sum_{i}^{7} q_i^1,$$

dar

$$\sum_{i=1}^{7} q_i^1 = -0{,}9063 \qquad \text{(vezi tabela pentru } j=1\text{), ceea ce dă}$$

$$\sum_i \mathfrak{M}_i^1 = \frac{50.1200}{3{,}14} \cdot 2 \cdot (-0{,}9063) = -34.550 \text{ kgcm.}$$

Repetînd, pentru $j=3$,

$$\sum_{i=1}^{7} \mathfrak{M}_i^3 = \frac{bl}{3 \cdot \pi} 2 \sum_i q_i^3 = \frac{50.1200}{3 \cdot 3{,}14} 2 \cdot (-0{,}03749) = -476.$$

În total vom avea

$$\sum_i \mathfrak{M}_i = \sum_i \mathfrak{M}_i^1 + \sum_i \mathfrak{M}_i^3 = -34550 - 476 = -35.026 \text{ kgcm}$$

(diferențele fiind, evident, datorite riglei de calcul).

Acest calcul este mai rapid, dar nu ne dă valoarea momentului de torsiune pentru fiecare grindă în parte.

Tot pe baza observației de mai sus forța tăietoare $\mathfrak{T}_i$ din (45) prin operația (46) se stinge complet, nu dă lucru mecanic.

Vom avea deci, conform (46),

$$\overline{L}_{10} = -\frac{2}{h} 35026$$

şi vom obţine pe Δ_1 cu (47) :

$$\Delta_1 = -\frac{-\frac{2}{h}35026}{-\frac{2}{h}261\cdot E} = -134{,}2\,\frac{1}{E}.$$

Corecţia momentelor de torsiune de la capăt de grindă va fi deci, conform relaţiei (41),

$$M_t = 2\left(\frac{q^0 bl}{2} + \sum_j q^j \frac{bl}{j\pi}\right)\Delta_1 \text{ [coeficientul 2 se explică ca la (7)]},$$

$$q^0\cdot\frac{bl}{2} = \frac{-2{,}77\cdot 10^{-3}\cdot E}{2}\cdot 50\cdot 1200 = -83{,}1\,E,$$

$$\sum_j q^j \frac{bl}{j\pi} = \frac{50.1200}{3{,}14}\left[\frac{3{,}18}{1} + \frac{0{,}552}{3} + \frac{0{,}106}{5} - \frac{0{,}0194}{7} - \right.$$

$$\left. - \frac{0{,}039}{9}\right]10^{-3}\cdot E = 64{,}6E,$$

$$M_t = 2(-83{,}1\,E + 64{,}6\,E)\cdot\left(-134{,}2\,\frac{1}{E}\right) = 4960 \text{ kgcm}.$$

Acest moment de torsiune datorit lui Δ_1 este egal la toate grinzile. În final momentele de torsiune corectate vor fi :

$$M_{t1} = -12424 + 4960 = -7464 \text{ kgcm},$$
$$M_{t2} = -14848 + 4960 = -9888 \text{ kgcm},$$
$$M_{t3} = -1493 + 4960 = +3467 \text{ kgcm},$$
$$M_{t4} = -2189 + 4960 = +2771 \text{ kgcm},$$
$$M_{t5} = -1823 + 4960 = 3137 \text{ kgcm},$$
$$M_{t6} = -1268 + 4960 = 3692 \text{ kgcm},$$
$$M_{t7} = -975 + 4960 = +3985 \text{ kgcm}.$$

Se poate face o verificare foarte simplă adunînd momentele de mai sus şi verificînd ca suma să fie nulă. Făcînd verificarea de mai sus se găseşte o eroare de circa 1,7%, datorită calculului cu rigla de calcul.

Această proprietate se explică ușor prin condiția (2), care reflectă de fapt că momentul total de torsiune din blocaj trebuie să fie nul.

Pe baza acestei proprietăți determinarea momentelor de torsiune finale se poate face mult mai rapid astfel: se face suma momentelor de încastrare perfectă și se împarte la numărul grinzilor schimbînd semnul.

Într-adevăr, corecția este

$$M_t = -\frac{-35.026}{7} \cong +5000 \text{kg cm},$$

față de 4960, cît am găsit mai sus.

În acest fel nu putem determina însă variațiile eforturilor necunoscute q din plăci și nici solicitarea maximă a plăcii.

CONCLUZII

a) Din cele expuse mai sus se constată avantajul calculului în două etape pentru acest tip de structură, avantaj care constă în rezolvarea formei de bază în formă sistematizată [3], care conduce la separarea sistemului general de ecuații în mai multe sisteme de ecuații corespunzătoare fiecărui termen al seriei.

În ceea ce privește etapa a doua, deși se introduc $n+1$ necunoscute, se ajunge, folosind proprietățile structurii, la o determinare directă ca pentru un sistem cu o singură necunoscută (37) și (39).

b) Metoda propusă implică o aproximație care a fost motivată la alegerea necunoscutelor sub forma (3) cu specificarea (4). Apreciem că perturbarea produsă de grinda marginală nu este esențială.

c) În lumina ipotezei simplificatoare expusă la b) rezultă că, în raport cu eforturile de pe forma de bază, vor suferi variații numai momentele de torsiune și momentele din placă. După cum se constată din exemplificarea numerică, momentul de torsiune se micșorează, fapt care e important pentru tipurile de grinzi studiate, care au un comportament mai nesatisfăcător la torsiune. Micșorarea momentului de torsiune se face pe seama redistribuirii între grinzi. În ceea ce privește placa se constată, examinînd mărimile q^0 și q^j (37) și (39) din exemplificarea numerică, că sînt de semne contrare, ceea ce face ca sporul de solicitare a plăcii să se concentreze spre reazeme, adică acolo unde, în etapa I, placa era mai puțin solicitată. Și în acest caz deci constatăm o tendință de uniformizare a solicitării plăcii.

d) Așa cum am arătat la exemplificarea numerică, există posibilitatea să se determine variația momentului de torsiune foarte rapid. Pentru placă este necesar însă calculul complet.

e) Se poate verifica ușor că variațiile momentelor de torsiune nu depind de numărul de termeni din seria (4), pe cînd modificarea solicitării plăcii depinde de n.

f) Pentru un număr m mare de grinzi comportarea grinzilor se apropie de cazul cînd există antretoaze pe reazeme, rigide la încovoiere.

g) Calculul făcut permite punerea în evidenţă a unor forţe concentrate orizontale în zona de margine, a căror mărime se poate determina transformînd momentele de torsiune în cuple de pîrghie h. Aceste forţe orizontale iau naştere şi în reazeme şi va trebui verificată stabilitatea la lunecare a grinzii.

Primită la redacţie la 31 ianuarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Mazilu Panait, Ţopa N. ş.a., *Tabliere de poduri de şosea cu grinzi longitudinale fără antretoaze.* Comunicare la sesiunea ştiinţifică a I.C.T.Tc. Octombrie 1965.
2. Ţopa Nicolae, *Unele probleme legate de posibilităţile de simplificare a calculului reţelelor de grinzi pentru tabliere de poduri fără antretoaze în cîmp.* Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *10—11* (1967).
3. — *Contribuţii la studiul conlucrării spaţiale a grinzilor din tablierele de poduri simplu rezemate, fără antretoaze în cîmp, în domeniul elastic,* St. cerc. mec. apl., *1* (1970).
4. Mazilu Panait, *Statica construcţiilor,* vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.

STUDIUL DINAMICII MOTOARELOR HIDROSTATICE ROTATIVE

de A. OPREAN, FL. IONESCU, L. MĂSĂLAR şi M. DOBRE

Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se analizează regimul tranzitoriu de funcţionare al motoarelor hidrostatice rotative. A fost stabilită ecuaţia generală de funcţionare a acestor motoare, rezolvîndu-se pe două căi : matematic şi apoi prin modelare pe calculator analogic. Cu această ocazie a fost studiat procesul complex de inversare a motoarelor hidrostatice rotative cu evidenţierea calitativă şi cantitativă a fenomenelor ce au loc în cadrul acestui proces. Studiul făcut este de un real folos pentru aplicarea acestor motoare în lanţurile cinematice ale maşinilor-unelte şi mai ales în sistemele de reglare automată ale acestora.

Acţionarea hidrostatică a maşinilor-unelte a căpătat în ultima vreme o largă răspîndire, iar în viitor i se prevede o extindere şi mai mare, datorită avantajelor importante pe care aceasta le prezintă ca unul din cele mai moderne mijloace de acţionare şi mai ales de automatizare, alături de cele electronice şi pneumatice.

În cadrul acţionării hidraulice, în literatura de specialitate referitoare la dinamica mecanismelor hidrostatice se constată tot mai pregnant preocuparea cercetătorilor şi proiectanţilor spre perfecţionarea motoarelor hidrostatice rotative. Motivul acestei preocupări este uşor de înţeles dacă se are în vedere faptul că în prezent folosirea acţionării hidrostatice s-a extins şi în lanţurile cinematice principale cu mişcare de rotaţie, ca, de exemplu, la maşinile de găurit, la maşinile de găurit şi alezat, la strungurile revolver şi chiar la maşinile de frezat.

Un alt motiv care a impulsionat aceste cercetări îl constituie extinderea folosirii maşinilor agregate, singurele în măsură să facă faţă diversificării şi schimbării frecvente a obiectului de producţie şi a formelor arhitectonice ale maşinilor, în cadrul cărora se preferă în mod frecvent înlocuirea la capetele de forţă a motoarelor hidraulice rectilinii cu motoarele rotative combinate cu un transformator mecanic al mişcării de rotaţie în mişcare de translaţie. Această soluţie, în afară de faptul că permite o largă tipizare a capetelor de forţă, asigură o mai bună stabilitate a vitezei de avans, ceea ce are ca efect îmbunătăţirea calităţii suprafeţelor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 2, 1972, P. 297–316

O altă cauză a interesului pentru motoarele hidrostatice rotative, şi s-ar putea spune şi cea mai importantă, se referă la folosirea acestora în sistemele de automatizare dotate cu comandă după program. Maşinile unelte dotate cu conducere după program, în special cele cu comandă numerică folosind motoarele hidrostatice rotative cuplate cu un distribuitor rotativ comandat de servomotoare electrice (de exemplu motoare electrice pas cu pas) realizează un excelent amplificator de forţă pentru săniile active ale maşinii-unelte respective. Desigur că includerea motoarelor hidrostatice rotative în lanţurile cinematice de poziţionare sau de avans la maşinile cu comandă după program impune exigenţe sporite în ceea ce priveşte parametrii funcţionali ai acestor motoare. Astfel, întrucît sistemele sus amintite lucrează cu impulsuri electrice, care se transpun în unghiuri de rotaţie ale arborelui motor, se cere atît o înaltă precizie statică (precizia de obţinere a unui unghi de rotaţie dat), cît şi o precizie dinamică ridicată (realizarea unei viteze de rotaţie corespunzătoare vitezei de rotaţie programate), asociate cu înalte calităţi dinamice. Pentru aceasta motorul trebuie să îndeplinească numeroase condiţii, cum ar fi: frecare interioară şi pierderi mici prin frecare, randament ridicat, momente de inerţie reduse, jocuri minime între piesele în mişcare relativă reciprocă, mase mici de lichid în mişcare, frecvenţă proprie redusă şi o mare sensibilitate la comanda primită.

Din cele prezentate reies clar motivele pentru care în ultima perioadă acest tip de motoare se află în centrul atenţiei specialiştilor. Dar tot atît de evidentă este şi necesitatea de studiu al acestor motoare. Este necesar a se studia în primul rînd fenomenele care au loc în procesele tranzitorii, stabilitatea mişcării la turaţii reduse, fenomenele de stick-slip, domeniul stabil de reglare, randamentul etc. Lucrarea de faţă şi-a propus ca obiect, studiul unor fenomene dinamice care apar la accelerarea, frînarea şi inversarea mişcării de rotaţie a motoarelor hidrostatice rotative.

1. STABILIREA ECUAŢIEI DE MIŞCARE

Pentru studierea unor caracteristici dinamice care apar la mişcarea ansamblului de elemente mobile şi a fenomenelor corespunzătoare în timpul procesului tranzitoriu la aceste motoare, se poate porni de la ecuaţia lui Lagrange [1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k} = F_k, \tag{1}$$

în care

$\mathcal{T}$ reprezintă energia cinetică a sistemului,

q — coordonata generalizată (în cazul de faţă aceasta va exprima unghiul de rotaţie al motorului φ, fiind considerat ca variabilă independentă),

F_k — forţa generalizată a sistemului,

k = $1, 2, 3, \ldots, n$ — numărul de grade de libertate ale sistemului (în cazul de faţă este chiar 1).

Avînd în vedere cele arătate, rezultă că $q = \varphi$; $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, iar $F_k = M_r$ (forţa generalizată din sistem fiind momentul redus).

Energia cinetică a sistemului poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + \ldots + J_z \omega_z^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{z} J_i \omega_i^2 \tag{2}$$

sau, trecînd la noţiunea de moment de inerţie redus (J_r), se poate scrie că

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{z} J_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} J_r \omega^2 \tag{3}$$

sau

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} J_r \omega^2, \tag{4}$$

unde J_r este momentul de inerţie redus la arborele motor, iar ω este viteza unghiulară a acestuia.

Avînd stabilite datele necesare, se va proceda la înlocuirile succesive din ecuaţia lui Lagrange. Astfel:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \overset{\circ}{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = J_r \cdot \omega \tag{5}$$

şi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \overset{\circ}{q}_k}\right) = J_r \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dJ_r}{dt}. \tag{6}$$

Înlocuind în expresia (6) $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$ se obţine

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \overset{\circ}{q}_k}\right) = J_r \frac{d\omega}{dt} + \omega^2 \frac{dJ_r}{d\varphi}.$$

Pentru derivata parţială $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q}$ din ecuaţia lui Lagrange, ţinînd cont că sistemul are un singur grad de libertate, conform relaţiei (4) se obţine

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{2} J_r \omega^2\right) = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial J_r}{\partial \varphi}. \tag{7}$$

Avînd în vedere că momentul de inerţie redus, J_r depinde numai de unghiul φ, se poate înlocui derivata parţială cu derivata totală, obţinîndu-se

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dJ_r}{d\varphi}. \tag{8}$$

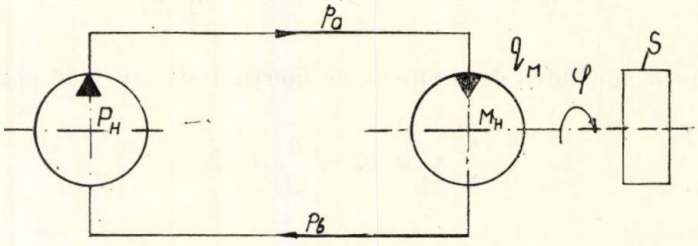


Fig. 1

În final, relaţia (1) se poate scrie, avînd în vedere operaţiile intermediare, astfel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k} = J_r \frac{d\omega}{dt} + \omega^2 \frac{dJ_r}{d\varphi} - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dJ_r}{d\varphi} \tag{9}$$

sau, avîndu-se în vedere expresia (1), se poate obţine

$$J_r \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dJ_r}{d\varphi} = M_r. \tag{10}$$

Conform figurii (1), momentul redus poate fi exprimat cu relaţia

$$M_r = \frac{q_M(p_1 - p_2)}{2\pi} - \frac{q_M(p_3 + p_4)}{2\pi} - f\omega, \tag{11}$$

în care

Q_M reprezintă capacitatea specifică a motorului hidraulic şi se exprimă prin cantitatea de fluid necesară la o rotaţie completă $\left(q_M = \frac{Q}{n}\right)$,

$p_1 = p_a - p_b$ — diferenţa dintre presiunea de intrare şi presiunea de ieşire,

p_2 — pierderile de presiune în motor, care avînd valoare redusă se consideră $p_2 = 0$,

p_3 — presiunea necesară pentru învingerea forţelor de aşchiere (sau a sarcinii la axul motorului),

p_4 — presiunea pentru învingerea forţelor de frecare din mecanism,

f — coeficientul de frecare vîscoasă (valoarea acestuia va fi precizată mai tîrziu).

Înlocuind relația (11) în (10) se obține ecuația finală de mișcare a motorului hidrostatic rotativ, sub forma

$$J_r \frac{d\omega}{dt} + f\omega + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dJ_r}{d\varphi} = \frac{q_M (p_1 - p_2)}{2\pi} - \frac{q_M (p_3 + p_4)}{2\pi}. \quad (12)$$

Avînd în vedere că coordonata generalizată este φ, expresia (12) poate fi exprimată astfel:

$$J_r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + f\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{dJ_r}{d\varphi} = \frac{q_M (p_1 - p_2)}{2\pi} - \frac{q_M (p_3 + p_4)}{2\pi}. \quad (13)$$

Ecuația diferențială de ordinul doi obținută este neliniară și neomogenă; în plus, în afară de variabila φ care evoluează în timp după o lege ce va fi precizată, și momentul de inerție redus J_r este variabil. Pentru rezolvarea acestei ecuații ar trebui, fie găsită încă o ecuație, fie de studiat modul în care momentul de inerție J_r variază funcție de coordonata unghiulară φ.

Momentul de inerție redus poate fi scris sub forma

$$J_r = J_T + \sum_{i=1}^{z} J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2 + m\left(\frac{v}{\omega}\right)^2, \quad (14)$$

unde

J_T reprezintă momentul de inerție al motorului hidraulic,
J_i — momentul de inerție al maselor în mișcare de rotație, reduse la axul motorului,
ω_i — viteza unghiulară a maselor în rotație,
m — masa elementelor mobile în mișcare rectilinie,
v — viteza acestor elemente în mișcare rectilinie.

Plecînd de la relația (14) s-a făcut un studiu separat al momentului de inerție al motorului, J_T, iar pentru simplificarea calculelor s-a procedat la introducerea unei sarcini inerțiale concentrate pe axul motorului [3].

Conform figurii 2 s-a obținut în final o ecuație, care reprezintă momentul de inerție sub forma

$$J_r = \frac{1}{2}[M_r^2 + M_1 r_1^2] - zmr_2^2 + m_p \sum_{i=1}^{z} \left\{(R-a) - e\cos\left[\varphi + (i-1)\frac{2\pi}{z}\right]\right\}^2. \quad (15)$$

Avîndu-se în vedere că studiul variației momentului de inerție J_r al motorului în funcție de excentricitate (s-a considerat cazul unui motor cu pistonașe radiale), în funcție de numărul de pistonașe z și de unghiul pozițional φ ar necesita o muncă laborioasă, acest studiu s-a făcut pe un calculator numeric, programul fiind scris în limbaj Fortran [3].

În urma studiului amintit se poate trage concluzia că pentru un număr de pistonaşe sau palete cuprins între 5—9 (cazul practic), pentru variaţia excentricităţii de la 1 la 10 mm şi pentru o sarcină inerţială mon-

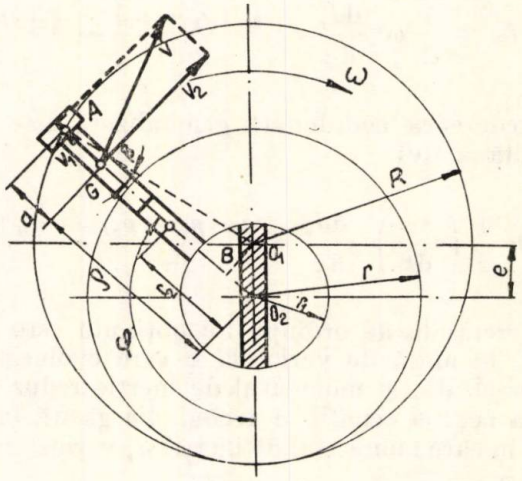


Fig. 2

tată pe axul motorului sub forma unui disc se obţine un moment de inerţie $J_r \cong$ const. În consecinţă, $\frac{dJ_r}{d\varphi} = 0$, iar relaţia (13) devine:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + f\frac{d\varphi}{dt} = \frac{q_M(p_1 - p_2)}{2\pi} - \frac{q_M(p_3 + p_4)}{2\pi}. \tag{16}$$

Se consideră în expresia de mai sus că: $p_1 = p_a - p_b = p_a$; $p_2 \cong 0$; $p_4 \cong 0$; $p_a - p_3 = p$, iar J_r se notează cu J, deci

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + f\frac{d\varphi}{dt} - \frac{q_M p}{2\pi} = 0. \tag{17}$$

Rezolvarea ecuaţiei (17) se face pe două căi:
— rezolvarea matematică,
— rezolvarea pe calculatorul analogic.

2. REZOLVAREA MATEMATICĂ

Pentru simplificarea notaţiilor ecuaţia (17) devine (18), în care s-au notat

$A = J$ exprimat în kg cm²,
$B = f$ exprimat în kg cm²/s,
$C = q_M p \frac{1}{2\pi}$ în kg cm²/s²,

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt} - C = 0. \tag{18}$$

Ecuația (18) se rezolvă conform metodelor cunoscute, iar soluțiile vor fi prezentate în cele ce urmează.

2.1. LEGILE DE VARIAȚIE A VITEZELOR UNGHIULARE

În urma calculelor efectuate s-a demonstrat că vitezele unghiulare variază după legi diferite în cele două perioade, de frînare și de accelerare.

2.1.1. *Perioada de frînare.* Din prelucrarea ecuației (18) s-a obținut

$$A\frac{d\omega}{C-B\omega}=dt, \tag{19}$$

ecuație care prin integrare membru cu membru între limitele $(-\omega;\ 0)$, $(-t;\ 0)$, ω_{fr} are următoarea expresie:

$$\omega_{fr}=\frac{C}{B}-\frac{C}{B}e^{-\frac{B}{A}t}, \tag{20}$$

se observă că viteza unghiulară de frînare se anulează la $t=0$, originea timpului, fapt ce constituie de altfel și o verificare a justeței relației (20).

2.1.2. *Perioada de accelerare.* Procedîndu-se asemănător, în care caz limitele de integrare sînt $(0;\ \omega)$ și $(t_0;\ t)$, în urma rezolvării ecuației (19) expresia vitezei unghiulare pentru perioada de accelerare este (21)

$$\omega_{ac}=\frac{C}{B}-\frac{C}{Be^{\frac{B}{A}(t-t_0)}}, \tag{21}$$

expresie care se verifică pentru $t=t_0$ și $\omega_{ac}=0$.

2.2. DETERMINAREA TIMPILOR DE FRÎNARE, ACCELERARE, INVERSARE

Din rezolvarea ecuației (18) pentru perioadele de frînare, respectiv accelerare, se obțin următoarele expresii:

— pentru perioada de frînare:

$$\frac{A}{B}\ln\frac{C+B\omega}{C}=t_{fr}+k_1, \tag{22}$$

unde $k_1=0$ din condițiile la limită,

— pentru perioada de accelerare:

$$\frac{A}{B}\ln\frac{C}{C-B\omega}=t_{ac}-t_0, \tag{23}$$

unde s-a notat prin t_{fr} = timpul de frînare, respectiv t_{ac} = timpul de accelerare

$$t_{ac} = \frac{A}{B} \ln \frac{C}{C - B\omega} + t_0, \tag{24}$$

$$t_{fr} = \frac{A}{B} \ln \frac{C + B\omega}{C}, \tag{25}$$

iar

$$t_{inv} = t_{ac} + t_{fr}, \tag{26}$$

t_0 reprezentînd timpul scurs de la anularea rotaţiei într-un sens pînă la începerea rotaţiei în sens contrar, mult mai mic comparativ cu cei doi timpi daţi de relaţiile (22) şi (23). Făcîndu-se suma şi aplicîndu-se proprietăţile logaritmilor, expresia timpului de inversare apare sub forma

$$t_{inv} = \frac{A}{B} \ln \frac{C + B\omega_{max}}{C - B\omega_{max}} + t_0 \tag{27}$$

sau, revenindu-se la notaţiile anterioare,

$$t_{inv} = \frac{J}{f} \ln \frac{q_M p + f\pi^2 n}{q_M p - f\pi^2 n} + t_0, \tag{28}$$

în care n este în modul şi reprezintă turaţia de regim.

2.3. DETERMINAREA LEGILOR DE VARIAŢIE ALE ACCELERAŢIILOR UNGHIULARE

Este cunoscut că

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{29}$$

Plecînd de la aceasta se va stabili ecuaţia parametrică a acceleraţiei unghiulare în perioadele de frînare şi accelerare.

2.3.1. *Perioada de frînare.* Înlocuindu-se în relaţia (29) expresia vitezei unghiulare din relaţia (20) se obţine prin derivare :

$$\varepsilon_{fr} = \frac{C}{A} e^{-\frac{B}{A}t}, \tag{30}$$

care reprezintă variația vitezei unghiulare la frînare printr-o lege exponențială în raport cu timpul.

2.3.2. *Perioada de accelerare.* Procedîndu-se asemănător 2.3.1., avînd în vedere introducerea în relația (29) a expresiei vitezei unghiulare dată de (21), se obține

$$\varepsilon_{ac} = \frac{C}{A} e^{-\frac{B}{A}(t-t_0)}, \tag{31}$$

se observă că accelerația unghiulară prezintă un salt la $t=t_0$, cînd $\varepsilon_{ac} = \frac{C}{A}$, după care scade după o lege exponențială inversă. (vezi figurile 3, 5, 6,...).

2.4. DETERMINAREA UNGHIURILOR DE FRÎNARE ȘI ACCELERARE

Cunoașterea unghiurilor de rotație în timpul perioadelor de frînare și accelerare este necesară pentru a da o apreciere și performanțelor statice ale motoarelor hidrostatice rotative. Se va proceda la determinarea succesivă a unghiurilor de frînare și accelerare.

2.4.1. *Perioada de frînare.* Știind că derivata de ordinul 1 a unghiului de poziție al elementelor în mișcare de rotație este viteza unghiulară (32), se poate determina unghiul de frînare prin integrarea între limitele $(-t;\ 0)$ a relației (33)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{32}$$

$$d\varphi = \omega dt, \tag{33}$$

$$\varphi_{fr} = \int_{-t}^{0} \omega_{fr}\, dt. \tag{34}$$

Prin înlocuirea lui ω_{fr} din relația (20) se obține

$$\varphi_{fr} = \int_{-t}^{0} \left[\frac{C}{B} - \frac{C}{B} e^{-\frac{B}{A}t} \right] dt \tag{35}$$

și trecîndu-se apoi la limitele de integrare rezultă

$$\varphi_{fr} = -\frac{CA}{B^2} + \frac{CA}{B^2} e^{\frac{B}{A}t} + \frac{C}{B}t + k_3.$$

Pentru determinarea constantei de integrare se pun condițiile de trecere la limită, astfel încît pentru $t=0$ avem $\varphi_{fr}=0$, deci $k_3=0$, relația (36) devine :

$$\varphi_{fr}=\frac{CA}{B^2}\left[e^{\frac{B}{A}t}-1\right]+\frac{C}{B}t. \tag{37}$$

Este evident că punîndu-se condițiile de limită se poate determina valoarea unghiului de frînare înlocuindu-se parametrul variabil timp, t, cu valoarea sa precizată în paragraful 2.2.

2.4.2. *Perioada de accelerare.* Înlocuind în relația (38) expresia lui ω_{ac} dată de relația (21) se poate scrie

$$\varphi_{ac}=\int_{t_0}^{t}\omega_{ac}\,dt, \tag{38}$$

$$\varphi_{ac}=\int_{t_0}^{t}\left[\frac{C}{B}-\frac{C}{Be^{\frac{B}{A}(t-t_0)}}\right]dt \tag{39}$$

și apoi

$$\varphi_{ac}=\frac{CA}{B^2}\frac{1}{e^{\frac{B}{A}(t-t_0)}}+\frac{C}{B}(t-t_0)-\frac{CA}{B^2}+k_3'. \tag{40}$$

Procedîndu-se ca la 2.4.2. se obține pentru $t_{ac}=t_0$, $\varphi_{ac}=0$, deci $k_3'=0$, relația (40) putîndu-se scrie

$$\varphi_{ac}=\frac{CA}{B^2}e^{-\frac{B}{A}(t-t_0)}+\frac{C}{B}(t-t_0)-\frac{CA}{B^2}. \tag{41}$$

Menținem observația că la limită unghiul de accelerare capătă o valoare precisă, determinată de valoarea timpului de accelerare, t_{ac}, precizată și ea în paragraful 2.2.

2.4.3. *Determinarea unghiului de inversare.* Este evident că unghiul de inversare se obține ca o sumă a unghiurilor de frînare și accelerare (42)

$$\varphi_{inv}=\varphi_{fr}+\varphi_{ac}. \tag{42}$$

Înlocuindu-se în aceasta expresiile unghiurilor de frînare și de accelerare date de relațiile (37) și (41), se obține

$$\varphi_{inv}=\frac{C}{B}\left[t_{ac}+t_{fr}-t_0\right]+\frac{CA}{B^2}\left[\frac{1}{e^{\frac{B}{A}(t_{ac}-t_0)}}+\frac{1}{e^{-\frac{B}{A}t_{fr}}}-2\right], \tag{43}$$

φ_{inv} reprezentînd unghiul în radiani pe lungimea căruia are loc inversarea, sau prin divizarea cu 2π obținîndu-se numărul de rotații necesare din momentul începerii frînării și pînă la terminarea accelerării organelor mobile la inversare.

Este evident că în toate relațiile anterioare prezentate drept rezultat al unor calcule deductive asupra parametrilor cinematici care caracterizează inversarea, pentru finalitatea lor este suficient ca în locul notațiilor făcute cu A, B, C, să se introducă J, f și $\frac{q_M p}{2\pi}$ a căror semnificație este bine definită.

3. REPREZENTAREA GRAFICĂ A VARIAȚIEI VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR UNGHIULARE

3.1. STUDIUL VARIAȚIEI VITEZEI UNGHIULARE

3.1.1. *Pentru perioada de frînare.* Preluîndu-se relația (20) al cărui domeniu de definiție este $t \in [-t_{fr}; 0]$ și folosind metodele cunoscute de trasare a curbei de variație, s-a obținut o alură ca în figura 3. Se observă că funcția este continuu crescătoare și convexă pe tot domeniul.

3.1.2. *Pentru perioada de accelerare.* Domeniul de definiție al vitezei unghiulare în această perioadă este $t \in [t_0; t_{ac}]$. Pentru $t \in [0; t_0]$ viteza unghiulară se menține constantă. Reprezentîndu-se grafic $\omega_{ac} = f(t)$ s-a obținut o variație conform figurii 3. Funcția este strict crescătoare după o lege exponențială, alura ei fiind concavă pe tot domeniul.

3.1.3. *Pentru perioada* $[0; t_0]$. Pe domeniul amintit graficul funcției $\omega = \omega(t)$ prezintă un palier de lungime t_0 pe durata căruia $\omega = 0$. Acesta apare între sfîrșitul mișcării de frînare și începutul mișcării de accelerare, fiind necesar pentru :

— retransmiterea impulsului de presiune,

— creșterea presiunii în instalație pentru învingerea forțelor de frecare vîscoasă și a forțelor de adeziune dintre elementele mobile ale motorului hidraulic, pentru învingerea diferitelor sarcini precum și pentru compensarea pierderilor datorate umplerii incomplete și compresibilității fluidului.

3.2. STUDIUL VARIAȚIEI ACCELERAȚIEI UNGHIULARE

3.2.1. *Pentru perioada de frînare.* În această perioadă variația accelerației este caracterizată de relația (30), care este valabilă pentru domeniul de definiție $t \in [-t_{fr}; 0]$. Reprezentarea grafică a curbei de variație din figura 3 prezintă o alură convexă pe domeniul dat.

3.2.2. *Pentru perioada de accelerare.* Curba reprezentată de ecuaţia (31) este definită pe intervalul $t \in [t_0 ; t_{ac}]$ şi evoluţia acestuia în timp este precizată în figura 3.

3.3. REPREZENTAREA GRAFICĂ

În figura 3 sînt reprezentate grafic funcţiile analizate mai sus şi anume viteza şi acceleraţia unghiulară pe toată durata procesului tranzitoriu.

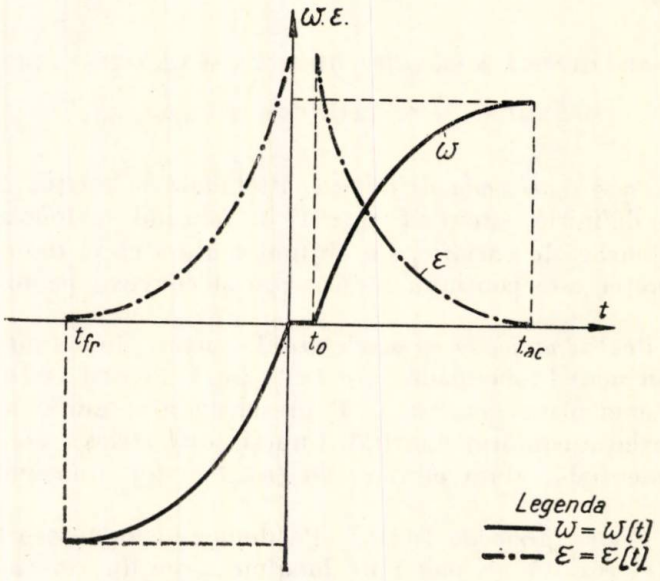


Fig. 3

4. REZOLVAREA PE CALCULATORUL ANALOGIC

Pentru alcătuirea schemei structurale a ecuaţiei (17) în vederea modelării pe calculatorul analogic a fenomenelor care au loc în timpul procesului tranzitoriu a fost necesar următoarele:

— să se transforme ecuaţia diferenţială care caracterizează funcţionarea sistemului astfel încît rezolvarea să se efectueze în raport cu necunoscuta problemei (variabila dependentă), doar prin integrări,

— la realizarea schemei să se aibă în vedere ca necunoscuta cu ordinul maxim de derivare să rezulte la ieşirea unui amplificator sumator,

— să se prevadă un număr de amplificatoare integratoare ale tensiunii, ce reprezintă variabila dependentă, egal cu ordinul cel mai mare al derivatei variabilei căutate,

— să se simuleze funcţiile de excitaţie cu ajutorul surselor de tensiune, sau alte elemente ce conţin amplificatoare operaţionale,

— pe baza analizei ecuațiilor să se calculeze factorii de scară și valorile tuturor elementelor operaționale din circuit (rezistențe, capacități etc.). Se va adopta metoda variabilelor normate, dată fiind utilitatea practică a acesteia,

— realizarea fizică a schemei pe calculatorul analogic cu aplicarea condițiilor inițiale și a sarcinilor.

Ecuația (17) se poate scrie simplificat sub forma

$$J\,\overset{\circ\circ}{\varphi} + f\,\overset{\circ}{\varphi} - q_M p = 0, \tag{44}$$

în care f reprezintă coeficientul de frecare vîscoasă și se poate exprima $f = (a + q_M b)c$, în care

$a = zm_p$ = masa pistonașelor = $9 \times 0{,}26$ kgf,

$b = \rho_{fl}$ = densitatea fluidului = $0{,}9 \times 10^{-3}$ kgf/m^3,

c = viscozitatea dinamică = $0{,}3 \times 10^{-4}$ m^2/s.

Înlocuind în relația (44) expresia precizată pentru f se obține

$$J\overset{\circ\circ}{\varphi} + c(a + q_M b)\overset{\circ}{\varphi} - q_M b = 0, \tag{45}$$

se observă că înlocuind $\overset{\circ}{\varphi} = \omega$, $\overset{\circ\circ}{\varphi} = \overset{\circ}{\omega}$, ecuația diferențială de ordinul 2 trece într-una de ordinul 1.

$$J\overset{\circ}{\omega} + c(a + q_M b)\,\omega - q_M b = 0. \tag{46}$$

Separîndu-se derivata de cel mai mare ordin se obține ecuația

$$\overset{\circ}{\omega} = -\left[\frac{(a + q_M b)\,c}{J}\,\omega - \frac{q_M p}{J}\right]. \tag{47}$$

Impunînd condiția ca în funcționarea calculatorului valorile de regim să nu depășească valorile maxime ale lui ω și $\overset{\circ}{\omega}$ se obțin succesiv:

$$\omega_{max} = \frac{q_M p}{(a + q_M b)\,c}, \tag{48}$$

$$\overset{\circ}{\omega}_{max} = \frac{q_M p}{J}, \tag{49}$$

prin aplicarea metodelor variabilelor normate, ecuația (47) se transformă la rîndul ei succesiv în

$$\overset{\circ}{\bar{\omega}} = -\left[\frac{(a + q_M b)\, c}{J}\,\frac{\omega_M}{\overset{\circ}{\omega}_M}\,\bar{\omega} - \frac{q_M p}{J}\,\frac{1}{\overset{\circ}{\omega}_M}\right], \tag{50}$$

$$\overset{\circ}{\bar{\omega}} = -\left[\frac{c(a + q_M b)}{J}\,\frac{\dfrac{q_M p}{J}}{\dfrac{c(a + q_M b)}{J}}\,\bar{\omega} - \frac{q_M p}{J}\,\frac{1}{\dfrac{q_M p}{J}}\right], \tag{50'}$$

deci, în final,

$$\overset{\circ}{\bar{\omega}} = -(\bar{\omega} - 1). \tag{51}$$

Schema bloc a ecuației (51) este reprezentată în figura 4.

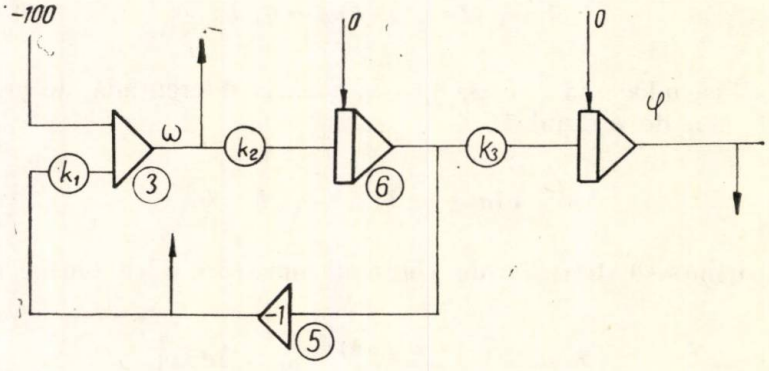


Fig. 4

4.1. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR AMPLIFICATORILOR

Se observă coeficientul $k_1 = 1$.

Scriindu-se egalitatea mărimilor care intră și care ies din elementul 6 (vezi fig. 4) ca o lege de continuitate se obține

$$\omega = -\frac{\omega_M}{\overset{\circ}{\omega}_M}\,\frac{k_2 n}{R_2 c_2}\int_0^t \overset{\circ}{\omega}\, \mathrm{d}t. \tag{52}$$

Relația (52) este valabilă doar pentru

$$\frac{\omega_M}{\overset{\circ}{\omega}_M} \frac{k_2 n}{R_2 C_2} = 1, \tag{53}$$

de unde se poate deduce valoarea coeficientului introdus de potențiometrul 2 :

$$k_2 = \frac{R_2 C_2}{n} \frac{c(a + q_M b)}{J}, \tag{54}$$

unde n reprezintă factorul de scară de timp.

Pentru determinarea coeficientului k_3, necesar și el la modelare, se scrie egalitatea mărimilor de intrare cu cele de ieșire pentru elementul 3 în mărimi normalizate, rezultînd

$$k_3 = \frac{R_3 C_3}{n} \frac{q_M p}{c(a + q_M b)} \frac{1}{\varphi_M}. \tag{55}$$

În cadrul calculelor anterioare și al relațiilor prezentate s-au folosit următoarele notații :

k_1, k_2, k_3 — valori constante pentru un caz practic dat, introduse cu ajutorul potențiometrelor 1, 2, 3, ale căror mărimi sînt delimitate de $0{,}1 \leqslant k_i \leqslant 1$,
R_i — rezistențe electrice, dar $0{,}1 \leqslant RC \leqslant 1$,
C_i — capacități electrice,
$n(1, 10, 100)$ — factorul de scară de timp,
φ — coordonata generalizată,
φ_{max} — 30 radiani,
$t = n\, t_c$ — timpul real al procesului tranzitoriu,
t_c — timpul pe calculator.

Pe baza relațiilor stabilite la programarea calculatorului analogic, relațiile (54) și (55), au fost determinați atît coeficienții de amplificare ai potențiometrelor k_2 și k_3, cît și rezistențele R_2, R_3 și capacitățile C_2, C_3, astfel încît condițiile impuse de posibilitățile aparaturii ($0{,}1 \leqslant RC \leqslant 1$) să permită modelarea. Totodată a fost determinată scara de timp, prin coeficientul de scară de timp n, care reprezintă legătura între timpul fenomenului de calculator și timpul fenomenului fizic. Rezultatele acestor operații de pregătire a informațiilor se află înscrise în tabela 1.

În aceeași tabelă sînt trecute diferitele valori ale capacităților specifice ale motorului hidraulic, q_M, presiuni, momente de inerție și coeficienți de frecare, valori care au fost stabilite pentru cazurile mai

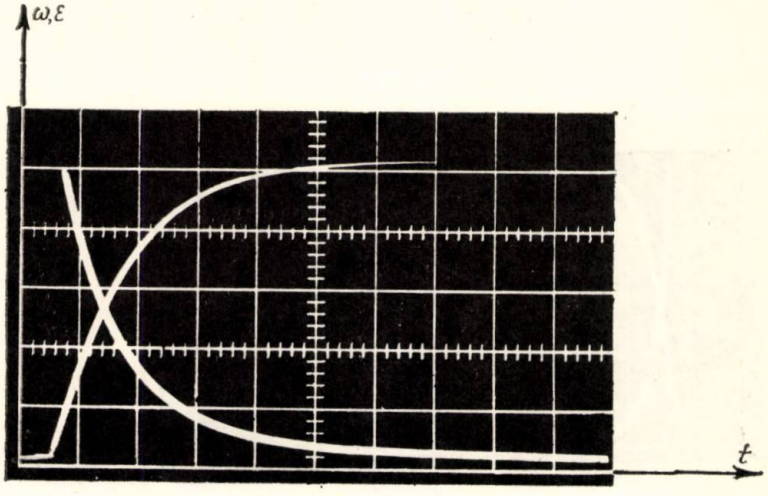
frecvent întîlnite în construcţia şi utilizarea motoarelor hidraulice cu pistonaşe radiale.

Se menţionează că în ceea ce priveşte sarcina, pentru uşurinţa efectuării experienţelor s-a folosit o sarcină inerţială plasată pe axa motorului şi considerată a fi compusă din nişte discuri metalice.

Pentru înregistrarea variaţiei parametrilor, viteză şi acceleraţie unghiulară în raport cu timpul, pentru motorul hidraulic în timpul perioadei tranzitorii, mărimile electrice furnizate de maşina de calcul analogic în urma efectuării diferitelor operaţii conform programului stabilit, au fost vizualizate în bază de timp în mod simultan, pe un osciloscop folosind două spoturi luminoase şi fotografiate oscilogramele prezentate în figurile 5—8.

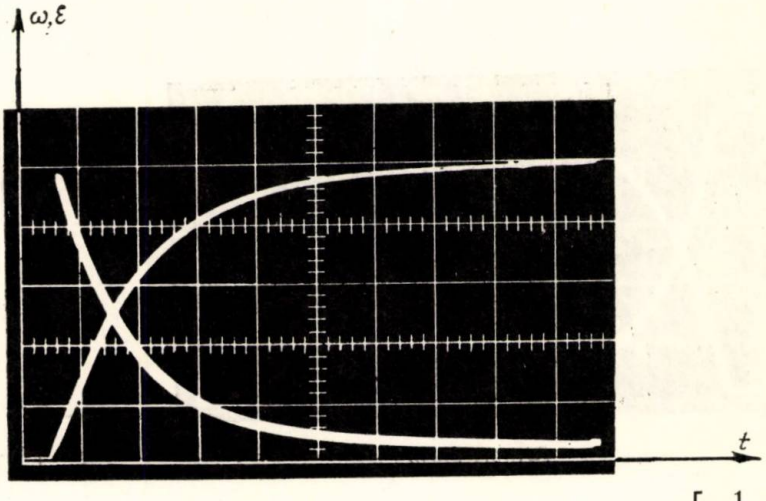
Tabela 1

q_M	f	J	p	R_2C_2	n	k_2	R_3C_3	k_3
14,13	0,705	398	101,78	1	10^{-2}	0,177	1	0,677
56,5	0,717	398	25,44	1	10^{-2}	0,18	1	0,668
14,13	0,705	406	103,83	1	10^{-2}	0,173	1	0,693
56,5	0,717	406	25,95	1	10^{-2}	0,176	1	0,681
14,13	0,705	420	107,41	1	10^{-2}	0,167	1	0,717
56,5	0,717	420	26,85	1	10^{-2}	0,17	1	0,705
14,13	0,705	449	114,81	1	10^{-2}	0,157	1	0,767
56,5	0,717	449	28,70	1	10^{-2}	0,159	1	0,753
14,13	0,705	506	129,41	1	10^{-2}	0,139	1	0,864
56,5	0,717	506	32,35	1	10^{-2}	0,141	1	0,849
14,13	0,705	617	157,79	1	10^{-2}	0,114	1	0,105
56,5	0,717	617	39,44	1	10^{-2}	0,116	1	0,103
14,13	0,705	837	214,06	1	10^{-1}	0,842	1	0,143
56,5	0,717	837	53,51	1	10^{-1}	0,856	1	0,114
14,13	0,705	1271	325,05	1	10^{-1}	0,554	1	0,21
56,5	0,717	1271	81,26	1	10^{-1}	0,564	1	0,213
14,13	0,705	2125	543,46	1	10^{-1}	0,331	1	0,363
56,5	0,717	2125	135,86	1	10^{-1}	0,337	1	0,356
14,13	0,705	3807	973,64	1	10^{-1}	0,185	1	0,55
56,5	0,717	3807	243,41	1	10^{-1}	0,188	1	0,639



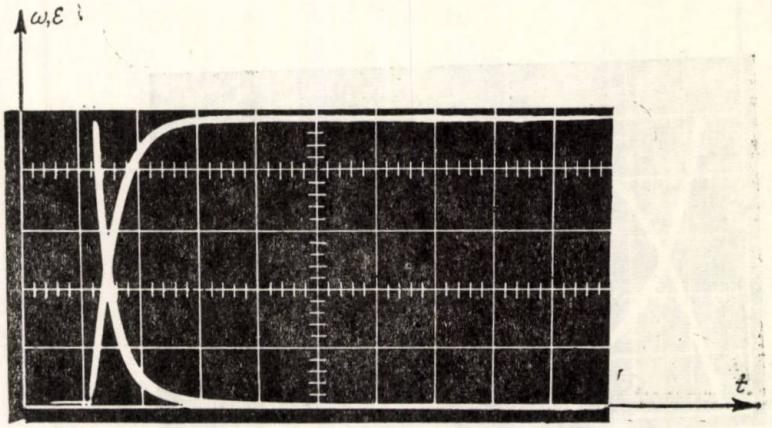
$I = 398\ kgcm^2$ $\qquad k_t = \left[\frac{1}{5 \cdot 10^{-2}}\right]$

Fig. 5



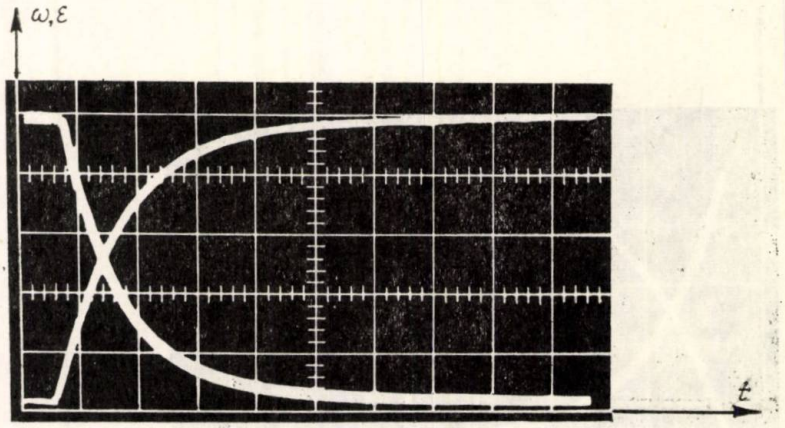
$I = 617\ kgcm^2$ $\qquad k_t = \left[\frac{1}{5 \cdot 10^{-2}}\right]$

Fig. 6



$I = 837\ kgcm^2$ $\qquad k_t = \left[\frac{1}{5 \cdot 10^{-1}}\right]$

Fig. 7



$I = 3807\ kgcm^2$ $\qquad k_t = \left[\frac{1}{5 \cdot 10^{-1}}\right]$

Fig. 8

5. CONCLUZII

În urma studierii rezultatelor obținute pe cale matematică și a oscilogramelor înregistrate se pot desprinde următoarele concluzii :

1. Studiind influența sarcinii asupra timpului de frînare, accelerare și, bineînțeles, inversare se constată o creștere substanțială a acestuia din urmă cu creșterea sarcinii. Astfel, la variația sarcinii inerțiale exterioare de la 0 pînă la o valoare de 617 kg cm², timpul de accelerare (egal cu timpul de frînare) crește de la 0,31 s la 0,47 s, ceea ce înseamnă o creștere de $\simeq 50\%$ (vezi fig. 6). Pentru o sarcină inerțială exterioară de 12 ori mai mare ca cea precedentă timpul de accelerare crește pînă la 4,73 s, ceea ce înseamnă o creștere de aproximativ 10 ori. Rezultă o variație direct proporțională a timpului de accelerare (frînare) cu sarcina.

Un studiu atent permite observația că la sarcina de 617 kg cm², care reprezintă dublul momentului de inerție al elementelor mobile ale motorului hidraulic, creșterea timpului de accelerare (frînare) de 50% ar putea fi redusă prin reducerea momentului de inerție al elementelor în mișcare de rotație ale motorului. Aceasta ar însemna, în special, reducerea razei de dispunere a acestor elemente, întrucît momentul variază proporțional cu pătratul razei. Avînd în vedere acest lucru este necesar a se dispune altfel în spațiu elementele mobile, soluție care ar duce la reducerea razelor, ceea ce s-a și realizat, de altfel, prin dispunerea axială a pistoanelor. În consecință, pentru sistemele hidraulice care necesită o bună comportare în regim dinamic (cum este cazul sistemelor de acționare hidraulică a lanțurilor cinematice de poziționare la mașinile cu comandă după program) nu este recomandabilă folosirea motoarelor cu pistonașe radiale.

2. Analizîndu-se alura curbelor obținute se constată următoarele :

a) atît accelerațiile cît și vitezele unghiulare variază logaritmic în timp (relațiile 20, 21, 30, 31 și oscilogramele din figurile 5—8),

b) în zona origine (vezi fig. 3) accelerația unghiulară prezintă o discontinuitate care determină, la rîndul ei, o variație de presiune de la 0 la valoarea maximă necesară începerii perioadei de accelerare,

c) se constată de asemenea că o dată cu creșterea sarcinii curbele corespunzătoare $\omega = \omega(t)$ și $\varepsilon = \varepsilon(t)$ au raze de curbură mai mari. Aceasta constituie un lucru pozitiv deoarece din acest punct de vedere solicitările din instalația hidraulică se reduc.

Rezultă din cele arătate că din punct de vedere al ameliorării solicitărilor dinamice, în sistemele cu frecvență mare de inversare ar fi necesară prevederea unei posibilități de temporizare în scopul măririi intervalului de timp în care are loc saltul accelerației (deci și saltul presiunilor). În sistemele cu comandă după program, aceasta se poate realiza ușor prin introducerea directă în sistemul de comandă.

3. La creșterea sarcinii viteza unghiulară de regim se atinge după un interval de timp corespunzător mai mare.

4. În cadrul studiului făcut a fost analizată și influența diametrului pistonașelor asupra timpilor de accelerare și frînare ajungîndu-se la concluzia că la o creștere a diametrului de la 10 la 20 mm, timpul s-a redus cu circa 20%.

5. Din studiul făcut asupra relației (28), care exprimă valoarea timpului de inversare, se observă că acesta este format din două cantități :

$$t_{inv} = \frac{J}{f} \ln \frac{q_M p + f\pi^2 n}{q_M p - f\pi^2 n} + t_0 = t_1 + t_0. \tag{56}$$

a) Analizîndu-se expresia lui t_1 se constată că mărimea acestuia este direct proporțională cu sarcina inerțială și invers proporțională cu frecările dintre masele în mișcare relativă precum și cu frecările din interiorul fluidului.

b) Se constată totodată că timpul de inversare crește o dată cu creșterea timpului de staționare în origină, t_0.

c) Este interesant de remarcat totodată că capacitatea specifică a motorului, q_M, și presiunea din sistem, p, nu influențează în mod direct valoarea lui t_1, putîndu-se deci interveni pentru modificarea lor din motive funcționale fără ca timpul de inversare t_{inv} să se modifice corespunzător.

Primită la redacție la 6 iunie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. V. Vîlcovici, Șt. Bălan, R. Voinea, *Mecanică teoretică*, București, Edit. tehnică, 1968.
2. T. D. Truitt, E. A. Rogers, *Inițiere în calc. analogice*, București, Edit. tehnică, 1969.
3. A. Oprean, F. Ionescu, *Dinamica mecanismelor hidrostatice de reglare a lanțurilor cinematice*, Bul. Inst. politehnic București, 2 (1971).

ANALIZA ŞI SINTEZA MECANISMULUI CU MIŞCARE INTERMITENTĂ, FĂRĂ FORŢĂ PERCUTANTĂ

de I. SZÉKELY şi A. ANTAL
Institutul politehnic Cluj

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR

Mecanismul cu mişcare intermitentă care se studiază este format dintr-un mecanism manivelă-patină oscilantă şi o roată dinţată. Avantajul acestui mecanism faţă de alte mecanisme care servesc aceluiaşi scop (crucea de Malta, mecanismul cu clichet) constă în aceea că la începutul mişcării elementului condus forţa percutantă teoretic este egală cu zero.

Mecanismul cu mişcare itermitentă (fig. 1) este format dintr-un mecanism bielă-manivelă cu patină oscilantă şi o roată dinţată [1]. Pîrghia *5* reprezintă biela mecanismului cu patină oscilantă, ea fiind pusă în mişcare de arborele *1* prin intermediul excentricului *2*. În timpul unei rotaţii a arborelui *1*, bara *4* (avînd secţiunea trapezoidală), legată rigid de bielă, intră în contact cu profilul evolventic al dintelui roţii dinţate *3* şi îl roteşte pe acesta cu un unghi bine determinat. Concomitent barele *6* şi *7* (rigid legate de bielă), aflate în contact cu profilul evolventic al dinţilor, rotesc roata în acelaşi sens ca şi bara *4*. În momentul cînd contactul dintre bara *4* şi dinte se întrerupe, barele *6* şi *7* nu vor mai roti roata în continuare, ci îl vor fixa în poziţia pe care acesta din urmă l-a ocupat în clipa întreruperii contactului cu bara *4*. În consecinţă, mecanismul poate fi utilizat la transmiterea continuă a momentelor cu toate că mişcarea este discontinuă.

Avantajul mecanismului ce se studiază faţă de alte mecanisme care servesc acelaşi scop (crucea de Malta, mecanismul cu clichet etc.) constă în aceea că, la începutul mişcării elementului condus, forţa percutantă teoretic este egală cu zero. O astfel de caracteristică este deosebit de utilă în acele cazuri cînd elementele care execută mişcări periodice trebuie să se fixeze în perioada opririi în poziţii bine determinate. Mecanisme de acest fel se folosesc frecvent în construcţia maşinilor-unelte.

La studiul cinematic al mecanismului cu mişcare intermitentă se utilizează o schemă simplificată (fig. 2), care scoate în evidenţă condiţiile de funcţionare corectă a mecanismului. Dreapta *D* (care reprezintă o muchie a

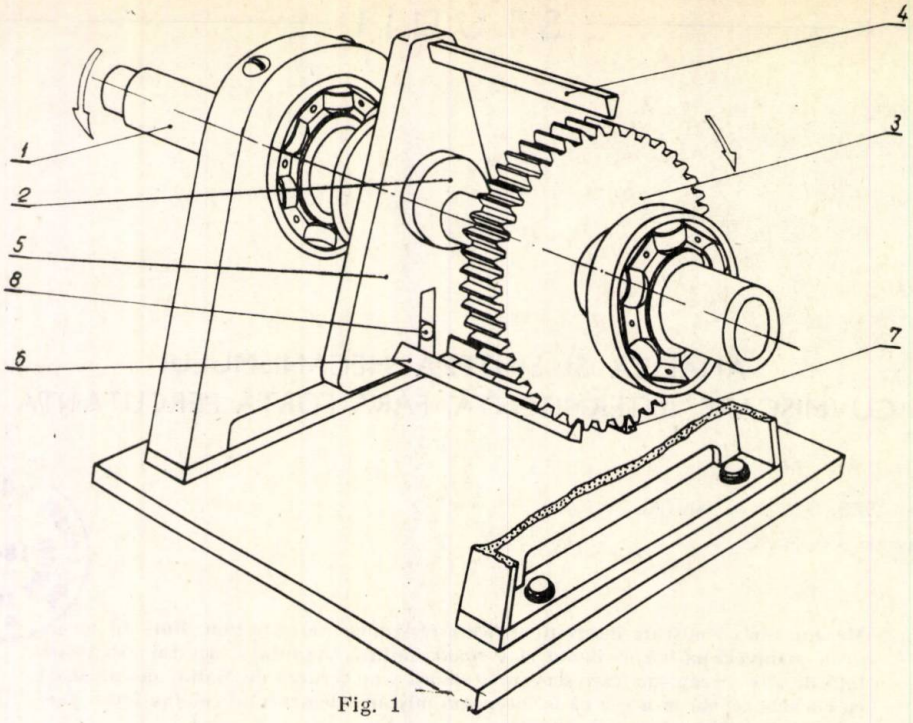

1
2
3
4
5
6
7
8

Fig. 1

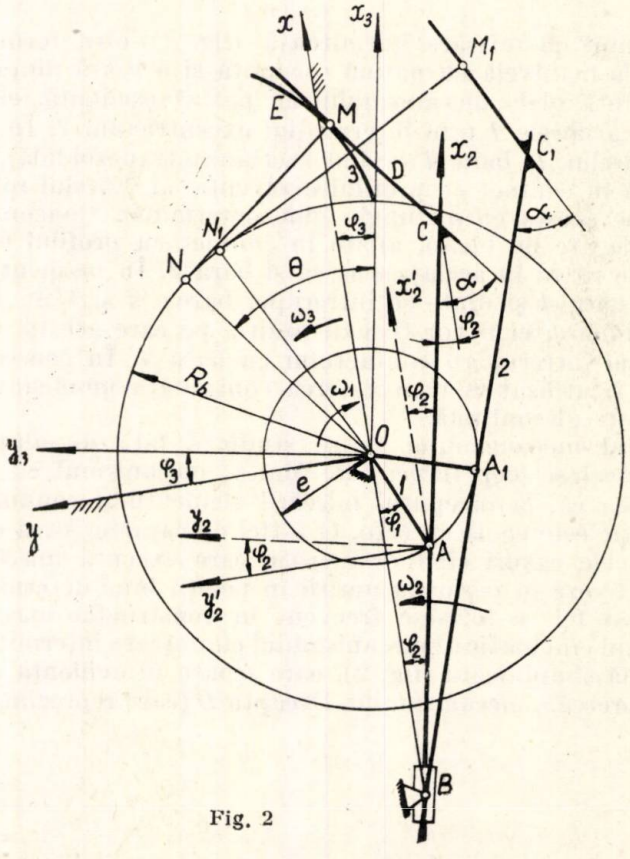

x
x_3
M_1
E
M
x_2
C_1
3
D
α
N_1
φ_3
C
N
θ
x_2'
α
ω_3
φ_2
2
R_b
ω_1
φ_2
O
y_3
φ_3
A_1
e
1
y
y_2
φ_1
φ_2
A
y_2'
ω_2
φ_2
B

Fig. 2

secțiunii profilului trapezoidal) execută o mișcare plan-paralelă, iar profilul evolventic E execută o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe. Pentru determinarea caracteristicilor cinematice ale mecanismului cu mișcare intermitentă se aleg următoarele sisteme de axe de coordonate:

sistemul de referință fix Oxy cu originea în centrul roții O, sistemul de axe mobil Ax_2y_2 rigid legat de bielă, axa Ax_2 fiind situată pe direcția bielei, iar originea în butonul manivelei, și sistemul de axe de coordonate mobil Ox_3y_3 rigid legat de roata dințată cu originea în punctul O.

Scriind ecuațiile parametrice ale dreptei D și ale evolventei E în sistemele de axe de care acestea sînt legate (Ax_2y_2, respectiv Ox_3y_3) și ținînd seamă de formulele de transformare corespunzătoare ale coordonatelor, se obțin ecuațiile dreptei D, respectiv ale evolventei E în sistemul fix de axe Oxy, după cum urmează:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi_2 - e\cos\varphi_1 + \rho\cos(\alpha - \varphi_2), \\ y &= -a\sin\varphi_2 - e\sin\varphi_1 + \rho\sin(\alpha - \varphi_2), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x &= R_b[\cos(\theta - \varphi_3) + \theta\sin(\theta - \varphi_3)], \\ y &= R_b[\sin(\theta - \varphi_3) - \theta\cos(\theta - \varphi_3)], \end{aligned} \tag{2}$$

unde

ρ reprezintă parametrul dreptei D,
θ și φ_3 — parametrii evolventei E
R_b și e — raza cercului de bază a evolventei, respectiv lungimea manivelei,

$a = AC$.

Proiecțiile normalelor la dreapta D notate cu $(N_x)_D$, $(N_y)_D$ și la evolventa E notate cu $(N_x)_E$, $(N_y)_E$ se determină prin derivarea relațiilor (1) și (2) în raport cu parametrul ρ, respectiv θ:

$$\begin{aligned} (N_x)_D &= \frac{dx}{d\rho} = \cos(\alpha - \varphi_2), \\ (N_y)_D &= \frac{dy}{d\rho} = \sin(\alpha - \varphi_2), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (N_x)_E &= \frac{dx}{d\theta} = R_b\theta\cos(\theta - \varphi_3), \\ (N_y)_E &= \frac{dy}{d\theta} = R_b\theta\sin(\theta - \varphi_3). \end{aligned} \tag{4}$$

Pentru asigurarea unui contact permanent între dreptele rigid legate de bielă și profilele evolventice ale roții dințate, este necesar ca în tot timpul funcționării mecanismului profilele D și E să nu se îndepărteze sau întrepătrundă și totodată să aibă normală comună în orice poziție [2]. Condițiile de mai sus sînt îndeplinite pentru punctul de contact dacă

$$r_D = r_E, \tag{5}$$

$$\bar{n}_D = \bar{n}_E, \tag{6}$$

unde

r_D și r_E reprezintă — vectorii de poziție (raportate la sistemul fix de axe) ai punctelor de pe profilele D și E care la momentul dat se află în contact,

$\bar{n}_D$ și $\bar{n}_E$ — versorii normalelor la cele două profile D și E ale căror ecuații sînt scrise față de sistemul fix de axe.

Ecuațiile de contact (5) și (6), corespunzătoare profilelor D și E, în formă scalară, se obțin din ecuațiile (1) și (2), respectiv (3) și (4), astfel:

$$\begin{aligned} a\cos\varphi_2 - e\cos\varphi_1 + \rho\cos(\alpha-\varphi_2) &= R_b[\cos(\theta-\varphi_3)+\theta\sin(\theta-\varphi_3)], \\ -a\sin\varphi_2 - e\sin\varphi_1 + \rho\sin(\alpha-\varphi_2) &= R_b[\sin(\theta-\varphi_3)-\theta\cos(\theta-\varphi_3)], \end{aligned} \tag{7}$$

$$\cos(\alpha-\varphi_2) = \cos(\theta-\varphi_3),$$

$$\sin(\alpha-\varphi_2) = \sin(\theta-\varphi_3).$$

Ultimele două relații ale sistemului (7) conduc la

$$\alpha - \varphi_2 = \theta - \varphi_3. \tag{8}$$

Din prima ecuație a sistemului (7) se obține, ținînd seamă de (8),

$$\rho = \frac{R_b[\cos(\alpha-\varphi_2) + \theta\sin(\alpha-\varphi_2) - a\cos\varphi_2 + e\cos\varphi_1}{\cos(\alpha-\varphi_2)}. \tag{9}$$

Înlocuind egalitatea (9) în a doua ecuație a sistemului (7) și avînd în vedere că $\cos(\alpha-\varphi_2) \neq 0$, rezultă

$$\theta = \frac{a\sin\alpha - e\sin(\alpha-\varphi_2-\varphi_1)}{R_b}. \tag{10}$$

Din figura 2 se poate scrie

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{e \sin \varphi_1}{b - e \cos \varphi_1}, \tag{11}$$

unde $b = OB$.

După înlocuirea relaţiilor (10) şi (11) în relaţia (8) se obţine funcţia de poziţie de ordinul zero în formă explicită

$$\varphi_3 = \frac{a \sin \alpha - e \sin\left(\alpha - \varphi_1 - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{e \sin \varphi_1}{b - e \cos \varphi_1}\right)}{R_b} + \operatorname{arc\,tg} \frac{e \sin \varphi_1}{b - e \cos \varphi_1} - \alpha. \tag{12}$$

Derivînd funcţia de poziţie de ordinul zero (11) de două ori consecutiv în raport cu timpul, se obţine viteza unghiulară ω_2 şi acceleraţia ε_2 a bielei în forma

$$\omega_2 = \dot{\mathcal{R}}_2 \omega_1, \tag{13}$$

$$\varepsilon_2 = \ddot{\mathcal{R}}_2 \omega_1^2 + \dot{\mathcal{R}}_2 \varepsilon_1, \tag{14}$$

unde $\dot{\mathcal{R}}_2$ şi $\ddot{\mathcal{R}}_2$ sînt funcţiile de transmitere de ordinul întîi, respectiv de ordinul doi [3], considerînd ca intrare elementul motor şi ca ieşire biela. Valorile acestor funcţii de transmitere se determină cu relaţiile

$$\dot{\mathcal{R}}_2 = \frac{eb \cos \varphi_1 - e^2}{b^2 - 2eb \cos \varphi_1 + e^2}, \tag{15}$$

$$\ddot{\mathcal{R}}_2 = \frac{eb \sin \varphi_1 (e^2 - b^2)}{(b^2 - 2eb \cos \varphi_1 + e^2)^2}. \tag{16}$$

Derivînd funcţia de poziţie de ordinul zero (12) de două ori consecutiv în raport cu timpul, se obţine viteza unghiulară ω_3 şi acceleraţia unghiulară ε_3 a roţii dinţate în forma

$$\omega_3 = \dot{\mathcal{R}}_3 \omega_1, \tag{17}$$

$$\varepsilon_3 = \ddot{\mathcal{R}}_3 \omega_1^2 + \dot{\mathcal{R}}_3 \varepsilon_1, \tag{18}$$

unde $\dot{\mathcal{R}}_3$ şi $\ddot{\mathcal{R}}_3$ sînt funcţiile de transmitere de ordinul întîi, respectiv de ordinul doi, considerînd ca intrare elementul motor şi ca ieşire roata

dinţată. Valorile acestor funcţii de transmitere se determină cu relaţiile :

$$\mathcal{R}_3 = -\frac{e}{R_b}\cos\left(\alpha - \varphi_1 - \operatorname{arc\,tg}\frac{e\sin\varphi_1}{b - e\cos\varphi_1}\right)\frac{eb\cos\varphi_1 - b^2}{b^2 - 2eb\cos\varphi_1 + e^2} +$$

$$+\frac{eb\cos\varphi_1 - e^2}{b^2 - 2eb\cos\varphi_1 + e^2}, \tag{19}$$

$$\ddot{\mathcal{R}}_3 = \frac{e}{R_b}\sin\left(\alpha - \varphi_1 - \operatorname{arc\,tg}\frac{e\sin\varphi_1}{b - e\cos\varphi_1}\right)\left(\frac{eb\cos\varphi_1 - b^2}{b^2 - 2eb\cos\varphi_1 + e^2}\right)^2 +$$

$$+\frac{eb\sin\varphi_1(b^2 - e^2)}{(b^2 - 2eb\cos\varphi_1 + e^2)^2}\left[1 - \frac{e}{R_b}\cos\left(\alpha - \varphi_1 - \operatorname{arc\,tg}\frac{e\sin\varphi_1}{b - e\cos\varphi_1}\right)\right]. \tag{20}$$

Se menţionează că la începutul angrenării, adică în momentul în care elementul cu mişcare intermitentă *3* începe să se rotească, funcţia de transmitere de ordinul întîi $\dot{\mathcal{R}}_2 = 0\left(\cos\varphi_1 = \frac{e}{b}\right)$. De aici rezultă că elementele *3* şi *5* pornesc împreună, ambele avînd vitezele unghiulare iniţiale egale cu zero. În consecinţă, se poate afirma că la începutul angrenării nu apare forţa percutantă, ceea ce face să nu existe ciocnire între profilul D şi E, fapt care micşorează esenţial zgomotul în timpul funcţionării.

Dacă în relaţia (12) se înlocuieşte $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, iar $\varphi_1 = \arccos\frac{e}{b}$, se obţine funcţia de poziţie de ordinul zero corespunzătoare punctului M_1 (începutul angrenării)

$$\varphi_3^i = \frac{a}{R_b}\sin\alpha + \frac{e}{R_b}\cos\alpha + \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{e}{b} - \alpha. \tag{21}$$

Din relaţia (21) se poate obţine funcţia de poziţie pentru punctul unde se termină angrenarea, înlocuind $\alpha = -\alpha$

$$\varphi_3^t = -\frac{a}{R_b}\sin\alpha + \frac{e}{R_b}\cos\alpha + \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{e}{b} + \alpha. \tag{22}$$

Însumînd (21) cu (22), se obţine unghiul Φ cu care se roteşte roata la o rotaţie a elementului motor

$$\Phi = \varphi_3^i + \varphi_3^t = 2\frac{e}{R_b}\cos\alpha + \pi - 2\arccos\frac{e}{b}. \tag{23}$$

Unghiul astfel obținut trebuie să fie egal cu pasul unghiular al roții, adică

$$\frac{2\pi}{z} = 2\frac{e}{R_b}\cos\alpha + \pi - 2\arccos\frac{e}{b} \tag{24}$$

sau

$$\arccos\frac{e}{b} - \frac{e}{R_b}\cos\alpha = \frac{\pi}{2}\frac{z-2}{z}. \tag{25}$$

Valoarea excentricității e se poate determina din ecuația transcendentă (25) cunoscînd celelalte elemente.

Se observă din figura 1 că oscilația dinților *6* și *7*, fixați pe bara *5*, este cu atît mai mică cu cît distanța $OB = b$ (fig. 2) este mai mare. Nu este însă bine ca din punct de vedere al gabaritului să se ia b mai mare ca raza cercului exterior al roții dințate R_e.

Alegînd $b = R_e$, ecuația (25) devine

$$\arccos\frac{e}{R_e} - \frac{e}{R_b}\cos\alpha = \frac{\pi}{2}\frac{z-2}{z}. \tag{26}$$

Este ușor de văzut că ea are o singură rădăcină $\frac{e}{R_e}$, căci, reprezentînd geometric curbele (fig. 3)

$$y = \arccos\frac{e}{R_e} \quad \text{și} \quad y = \frac{\pi}{2}\frac{z-2}{z} + \frac{e}{R_b}\cos\alpha, \tag{27}$$

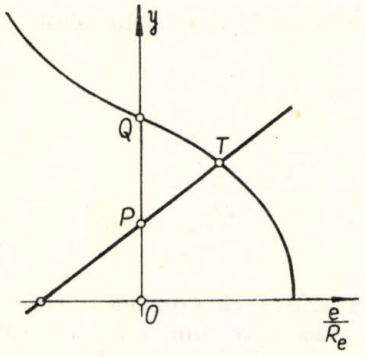


Fig. 3

rezultă că ele au un singur punct de intersecție T, a cărui abscisă este cuprinsă între zero și unu, deci

$$0 < \frac{e}{R_e} < 1,$$

aceasta deoarece panta dreptei de mai sus este $\frac{R_e}{R_b}\cos\alpha \cong 1$ (unghiul făcut de PT cu axa absciselor este aproximativ 45°).

Dezvoltînd în serie termenul $\arccos\frac{e}{R_e}$, rezultă

$$\arccos\frac{e}{R_e}=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\left(\frac{e}{R_e}\right)^{2n+1}}{2n+1}, \tag{28}$$

serie convergentă pentru $\frac{e}{R_e}<1$, deoarece din considerente constructive $e\leqslant 2\ m$, unde m este modulul roții dințate. Presupunînd că în construcția mecanismului vor fi folosite roți dințate necorijate, rezultă

$$\frac{e}{R_e}\leqslant 0{,}2. \tag{29}$$

Ținînd seamă de relația (29), se poate ca din formula (28) să se păstreze numai termenul de gradul întîi, deci

$$\arccos\frac{e}{R_e}=\frac{\pi}{2}-\frac{e}{R_e}. \tag{30}$$

Înlocuind (30) în relația (26) și ținînd seamă de relațiile $R_d=\frac{R_b}{\cos\alpha}$ și $R_e=\frac{m(z+2)}{2}$, rezultă

$$e\cong\pi m\frac{z+2}{4(z+1)}. \tag{31}$$

În lucrarea [1] s-a arătat că eroarea μ care se face prin calcularea excentricității e cu formula aproximativă (31) este $\mu<0{,}002$ mm. Prin urmare, diferența dintre rădăcinile ecuațiilor (26) și (31) este mai mică decît 0,002 mm, ceea ce se încadrează în limita de toleranță admisă.

Valoarea lui $a=AC$, care determină poziția dintelui 4 pe bielă, se determină din figura 2, de unde rezultă expresia pentru determinarea valorii razei unui arc oarecare, care trece prin punctul M_1

$$R=R_b\sqrt{1+\theta^2_{M_1}}, \tag{32}$$

unde

R este raza cercului care determină poziţia punctului M_1 pe profilul evolventic,

θ_{M_1} — unghiul polar, se obţine din relaţia (10) punînd condiţia

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \tag{33}$$

$$\theta_{M_1} = \frac{a \sin \alpha + e \cos \alpha}{R_b}.$$

Înlocuind (33) în (32), se obţine

$$a = AC = A_1C_1 = \frac{\sqrt{R^2 - R_b^2} - e \cos \alpha}{\sin \alpha}. \tag{34}$$

În consecinţă, cunoscînd numărul de dinţi z, modulul roţii dinţate, unghiul α, raza cercului R şi e obţinută din relaţia (31) se pot determina parametrii constructivi ai mecanismului bielă-manivelă cu patină oscilantă.

Primită la redacţie la 3 martie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Székely I., A. Antal, *Mecanism pentru transformarea mişcării de rotaţie continuă în rotaţie discontinuă*, Buletinul ştiinţific al Institutului politehnic Cluj, *5*, 436—442 (1962).
2. F. L. Litvin, *Teoria zubciatîh zaţeplenii*, Moscova, 1960, Fizmatghiz., p. 236—237.
3. I. Székely, V. Handra-Luca, *Studiul cinematic al mecanismelor plane cu ajutorul funcţiilor de transmitere*, St. cerc. mec. apl., *2—3*, 235—250 (1968).

ASUPRA UTILIZĂRII OPERATORULUI DUAL CVATERNIONIC LA STUDIUL MECANISMELOR SPAȚIALE CU CUPLE CINEMATICE SUPERIOARE *)

de N. URSU și P. POPESCU
Institutul politehnic Cluj

Utilizarea operatorilor duali cvaternionici permite determinarea legii de transmitere a mecanismelor spațiale cu o cuplă de clasa I mult mai simplu decît prin metodele analitice cunoscute.
Din relațiile generale deduse prin această metodă se pot obține, prin particularizări, legile de transmitere pentru diferitele mecanisme de acest fel folosite în construcția de mașini și aparate.

Mecanismele spațiale cu cuple superioare de clasa I sînt des utilizate în construcția de mașini electrice de calculat, dispozitive, instrumente de măsură și control etc. În general, suprafețele în contact punctiform sînt fie doi cilindri, fie o sferă și un plan. În aceste cazuri determinarea legii de transmitere a mecanismelor cu metodele analitice obișnuite este deosebit de dificilă. În prezenta lucrare pentru rezolvarea mult mai simplă a acestei probleme se indică folosirea operatorului dual-cvaternionic utilizat la studiul mecanismelor spațiale cu cuple de rotație și rototranslație [7].

Se face convenția că versorii sistemului cartezian de coordonate admit următoarea lege de înmulțire :

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

*) Lucrare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23–27 iunie 1969.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 2, 1972, P. 327–338

Considerarea acestei legi de înmulțire permite definirea cvaternionilor [3], [6]. Aceștia sînt expresii de forma

$$q = a + bi + cj + dk$$

și se pot obține ca rezultat al înmulțirii sau al împărțirii a doi vectori exprimați cu ajutorul versorilor bazei considerate. Se observă deci că cvaternionul este compus dintr-o parte scalară și una vectorială

$$q = S \cdot q + V \cdot q.$$

O dreaptă în spațiu este definită dacă se cunoaște versorul său u și momentul acestuia în raport cu originea (fig. 1). Se notează

$$u^* = u + \omega V \cdot ru \tag{1}$$

și se denumește șurub al dreptei considerate. Litera V indică faptul că din produsul cvaternionic ru se va considera doar partea vectorială, iar ω este operatorul lui Clifford ($\omega^2 = 0$).

Unghiul dual a două drepte (fig. 2) se definește ca numărul dual avînd partea reală egală cu unghiul dreptelor, iar ca parte de moment distanța dintre drepte [4]

$$\alpha^* = \alpha + \omega\alpha_1.$$

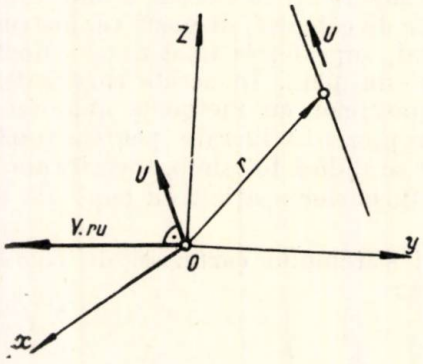


Fig. 1

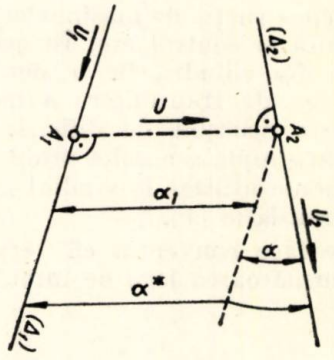


Fig. 2

În [7] se demonstrează relația

$$u_2^* = (\cos\alpha^* + u^* \sin\alpha^*)u_1^*, \tag{2}$$

care permite determinarea poziției dreptei Δ_2 dacă se cunoaște poziția dreptei Δ_1, a normalei comune u și unghiul dual între cele două drepte.

În continuare se va utiliza această relație pentru studiul mecanismului spațial cu o cuplă de clasa I, reprezentat în figura 3. Contactul dintre elementul conducător și condus este punctiform, fiind punctul comun al celor două suprafețe cilindrice de raze r_1 și r_2.

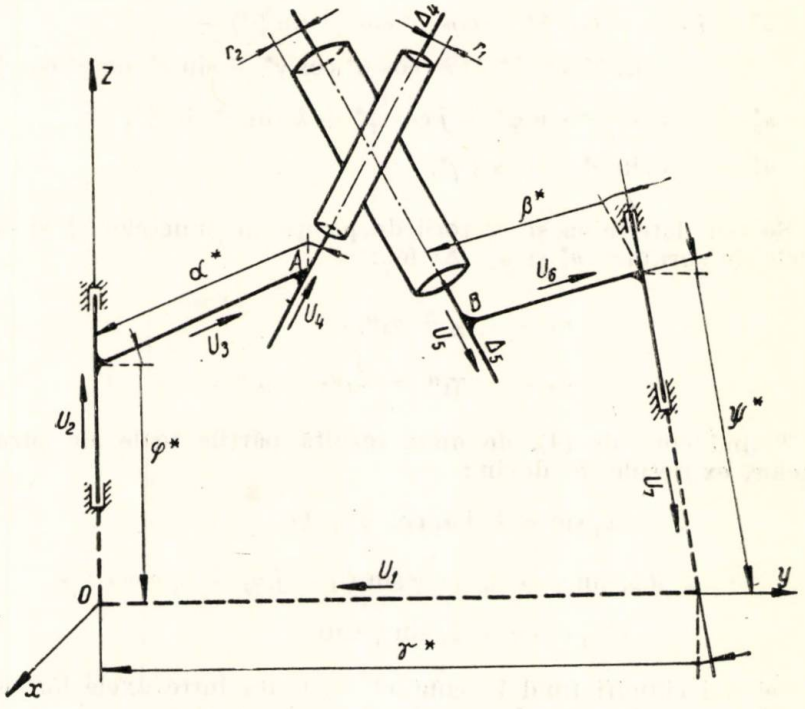


Fig. 3

Poziţiile axelor de simetrie a acestor doi cilindri, determinate prin şuruburile u_4^* şi u_5^*, vor fi funcţie de u_1^*, u_2^*, unghiurile duale α^*, β^*, γ^*, care determină din punct de vedere geometric mecanismul, şi unghiurile φ şi ψ, a căror relaţie de legătură trebuie determinată. Se mai cunoaşte partea de moment φ_1 şi ψ_1 a unghiurilor duale φ^* şi ψ^*.

Se pot scrie următoarele relaţii :

$$
\begin{aligned}
u_1^* &= -j, \\
u_2^* &= k, \\
u_3^* &= (\cos \varphi^* + u_2^* \sin \varphi^*)(-u_1^*), \\
u_4^* &= (\cos \alpha^* + u_3^* \sin \alpha^*)(-u_2^*), \\
u_7^* &= [\cos \gamma^* + (-u_1^*) \sin \gamma^*](-u_2^*), \\
u_6^* &= [\cos \psi^* + (-u_7^*) \sin \psi^*](-u_1^*), \\
u_5^* &= [\cos \beta^* + (-u_6^*) \sin \beta^*](-u_7^*).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

În urma efectuării calculelor se va obține

$$
\begin{aligned}
u_3^* &= -i\sin\varphi^* + j\cos\varphi^*,\\
u_4^* &= -i\cos\varphi^*\sin\alpha^* - j\sin\alpha^*\sin\varphi^* - k\cos\alpha^*,\\
u_5^* &= i(\sin\gamma^*\cos\beta^* - \cos\psi^*\cos\gamma^*\sin\beta^*) - \\
&\quad - j\sin\beta^*\sin\psi^* + k(\cos\beta^*\cos\gamma^* + \sin\beta^*\sin\gamma^*\cos\psi^*),\\
u_6^* &= -i\cos\gamma^*\sin\psi^* + j\cos\psi^* + k\sin\gamma^*\sin\psi^*,\\
u_7^* &= -i\sin\gamma^* - k\cos\gamma^*.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Se pot determina și vectorii de poziție ai punctelor A și B de pe dreptele de șuruburi u_4^* și u_5^*. Astfel:

$$
\begin{aligned}
r_A &= \varphi_1 u_2 + \alpha_1 u_3,\\
r_B &= -\gamma_1 u_1 - \psi_1 u_7 - \beta_1 u_6.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ținînd cont de (4), de unde rezultă părțile reale ale șuruburilor dreptelor, expresiile (5) devin:

$$
\begin{aligned}
r_A &= -i\alpha_1\sin\varphi + j\,\alpha_1\cos\varphi + k\varphi_1,\\
r_B &= i(\psi_1\sin\gamma + \beta_1\cos\gamma\sin\psi) + j(\gamma_1 - \beta_1\cos\psi) +\\
&\quad + k(\psi_1\cos\gamma - \beta_1\sin\gamma\sin\psi).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Cei doi cilindri fiind în contact, distanța între axele lor de simetrie va fi $r_1 + r_2$. Impunînd această condiție dreptelor Δ_4 și Δ_5, va rezulta relația de legătură dintre unghiul φ de rotație al elementului conducător și unghiul ψ al elementului condus. Este deci satisfăcută următoarea relație:

$$
r_1 + r_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A\\ u_{4x} & u_{4y} & u_{5z}\\ u_{5x} & u_{5y} & u_{5z}\end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} u_{4y} & u_{4z}\\ u_{5y} & u_{5z}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_{4z} & u_{4x}\\ u_{5z} & u_{5x}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_{4x} & u_{4y}\\ u_{5x} & u_{5y}\end{vmatrix}^2}}.
\tag{7}
$$

Problema determinării dependenței $\psi = \psi(\varphi)$ este mult simplificată în cazul cînd razele cilindrilor sînt mici și s-ar putea neglija. În acest caz (7) devine

$$
\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A\\ u_{4x} & u_{4y} & u_{4z}\\ u_{5x} & u_{5y} & u_{5z}\end{vmatrix} = 0
$$

sau, făcînd înlocuirile,

$$\begin{vmatrix} \psi_1 \sin\gamma + & \gamma_1 - \beta_1 \cos\psi - & \psi_1 \cos\gamma - \\ + \beta_1 \cos\gamma \sin\psi + & - \alpha_1 \cos\varphi & - \beta_1 \sin\gamma \sin\psi - \varphi_1 \\ + \alpha_1 \sin\varphi & & \\ \sin\alpha \cos\varphi & \sin\alpha \sin\varphi & \cos\alpha \\ \sin\beta \cos\gamma \cos\psi - & \sin\beta \sin\psi & - \sin\beta \sin\gamma \cos\psi - \\ - \cos\beta \sin\gamma & & - \cos\beta \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd acest determinant se va obține o expresie de forma

$$(a_1 + a_2 \sin\varphi + a_3 \cos\varphi) \sin\psi + (a_4 + a_5 \sin\varphi + a_6 \cos\varphi) \cos\psi + \\ + a_7 + a_8 \sin\varphi + a_9 \cos\varphi = 0, \tag{8}$$

unde

$$\begin{aligned} a_1 &= - \psi_1 \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma, \\ a_2 &= - \alpha_1 \cos\alpha \sin\beta - \beta_1 \sin\alpha \cos\beta, \\ a_3 &= - \varphi_1 \sin\alpha \sin\beta + \psi_1 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma, \\ a_4 &= - \alpha_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \beta_1 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma + \\ &\quad + \gamma_1 \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma, \\ a_5 &= \varphi_1 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \psi_1 \sin\alpha \sin\beta, \\ a_6 &= - \alpha_1 \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma - \beta_1 \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \\ &\quad + \gamma_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma, \\ a_7 &= - \alpha_1 \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma - \beta_1 \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma - \\ &\quad - \gamma_1 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma, \\ a_8 &= - \varphi_1 \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma, \\ a_9 &= \alpha_1 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma - \beta_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \\ &\quad + \gamma_1 \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

Dimensiunile mecanismului fiind presupuse cunoscute, cu ajutorul formulelor (9) se determină valorile constantelor ce intervin în ecuația trigonometrică (8), iar aceasta se poate rezolva cu una din metodele cunoscute.

Pentru o anumită valoare a unghiului φ, ecuația (8) devine

$$A_0 \sin\psi + A_3 \cos\psi + A_6 = 0$$

sau, înlocuind $\sin\psi$ şi $\cos\psi$ prin $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$, obţinem

$$(A_6 - A_3)\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2} + 2A_0\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} + A_3 + A_6 = 0. \tag{10}$$

Cu ajutorul relaţiilor (8), (9), (10) putem determina valorile unghiului ψ pentru toate valorile unghiului φ. Acest calcul se poate efectua pe un calculator eledronic cifric conform următorului program scris în ALGOL-60 [1], [2].

```
begin real pi, phi, psi 1, psi 2; array a[1 : 9];
  pi : = 3,14159
  for phi : = pi/180 step pi/180 until 2 × pi do
    begin integer i, real A[3×i], B1, B2, B3;
      for i = o step 1 until 2 do
      A[3×i] : = a[1+3×i] + a[2+3×i] × sin (phi) + a[3+3×1]×
                 × cos (phi)
      B1 : = A[6] − A[3]
      B2 : = 2 × A[o]
      B3 : = A [3] + A [6]
      begin real Y1, Y2
        if B1 : = o then Y1 : = − B3/B2 else
          begin real delta
            delta : = B 2 ↑ 2 − 4×B1×B3
            if delta ⩾ o then
              begin
                  Y1 : =(− B2 + sqrt (delta))/2×B1
                  Y2 : =(− B2 − sqrt (delta))/2×B1
              end
          end
      end
    end
  psi 1 : = 2× arctan Y1
  p si 2 : = 2× arctan Y2
  psi 1 : = psi 1×180/pi
  psi 2 : = p si 2×180/pi
  print (phi, psi 1, psi 2)
end
```

În cazul cînd suma razelor cilindrilor este relativ mare, trebuie să fie utilizată relaţia (7), care, în urma înlocuirii termenilor şi a efectuării calculelor, ne va da o relaţie de legătură între φ şi ψ mult mai complicată decît (8).

Se calculează mai întîi expresia de sub radical, de la numitorul lui (7)

$$E = \begin{vmatrix} \sin\alpha \sin\varphi & \cos\alpha \\ \sin\beta \sin\psi & -\sin\beta \sin\gamma \cos\psi - \\ & -\cos\beta \cos\gamma \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\varphi \sin\alpha \\ -\sin\beta \sin\gamma \cos\psi - & \sin\beta \cos\gamma \cos\psi - \\ -\cos\beta \cos\gamma & -\cos\beta \sin\gamma \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\alpha & \sin\alpha \sin\varphi \\ \sin\beta \cos\gamma \cos\psi - & \sin\beta \sin\psi \\ -\cos\beta \sin\gamma & \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (b_1 + b_2 \cos^2\varphi) \sin^2\psi + (b_3 \sin\varphi + b_4 \sin\varphi \cos\varphi) \sin\psi \cos\psi +$$
$$+ (b_5 + b_6 \sin^2\varphi + b_7 \cos\varphi) \cos^2\psi + (b_8 \sin\varphi + b_9 \sin\varphi \cos\varphi) \sin\psi +$$
$$+ (b_{10} + b_{11} \cos\varphi + b_{12} \cos^2\varphi) \cos\psi + b_{13} \sin^2\psi + b_{14} \cos^2\psi +$$
$$+ b_{15} \cos\psi + b_{16}. \tag{11}$$

Constantele b_i $(i = \overline{1, 16})$ au următoarele valori:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \cos^2\alpha \sin^2\beta, \\
b_2 &= \sin^2\alpha \sin^2\beta, \\
b_3 &= -\sin 2\alpha \sin^2\beta \cos\gamma, \\
b_4 &= -2 \sin^2\alpha \sin^2\beta \cos\gamma, \\
b_5 &= (\sin^2\alpha \sin^2\gamma + \cos^2\alpha \cos^2\gamma) \sin^2\beta, \\
b_6 &= \sin^2\alpha \sin^2\beta \cos^2\gamma, \\
b_7 &= \sin 2\alpha \sin^2\beta \sin\gamma \cos\gamma, \\
b_8 &= \sin 2\alpha \sin\beta \cos\beta \cos\gamma, \\
b_9 &= \sin^2\alpha \sin 2\beta \sin\gamma, \\
b_{10} &= -\cos^2\alpha \sin 2\beta \sin\gamma \cos\gamma, \\
b_{11} &= \sin 2\alpha \sin\beta \cos\beta \cos 2\gamma, \\
b_{12} &= \sin^2\alpha \sin 2\beta \sin\gamma \cos\gamma, \\
b_{13} &= \sin^2\alpha \cos^2\beta, \\
b_{14} &= \sin^2\alpha \cos^2\beta \cos^2\gamma, \\
b_{15} &= -\sin 2\alpha \cos^2\beta \sin\gamma \cos\gamma, \\
b_{16} &= \cos^2\alpha \cos^2\beta \sin^2\gamma.
\end{aligned} \tag{12}$$

Ridicînd (7) la pătrat și ținînd seama de (8) și (11), obținem următoarea relație între unghiurile φ și ψ:

$$(r_1 + r_2)^2[(b_1 + b_2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \psi + (b_3 + b_4 \sin \varphi \cos \varphi) \sin \psi \cos \psi +$$
$$+ (b_5 + b_6 \sin^2 \varphi + b_7 \cos \varphi) \cos^2 \psi + (b_8 \sin \varphi + b_9 \sin \varphi \cos \varphi) \times$$
$$\times \sin \psi + (b_{10} + b_{11} \cos \varphi + b_{12} \cos^2 \varphi) \cos \psi + b_{13} \sin^2 \varphi + b_{14} \cos^2 \varphi +$$
$$+ b_{15} \cos \varphi + b_{16}] = [(a_1 + a_2 \sin \varphi + a_3 \cos \varphi) \sin \psi + (a_4 + a_5 \sin \varphi +$$
$$+ a_6 \cos \varphi) \cos \psi + a_7 + a_8 \sin \varphi + a_9 \cos \varphi]^2. \tag{13}$$

Prezintă interes și determinarea legii de transmitere a mecanismului reprezentat în figura 4. Se observă că axa de rotație a elementului condus este paralelă cu planul pe care se sprijină sfera de la capătul elementului conducător.

Relația de legătură între unghiurile φ și ψ se va determina din condiția

$$S \cdot \overline{CD}\, u_6 = 0. \tag{14}$$

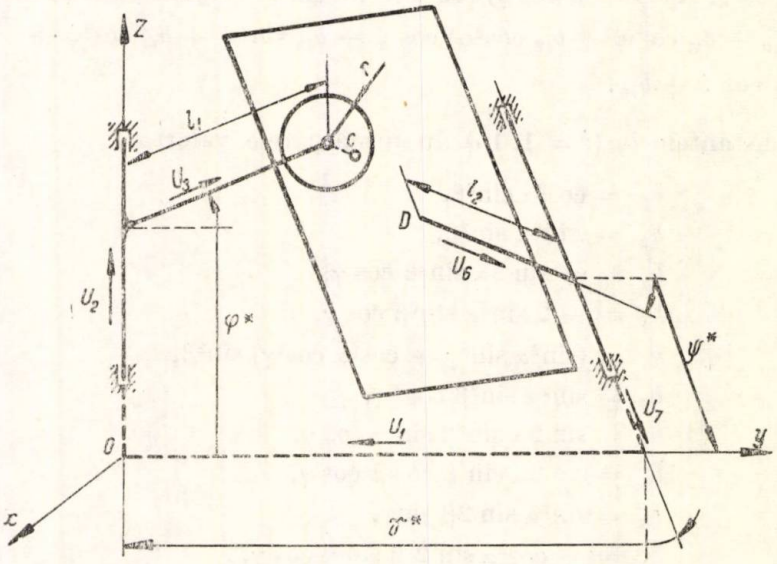


Fig. 4

Vectorii de poziție ai punctului C de contact dintre sferă și plan și ai punctului D se pot exprima în felul următor:

$$r_C = \varphi_1 u_2 + l_1 u_3 + r u_6,$$
$$r_D = -\gamma_1 u_1 - \psi_1 u_7 - l_2 u_6. \tag{15}$$

Deoarece u_1, u_2, u_3, u_6 și u_7 au aceleași expresii ca și în (4), relațiile (15) devin

$$\begin{aligned} r_C &= -i(l_1 \sin\varphi + r\cos\gamma\sin\psi) + j(l_1\cos\varphi + r\cos\psi) + \\ &\quad + k(\varphi_1 + r\sin\gamma\sin\psi), \\ r_D &= i(\psi_1\sin\gamma + l_2\cos\gamma\sin\psi) + j(\gamma_1 - l_2\cos\psi) + \\ &\quad + k(\psi_1\cos\gamma - l_2\sin\gamma\sin\psi). \end{aligned} \tag{16}$$

Ținînd cont de (16), relația (14) devine

$$\begin{aligned} &(C_1 + C_2\sin\varphi + C_3\cos\varphi)\sin\psi + (C_4 + C_5\sin\varphi + C_6\cos\varphi)\cos\psi + \\ &\quad + C_7 + C_8\sin\varphi + C_9\cos\varphi = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

unde

$$\begin{aligned} C_1 &= \varphi_1\sin\gamma, \\ C_2 &= l_1\cos\gamma, \\ C_3 &= 0, \\ C_4 &= -\gamma_1, \\ C_5 &= 0, \\ C_6 &= l_1, \\ C_7 &= l_2 + r, \\ C_8 &= 0, \\ C_9 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Programul scris în ALGOL-60 pentru ecuația (8) este valabil și pentru determinarea variației lui ψ în funcție de φ exprimată de ecuația (17), cu singura deosebire că în acest caz se va declara tabela cu intrare $C[1:9]$, a constantelor (18), în locul tabelei $a[1:9]$.

Exemple. I. Se consideră mecanismul din figura 5. Pentru studiul acestuia se va utiliza relația (8). Valorile unghiurilor duale care determină din punct de vedere geometric mecanismul sînt

$$\alpha^* = 90^\circ + \omega\cdot 0\,; \qquad \beta^* = 90^\circ + \omega\cdot 0,$$

$$\gamma^* = 90^\circ + \omega\cdot 0,$$

iar calculînd constantele (9), doar două dintre ele sînt diferite de zero, și anume

$$a_3 = -\varphi_1\,; \quad a_5 = -\psi_1.$$

Pentru aceste valori (8) devine

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\psi_1}{\varphi_1} \operatorname{tg} \varphi.$$

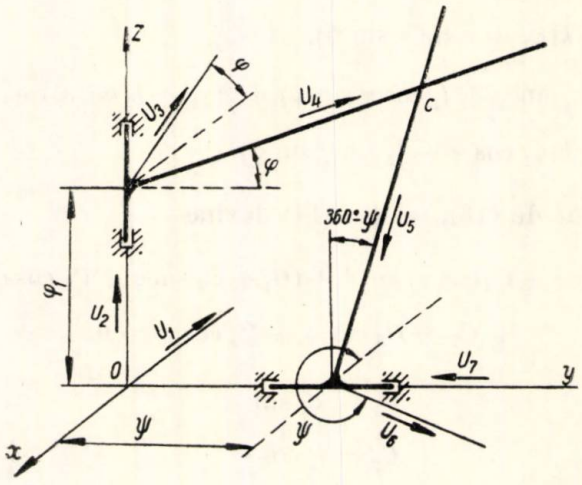


Fig. 5

II. Pentru determinarea dependenței dintre unghiurile φ și ψ pentru cazul mecanismului reprezentat în figura 6 se folosește relația (13). Unghiurile duale fiind aceleași ca în primul caz, constantele a_i $(i = \overline{1, 9})$ au aceleași valori, iar dintre constantele b_j $(j = \overline{1, 16})$ (12), numai două sînt diferite de zero:

$$b_2 = 1; \quad b_5 = 1.$$

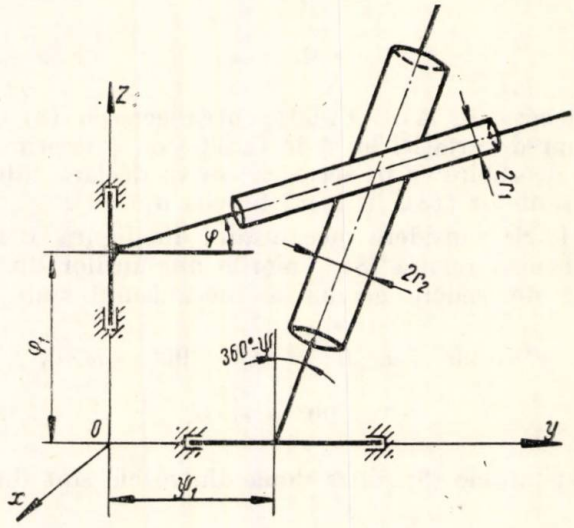


Fig. 6

Pentru aceste valori ale constantelor a_i şi b_j, (13) devine

$$(\varphi_1^2 - k^2)\cos^2\varphi\,\mathrm{tg}^2\psi + \varphi_1\psi_1 \sin 2\varphi\,\mathrm{tg}\,\psi + \psi_1^2\sin^2\varphi - k^2 = 0, \qquad (19)$$

unde s-a notat

$$k = r_1 + r_2.$$

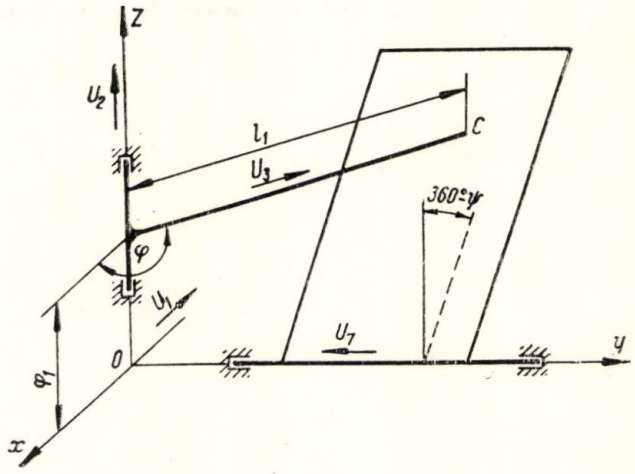


Fig. 7

III. În cazul mecanismului reprezentat în figura 7 unghiul dual $\gamma^* = 90° + \omega \cdot 0$. Constantele (16) sînt nule în afară de

$$C_1 = \varphi_1; \qquad C_6 = l_1.$$

Ecuaţia (15) se reduce la

$$\mathrm{tg}\,\psi = -\frac{l_1}{\varphi_1}\cos\varphi. \qquad (20)$$

Trebuie să atragem atenţia asupra necesităţii determinării corecte a unghiurilor φ şi ψ, în aceste cazuri particulare, ţinînd cont că se modifică aşezarea unora din versorii cvaternionici în raport cu sistemul de coordonate faţă de cazurile generale.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Bruaz P., *Iazîk ALGOL i ego primenenie k zadaciam issledovania operații*, Moskva, Izd. Energhia, 1967.
2. Constantinescu P., *Introducere în programarea automată*, București, Edit. tehnică, 1967.
3. Creangă I., Haimovici C., *Algebra liniară*, București, Edit. did. ped., 1962.
4. Dimentberg F. M., *Vintovoe iscislenie i ego prilojenia v mehanike*, Moskva, Izd. Nauka, 1965.
5. Lebedev P. A., *Kinematika prostranstvennîh mehanizmov*, Moskva, Izd. Mașinostroenie, 1966.
6. Tait P. G., *Traité élémentaire des quaternions*, Paris, Gauthier-Villars, 1882.
7. Yang A. T., Freudenstein F., *Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms*, Journal of Applied Mechanics, Volume 31, Series E, Number 2, June 1964.

VITEZA PATINEI PRESEI CU GENUNCHI

de D. CATRINA
Institutul politehnic București

Viteza patinei presei, a cărei valoare este recomandată de procesul tehnologic, în timpul cursei de lucru trebuie să rămînă constantă.
Mecanismul presei cu genunchi transformă mișcarea de rotație a arborelui cotit în mișcare de translație a patinei, a cărei viteză este totuși variabilă, astfel încît la proiectare interesează variația vitezei patinei în timpul unui ciclu.
Pornind de la graful asociat mecanismului, impunînd condițiile de echilibru în cele două cicluri independente, se determină viteza patinei cu ajutorul ariilor unor triunghiuri; metoda se poate aplica atît la presele cu un arbore cotit, cît și la cele cu doi arbori cotiți.

Dintre presele mecanice, presa cu genunchi este utilizată atunci cînd procesul tehnologic de deformare a metalelor necesită forțe mari pe curse scurte, cu viteze de deformare comparabile cu cele dezvoltate de presa cu excentric: este cazul operațiilor de calibrare, stampare, profilare etc.

Din punct de vedere cinematic, se deosebesc:

— prese cu un arbore cotit,

— prese cu doi arbori cotiți.

În figura 1 este reprezentată schema cinematică a presei cu genunchi cu un arbore cotit, cu excentricitatea AB, care se rotește cu turație constantă n_{10}, primită de la un motor electric, prin intermediul unui reductor, volantul fiind montat prin intermediul unui cuplaj pe arborele cotit.

Manivela AB antrenează mecanismul patrulater $ABCO$ de tip manivelă-bielă-balansier; în punctul C este simultan articulată și biela CD a patinei presei.

În figura 2 este reprezentată schema cinematică a presei cu genunchi cu doi arbori cotiți, AB și OD, care se rotesc în același sens sau în sensuri contrarii, cu aceeași turație $n_{10} = n_{04}$, excentricitățile lor fiind de obicei egale, ca și bielele BC și CD.

În punctul C este articulată biela CE a patinei presei.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 2, 1972, P. 339–345

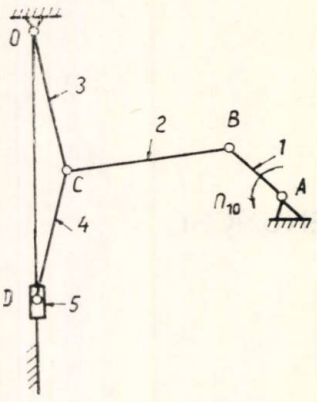


Fig. 1

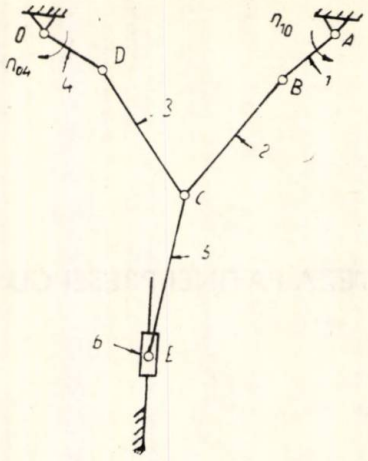


Fig. 2

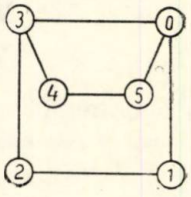


Fig. 3

1. VITEZA PATINEI PRESEI CU GENUNCHI CU UN ARBORE COTIT

Schemei cinematice din figura 1 i se poate asocia graful din figura 3, ale cărui noduri reprezintă elementele mecanismului, în număr $n_1 = 7$, laturile sale reprezentînd legăturile cinematice dintre elementele mecanismului (articulaţii) în număr $n_0 = 6$; graful [1] are, după cum se vede, un număr de cicluri independente:

$$n_c = n_1 - n_0 + 1 = 2.$$

În cele ce urmează, vom considera ca independente ciclurile $0-1-2-3-0$ şi $0-3-4-5-0$, cărora le vom aplica ecuaţiile de condiţie pentru viteze [1].

În ciclul $0-1-2-3-0$, reprezentînd mecanismul patrulater $OABC$, acţionează vectorii (fig. 4) $\bar{\omega}_{10}$, $\bar{\omega}_{21}$, $\bar{\omega}_{32}$, $\bar{\omega}_{03}$, reprezentînd vitezele unghiulare, absolute (cele cu indicele 0) sau relative, din articulaţiile mecanismului. Ecuaţiile de echilibru se rezumă la proiecţie pe axe Oz perpendiculară pe planul mecanismului şi ecuaţii de momente faţă de două axe Ox, Oy, arbitrar alese în planul mecanismului

$$\begin{aligned}
&\omega_{10} + \omega_{21} + \omega_{32} + \omega_{03} = 0,\\
&(y_A - y_0)\cdot\omega_{10} + (y_B - y_0)\cdot\omega_{21} + (y_C - y_0)\cdot\omega_{32} = 0, \qquad (1)\\
&(x_A - x_0)\cdot\omega_{10} + (x_B - x_0)\cdot\omega_{21} + (x_C - x_0)\cdot\omega_{32} = 0.
\end{aligned}$$

În ciclul $0-3-4-5-0$, reprezentînd mecanismul balansier-bielă-patină, acţionează vectorii (fig. 5) $\bar{\omega}_{03}$, $\bar{\omega}_{34}$, $\bar{\omega}_{45}$, reprezentînd vitezele

unghiulare din articulații, și vectorul-cuplu $\bar{v}_{50}$, reprezentînd viteza de translație a patinei presei. Ecuațiile de echilibru pentru acest sistem de vectori sînt:

$$\begin{aligned} &\omega_{03} + \omega_{34} + \omega_{45} = 0, \\ &(y_C - y_0)\cdot \omega_{34} + (y_D - y_0)\cdot \omega_{45} = 0, \\ &(x_C - x_0)\cdot \omega_{34} + (x_D - x_0)\cdot \omega_{45} - V_{50} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

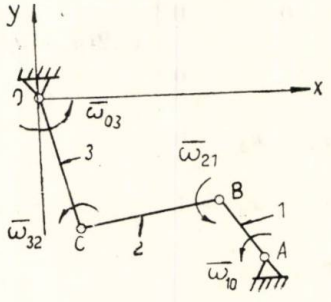


Fig. 4

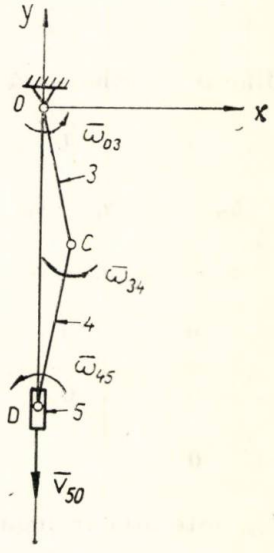


Fig. 5

Sistemul format din cele șase ecuații (1) și (2) conține 7 necunoscute: ω_{10}, v_{21}, ω_{32}, ω_{03}, ω_{34}, ω_{45}, V_{50}; pentru ca el să fie compatibil este necesar ca necunoscutele să fie proporționale cu minorii matricei

$$\begin{Vmatrix} \omega_{10} & \omega_{21} & \omega_{32} & \omega_{03} & \omega_{34} & \omega_{45} & V_{50} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_A - y_0 & y_B - y_0 & y_C - y_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_A - x_0 & x_B - x_0 & x_C - x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_C - y_0 & y_D - y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_C - x_0 & x_D - x_0 & -1 \end{Vmatrix} \tag{3}$$

adică

$$\frac{\omega_{10}}{\Delta\omega_{10}} = \frac{\omega_{21}}{\Delta\omega_{21}} = \frac{\omega_{32}}{\Delta\omega_{32}} = \frac{\omega_{03}}{\Delta\omega_{03}} = \frac{\omega_{34}}{\Delta\omega_{34}} = \frac{\omega_{45}}{\Delta\omega_{45}} = \frac{V_{50}}{\Delta V_{50}}, \tag{4}$$

de unde se pot calcula toate necunoscutele, funcție de ω_{10} — viteza unghiulară a arborelui cotit. Interesează în special viteza patinei

$$V_{50} = \frac{\Delta V_{50}}{\Delta\omega_{10}} \cdot \omega_{10}. \tag{5}$$

Minorii se calculează cu multă ușurință:

$$\Delta\omega_{10} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_B - y_0 & y_C - y_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_B - x_0 & x_C - x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_C - y_0 & y_D - y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_C - x_0 & x_D - x_0 & -1 \end{vmatrix} = 2(y_D - y_C) \cdot S_{OBC},$$

unde S_{OBC} este aria triunghiului OBC, iar

$$\Delta V_{50} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y_A - y_0 & y_B - y_0 & y_C - y_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_A - x_0 & x_B - x_0 & x_C - x_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_C - y_0 & y_D - y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_C - x_0 & x_D - x_0 \end{vmatrix} = 4 \cdot S_{\triangle BC} \cdot S_{OCD}$$

și deci viteza patinei este

$$V_{50} = 2 \cdot \omega_{10} \cdot \frac{S_{ABC} \cdot S_{OCD}}{(y_D - y_C) \cdot S_{OBC}}. \tag{6}$$

Calculul ei presupune deci construcția la scară a mecanismului și planimetrarea ariilor celor trei triunghiuri, pentru un număr de poziții unghiulare ale manivelei AB.

Expresia vitezei patinei arată că ea se anulează dacă:
— punctele A, B, C sînt coliniare (patina în punctul mort superior),
— punctele O, C, D sînt coliniare (patina în punctul mort inferior).
După cum se vede, punctele moarte superioare sînt două: cînd sînt coliniare punctele A, B, C și atunci cînd sînt coliniare punctele B, A, C (în această ordine). Dacă în cele două puncte moarte superioare balansierul OC se află de o parte și de alta a ghidajelor OD ale patinei, atunci, la o rotație completă a arborelui cotit AB, patina execută două **lovituri.**

2. VITEZA PATINEI PRESEI CU GENUNCHI CU DOI ARBORI COTIȚI

Schemei cinematice din figura 2 i se poate atașa graful din figura 6, care are $n_1 = 8$ noduri și $n_0 = 7$ laturi, deci numărul ciclurilor independente este de asemenea 2. Fie ele 0—1—2—3—4—0 și 0—4—3—5—6—0.
În primul ciclu, acționează vectorii (fig. 7) $\bar{\omega}_{10}$, $\bar{\omega}_{21}$, $\bar{\omega}_{32}$, $\bar{\omega}_{43}$, $\bar{\omega}_{04}$, reprezentînd vitezele unghiulare, absolute și relative, din articulații. Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\begin{aligned}
&\omega_{10} + \omega_{21} + \omega_{32} + \omega_{43} + \omega_{04} = 0,\\
&(y_A - y_0)\cdot\omega_{10} + (y_B - y_0)\cdot\omega_{21} + (y_D - y_0)\cdot\omega_{32} + (y_D - y_0)\cdot\omega_{43} = 0, \qquad (7)\\
&(x_A - x_0)\cdot\omega_{10} + (x_B - x_0)\cdot\omega_{21} + (x_C - x_0)\cdot\omega_{32} + (x_D - x_0)\cdot\omega_{43} = 0.
\end{aligned}$$

În cel de-al doilea ciclu acționează vectorii ω_{04}, $\bar{\omega}_{43}$, $\bar{\omega}_{35}$, $\bar{\omega}_{56}$, reprezentînd vitezele unghiulare din articulații, și $\bar{V}_{60}$, reprezentînd viteza

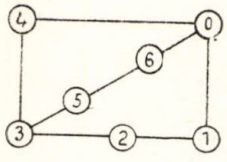


Fig. 6

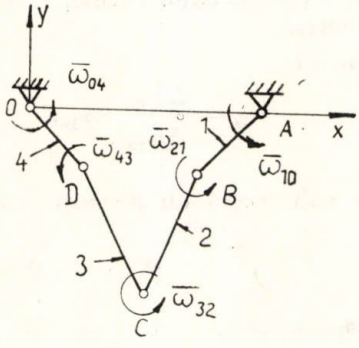


Fig. 7

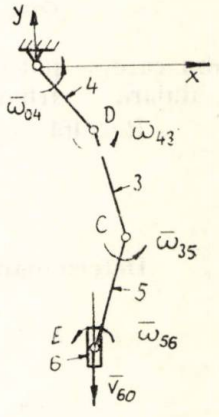


Fig. 8

de translație a patinei presei. Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\begin{aligned}
&\omega_{04} + \omega_{43} + \omega_{35} + \omega_{56} = 0,\\
&(y_D - y_0)\cdot\omega_{43} + (y_C - y_0)\cdot\omega_{35} + (y_E - y_0)\cdot\omega_{56} = 0, \qquad (8)\\
&(x_D - x_0)\cdot\omega_{43} + (x_C - x_0)\cdot\omega_{35} + (x_E - x_0)\cdot\omega_{56} - V_{60} = 0.
\end{aligned}$$

Se disting două cazuri, după cum vitezele unghiulare ale celor doi arbori cotiți, ω_{10} și ω_{04}, egale, sînt de același sens sau de sensuri contrarii.

a) Cei doi arbori cotiți se rotesc cu viteze unghiulare egale și de același sens : $\omega_{10} = \omega_{04}$.

Sistemul format din cele 6 ecuații (7) și (8) are 7 necunoscute : ω_{10}, ω_{21}, ω_{32}, ω_{43}, ω_{35}, ω_{56}, V_{60} ; el este compatibil dacă necunoscutele sînt proporționale cu minorii matricei

$$\begin{Vmatrix} 10 & 21 & 32 & 43 & 35 & 56 & V_{60} \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_A-y_0 & y_B-y_0 & y_C-y_0 & y_D-y_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_A-x_0 & x_B-x_0 & x_C-x_0 & x_D-x_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_D-y_0 & y_C-y_0 & y_E-y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_D-x_0 & x_C-x_0 & x_E-x_0 & -1 \end{Vmatrix},$$

adică

$$\frac{\omega_{10}}{\Delta\omega_{10}} = \frac{\omega_{21}}{\Delta\omega_{21}} = \frac{\omega_{32}}{\Delta\omega_{32}} = \frac{\omega_{43}}{\Delta\omega_{43}} = \frac{\omega_{35}}{\Delta\omega_{35}} = \frac{\omega_{56}}{\Delta\omega_{56}} = \frac{V_{60}}{\Delta V_{60}}, \tag{9}$$

din care se pot deduce toate necunoscutele, funcție de ω_{10} — viteza unghiulară a arborelui cotit.

Rezultă viteza patinei :

$$V_{60} = \frac{\Delta V_{60}}{\Delta\omega_{10}} \cdot \omega_{10}. \tag{10}$$

Determinanții se calculează cu aceeași ușurință :

$$\Delta\omega_{10} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_B-y_0 & y_C-y_0 & y_D-y_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_B-x_0 & x_C-x_0 & x_D-x_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y_D-y_0 & y_C-y_0 & y_E-y_0 & 0 \\ 0 & 0 & x_D-x_0 & x_C-x_0 & x_E-x_0 & -1 \end{vmatrix} = 2(y_E-y_C) \cdot S_{BCD}, \tag{11}$$

$$\Delta V_{60} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y_A - y_0 & y_B - y_0 & y_C - y_0 & y_D - y_0 & 0 & 0 \\ x_A - x_0 & x_B - x_0 & x_C - x_0 & x_D - x_0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y_D - y_0 & y_C - y_0 & y_E - y_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_D - x_0 & x_C - x_0 & x_E - x_0 \end{vmatrix} = 4[S_{CDE} \cdot (S_{ABC} + S_{OBC}) - S_{OCE} \cdot S_{BCD}]. \quad (12)$$

Înlocuind în (10), rezultă viteza patinei:

$$V_{60} = 2\omega_{10} \cdot \frac{S_{CDE} \cdot (S_{ABC} + S_{OBC}) - S_{OCE} \cdot S_{BCD}}{(y_E - y_C) \cdot S_{BCD}}. \quad (13)$$

b) Cei doi arbori cotiți se rotesc cu viteze unghiulare egale, dar de sensuri contrarii: $\omega_{10} = -\omega_{04}$.

Este ușor de observat că minorul $\Delta\omega_{04}$ rămîne același, în timp ce minorul ΔV_{60} își schimbă valoarea:

$$\Delta' V_{60} = 4[S_{CDE} \cdot (S_{ABC} - S_{OBC}) - S_{OCE} \cdot S_{BCD}],$$

astfel încît viteza patinei este

$$V'_{60} = 2 \cdot \omega_{04} \cdot \frac{S_{CDE} \cdot (S_{ABC} - S_{OBC}) - S_{OCE} \cdot S_{BCD}}{(y_E - y_C) \cdot S_{BCD}}.$$

În concluzie, viteza patinei presei cu genunchi poate fi exprimată cu ajutorul ariei unor triunghiuri care au una sau două din laturi constante, ceea ce simplifică calculul; mai ales atunci cînd, constructiv, la presa cu un arbore cotit, cele două biele BC, CD și balansierul OC (fig. 1) sînt egale, iar la presa cu doi arbori cotiți cele trei biele BC, CD, CE sînt egale, fiind de asemenea egale manivelele AB, OD.

Primită la redacție la 5 iulie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. R. Voinea, M. Atanasiu, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, București, Edit.tehnică, 1964.

STUDIUL CINEMATIC AL MECANISMULUI DE DIRECȚIE CU TREI BARE TRANSVERSALE ȘI AL CELUI CU CREMALIERĂ*)

de PETRE ALEXANDRU
Universitatea din Brașov

În lucrare, după analiza înscrierii în viraj a vehiculului și studierea întoarcerii roților directoare în jurul pivotului, se sistematizează legile de transmitere ale mecanismelor de direcție, plane și spațiale, cu una sau cu două bare transversale.
În continuare, se determină legile de transmitere ale mecanismelor de direcție cu trei bare transversale, plane și spațiale, de diverse variante, ca și ale celor cu cremalieră. Pe baza relațiilor determinate se fac calcule numerice comparative pentru diverse tipuri de mecanisme de direcție, real realizate, rezultînd concluzii importante pentru construcția acestor mecanisme.

1. BAZELE STUDIULUI CINEMATIC

Pentru rularea fără alunecare a roților autovehiculului este necesar ca la fiecare rază de viraj proiecția axelor roților pe un plan orizontal să se intersecteze într-un singur punct. Condiția aceasta servește ca bază de plecare pentru toate observațiile care se pot face la o direcție în ipoteza roților rigide și este dată [13] de *relația lui Jeantaud-Ackermann* (semnificația notațiilor în fig. 1)

$$\operatorname{ctg} \theta_e - \operatorname{ctg} \theta_{i_l} = \frac{b}{L}. \tag{1}$$

Controlul grafic al trapezului de direcție, adoptat pentru realizarea acestei legi, se face prin compararea curbei γ de intersecție a dreptelor duse la unghiurile θ_e și θ_i, rezultate din cinematica trapezului, cu diagonala $\overline{O_1M}$ [22], care reprezintă condiția (1).

*) Lucrare executată sub îndrumarea prof. dr. ing. N. I. Manolescu, Inst. politehnic, București.

Vehiculele fiind însă echipate cu *pneuri elastice*, datorită înclinației drumului, vîntului lateral și a forței centrifuge din curbe apar unghiurile de deviație laterală ale roților. Pentru vehiculul echipat cu roți directoare la osia din față, centrul de viraj O, care în cazul static este pe linia

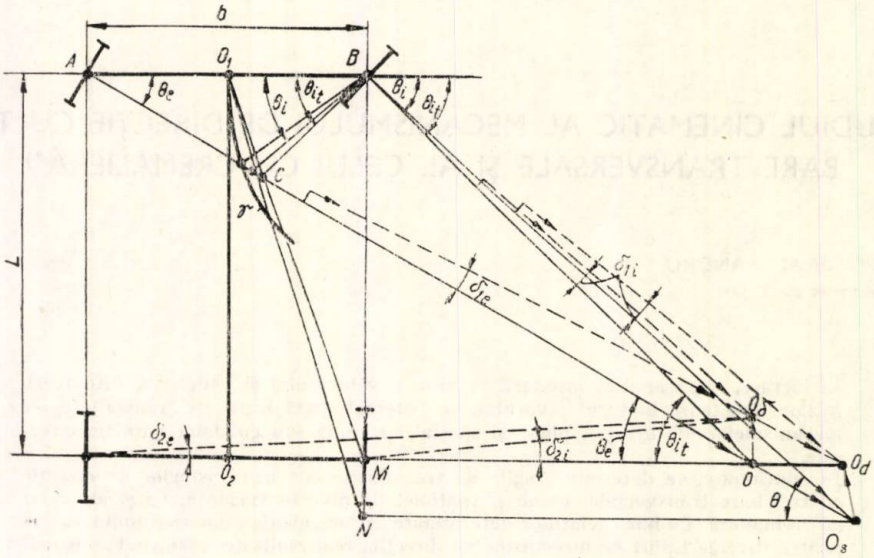


Fig. 1. — Schema înscrierii în viraj a vehiculului rutier.

osiei din spate, se va deplasa înainte în O_δ. Reprezentînd vehiculul schematizat numai la două roți așezate pe axa longitudinală (fig. 2), dacă unghiurile de deviație ale roții directoare δ_1 și nedirectoare δ_2 sînt egale, O_δ se va deplasa pe cercul care trece prin osia din față, prin osia din spate și prin centrul de viraj static [7]. Dacă deviația roții din față este mai mare decît a celei din spate, O_δ va fi în exteriorul cercului (subvirare), iar dacă $\delta_1 < \delta_2$, O_δ va fi în interiorul cercului (supravirare).

Condiția intersecției normalelor la vitezele liniare ale roților într-un singur punct este greu realizabilă. Abaterile trebuie studiate de la caz la caz, așa că este necesar la început să se plece de la condiția ca axele roților în curbă să se intersecteze într-un punct. Neglijînd unghiurile de deviație ale pneurilor din spate $\delta_2 = 0$, relația (1) ia forma

$$\operatorname{ctg}(\theta_e - \delta_e) - \operatorname{ctg}(\theta_{it} - \delta_i) = \frac{b}{L}, \tag{2}$$

δ_e și δ_i corespunzînd roților directoare din exteriorul și interiorul curbei. Unghiurile δ_e și δ_i sînt variabile, depinzînd de: caracteristica pneului, viteza autovehiculului, încărcarea verticală a roților, raza de întoarcere, caracteristicile autovehiculului, mărimi variabile neliniar, imposibil de luat în calcul. De aceea relația se aduce sub o formă comodă prin considerarea unor valori medii ale unghiurilor de deviație, valori pe baza cărora se apreciază un coeficient de corecție $K = 1{,}2, \ldots, 1{,}25$. Condiția

lui Ackermann, pentru a rămîne condiție de plecare, trebuie corectată [1], [15] cu acest coeficient, care să țină seama de deviația pneurilor, obținînd astfel relația *autor*

$$\operatorname{ctg} \theta_e - \operatorname{ctg} \theta_{i'} = \frac{b}{KL}. \tag{2'}$$

În figura 1 această condiție este reprezentată prin dreapta $\overline{O_1N} \neq \overline{O_1M}$, astfel că centrul de viraj static O_s se deplasează în centrul de virare dinamic Od, pe linia osiei din spate (la apariția deviațiilor).

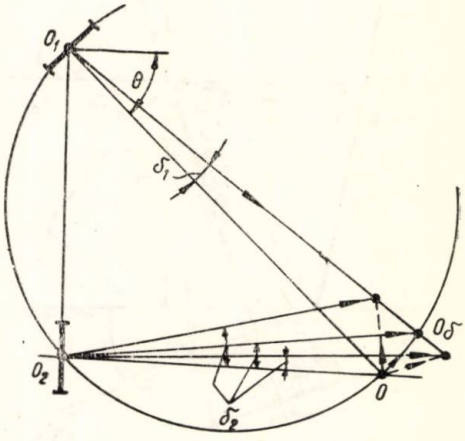


Fig. 2. — Schema înscrierii în curbă a vehiculului cu capacitate de virare excesivă, normală și insuficientă (după [7], supra și subvirare).

Determinarea condițiilor (1) și (2') s-a făcut în ipoteza că roțile directoare se rotesc în jurul unor pivoți verticali. În realitate, *pivotul este înclinat lateral* cu unghiul δ_0 și înainte cu unghiul β_0 (fig. 3). Aceasta face ca punctul B de contact al pneului cu solul să descrie un cerc de conducere de rază r,

$$r = \overline{AB} \sin \Phi_0, \tag{3}$$

unde $\overline{AB}$ este ipotenuza triunghiului format de raza roții R și de fuzeta f, adică generatoarea conului de rotație BAD, avînd unghiul de vîrf Φ_0. Mărimile din relația (3) sînt date de expresiile

$$\overline{AB} = \sqrt{R^2 + f^2}\,; \quad \varepsilon_0 = \operatorname{arctg} R/f,$$

$$\Phi_0 = 90^\circ - (\alpha_0 + \varepsilon_0 + \delta_0),$$

α_0 fiind unghiul de cădere al roții. Deci raza de conducere devine

$$r = \sqrt{R^2 + f^2} \cdot \cos(\alpha_0 + \delta_0 + \varepsilon_0). \tag{3'}$$

Planul cercului de conducere este înclinat, față de orizontală, lateral cu unghiul δ_0 și înapoi cu unghiul β_0. La o întoarcere a roții directoare cu unghiul θ, datorită faptului că B trebuie să descrie linia solului, pivotul se va ridica cu înălțimea h,

$$h = h_1 \pm h_2, \tag{4}$$

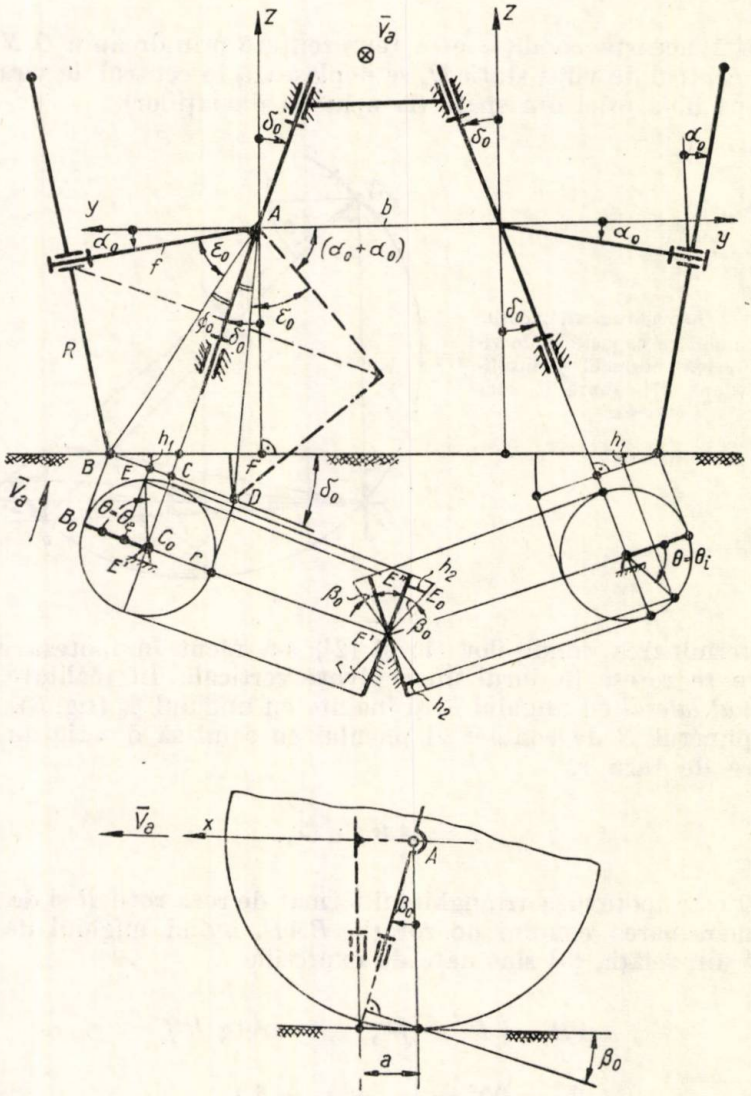


Fig. 3. — Schema întoarcerii roții directoare în jurul pivotului.

unde h_1 este cauzat de înclinarea laterală δ_0,

$$h_1 = \overline{BE} \sin \delta_0 = (\overline{B_0C_0} - \overline{E'C_0}) \sin \delta_0 = r\,(1 - \cos \theta) \sin \delta_0,$$

iar h_2 este datorat înclinării longitudinale β_0,

$$h_2 = \overline{E''E_0} = \overline{E'E_0} \sin \beta_0 = r \sin \theta \sin \beta_0.$$

Pentru bracarea înainte $\theta = \theta_e$,

$$h_e = h_1 - h_2 = r(1 - \cos \theta_e) \sin \delta_0 - r \sin \theta_e \sin \beta_0, \tag{4'}$$

iar pentru bracarea înapoi $\theta = \theta_i$,

$$h_i = h_1 + h_2 = r(1 - \cos \theta_i) \sin \delta_0 + r \sin \theta_i \sin \beta_0. \tag{4''}$$

Pentru bracarea zero $\theta = 0 \to h = 0$, iar pentru bracarea maximă teoretică $\theta = 90° \to h_{max} = r(\sin \delta_0 \mp \sin \beta_0)$.

Proiecția cercului de conducere pe suprafața drumului va fi o elipsă cu semiaxa mare $r \cos \beta_0$ și semiaxa mică $r \cos \delta_0$ (elipsă de conducere). Coordonatele punctului B vor fi date de relațiile

$$x_B = \overline{E'E''} = r \cos \beta_0 \sin \theta,$$

$$y_B = \overline{FB} - \overline{B_0E'} = \sqrt{R^2 + f^2} \cdot \cos(\alpha_0 + \varepsilon_0) - r \cos \beta_0 (1 - \cos \theta), \tag{5}$$

$$z_B = \overline{AF} + h = \sqrt{R^2 + f^2} \cdot \sin(\alpha_0 + \varepsilon_0) + r[(1 - \cos \theta) \sin \delta_0 \mp$$

$$\mp \sin \beta_0 \sin \theta].$$

Unghiul total de înclinare spațială a pivotului este dat de relația

$$\operatorname{tg} \eta_0 = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta_0 + \operatorname{tg}^2 \delta_0}, \tag{6}$$

deci roata directoare se va braca în jurul unui ax care face cu verticala unghiului η_0. Atunci se impune o a doua corectură a relației Ackermann, deoarece proiecția pe planul drumului a unghiurilor de bracare sînt $\theta_e \cos \eta_0$, respectiv $\theta_i \cos \eta_0$. Același lucru se obține dacă funcția $\theta_i = f(\theta_e)$, rezultată din condiția (2), este comparată cu funcția $\theta_i' = f(\theta_e')$, rezultată din cinematica trapezului, unde

$$\theta_e' = \theta_e \cos \eta_0; \quad \theta_i' = \theta_i \cos \eta_0. \tag{7}$$

Considerații asemănătoare privind pivotul înclinat se găsesc și în lucrările [17], [24], relațiile determinate acolo fiind însă mult mai complicate.

Pentru îndeplinirea condițiilor de bracare ale roților directoare, vehiculele rutiere au în componența mecanismelor de direcție așa-zisele *trapeze de direcție*. Aceste trapeze de direcție sînt simetrice față de axa

longitudinală a vehiculului şi pot fi: cu o bară transversală (trapezul Jeantaud, la vehiculele cu suspensii neindependente), cu două sau trei bare transversale (patrulaterele de direcţie, la vehiculele cu suspensii independente), cu bară de direcţie cremalieră sau trapeze speciale [2].

Studiul cinematic al acestor mecanisme trebuie să ţină seama de înclinarea spaţială reciprocă a pivoţilor, adică de faptul că ele sînt mecanisme spaţiale. Sînt puţine lucrările [8], [21] care fac acest lucru, introducîndu-se astfel eroarea comparării condiţiei (1) cu legea trapezelor de direcţie plane (pivoţi verticali paraleli). Justificarea acestui mod de lucru ar putea fi faptul că în multe cazuri legea trapezului plan este numai puţin diferită de cea a trapezului spaţial. Pentru a aprecia însă acest lucru este necesar să se determine legile de mişcare ale acestor două categorii de mecanisme şi a se face un studiu comparativ.

Indicaţii de bază privind analiza cinematică a mecanismelor şi metodele care pot fi utilizate se găsesc în lucrărie [6], [9], [14], [16], [18], [23]. Precizări preţioase privind condiţiile care trebuie îndeplinite de mecanismele de direcţie se găsesc în lucrările [11], [4], [5], [10], [12], [19].

În lucrarea [15] se găseşte, pe baza rezolvării conturului vectorial închis *al trapezului de direcţie cu o bară transversală*, ecuaţia de mişcare (8), avînd soluţia (9) şi raportul de transmitere (10), trapezul fiind considerat plan (fig. 4*a*):

$$A + B\cos\alpha_2 + C\sin\alpha_2 = 0, \tag{8}$$

$$\cos\alpha_2 = \cos(\varphi_0 + \theta_i) = \frac{-A\cdot B - C\sqrt{B^2 + C^2 - A^2}}{B^2 + C^2}, \tag{9}$$

$$i_{12} = -\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_3)} = \frac{\cos(\alpha_2 + \alpha_3)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_3)} = \frac{\cos(\varphi_0 + \theta_i + \alpha_3)}{\cos(\varphi_0 - \theta_e - \alpha_3)}. \tag{10}$$

Parametrii A, B, C sînt daţi în tabela 1, semnificaţia diverselor mărimi rezultă din figura 4, iar α_3 rezultă din relaţia

$$\sin\alpha_3 = \frac{l_1\cos\alpha_1 - l_2\cos\alpha_2}{l_3} = \frac{a}{l}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \tag{11}$$

Pentru trapezul Jeantaud spaţial (fig. 4*b*), prin aceeaşi metodă s-a adus ecuaţia la aceeaşi formă, avînd aceeaşi soluţie, parametrii A, B, C fiind însă diferiţi (tabela 1). Raportul de transmitere este dat de relaţia

$$i_{12} = \frac{\cos\alpha_3\sin\alpha_2 + \cos\beta_3\cos\alpha_2\cos 2\delta_0 + \cos\gamma_3\cos\alpha_2\sin 2\delta_0}{\sin\alpha_1\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1\cos\beta_3}, \tag{12}$$

unde

$$\cos \alpha_3 = -\frac{a}{l}(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

$$\cos \beta_3 = -\frac{a}{l}(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos 2\delta_0) + \frac{b_s}{l}\cos \delta_0, \tag{13}$$

$$\cos \gamma_3 = -\frac{a}{l}\sin \alpha_2 \sin 2\delta_0 + \frac{b_s}{l}\sin \delta_0.$$

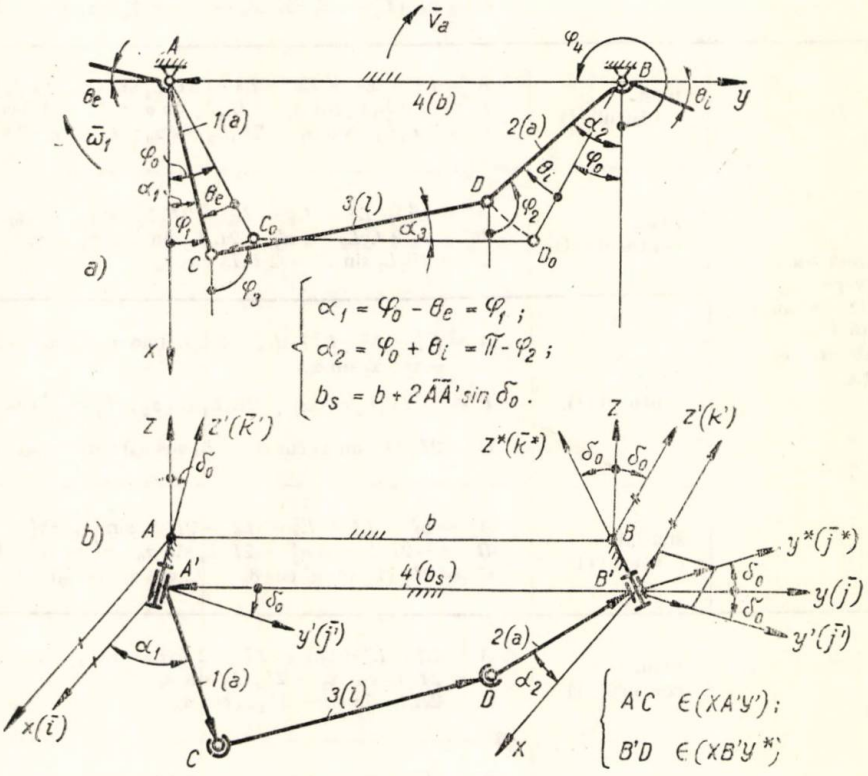


Fig. 4. — Schema trapezului de direcție cu o singură bară, plan și spațial.

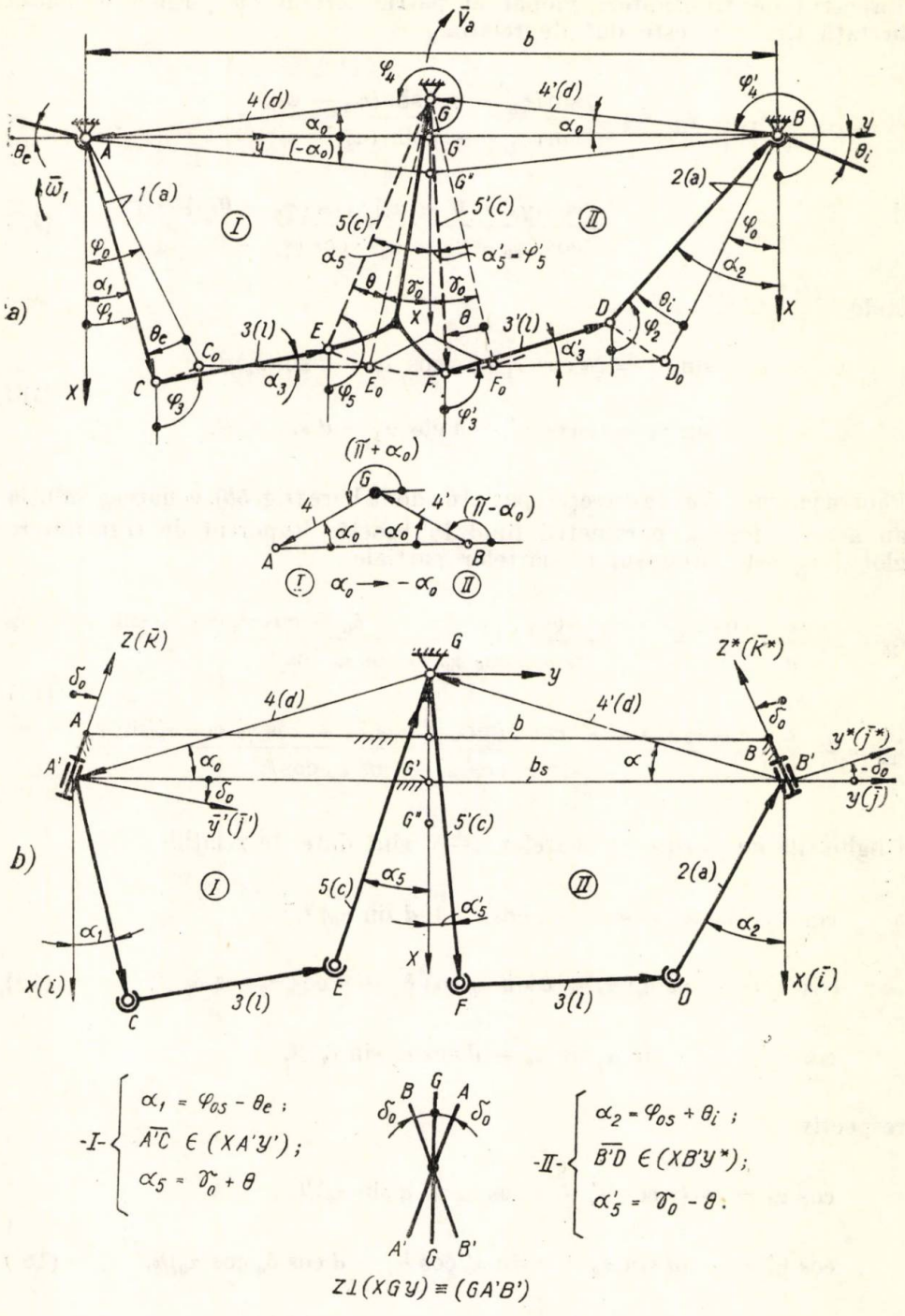
În lucrarea [3] se tratează, prin aceeași metodă, *patrulaterul de direcție cu două bare transversale* (fig. 5), găsindu-se pentru mecanismul plan compus din două patrulatere de direcție aceleași ecuații (8), cu soluții de aceeași formă, parametrii fiind în tabela 1 :

$$\cos \alpha_5 = \cos(\gamma_0 + \theta) = \frac{-A \cdot B - C\sqrt{B^2 + C^2 - A^2}}{B^2 + C^2};$$

$$[= \cos \alpha_2 = \cos(\varphi_0 + \theta_i)]. \tag{14}$$

Tabela 1

Tipul mecanismului de direcție	Caracterul mecanismului	Parametrii A, B, C:
Cu o bară transversală (trapez Jeantaud)	plan	$A = L_1^2 + L_2^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2L_1L_4 \sin \alpha_1$, $B = -2L_1L_2 \cos \alpha_1$; $L_1 = L_2 = a$, $L_3 = L$, $L_4 = b$, $C = 2L_2(L_1 \sin \alpha_1 - L_4)$; $\alpha_1 = \varphi_0 - \theta_e$.
	spațial	$A = L_1^2+L_2^2+L_4^2-L_3^2-2L_1L_4 \sin \alpha_1 \cos \delta_0$; $L_4 = b_s$, $B = -2L_1L_2 \cos \alpha_1$; $L_4 = b_s = b + 2\overline{AA'} \sin \delta_0$, $C = 2L_2(L_1 \sin \alpha_1 \cos 2\delta_0 - L_4 \cos \delta_0)$; $\alpha_1 = \varphi_{0s} - \theta_e$.
Cu două bare transversale și pîrghie oscilantă în față (două patrulatere de direcție	plan, conturul (I)	$A = L_1^2 + L_5^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2L_1L_4 \sin (\alpha_1 - \alpha_0)$, $B = -2L_1L_5 \cos \alpha_1 - 2L_4L_5 \sin \alpha_0$; $L_4 = b/2 \cos \alpha_0$, $C = 2L_1L_5 \cdot \sin \alpha_1 - 2L_4L_5 \cos \alpha_0$; $\alpha_1 = \varphi_0 - \theta_e$.
	plan, conturul (II)	$A' = L_5^2 + L_2^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2L_5L_4 \sin (\alpha_5' + \alpha_0)$, $B' = -2L_5L_2 \cos \alpha_5' + 2L_4L_2 \sin \alpha_0$; $\alpha_5' = \gamma_0 - \theta$, $C' = 2L_5L_2 \sin \alpha_5' - 2L_4L_5 \cos \alpha_0$.
	spațial, conturul (I)	$A = L_1^2 + L_5^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2L_1L_4 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_0 \cos \delta_0 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_0)$, $B = -2L_1L_5 \cos \alpha_1 - 2L_5L_4 \sin \alpha_0$; $L_4 = \frac{b_s}{2} \cos \alpha_0$, $C = 2L_5 (L_1 \sin \alpha_1 \cos \delta_0 - L_4 \cos \alpha_0)$; $\alpha_1 = \varphi_{0s} - \theta_e$.
	spațial, conturul (II)	$A' = L_5^2 + L_2^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2L_5L_4 \sin (\alpha_0 + \alpha_5')$, $B' = -2L_5L_2 \cos \alpha_5' + 2L_2L_4 \sin \alpha_0$; $\alpha_5' = \gamma_0 - \theta$, $C' = 2L_2 (L_5 \sin \alpha_5' \cos \delta_0 - L_4 \cos \alpha_0 \cos \delta_0)$.
Cu două bare transversale și pîrghie oscilantă în spate. (două patrulatere de direcție)	plan, conturul (I)	$A = L_1^2 + L_5^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2 L_1L_4 \sin (\alpha_1 + \alpha_0)$, $B = 2L_1L_5 \cos \alpha_1 - 2L_4 L_5 \sin \alpha_0$, $C = 2L_1L_5 \sin \alpha_1 - 2L_4L_5 \cos \alpha_0$.
	plan, conturul (II)	$A' = L_5^2 + L_2^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2 L_4L_5 \sin (\alpha_0 + \alpha_5')$, $B' = 2L_2L_5 \cos \alpha_5' - 2L_4L_2 \sin \alpha_0$, $C' = 2L_5L_2 \sin \alpha_5' - 2L_4L_2 \cos \alpha_0$.
	spațial, conturul (I)	$A = L_1^2 + L_5^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2 L_1L_4 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_0 \cos \delta_0 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_0)$, $B = 2L_5(L_1 \cos \alpha_1 - L_4 \sin \alpha_0)$, $C = 2L_5(L_1 \sin \alpha_1 \cos \delta_0 - L_4 \cos \alpha_0)$.
	spațial, conturul (II)	$A' = L_5^2 + L_2^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2 L_5L_4 \sin (\alpha_0 + \alpha_5')$, $B' = 2L_2(L_5 \cos \alpha_5' - L_4 \sin \alpha_0)$, $C' = 2 L_2(L_5 \sin \alpha_5' \cos \delta_0 - L_4 \cos \alpha_0 \cos \delta_0)$.



$$\text{-I-}\begin{cases} \alpha_1 = \varphi_{0s} - \theta_e ; \\ \overline{A'C} \in (XA'Y') ; \\ \alpha_5 = \gamma_0 + \theta \end{cases}$$

$$\text{-II-}\begin{cases} \alpha_2 = \varphi_{0s} + \theta_i ; \\ \overline{B'D} \in (XB'Y^*) ; \\ \alpha'_5 = \gamma_0 - \theta . \end{cases}$$

$$Z \perp (XGY) \equiv (GA'B')$$

Fig. 5. — Schema mecanismului de direcție cu două bare transversale, plan și spațial (varianta I).

Raportul de transmitere global al patrulaterului cu pîrghia oscilantă în față (fig. 5*a*) este dat de relația

$$i_{12} = i_{15} \cdot i_{52} = \frac{\sin(\varphi_5 - \varphi_3)\sin(\varphi_2 - \varphi_3')}{\sin(\varphi_1 - \varphi_3)\sin(\varphi_5 - \varphi_3')} =$$

$$= \frac{\cos(\gamma_0 + \theta + \alpha_3) \cdot \cos(\varphi_0 + \theta_i + \alpha_3')}{\cos(\varphi_0 - \theta_e - \alpha_3) \cdot \cos(\gamma_0 - \theta - \alpha_3')}, \tag{15}$$

unde

$$\sin \alpha_3 = (a \cos \alpha_1 - c \cos \alpha_5 + d \sin \alpha_0)/l,$$
$$\sin \alpha_3' = (c \cos \alpha_5' - a \cos \alpha_2 - d \sin \alpha_0)/l. \tag{16}$$

Pentru patrulaterul de direcție spațial cu două bare (fig. 5*b*), ecuația și soluția au aceeași formă, parametrii fiind în tabelă. Raportul de transmitere global i_{12} este produsul rapoartelor parțiale

$$i_{15} = +\frac{c}{a} \cdot \frac{\cos \alpha_3 \sin \alpha_5 + \cos \beta_3 \cos \alpha_5 \cos \delta_0 + \cos \gamma_3 \cos \alpha_5 \sin \delta_0}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \beta_3},$$
$$i_{25} = +\frac{c}{a} \cdot \frac{\cos \alpha_3' \sin \alpha_5' - \cos \beta_3' \cos \alpha_5' \cos \delta_0 + \cos \gamma_3' \cos \alpha_5' \sin \delta_0}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_3' + \cos \alpha_2 \cos \beta_3'}. \tag{17}$$

Unghiurile de poziție ale barelor $3-3'$ sînt date de relațiile

$$\cos \alpha_3 = -(a \cos \alpha_1 - c \cos \alpha_5 + d \sin \alpha_0)/l,$$
$$\cos \beta_3 = -(a \sin \alpha_1 + c \sin \alpha_5 \cos \delta_0 - d \cos \alpha_0 \cos \delta_0)/l, \tag{18}$$
$$\cos \gamma_3 = -(c \sin \alpha_5 \sin \delta_0 - d \cos \alpha_0 \sin \delta_0)/l,$$

respectiv

$$\cos \alpha_3' = -(c \cos \alpha_5' - a \cos \alpha_2 - d \sin \alpha_0)/l,$$
$$\cos \beta_3' = -(a \sin \alpha_2 + c \sin \alpha_5' \cos \delta_0 - d \cos \delta_0 \cos \alpha_0)/l, \tag{18'}$$
$$\cos \gamma_3' = -(-c \sin \alpha_5' \sin \delta_0 + d \cos \alpha_0 \sin \delta_0)/l.$$

Același patrulater de direcție, dar cu pîrghia oscilantă în spate, este arătat în figura 6, relațiile de calcul rezultate fiind trecute în tabela 1.

Pentru aprecierea cantitativă a diferențelor dintre legile de transmitere ale mecanismului de direcție plan și spațial, cu o bară sau cu două bare transversale, s-au efectuat calcule numerice comparative. Datele de calcul corespunzînd mecanismelor de direcție ale unui auto-

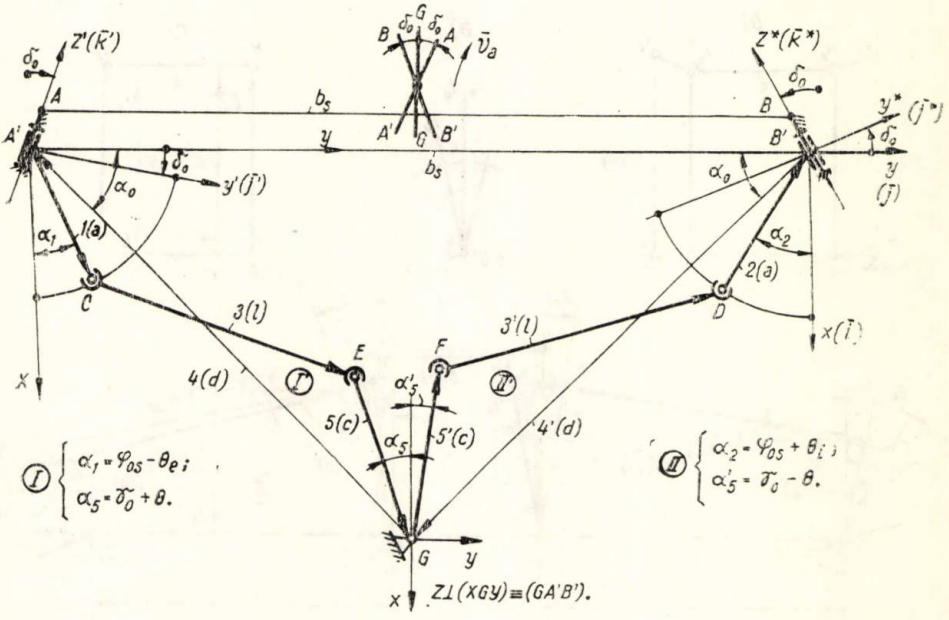


Fig. 6. — Schema mecanismului de direcție spațial cu două bare transversale și cu pîrghie oscilantă în spate (varianta II).

camion „Carpați' și ale unui tractor „Universal". Pentru aprecierea erorii care se face prin tratarea mecanismului de direcție ca un mecanism plan, calculele efectuate au cuprins atît mecanismul ipotetic-plan, cît și mecanismul real-spațial. Rezultatele calculului sînt trecute în figurile 15 și 16.

2. CALCULUL CINEMATIC AL MECANISMULUI DE DIRECȚIE CU TREI BARE TRANSVERSALE

În continuare se va studia mecanismul de direcție cu trei bare transversale (*3*, *6*, *3'*), avînd în componența sa un paralelogram și două patrulatere de direcție (fig. 7). Mecanismul casetei de direcție acționează asupra pîrghiei mijlocii *5*, care va antrena direct patrulaterul (I). Patrulaterul (II) este acționat de pîrghia *5'* din mecanismul paralelogram mijlociu, ceea ce face ca unghiurile de rotație ale pîrghiilor *5*, *5'* să fie aceleași. Aceasta duce la faptul că, din punct de vedere cinematic, relațiile de calcul au cam aceeași formă ca cele de la patrulaterul cu două bare transversale și cu o pîrghie oscilantă, adică se poate înlocui para-

lelogramul GH_0I_0G' printr-o singură pîrghie, conform figurii 7*a*. De asemenea, dacă articulaţiile E_0, F_0 sînt legate de biela 6, datorită mişcării sale de translaţie circulară, înlocuirea paralelogramului (fig. 7*b*, *c*) cu o singură pîrghie oscilantă este perfect valabilă. În această ipotetică înlocuire, H_0 şi I_0 se confundă în studiu, lungimea l_6 fiind $g = \overline{HI}$. Astfel se creează o unitate de studiu, la care trebuie ţinut seama doar de valorile reale ale lunginilor a, b, c, d, l, g.

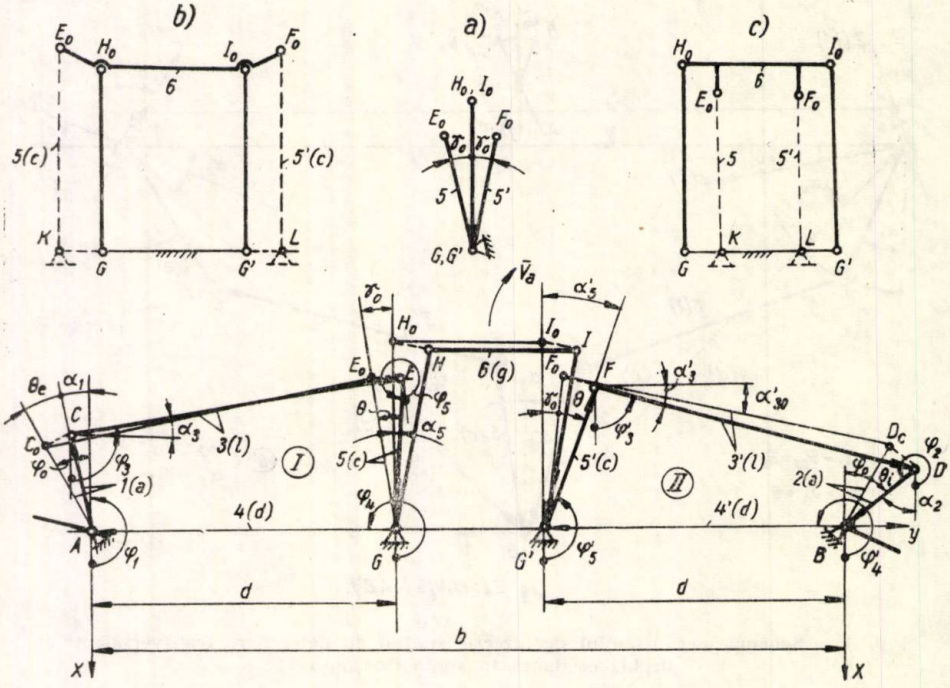


Fig. 7. — Schema mecanismului de direcţie cu trei bare transversale, plan, cu antrenare de la manivelele paralelogramului central.

În contururile vectoriale închise ale mecanismului, parametrii sînt :

$$\varphi_1 = \pi + (\varphi_0 - \theta_e) = \pi + \alpha_1 ; \; \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha_3 ,$$

$$\varphi_5 = 2\pi - (\theta - \gamma_0) = 2\pi - \alpha_5 ,$$

$$\varphi_4 = \varphi_4' = \frac{3\pi}{2} ; \; \varphi_5' = \pi - (\gamma_0 - \theta) = \pi - \alpha_5' ,$$

$$\varphi_3' = \frac{\pi}{2} - \alpha_3' ; \; \varphi_2 = 2\pi - \alpha_2 ,$$

$$\alpha_2 = \varphi_0 + \theta_i ; \; l_1 = a = l_2 ; \; l_3 = l = l_3' ,$$

$$l_4 = d = l_4' ; \; l_5 = c = l_5' ; \; d = (b-g)/2 .$$

Ecuațiile de contur ale *mecanismului de direcție cu trei bare, plan,*

$$l_1\bar{u}_1 + l_3\bar{u}_3 + l_5\bar{u}_5 + l_4\bar{u}_4 = 0\,;\; l_5\bar{u}'_5 + l_3\bar{u}'_3 + l_2\bar{u}_2 + l_4\bar{u}_4 = 0,$$

dau, prin rezolvare, ecuațiile de mișcare

$$A + B\cos\varphi_5 - C\sin\varphi_5 = 0\,;\; A' + B'\cos\varphi_2 - C'\sin\varphi_2 = 0. \quad (19)$$

Soluțiile ecuațiilor vor fi

$$\cos\alpha_5 = \cos(\theta - \gamma_0) = \frac{-A\cdot B + C\sqrt{B^2 + C^2 - A^2}}{B^2 + C^2};$$

$$\cos\alpha_2 = \cos(\varphi_0 + \theta_i) = \frac{-A'\cdot B' - C'\sqrt{B'^2 + C'^2 - A'^2}}{B'^2 + C'^2}. \quad (20)$$

Parametrii ecuației și soluția conturului (I) sînt

$$A = l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 - l_3^2 + 2l_1l_4\sin\alpha_1\,;\; \bar{u}_1\bar{u}_4 = \sin\alpha_1,$$

$$B = -2l_1l_5\cos\alpha_1\,;\; \bar{u}_1\bar{u}_5 = -\cos\alpha_1\cos\alpha_5 + \sin\alpha_1\sin\alpha_5, \quad (21)$$

$$C = 2l_5(l_1\sin\alpha_1 + l_4)\,;\; \bar{u}_4\bar{u}_5 = \sin\alpha_5,$$

respectiv, în conturul (II),

$$A' = l_5^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2 - 2l_5l_4\sin\alpha'_5\,;\; \bar{u}'_5\bar{u}'_4 = -\sin\alpha'_5,$$

$$B' = -2l_5l_2\cos\alpha'_5\,;\; \bar{u}'_5\bar{u}_2 = -\cos\alpha'_5\cos\alpha_2 - \sin\alpha'_5\sin\alpha_2, \quad (22)$$

$$C' = 2l_2(-l_5\sin\alpha'_5 + l_4)\,;\; \bar{u}_4\bar{u}_2 = \sin\alpha_2.$$

Raportul de transmitere va rezulta asemănător:

$$i_{12} = i_{15}\cdot i_{52} = \frac{\sin(\varphi_5 - \varphi_3)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_3)}\cdot\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi'_3)}{\sin(\varphi'_5 - \varphi'_3)} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha_5 + \alpha_3)\cdot\cos(\alpha_2 - \alpha'_3)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_3)\cdot\cos(\alpha'_5 - \alpha'_3)}, \quad (23)$$

$$i_{12} = \frac{\cos(\theta - \gamma_0 + \alpha_3)}{\cos(\varphi_0 - \theta_e - \alpha_3)}\cdot\frac{\cos(\varphi_0 + \theta_i - \alpha'_3)}{\cos(\gamma_0 + \theta - \alpha'_3)}.$$

Aici unghiurile barelor $3-3'$ sînt date de relaţiile

$$\sin \alpha_3 = (-a \cos \alpha_1 + c \cos \alpha_5)/l,$$
$$\sin \alpha_3' = (c \cos \alpha_5' - a \cos \alpha_2)/l. \tag{24}$$

Mecanismul de direcţie spaţial cu trei bare transversale (fig. 8) are pivoţii A şi B înclinaţi. Paralelogramul mijlociu va rămîne plan, deoarece articulaţiile G, G' rămîn paralele. În acest mod şi în cazul mecanis-

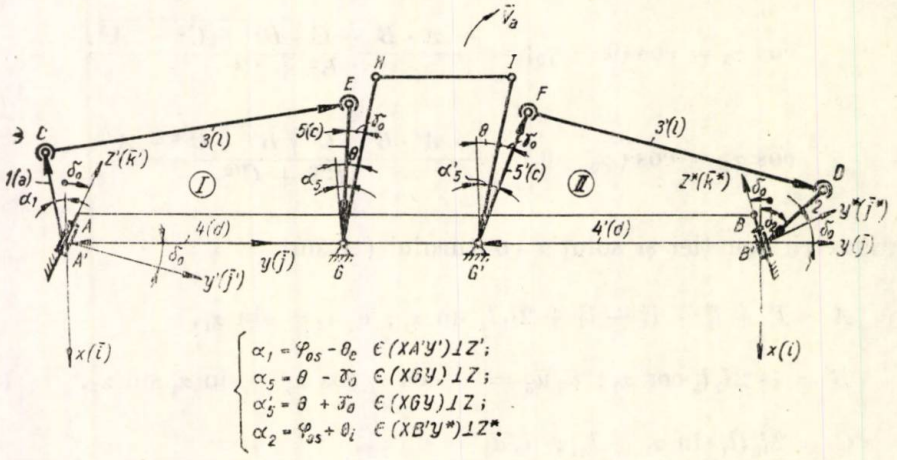


Fig. 8. — Schema mecanismului de direcţie spaţial cu trei bare transversale (varianta I).

mului spaţial, patrulaterul de direcţie cu trei bare transversale se poate reduce la patrulaterul cu două bare transversale avînd o singură pîrghie mijlocie oscilantă. În conturul I ($A'CEG$), ecuaţia vectorială în sistemul $xy'z'$,

$$l_1 \bar{u}_1 + l_3 \bar{u}_3 + l_5 \bar{u}_5 + l_4 \bar{u}_4 = 0,$$

se rezolvă izolînd vectorul $\bar{l}_3$:

$$l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 + 2 l_1 l_5 \bar{u}_1 \bar{u}_5 + 2 l_1 l_4 \bar{u}_1 \bar{u}_4 + 2 l_5 l_4 \bar{u}_5 \bar{u}_4 = l_3^2.$$

Versorii sînt daţi de relaţiile

$$\bar{u}_1 = -\bar{i} \cos \alpha_1 - \bar{j}' \sin \alpha_1,$$
$$\bar{u}_3 = \bar{i} \cos \alpha_3 + \bar{j}' \cos \beta_3 + \bar{k}' \cos \gamma_3,$$
$$\bar{u}_5 = \bar{i} \cos \alpha_5 - \bar{j} \sin \alpha_5 = \bar{i} \cos \alpha_5 - (\bar{j}' \cos \delta_0 + \bar{k}' \sin \delta_0) \sin \alpha_5,$$
$$\bar{u}_4 = -\bar{j} = -\bar{j}' \cos \delta_0 - \bar{k}' \sin \delta_0.$$

Atunci produsele versorilor devin

$$\overline{u}_1\overline{u}_4 = \sin\alpha_1\cos\delta_0,$$

$$\overline{u}_1\overline{u}_5 = -\cos\alpha_1\cos\alpha_5 + \sin\alpha_1\sin\alpha_5\cos\delta_0,$$

$$\overline{u}_4\overline{u}_5 = (\cos^2\delta_0 + \sin^2\delta_0)\sin\alpha_5 = \sin\alpha_5.$$

Notînd parametrii

$$\begin{aligned} A &= l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 - l_3^2 + 2\,l_1 l_4 \sin\alpha_1\cos\delta_0, \text{ termenul liber,} \\ B &= -2 l_1 l_5 \cos\alpha_1, \text{ factorul lui } \cos\alpha_5, \\ C &= 2 l_5 (l_1 \sin\alpha_1\cos\delta_0 + l_4), \text{ factorul lui } \sin\alpha_5, \end{aligned} \tag{25}$$

ecuația și soluția iau formele cunoscute:

$$0 = A + B\cos\alpha_5 + C\sin\alpha_5,$$

$$\cos\alpha_5 = \cos(\theta - \gamma_0) = \frac{-A\cdot B + C\sqrt{B^2 + C^2 - A^2}}{B^2 + C^2}.$$

Se va nota $l_1 = a = l_2$, $l_5 = c = l_5'$, $l_3 = l = l_3'$, $l_4 = d = l_4'$, unde

$$d_s = \frac{1}{2}(b_s - g);\quad b_s = b + 2\,\overline{AA'}\sin\delta_0;\quad \varphi_{0s} = \arcsin(\sin\varphi_0/\cos\delta_0 - \overline{AA'}\,\mathrm{tg}\,\delta_0/a).$$

În conturul II ($G'FDB'$), ecuația vectorială în sistemul xy^*z^*,

$$l_5\overline{u}_5' + l_3\overline{u}_3' + l_2\overline{u}_2 + l_4\overline{u}_4' = 0,$$

conține versorii

$$\overline{u}_5' = -\overline{i}\cos\alpha_5' + \overline{j}\sin\alpha_5' = -\overline{i}\cos\alpha_5' + (\overline{j}^*\cos\delta_0 - \overline{k}^*\sin\delta_0)\sin\alpha_5',$$

$$\overline{u}_3' = \overline{i}\cos\alpha_3' + \overline{j}^*\cos\beta_3' + \overline{k}^*\cos\gamma_3',$$

$$\overline{u}_2 = \overline{i}\cos\alpha_2 - \overline{j}^*\sin\alpha_2,$$

$$\overline{u}_4' = -\overline{j} = -\overline{j}^*\cos\delta_0 + \overline{k}^*\sin\delta_0.$$

Atunci parametrii A', B', C' devin

$$A' = l_5^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2 - 2 l_5 l_4 \sin \alpha_5',$$

$$B' = -2 l_5 l_2 \cos \alpha_5', \tag{26}$$

$$C' = 2 l_2 (-l_5 \sin \alpha_5' \cos \delta_0 + l_4 \cos \delta_0).$$

Raportul de transmitere al mecanismului spațial cu trei bare transversale se obține derivînd ecuația de poziție în raport cu parametrul independent φ_1:

$$l_1 \bar{e}_1 + l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \bar{e}_3 + l_5 \frac{d\varphi_5}{d\varphi_1} \bar{e}_5 = 0.$$

Înmulțind cu versorul $\bar{u}_3$, datorită faptului că $\bar{u}_3 \bar{e}_3 = 0$, rezultă

$$l_1 \bar{e}_1 \bar{u}_3 + l_5 \frac{d\varphi_5}{d\varphi_1} \bar{e}_5 \bar{u}_3 = 0,$$

$$0 = l_1 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \beta_3) + l_5 \frac{d\varphi_5}{d\varphi_1} (-\cos \alpha_3 \sin \alpha_5 -$$

$$- \cos \beta_3 \cos \alpha_5 \cos \delta_0 - \cos \gamma_3 \cos \alpha_5 \cos \delta_0),$$

deci

$$i_{15} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_5} = \frac{l_5}{l_1} \frac{\cos \alpha_3 \sin \alpha_5 + \cos \beta_3 \cos \alpha_5 \cos \delta_0 + \cos \gamma_3 \cos \alpha_5 \sin \delta_0}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \beta_3}, \tag{27}$$

respectiv

$$i_{25} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_5} = \frac{\cos \alpha_3' \sin \alpha_5' + \cos \beta_3' \cos \alpha_5' \cos \delta_0 - \cos \gamma_3' \cos \alpha_5' \sin \delta_0}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_3' + \cos \alpha_2 \cos \beta_3'} \cdot \frac{l_5}{l_2}. \tag{27'}$$

Unghiurile de poziție ale elementelor 3 se deduc din

$$\bar{u}_3 = \bar{i} \cos \alpha_3 + \bar{j}' \cos \beta_3 + \bar{k}' \cos \gamma_3 = -\frac{1}{l} (a \bar{u}_1 + c \bar{u}_5 + d \bar{u}_4).$$

Rezultă astfel

$$\begin{aligned}\cos\alpha_3 &= -(-a\cos\alpha_1 + c\cos\alpha_5)/l,\\ \cos\beta_3 &= (a\sin\alpha_1 + c\sin\alpha_5\cos\delta_0 + d\cos\delta_0)/l,\\ \cos\gamma_3 &= (c\sin\alpha_5 + d)\sin\delta_0/l,\end{aligned} \tag{28}$$

respectiv

$$\begin{aligned}\cos\alpha_3' &= -(-c\cos\alpha_5' + a\cos\alpha_2)/l,\\ \cos\beta_3' &= -(-a\sin\alpha_2 + c\sin\alpha_5'\cos\delta_0 - d\cos\delta_0)/l,\\ \cos\gamma_3' &= -(-c\sin\alpha_5' + d)\sin\delta_0/l.\end{aligned} \tag{28'}$$

Varianta a doua a patrulaterului de direcție cu trei bare transversale este aceea a antrenării barelor transversale *3—3'* de la bara *6* a paralelogramului. În figura 9 mecanismul este dispus posterior osiei din față. Dacă contururile închise, necesare studiului cinematic, ar trebui să includă elementele *1—3—6—5—4*, respectiv *5'—6—3'—2—4'*, în fiecare contur ar fi mai mult de două necunoscute. Se impune mai întîi rezolvarea conturului paralelogramului *GHIG'*, dar și așa ecuația va conține cinci vectori, ceea ce este mai complicat. Pentru unitatea de studiu și pentru o generalizare comodă a rezultatelor anterioare la acest caz, se observă că biela *6* execută o mișcare de translație circulară. Este deci permisă înlocuirea paralelogramului cu o singură bară, $5 \equiv \overline{E_0K}$, respectiv bara $5' \equiv \overline{F_0L}$. Se ajunge astfel la mecanismul din figurile 7—8, cu două contururi poligonale, conținînd patru laturi. Se observă că, pentru relații cinematice, barele *5—5'* se pot confunda, ajungîndu-se la patrulaterul cu două bare transversale și cu o singură pîrghie oscilantă (fig. 6). În calculele viitoare trebuie ținut seama că $l_6 = \overline{EF}$;

$$l_5 = \overline{EK} = c = \overline{FL} = l_5'; \; l_4 = \overline{AK} = d = \overline{BL} = l_4' =$$

$$= (b - l_6)/2\cos\alpha_0; \; l_6 = \overline{EF} = \overline{KL}.$$

În contururile (I) și (II), versorii de poziție sînt determinați de unghiurile

$$\varphi_1 = \alpha_1; \; \varphi_3 = \frac{\pi}{2} = \alpha_3; \; \varphi_5 = \alpha_5, \; \varphi_4 = \frac{3\pi}{2} - \alpha_0; \; \varphi_5' = \pi + \alpha_5';$$

$$\varphi_3' = \frac{\pi}{2} - \alpha_3'; \; \varphi_2 = \pi - \alpha_2,$$

$$\varphi_4' = \frac{3\pi}{2} + \alpha_0; \; \alpha_5 = \theta; \; \alpha_1 = \varphi_0 - \theta_e; \; \alpha_5' = \theta; \; \alpha_2 = \varphi_0 + \theta_i.$$

Cum $\bar{u}_i = \bar{i}\cos\varphi_i + \bar{j}\sin\varphi_i$; rezultă pentru conturul (I),

$$A = l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 - l_3^2 + 2l_1 l_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4),$$
$$B = 2l_5(l_1 \cos\varphi_1 + l_4 \cos\varphi_4), \qquad (29)$$
$$C = 2l_5(l_1 \sin\varphi_1 + l_4 \sin\varphi_4).$$

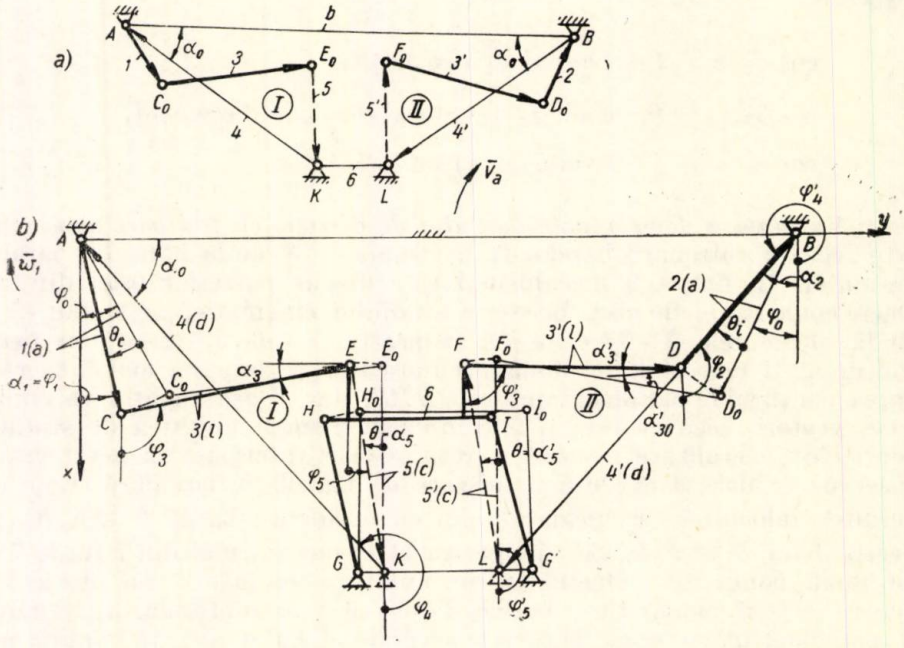


Fig. 9. — Schema mecanismului de direcție plan cu trei bare transversale, cu antrenare de la biela paralelogramului.

Atunci în conturul (I)

$A = l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 - l_3^2 - 2l_1 l_4 \sin(\alpha_1 + \alpha_0)$ — termenul liber,

$B = 2l_5(l_1 \cos\alpha_1 - l_4 \sin\alpha_0)$ — coeficientul lui $\cos\alpha_5$, (30)

$C = 2l_5(l_1 \sin\alpha_1 - l_4 \cos\alpha_0)$ — coeficientul lui $\sin\alpha_5$,

respectiv, în conturul (II),

$A' = l_5^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2 + 2l_5 l_4 \sin(\alpha'_5 - \alpha_0)$ — termenul liber,

$B' = 2l_2(l_5 \cos\alpha'_5 - l_4 \sin\alpha_0)$ — coeficientul lui $\cos\alpha_2$, (31)

$C' = 2l_2(-l_5 \sin\alpha'_5 - l_4 \cos\alpha_0)$ — coeficientul lui $\sin\alpha_2$.

Raportul de transmitere se obține prin derivarea ecuațiilor de contur:

$$l_1\bar{e}_1 + l_3\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\bar{e}_3 + l_5\frac{d\varphi_5}{d\varphi_1}\bar{e}_5 = 0,$$

$$l_5\bar{e}'_5 + l_3\frac{d\varphi'_3}{d\varphi'_5}\bar{e}'_3 + l_2\frac{d\varphi_2}{d\varphi'_5}\bar{e}_2 = 0,$$

$$l_1\bar{e}_1\bar{u}_3 + l_5\frac{d\varphi_5}{d\varphi_1}\bar{e}_5\bar{u}_3 = 0,$$

$$l_5\bar{e}'_5\bar{u}'_3 + l_2\frac{d\varphi_2}{d\varphi'_5}\bar{e}_2\bar{u}'_3 = 0,$$

$$l_1\sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l_5\frac{d\varphi_5}{d\varphi_1}\sin(\varphi_5 - \varphi_3) = 0,$$

$$l_5\sin(\varphi'_5 - \varphi'_3) + l_2\frac{d\varphi_2}{d\varphi'_5}\sin(\varphi_2 - \varphi'_3) = 0,$$

deci

$$i_{12} = i_{15}\cdot i_{52} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_5}\cdot\frac{d\varphi'_5}{d\varphi_2} = \frac{\sin(\varphi_5 - \varphi_3)\sin(\varphi_2 - \varphi'_3)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_3)\sin(\varphi'_5 - \varphi'_3)} =$$

$$= \frac{\cos(\theta - \alpha_3)\cos(\varphi_0 + \theta_i - \alpha'_3)}{\cos(\varphi_0 - \theta_e - \alpha_3)\cos(\theta + \alpha'_3)}. \qquad (32)$$

Patrulaterul spațial cu trei bare, cu antrenarea barelor *3—3'* de la bara *6* și așezarea posterioară, este reprezentat în figura 10. În mod asemănător se înlocuiește paralelogramul *GHIG'* cu pîrghiile $\overline{EK}$, respectiv $\overline{FL}$, cele două contururi poligonale devenind *A'CEKA'*, respectiv *LFDB'L*. Versorii elementelor contururilor sînt dați de expresiile

$$\bar{u}_i = \bar{i}\cos\alpha_i + \bar{j}'\cos\beta_i + \bar{k}'\cos\gamma_i;\ \bar{u}'_i = \bar{i}\cos\alpha'_i + \bar{j}^*\cos\beta'_i + \bar{k}^*\cos\gamma'_i.$$

Astfel în conturul (I)

$$\bar{u}_1 = \bar{i}\cos\alpha_1 + \bar{j}'\sin\alpha_1,$$

$$\bar{u}_3 = \bar{i}\cos\alpha_3 + \bar{j}'\cos\beta_3 + \bar{k}'\cos\gamma_3,$$

$$\bar{u}_5 = \bar{i}\cos\alpha_5 + \bar{j}\sin\alpha_5 = \bar{i}\cos\alpha_5 + (\bar{j}'\cos\delta_0 + \bar{k}'\sin\delta_0)\sin\alpha_5,$$

$$\bar{u}_4 = -\bar{i}\sin\alpha_0 - \bar{j}\cos\alpha_0 = -\bar{i}\sin\alpha_0 - (\bar{j}'\cos\delta_0 + \bar{k}'\sin\delta_0)\cos\alpha_0,$$

respectiv, în conturul (II),

$$\bar{u}_5' = -\bar{i}\cos\alpha_5' - \bar{j}\sin\alpha_5' = -\bar{i}\cos\alpha_5' - (\bar{j}^*\cos\delta_0 - \bar{k}^*\sin\delta_0)\sin\alpha_5',$$

$$\bar{u}_3' = \bar{i}\cos\alpha_3' + \bar{j}^*\cos\beta_3' + \bar{k}^*\cos\gamma_3',$$

$$\bar{u}_2 = -\bar{i}\cos\alpha_2 + \bar{j}^*\sin\alpha_2,$$

$$\bar{u}_4' = \bar{i}\sin\alpha_0 - \bar{j}\cos\alpha_0 = \bar{i}\sin\alpha_0 - (\bar{j}^*\cos\delta_0 - \bar{k}^*\sin\delta_0)\cos\alpha_0.$$

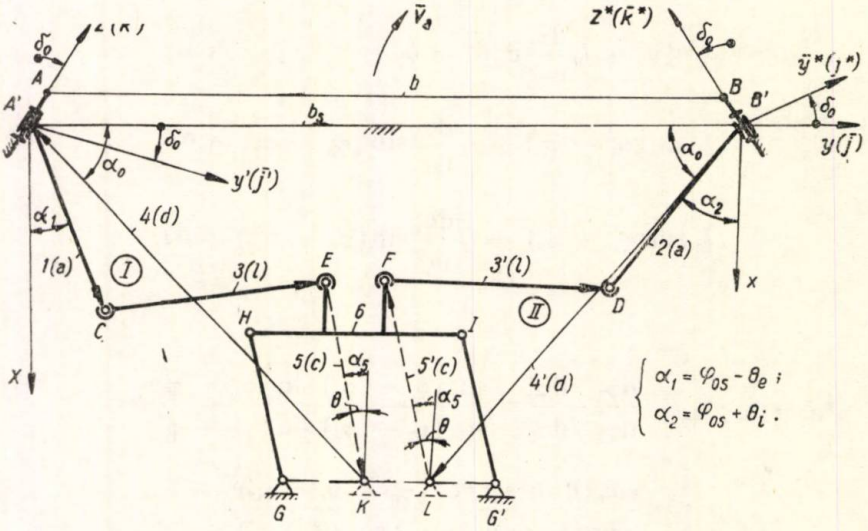


Fig. 10. — Schema mecanismului de direcție spațial cu trei bare transversale (varianta II).

Atunci parametrii ecuației devin

$$A = l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 - l_3^2 - 2l_1l_4(\cos\alpha_1\sin\alpha_0 + \sin\alpha_1\cos\alpha_0\cos\delta_0),$$

$$B = 2l_5(l_1\cos\alpha_1 - l_4\sin\alpha_0), \qquad (33)$$

$$C = 2l_5(l_1\sin\alpha_1\cos\delta_0 - l_4\cos\alpha_0),$$

respectiv

$$A' = l_5^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2 - 2l_5l_4\sin(\alpha_0 - \alpha_5'),$$

$$B' = 2l_2(l_5\cos\alpha_5' - l_4\sin\alpha_0), \qquad (34)$$

$$C' = 2l_2(-l_5\sin\alpha_5' - l_4\cos\alpha_0)\cos\delta_0.$$

Patrulaterul de direcție cu trei bare transversale poate avea și o *a treia variantă*, dată în figura 11. La această schemă, paralelogramul mijlociu s-a transformat într-un trapez, iar articulațiile patrulaterelor de direcție nu mai sînt pe linia osiei din față. În acest caz nu se mai

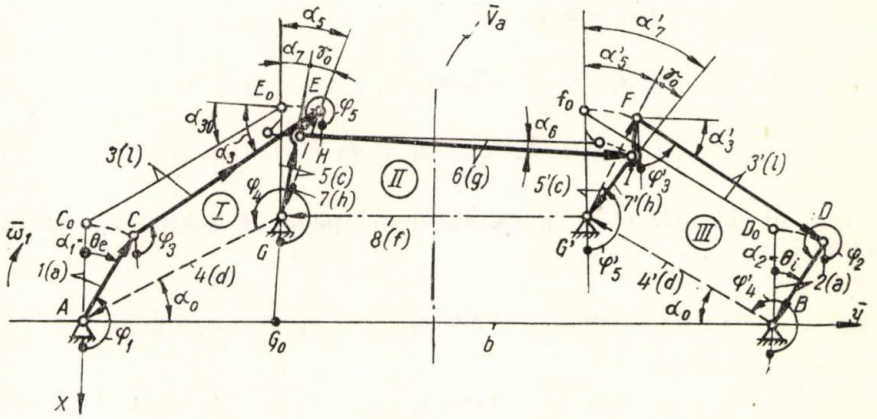


Fig. 11. — Schema mecanismului de direcție plan cu trei bare transversale și cu patrulater mijlociu, cu antrenare de la manivele.

poate face reducerea schemei la mecanismul cu două bare transversale, trebuind rezolvate trei contururi vectoriale închise. O altă particularitate a schemei prezentate este anularea unghiului de poziție neutră al pîrghiilor de direcție ($\varphi_0 = 0$), întreg mecanismul de direcție fiind astfel compus din trei patrulatere-trapez.

În cazul existenței înclinării δ_0 a pivoților, prin schimbarea bazei b în b_s,

$$b_s = b - 2\,\overline{AA'}\sin\delta_0,$$

unghiul α_0 trece în α_{0s}, apărînd și un unghi φ_{0s}. Prin dispunerea trapezului la nivelul osiei ($\overline{AA'} = 0$),

$$b_s = b\,;\ \alpha_{0s} = \alpha_0\,;\ \varphi_{0s} = \varphi_0 = 0\,.$$

În conturul (I), $ACEGA$, parametrul independent este α_1, iar necunoscuta α_5 (fig. 11.):

$$\bar{u}_1 = -\bar{i}\cos\alpha_1 + \bar{j}\sin\alpha_1\,; \qquad \alpha_1 = \theta_e\,,$$

$$\bar{u}_3 = -\bar{i}\sin\alpha_3 + \bar{j}\cos\alpha_3\,; \qquad \alpha_3 = \varphi_3 - \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\bar{u}_5 = \bar{i}\cos\alpha_5 - \bar{j}\sin\alpha_5\,; \qquad \alpha_5 = \theta\,;$$

$$\bar{u}_4 = \bar{i}\sin\alpha_0 - \bar{j}\cos\alpha_0\,; \qquad \operatorname{tg}\alpha_0 = 2\,\overline{GG_0}/(b-f).$$

Astfel parametrii ecuației $A + B \cos \alpha_5 + C \sin \alpha_5 = 0$ devin

$$A = l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 - l_3^2 - 2 l_1 l_4 \sin (\alpha_0 + \alpha_1),$$

$$B = -2 l_5 (l_1 \cos \alpha_1 - l_4 \sin \alpha_0),$$

$$C = -2 l_5 (l_1 \sin \alpha_1 - l_4 \cos \alpha_0); \quad l_1 = l_2 = a,$$

$$l_3 = l_3' = l; \; l_4 = l_4' = d; \; l_5 = l_5' = c. \tag{35}$$

În conturul (II), *GHIG'G*, parametrul independent devine α_7, iar necunoscuta α_7':

$$\bar{u}_7 = -\bar{i} \cos \alpha_7 + \bar{j} \sin \alpha_7; \qquad \alpha_7 = \alpha_5 - \gamma_0,$$

$$\bar{u}_6 = \bar{i} \sin \alpha_6 + \bar{j} \cos \alpha_6; \qquad \alpha_6 = \pi/2 - \varphi_6,$$

$$\bar{u}_7' = \bar{i} \cos \alpha_7' - \bar{j} \sin \alpha_7'; \qquad \alpha_7' = \alpha_5' + \gamma_0,$$

$$\bar{u}_8 = -\bar{j}.$$

În acest fel parametrii ecuației de contur $A' + B' \cos \alpha_7' + C' \sin \alpha_7' = 0$ sînt

$$A' = l_7^2 - l_6^2 + l_7'^2 + l_8^2 - 2 l_7 l_8 \sin \alpha_7$$

$$B' = -2 l_7^2 \cos \alpha_7, \tag{36}$$

$$C' = -2 l_7 (l_7 \sin \alpha_7 - l_8); \; l_7 = l_7' = h; \; l_6 = g; \; l_8 = f; \; \overline{AB} = b.$$

În conturul (III), *G'FDBG'*, parametrul independent devine α_5', iar necunoscuta α_2:

$$\bar{u}_5' = -\bar{i} \cos \alpha_5' + \bar{j} \sin \alpha_5'; \qquad \alpha_5' = \alpha_7' - \gamma_0,$$

$$\bar{u}_3' = \bar{i} \sin \alpha_3' + \bar{j} \cos \alpha_3'; \qquad \alpha_3' = \pi/2 - \varphi_3',$$

$$\bar{u}_2 = \bar{i} \cos \alpha_2 - \bar{j} \sin \alpha_2; \qquad \alpha_2 = \theta_i,$$

$$\bar{u}_4' = -\bar{i} \sin \alpha_0 - \bar{j} \cos \alpha_0.$$

Atunci parametrii ecuației de contur $A'' + B'' \cos \alpha_2 + C'' \sin \alpha_2 = 0$ vor fi

$$A'' = l_5^2 - l_3^2 + l_2^2 + l_4^2 + 2 l_5 l_4 \sin (\alpha_0 - \alpha_5'),$$

$$B'' = -2 l_2 (l_5 \cos \alpha_5' + l_4 \sin \alpha_0),$$

$$C'' = -2 l_2 (l_5 \sin \alpha_5' - l_4 \cos \alpha_0).$$

Astfel din conturul (I) rezultă $\alpha_5 = f_1(\alpha_1)$, din conturul (II) $\alpha_7' = f_2(\alpha_7)$ și din conturul (III) $\alpha_2 = f_3(\alpha_5')$, rezultînd în final $\alpha_2 = f(\alpha_1)$.

Pentru mecanismul spațial (fig. 12) se procedează analog. În conturul (I)

$$\bar{u}_1 = -\bar{i} \cos \alpha_1 + \bar{j}' \sin \alpha_1; \quad \alpha_1 = \theta_e - \varphi_{0s}.$$

$$\bar{u}_5 = \bar{i} \cos \alpha_5 - \bar{j} \sin \alpha_5 = \bar{i} \cos \alpha_5 - (\bar{j}' \cos \delta_0 + \bar{k}' \sin \delta_0) \sin \alpha_5,$$

$$\bar{u}_4 = \bar{i} \sin \alpha_{0s} - \bar{j} \cos \alpha_{0s} = \bar{i} \sin \alpha_{0s} - (\bar{j}' \cos \delta_0 + \bar{k}' \sin \delta_0) \cos \alpha_{0s},$$

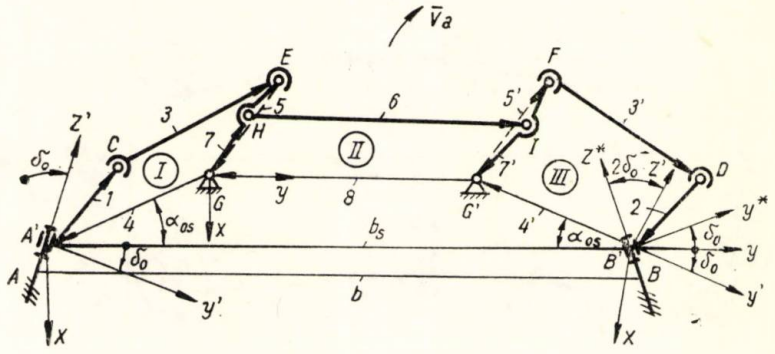


Fig. 12. — Schema mecanismului de direcție spațial cu trei bare transversale (varianta III).

$$A = l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 - l_3^2 - 2 l_1 l_4 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_{0s} + \sin \alpha_1 \cos \alpha_{0s} \cos \delta_0),$$

$$B = -2 l_5 (l_1 \cos \alpha_1 - l_4 \sin \alpha_{0s}), \tag{38}$$

$$C = -2 l_5 (l_1 \sin \alpha_1 \cos \delta_0 - l_4 \cos \alpha_{0s}).$$

În conturul (II), A', B', C' își păstrează valorile, mecanismul rămînînd plan. În conturul (III)

$$\bar{u}_5' = -\bar{i}\cos\alpha_5' + \bar{j}\sin\alpha_5' = -\bar{i}\cos\alpha_5' + (\bar{j}^*\cos\delta_0 - \bar{k}^*\sin\delta_0)\sin\alpha_5';$$

$$\alpha_5' = \alpha_7 - \gamma_0,$$

$$\bar{u}_2 = \bar{i}\cos\alpha_2 - \bar{j}^*\sin\alpha_2; \quad \alpha_2 = \varphi_{0s} + \theta_i,$$

$$\bar{u}_4' = -\bar{i}\sin\alpha_{0s} - \bar{j}\cos\alpha_{0s} = -\bar{i}\sin\alpha_{0s} - (\bar{j}^*\cos\delta_0 - \bar{k}^*\sin\delta_0)\cos\alpha_{0s},$$

$$A'' = l_5^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2 + 2\,l_5 l_4 \sin(\alpha_{0s} - \alpha_5'),$$

$$B'' = -2\,l_2(l_5\cos\alpha_5' + l_4\sin\alpha_{0s}),$$

$$C'' = -2\,l_2(l_5\sin\alpha_5'\cos\delta_0 - l_4\cos\delta_0\cos\alpha_{0s}).$$

3. CALCULUL CINEMATIC AL MECANISMULUI DE DIRECȚIE CU CREMALIERĂ

În continuare se va prezenta mecanismul de direcție cu cremalieră (fig. 13). De bara transversală a acestui mecanism este solidarizată o cremalieră, care este acționată direct de pinionul din caseta de direcție.

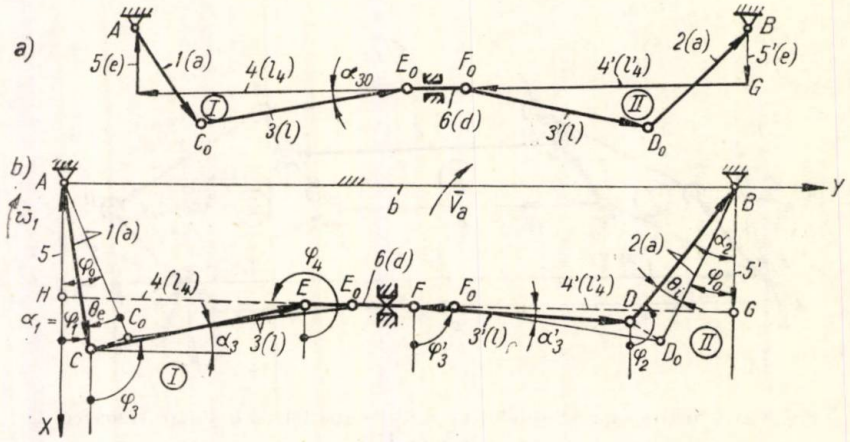


Fig. 13. — Schema mecanismului de direcție cu cremalieră, plan.

În acest mod mecanismul de direcție este format din două mecanisme patină-balansier (bielă-manivelă), elementul conducător fiind patina. Mecanismele corespunzătoare sînt excentrice, adică ghidajul patinei 4 nu trece prin articulațiile $A-B$. Astfel cele două contururi poligonale sînt $ACEHA$, $BDFGB$. Antrenarea se face de la patina 4, dar pentru determinarea corelației dintre unghiurile de rotire ale pîrghiilor de direc-

ție *1* și *2*, solidarizate cu fuzetele roților directoare, se consideră că elementul conducător este pîrghia 1.

În conturul (I), (fig. 13*a*), ecuația de contur,

$$l_1\bar{u}_1 + l_3\bar{u}_3 + l_4\bar{u}_4 + l_5\bar{u}_5 = 0,$$

conține mărimile cunoscute:

$$l_1 = \overline{AC};\quad l_3 = \overline{CE};\quad l_5 = \overline{AH};\quad \varphi_1 = \alpha_1 = \varphi_0 - \theta;\quad \varphi_4 = \frac{3\pi}{2};\quad \varphi_5 = \pi.$$

Unghiul de poziție inițială rezultă din relația

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{1}{2a}[b - 2l\cos\alpha_{30} - d], \tag{40}$$

$$d = \overline{EF} = l_6.$$

Necunoscutele din ecuație sînt $\varphi_3 = \pi/2 + \alpha_3$ și $l_4 = \overline{EH}$, interesînd în special deplasarea patinei l_4. Ridicînd la pătrat, se obține ecuația

$$l_1^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_3^2 + 2\,l_1 l\bar{u}_{41}\bar{u}_4 + 2\,l_1 l_5\bar{u}_1\bar{u}_5 + 2\,l_4 l_5\bar{u}_4\bar{u}_5 = 0,$$

unde produsul versorilor

$$\bar{u}_1 = \bar{i}\cos\alpha_1 + \bar{j}\sin\alpha_1,\quad \bar{u}_3 = -\bar{i}\sin\alpha_3 + j\cos\alpha_3,\quad \bar{u}_4 = -\bar{j},\quad \bar{u}_5 = -\bar{i}$$

devine

$$\bar{u}_1\bar{u}_4 = -\sin\alpha_1;\quad \bar{u}_1\bar{u}_5 = -\cos\alpha_1;\quad \bar{u}_4\bar{u}_5 = 0.$$

Ecuația de contur ia forma

$$l_1^2 + l_5^2 - l_3^2 - 2\,l_1 l_5\cos\alpha_1 + l_4^2 - 2\,l_1 l_4\sin\alpha_1 = 0;\ A + Bl_4 + l_4^2 = 0, \tag{41}$$

unde s-au notat parametrii

$$A = l_1^2 + l_5^2 - l_3^2 - 2\,l_1 l_5\cos\alpha_1,$$
$$B = -2\,l_1\sin\alpha_1;\quad \alpha_1 = \varphi_0 - \theta_e. \tag{42}$$

Soluția ecuației (41) este dată de relația

$$l_4 = \frac{1}{2}[-B + \sqrt{B^2 - 4A}]. \tag{43}$$

În conturul (II), ecuația de poziție,

$$l_3\bar{u}_3' + l_2\bar{u}_2 + l_5\bar{u}_5' + l_4'\bar{u}_4' = 0,$$

are ca parametri cunoscuți mărimile

$$l_3 = \overline{FD}\,; \quad l_2 = \overline{BD}\,; \quad l_5 = \overline{BG}\,; \quad \varphi_5' = 0\,; \quad \varphi_4' = \frac{3\pi}{2}\,; \quad l_4' = b - (d + l_4), \tag{44}$$

iar ca mărimi necunoscute unghiurile $\varphi_3' = \pi/2 - \alpha_3'$ și $\varphi_2 = \pi - \alpha_2$. Prin ridicare la pătrat, ecuația

$$l_2^2 + l_5^2 + l_4'^2 - l_3^2 + 2\,l_2 l_5 \bar{u}_2\bar{u}_5' + 2 l_2 l_4' \bar{u}_2\bar{u}_4 + 2\,l_5 l_4' \bar{u}_5'\,\bar{u}_4 = 0,$$

datorită faptului că versorii sînt dați de expresiile

$$\bar{u}_3' = \bar{i}\,\sin\alpha_3' + \bar{j}\,\cos\alpha_3'\,; \quad \bar{u}_2 = -\,\bar{i}\,\cos\alpha_2 + \bar{j}\,\sin\alpha_2\,; \quad \bar{u}_5' = \bar{i}\,; \quad \bar{u}_4 = -\,\bar{j},$$

conține produsele scalare ale vectorilor unitari:

$$\bar{u}_2\bar{u}_5' = -\cos\alpha_2\,; \quad \bar{u}_2\bar{u}_4 = -\sin\alpha_2\,; \quad \bar{u}_4\bar{u}_5' = 0.$$

Ecuația de contur devine

$$A' + B'\cos\alpha_2 + C'\sin\alpha_2 = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} A' &= l_2^2 + l_5^2 + l_4'^2 - l_3^2, \\ B' &= -\,2\,l_2 l_5, \\ C' &= -\,2\,l_2 l_4'. \end{aligned} \tag{45}$$

Soluția ecuației va fi

$$\cos\alpha_2 = \cos(\varphi_0 + \theta_i) = \frac{-A'\cdot B' - C'\sqrt{B'^2 + C'^2 - A'^2}}{B'^2 + C'^2}\,. \tag{46}$$

Raportul de transmitere se obține prin derivarea ecuației de poziție în raport cu argumentul φ_1, respectiv l_4'. Astfel avem

$$l_1\bar{e}_1 + l_3\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}\varphi_1}\bar{e}_3 + \frac{\mathrm{d}l_4}{\mathrm{d}\varphi_1}\bar{u}_4 = 0,$$

$$l_1 e_1 \bar{u}_3 + \frac{\mathrm{d}l_4}{\mathrm{d}\varphi_1}\bar{u}_4\bar{u}_3 = 0,$$

$$l_1(-\sin\varphi_1\cos\varphi_3+\cos\varphi_1\sin\varphi_3)-\frac{dl_4}{d\varphi_1}\sin\varphi_3=0,$$

$$i_{14}=\frac{d\varphi_1}{dl_4}=\frac{-\sin\varphi_3}{l_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)}=\frac{\cos\alpha_3}{l_1\cos(\alpha_1-\alpha_3)},$$

respectiv, în conturul (II),

$$i_{24'}=\frac{d\varphi_2}{dl_4'}=\frac{-\sin\varphi_3'}{l_2\sin(\varphi_2-\varphi_3')}=\frac{-\cos\alpha_3'}{l_2\cos(\alpha_2-\alpha_3')}.$$

Raportul global va fi dat de relația

$$i_{12}=i_{14}\cdot i_{42}=\frac{-\cos\alpha_3}{\cos(\alpha_1-\alpha_3)}\cdot\frac{\cos(\alpha_2-\alpha_3')}{\cos\alpha_3'}. \tag{47}$$

Unghiurile α_3, α_3' rezultă din egalitățile

$$\bar{u}_3=-\bar{i}\sin\alpha_3+\bar{j}\cos\alpha_3=-[l_1(\cos\alpha_1\bar{i}+\sin\alpha_1\bar{j})-l_4\bar{j}-l_5\bar{i}]/l_3,$$

$$\bar{u}_3'=\bar{i}\sin\alpha_3'+\bar{j}\cos\alpha_3'=-[l_2(-\cos\alpha_2\bar{i}+\sin\alpha_2\bar{j})+l_5\bar{i}-l_1'\bar{j}]/l_3,$$

deci

$$\sin\alpha_3=(a\cos\alpha_1-e)/l,$$
$$\sin\alpha_3'=(a\cos\alpha_2-e)/l. \tag{47'}$$

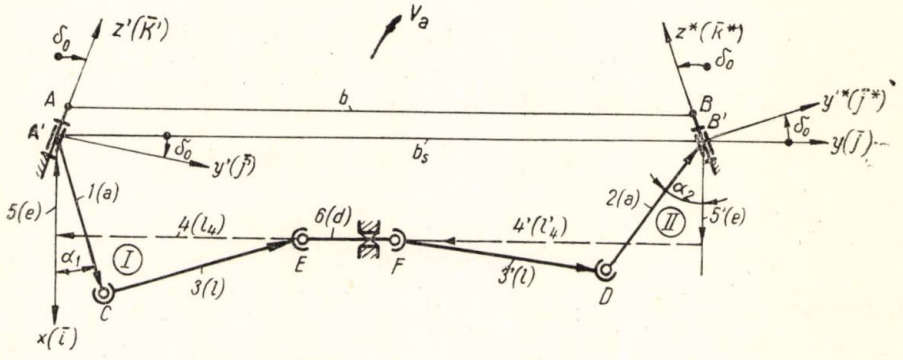


Fig. 14. — Schema mecanismului de direcție spațial cu cremalieră.

Mecanismul de direcție spațial cu cremalieră este reprezentat în figura 14. Pivoții $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ se înclină transversal cu unghiul δ_0. Ecuația de poziție a conturului (I) se rezolvă în sistemul $xy'z'$, iar a conturului (II) în sistemul xy^*z^*. Astfel avem

$$l_1\bar{u}_1+l_3\bar{u}_3+l_4\bar{u}_4+l_5\bar{u}_5=0,$$

unde

$$\bar{u}_1 = \cos\alpha_1\,\bar{i} + \sin\alpha_1\,\bar{j}',$$

$$\bar{u}_4 = -\bar{j} = -\bar{j}'\cos\delta_0 - \bar{k}'\sin\delta_0,$$

$$\bar{u}_3 = \cos\alpha_3\,\bar{i} + \cos\beta_3\,\bar{j}' + \cos\gamma_3\bar{k}'\,;\quad \bar{u}_5 = -\bar{i}.$$

Atunci, în ecuația

$$l_1^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_3^2 + 2\,l_1l_4\bar{u}_1\bar{u}_4 + 2\,l_1l_5\bar{u}_1\bar{u}_5 + 2\,l_4l_5\bar{u}_4\bar{u}_5 = 0,$$

produsele scalare au expresiile

$$\bar{u}_1\bar{u}_4 = -\sin\alpha_1\cos\delta_0\,;\quad \bar{u}_1\bar{u}_5 = -\cos\alpha_1\,;\quad \bar{u}_4\bar{u}_5 = 0.$$

Notînd parametrii

$$A = l_1^2 + l_5^2 - l_3^2 - 2\,l_1l_5\cos\alpha_1\,;\quad \alpha_1 = \varphi_{0s} - \theta_e,$$

$$B = -2\,l_1\sin\alpha_1\cos\delta_0\,;\quad \sin\varphi_{0s} = \frac{1}{2a\cos\delta_0}(b_s - 2l\cos\alpha_3 - d), \tag{48}$$

rezultă ecuația și soluția

$$l_4^2 + Bl_4 + A = 0\,;\qquad l_4 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A}}{2}. \tag{49}$$

În mod asemănător, în conturul (II),

$$l_3\bar{u}_3' + l_2\bar{u}_2 + l_5\bar{u}_5' + l_4'\bar{u}_4' = 0,$$

versorii sînt dați de expresiile

$$\bar{u}_3 = \bar{i}\cos\alpha_3' + \bar{j}^*\cos\beta_3' + \bar{k}^*\cos\gamma_3',$$
$$\bar{u}_2 = -\bar{i}\cos\alpha_2 + \bar{j}^*\sin\alpha_2,$$
$$\bar{u}_4 = -\bar{j} = -(\bar{j}^*\cos\delta_0 - \bar{k}^*\sin\delta_0)\,;\quad \bar{U}_5' = \bar{i}.$$

Se notează

$$A' = l_2^2 + l_5^2 + l_4'^2 - l_3^2\,;\quad B' = -2\,l_2l_5\,;\quad C' = -2\,l_2l_4'\cos\delta_0. \tag{50}$$

Rezultă

$$A' + B'\cos\alpha_2 + C'\sin\alpha_2 = 0,$$

$$\cos\alpha_2 = \cos(\varphi_{0s} + \theta_i) = \frac{-A'\cdot B' - C'\sqrt{B'^2 + C'^2 - A'^2}}{B'^2 + C'^2}. \tag{51}$$

Raportul de transmitere rezultă asemănător

$$l_1 e_1 \bar{u}_3 + \frac{dl_4}{d\varphi_1} \bar{u}_4 \bar{u}_3 = 0,$$

$$l_1(-\sin\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\alpha_1\cos\beta_3) - \frac{dl_4}{d\varphi_1}(\cos\beta_3\cos\delta_0 + \cos\gamma_3\sin\delta_0) = 0,$$

$$i_{14} = \frac{d\varphi_1}{dl_4} = \frac{\cos\beta_3\cos\delta_0 + \cos\gamma_3\sin\delta_0}{l_1(-\sin\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\alpha_1\cos\beta_3)},$$

$$i_{24} = \frac{\cos\beta_3'\cos\delta_0 - \sin\delta_0\cos\gamma_3'}{l_2(+\sin\alpha_2\cos\alpha_3' + \cos\alpha_2\cos\beta_3')},$$

deci

$$i_{12} = \frac{\cos\beta_3\cos\delta_0 + \sin\delta_0\cos\gamma_3}{-\sin\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\alpha_1\cos\beta_3} \cdot \frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_3' + \cos\alpha_2\cos\beta_3'}{\cos\beta_3'\cos\delta_0 - \sin\delta_0\cos\gamma_3'}. \quad (52)$$

Unghiurile bielelor se determină din egalitățile

$$\bar{u}_3 = \bar{i}\cos\alpha_3 + \bar{j}'\cos\beta_3 + \bar{k}'\cos\gamma_3 =$$

$$= -\frac{1}{l_3}[l_1(\cos\alpha_1\bar{i} + \sin\alpha_1\bar{j}') - l_4(\cos\delta_0\bar{j}' + \sin\delta_0\bar{k}') - l_5\bar{i}],$$

$$\bar{u}_3' = i\cos\alpha_3' + \bar{j}^*\cos\beta_3' + \bar{k}^*\cos\gamma_3' =$$

$$= -\frac{1}{l_3}[l_2(-\cos\alpha_2\bar{i} + \sin\alpha_2\bar{j}^*) + l_5\bar{i} - l_4'(\cos\delta_0\bar{j}^* - \sin\delta_0\bar{k}^*)].$$

Deci

$$\cos\alpha_3 = -\frac{1}{l_3}(l_1\cos\alpha_1 - l_5),$$

$$\cos\beta_3 = -\frac{1}{l_3}(l_1\sin\alpha_1 - l_4\cos\delta_0), \quad (53)$$

$$\cos\gamma_3 = -\frac{1}{l_3}l_4\sin\delta_0,$$

respectiv

$$\cos \alpha_3' = -\frac{1}{l_3}(-l_2 \cos \alpha_2 + l_5),$$

$$\cos \beta_3' = -\frac{1}{l_3}(l_2 \sin \alpha_2 - l_4' \cos \delta_0), \tag{54}$$

$$\cos \gamma_3' = -\frac{1}{l_3} l_4' \sin \delta_0.$$

Analiza comparativă a relaţiilor determinate pentru mecanismul considerat plan şi pentru mecanismul real spaţial indică legi de transmitere diferite. Eroarea care se face prin calcularea trapezului ipotetic plan faţă de legea reală trebuie însă apreciată de la caz la caz, ea fiind influenţată de mărimile $\overline{AA'}$, δ_0 în comparaţie cu ceilalţi parametri. Pentru aceasta se fac *calcule numerice* comparative ale unor cazuri concrete de mecanisme de direcţie. Lucrarea nu-şi propune probleme de sinteză a mecanismelor, adică de alegere a schemelor şi parametrilor optimi realizării condiţiilor (1), (2), dar poate constitui bază de sinteză prin precizarea parametrilor care pot fi influenţaţi în vederea obţinerii unei legi de transmitere impusă.

Astfel, în figura 15, cu datele de calcul precizate ale unui autocamion „Carpaţi" [15], s-au trasat funcţiile $\theta_i = f(\theta_e)$ pentru *trapezul* plan şi spaţial (curbele P şi S) posterior, ca şi pentru variantele trapezului anterior (curbele *1* şi *2*). Studiind comparativ faţă de condiţia Ackermann, impusă prin curba (A), se constată că trapezul ipotetic plan (P) ar satisface mulţumitor condiţia (A), dar trapezul real spaţial (S), realizînd o lege sensibil diferită, se depărtează nepermis de mult de condiţia impusă. Studiul comparativ al curbelor (*1*) şi (*2*) indică aluri foarte apropiate.

Concluzii:

— trapezul de direcţie cu o singură bară transversală posterior osiei din faţă trebuie calculat ca un mecanism spaţial;

— trapezul de direcţie cu o singură bară transversală anterior osiei din faţă poate fi calculat ca un mecanism plan, eroarea nefiind mare;

— trapezul real realizat pe autocamion are unghiul φ_0, al pîrghiilor de direcţie, puţin mare prea.

În figura 16 s-au trasat aceleaşi funcţii pentru *patrulaterul cu două bare transversale* [3], datele de calcul corespunzînd unui tractor „Universal". Curba (S) reprezintă funcţia $\theta_i = f(\theta_e)$ pentru patrulaterul spaţial, curba (P) pentru patrulaterul plan, iar (A) şi (a) condiţiile Ackermann, respectiv autor, impuse.

Concluzii:

— patrulaterul de direcţie cu două bare transversale se poate calcula ca un mecanism plan, cu condiţia să fie aşezat la nivelul osiei ($\varphi_{0s} \cong \varphi_0$);

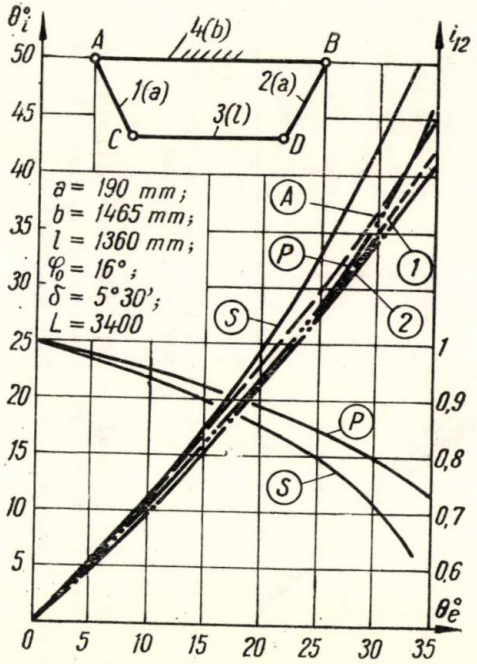


Fig. 15. — Diagrama legilor de transmitere ale trapezului de direcție Carpați, plan și spațial, posterior și anterior.

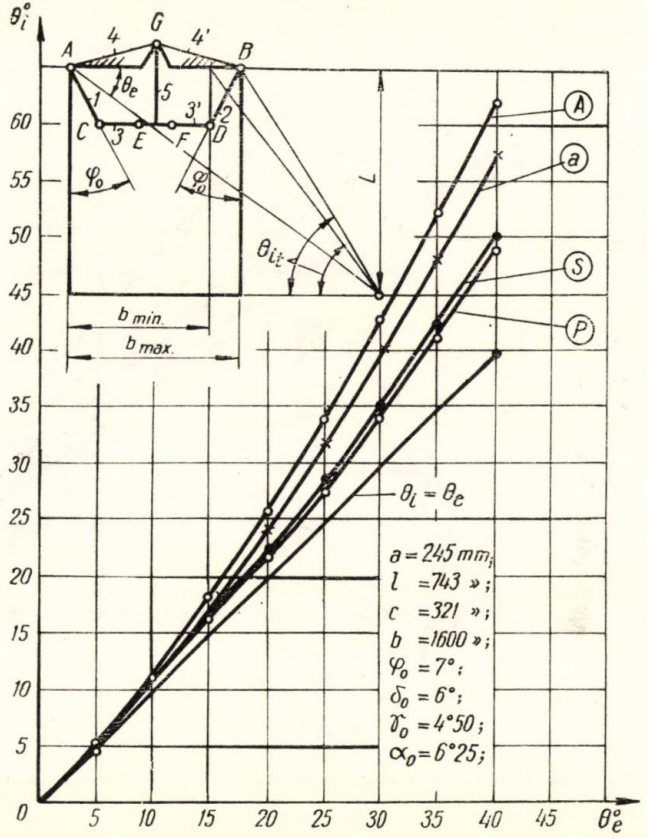


Fig. 16. — Diagrama legilor de transmitere ale patrulaterului de direcție Universal, plan și spațial.

— patrulaterul real-spaţial cu două bare transversale, la care influenţa unghiului δ_0, ca şi a aşezării, este mare, realizează o lege de transmitere diferită faţă de varianta sa plană ($\varphi_{0s} \neq \varphi_0$);

— patrulaterul de direcţie real realizat pe tractor are unghiul φ_0, al pîrghiilor de direcţie, prea mic, impunîndu-se mărirea sa.

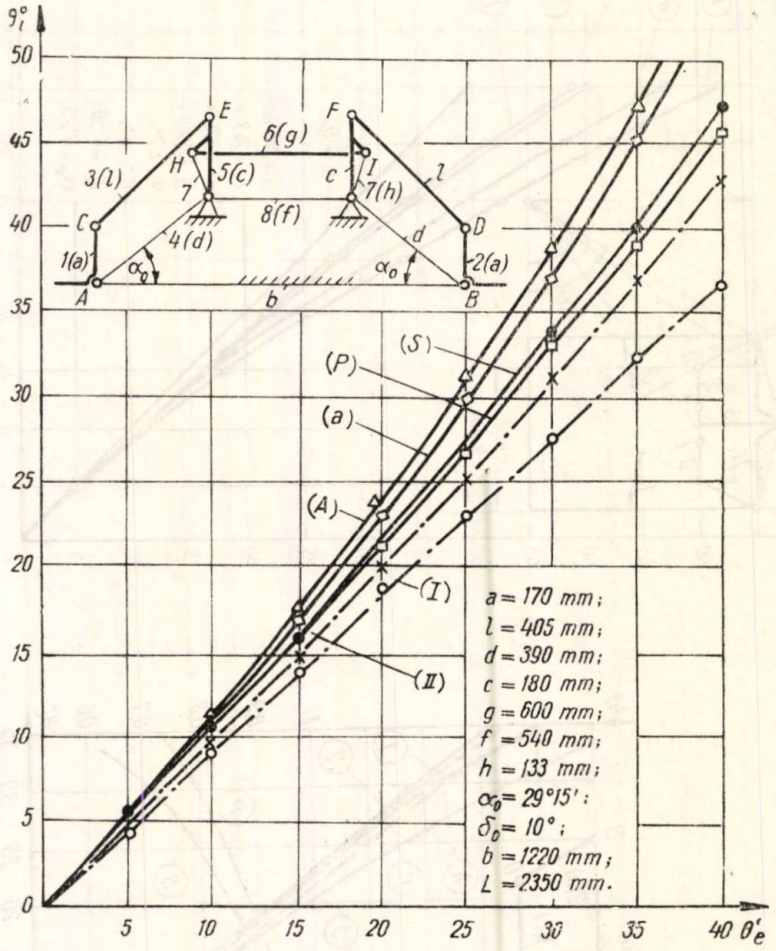


Fig. 17. — Diagrama legilor de transmitere ale patrulaterului de direcţie „ARO", plan şi spaţial.

Pentru *mecanismul cu trei bare transversale*, aici studiat, se face calculul numeric al variantei plane şi spaţiale, luînd ca date de calcul direcţia ce echipează autoturismul „ARO":

$$\varphi_{0s} \cong \varphi_0 = 0^\circ; \quad b_s \cong b = 1220 \text{ mm}; \quad L = 2350 \text{ mm}; \quad l_1 = 170 \text{ mm};$$

$$l_3 = 405 \text{ mm}; \quad l_4 = 390 \text{ mm},$$

$$\alpha_{0s} \cong \alpha_0 = 29°15'; \quad l_5 = 180 \text{ mm}; \quad l_6 = 600 \text{ mm}; \quad l_8 = 540 \text{ mm};$$

$$l_7 = 133 \text{ mm}, \quad \overline{AA'} = 3 \text{ mm}; \quad \delta_0 = 10°; \quad \gamma_0 = 13°.$$

Cu aceste date, parametrii din conturul (I), pentru mecanismul plan, devin

$$A/2\, l_1 l_5 = (l_1^2 + l_5^2 + l_4^2 - l_3^2)/2\, l_1 l_5 - l_4 \sin(\alpha_0 + \alpha_1)/l_5 = 0{,}9375 -$$

$$- 2{,}1666 \sin(\alpha_0 + \alpha_1),$$

$$- B/2 l_1 l_5 = \cos \alpha_1 - l_4 \sin \alpha_0 / l_1 = \cos \alpha_1 - 1{,}1207,$$

$$- C/2\, l_1 l_5 = \sin \alpha_1 - l_4 \cos \alpha_0 / l_1 = \sin \alpha_1 - 2{,}0016 \Rightarrow \alpha_5,$$

iar cei din conturul (II) ($\alpha_7 = \alpha_5 - \gamma_0$, parametrul independent)

$$+ A'/2\, l_7^2 = (2\, l_7^2 + l_8^2 - l_6^2)/2\, l_7^2 - l_8 \sin \alpha_7 / l_7 = 0{,}9218 + 4{,}0601 \sin \alpha_7,$$

$$- B'/2\, l_7^2 = \cos \alpha_7,$$

$$- C'/2\, l_7^2 = \sin \alpha_7 - l_8/l_7 = \sin \alpha_7 - 4{,}0601 \Rightarrow \alpha_7',$$

și cei din conturul (III) ($\alpha_5' = \alpha_7' - \gamma_0$, parametrul independent) sînt

$$A''/2\, l_2 l_5 = (l_5^2 + l_2^2 + l_4^2 - l_3^2)/2\, l_2 l_5 + l_4 \frac{1}{l_2} \sin(\alpha_0 - \alpha_5') =$$

$$= 0{,}9375 + 2{,}293 \sin(\alpha_0 - \alpha_5'),$$

$$- B''/2\, l_2 l_5 = \cos \alpha_5' + l_4 \sin \alpha_0 / l_5 = \cos \alpha_5' + 1{,}0578,$$

$$- C''/2\, l_2 l_5 = \sin \alpha_5' - l_4 \cos \alpha_0 \cdot / l_5 = \sin \alpha_5' - 1{,}8894 \Rightarrow \alpha_2 = \theta_i.$$

Rezultatele calculului, efectuat cu mașina electronică de calcul „Programma 101-OLLIVETI", conform programului: AV, S, C↕, S, D↕, S, B↕, B↓, CX, E↕, C↓, CX, C↕, D↓, DX, F↕, B↓, BX, B↕, C↓, F+, B−, AV, DX, E+, B↕, C↓, F+, C↕, B↓, C:, A◇, V, sînt trecute în tabela 2.

Tabela 2

α_1^0 (I)	$-A/2l_1l_5$	$B/2l_1l_5$	$C/2l_1l_5$	α_5^0	α_7^0 (II)	$-A'/2l_7^2$	$-B'/2l_7^2$	$C'/2l_7^2$	$\alpha_7'^0$
0°	0,1205	0,1207	2,0016	0°	13°	0,0115	0,9744	4,2728	13°
5°	0,2819	0,1245	1,9144	4°50′	8°10′	0,3470	0,9898	4,1899	17°55′
10°	0,4324	0,1359	1,8280	9°25′	3°35′	0,6689	0,9981	4,1104	22°50′
15°	0,5732	0,1548	1,7428	14° 5′	1° 5′	0,9966	0,9998	4,0294	27°50′
20°	0,7032	0,1810	1,6596	18°40′	5°40′	1,3218	0,9951	3,9491	33° 5′
25°	0,3102	0,2140	1,5790	22°55′	9°55′	1,6160	0,9851	3,8764	38° 5′
30°	0,9209	0,2547	1,5016	27°35′	14°35′	1,9398	0,9678	3,7964	44°
35°	1,0140	0,3016	1,4280	32° 5′	19° 5′	2,2454	0,9450	3,7209	50°
40°	1,0877	0,3547	1,3588	36°10′	23°10′	2,5142	0,9194	3,6545	56°

α_5^0 (III)	$A''/2l_2l_5$	$-B''/2l_2l_5$	$C''/2l_2l_5$	$\theta_i=\alpha_2$ α_2^0
0°	2,0575	2,0578	1,8893	0°
4°55′	1,8821	2,0541	1,8036	5°10′
9°50′	1,6994	2,0431	1,7185	10°25′
14°50′	1,5084	2,0245	1,6333	15°40′
20° 5′	1,3027	1,9959	1,5460	21°10′
25° 5′	1,1041	1,9638	1,4655	26°40′
31°	0,8674	1,9150	1,3743	32°50′
37°	0,6280	1,8566	1,2875	39°10′
43°	0,3917	1,7891	1,2073	45°30′

Cu datele din tabela 1 se trasează curbele I [$\alpha_5 = \varphi_1(\alpha_1)$], II [$\alpha_5' = \varphi_2(\alpha_5)$] şi (P), [$\alpha_2 = \varphi(\alpha_1)$, $\theta_i = \varphi(\theta_e)$], figura 17.

Pentru comparaţie, în tabela 3 se dau condiţiile de înscriere în curbă Ackermann — (A) şi autor — (a), vehiculul avînd L=2350 mm, b=1220 mm; δ_0=10°; k=1,2 (ales).

Tabela 3

θ_e°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	Condiţia
θi_t	5°20′	11°	17°20′	24°10′	31°	39°30′	47°40′	56° 5′	Ackermann
θi_t	5°15′	10°50′	16°50′	23°20′	30°15′	37°35′	45° 5′	52°25′	autor

Se observă că patrulaterul ipotetic-plan, ce echipează autovehiculul respectiv, realizează o lege de transmitere $\theta_i = f(\theta_e)$ destul de diferită de condiţia Ackermann impusă.

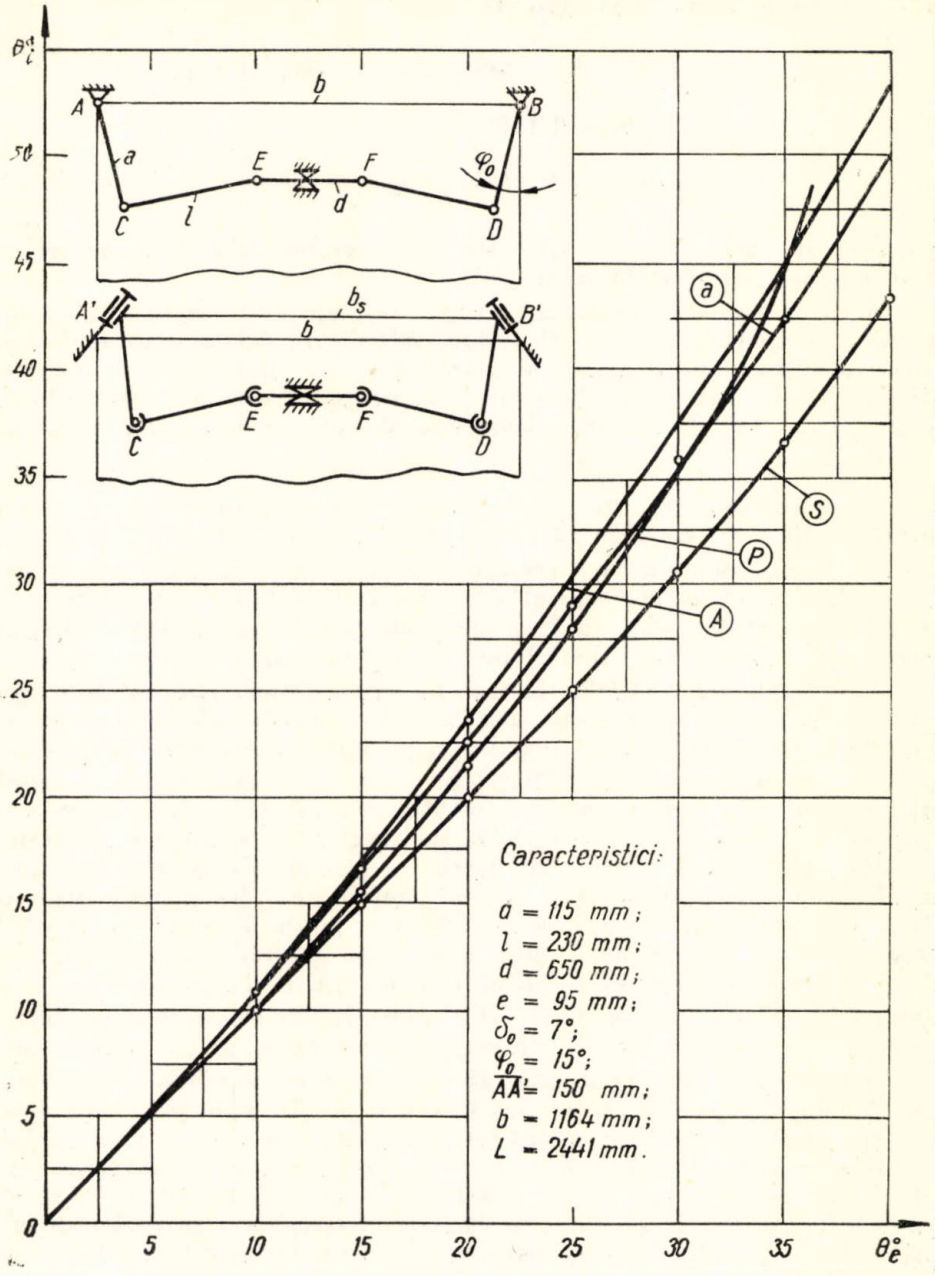


Fig. 18. — Diagrama legilor de transmitere ale mecanismului de direcţie Dacia, plan şi spaţial.

În cazul calculării mecanismului de direcție real-spațial, parametrii corespunzători conturului (I),

$$A/2\, l_1 l_5 = 0{,}9375 - 1{,}0584 \cos \alpha_1 - 1{,}8615 \sin \alpha_1,$$

$$-B/2\, l_1 l_5 = \cos \alpha_1 - 1{,}1207,$$

$$C/2\, l_1 l_5 = 2{,}0016 - 0{,}9848 \sin \alpha_1,$$

au valori apropiate de cei corespunzători mecanismului plan, astfel că nu se mai dau rezultatele calculului.

Aceasta duce la concluzia că legea de transmitere a mecanismului cu trei bare spațial, al autoturismului „ARO", nu diferă sensibil de cea a patrulaterului ipotetic-plan. De aceea nu se mai dau tabele cu rezultatele calculului. Aceasta se datorește atît timpului mecanismului folosit, cît și așezării sale la nivelul osiei, ceea ce face ca $\varphi_{0s} \cong \varphi_0$, $\alpha_{0s} \cong \alpha_0$.

Concluzii:

— patrulaterul cu trei bare transversale se poate calcula ca un mecanism plan, cu condiția să fie așezat la nivelul osiei;

— în cazul dispunerii patrulaterului de direcție cu trei bare transversale deasupra sau dedesubtul osiei din față, legea de transmitere a mecanismului real-spațial va fi sensibil diferită de cea a mecanismului ipotetic-plan, necesitînd calculul mecanismului real;

— mecanismul „ARO", realizat de constructori, realizează o lege de transmitere ce se depărtează prea mult de condiția Ackermann, impunîndu-se, pentru corectare, ca unghiul φ_0 să aibă valoare diferită de zero.

Pentru *mecanismul de direcție cu cremalieră* se execută calculul numeric cu datele corespunzătoare autoturismului „Dacia", date trecute în figura 18. Fără a mai da tabelele cu rezultatele calculului numeric, de pe figură se observă că între legea de transmitere a mecanismului ipotetic-plan (P) și real-spațial (S) diferențele sînt destul de mari. Cu datele corespunzătoare de calcul nu este deci permisă calcularea acestui mecanism ca pe un mecanism plan. Aceasta se datorește nu atît unghiului pivotului δ_0, cît mai ales faptului că mecanismul nu este dispus la nivelul osiei, ci mult mai sus ($\overline{AA'}$=150 mm). În respectiva figură, pentru comparație, se dau și condițiile virării perfecte Ackermann (A) și autor (a).

Metoda de studiu cinematic aleasă (vectorial algebrică) a permis astfel calculul unitar al tuturor mecanismelor de direcție, plane sau spațiale, simple sau complexe. Relațiile determinate sînt de un real folos celor ce se ocupă cu studiul și proiectarea mecanismelor de direcție, putînd fi folosite direct la sinteza acestor mecanisme, în vederea alegerii parametrilor optimi ai schemei. Aplicarea metodei și a relațiilor determinate va duce astfel la micșorarea uzurii pneurilor și articulațiilor din sistemul de direcție, la micșorarea eforturilor din barele mecanismului și a celui depus de conducător la volan, ca și la micșorarea sporului de putere și carburanți cerut de vehiculul rutier aflat în viraj.

Primită la redacție la 15 august 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Alexandru, P., *Asupra legii de transmitere a trapezului de direcție al autovehiculelor pe roți*, București, Construcția de mașini, *10* (1970).
2. — *Studiu privind cinematica direcției vehiculelor rutiere*, Buletinul Institutului politehnic Brașov, **XII** (1970).
3. — *Studiul cinematic al patrulaterului de direcție cu două bare transversale*, București, Construcția de mașini, *9* (1971).
4. Anilovici, V. E. și Vodolajcenco, I. T., *Construirovanie i rasceat selscohozeaistvennih tractorov*, Moskva, Mașinostroienie, 1966.
5. Barski, I. V., *Construirovanie i rascet tractorov*, Moskva, Mașinostroenie, 1968.
6. Bogdan, R. și Larionescu, D., *Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane*, București, Edit. Academiei, 1968.
7. Bussien, R., *Automobil Technisches Handbuch*, vol. II, Berlin, 1965.
8. Cuzminskii, B., *K teorii trapeții tractoriv i avtomobilei*, **VIII**, USHA (1956).
9. Dudiță, Fl., *Existența manivelei la mecanismele patrulatere sferice*, St. cerc. mec. apl. *2* (1965).
10. Fajnhackn Henryk, *O Statecznosci i kierowalnosci samochodu osobewego*, Tech. Motoryzacyjna, *9* (1964).
11. Forkel, D., *Ein Beitrag zur Auslegung von Fahrzeuglenkungen*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenwerk, 145, 1961.
12. Ghiulai, C., *Mecanica automobilului*, București, Edit. tehnică, 1965.
13. Kamm, W., *Das Kraftfahrzeug*, Berlin, 1935.
14. Manolescu, N. I., *Contribution à l'étude cinématique et dynamique de la suspension des bogies au passage de courbes*, București, Bul. Inst. politehnic, *5* (1966).
15. Manolescu, N. I. și Alexandru, P., *Contribuții la cinematica mecanismelor de direcție ale autovehiculelor rutiere*, St. cerc. mec. apl., *3* (1971).
16. Maroș, D. și Orlandea, N., *Curs de TMM*, Cluj, 1966.
17. Ochner, P., *Der Einfluss von Nachlauf, Spreizung, Sturz und Vorspur auf die Kinematik von Achsschenkellenkungen*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverk 123, 1959.
18. Pelecudi, Chr., *Bazele analizei mecanismelor*, București, Edit. Academiei, 1967.
19. Pollone, G., *Construzioni avtomobilistiche I. L. Veicolo*, Torino, 1960.
20. Ramachandra Rao, *Steering linkage design*, Automobile Engineer, *1* (1968).
21. Salim el Iman, Virabov, R., *Rasciat rulevoi trapeții cac prostranstvenogo mehanisma*, Tractorî i selhozmașini, *4* (1965).
22. Untaru, M., Cîmpeanu, V., Seitz, N. și Soare, I., *Automobilul*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1968.
23. Zinoviev, V., *Prostranstvennie mehanismi s niznimi parami*, Moskva, Gostehizdat, 1952.
24. Zomotor, A., *Rechenverfahren zur Ermittlung der Kückstellmomente am Achsschenkel von Kraftfahrzeugen*, ATZ, *2—4* (1963).

CAPACITATEA PORTANTĂ A FUNDAȚIILOR CU EFORT PREDOMINANT AXIAL PENTRU STÎLPII L.E.A.

de AL. VAICUM
Centrul de mecanică a solidelor

În lucrare se prezintă rezultatele unor studii teoretice și experimentale privind modul de calcul al capacității portante a fundațiilor stîlpilor liniilor electrice aeriene de înaltă și foarte înaltă tensiune.
Pe baza unor cercetări experimentale de laborator și de teren pe modele reduse și pe fundații în adevărată mărime, se prezintă studii comparative între rezultatele unor metode teoretice de calcul aplicate în diferite țări și, în raport de valoarea capacității portante obținută la încercări, se dau indicații proiectării relativ la utilizarea acestor metode de calcul pentru a se realiza o dimensionare mai judicioasă. De asemenea se fundamentează necesitatea de a se elabora metode experimentale de dimensionare, prin determinarea în prealabil a unor factori de similitudine corespunzători.

1. INTRODUCERE

Fonduri importante de investiții se consumă anual pentru construirea liniilor de transport pentru energia electrică.

Calculul fundațiilor stîlpilor liniilor electrice aeriene (L.E.A.) de înaltă tensiune prezintă încă multe dificultăți, datorită unei cunoașteri insuficiente a fenomenelor care apar în masivele de pămînt solicitate de astfel de fundații și lipsei unui model matematic specific mediilor disperse. Din această cauză la elaborarea unei scheme de calcul se utilizează ipoteze simplificatoare, uneori destul de aproximative, care conduc la rezultate mult diferite de cele experimentale.

Numărul mare de astfel de fundații necesare a se construi solicită găsirea unor metode de calcul care să utilizeze în cît mai bune condiții capacitatea portantă a masivelor de pămînt.

În etapa actuală, în literatura de specialitate sînt prezentate un număr important de metode de calcul, unele din ele, în anumite condiții geometrice, de teren și de solicitare, dau rezultate acceptabile, dar în altele diferențele față de încercările la scară naturală sînt apreciabile.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 2, 1972, P. 385–411

Cercetări pentru a preciza condițiile cînd rezultatele sînt favorabile nu sînt prezentate în literatură și de aceea utilizarea acestor metode este uneori nereușită.

Pentru elaborarea unei noi metode teoretice de calcul sînt necesare încă cercetări de lungă durată, de aceea se consideră că într-o primă etapă, pe baza unor studii comparative și experimentale, ar trebui precizate în ce condiții și care din metodele actuale se pot utiliza în proiectare cu rezultate acceptabile și, eventual, a se elabora metode noi experimentale de dimensionare.

În vederea aducerii unor îmbunătățiri în proiectarea și execuția fundațiilor pentru stîlpii L.E.A., încă din anul 1961 au fost inițiate o serie de studii experimentale la scară naturală, de către Ministerul Energiei Electrice care au condus la precizarea sistemelor de fundații supuse la răsturnare, cele mai indicate a se utiliza la noi în țară, ținînd seama de condițiile specifice economiei noastre. Ulterior a fost elaborată și o metodă nouă de calcul pentru aceste fundații, luîndu-se în considerare încastrarea lor în masivul de pămînt, rezultatele ei fiind mai apropiate de cele experimentale, în comparație cu alte metode utilizate pînă în prezent [5].

La liniile de înaltă și foarte înaltă tensiune, unde încărcările sînt mai mari, stîlpii se confecționează din metal, avînd baza mai dezvoltată și care se fixează în pămînt cu ajutorul a patru fundații separate, reușindu-se în acest mod ca efortul predominant să fie axial, ceea ce permite o dimensionare mai economică.

Pentru calculul la smulgere al acestor fundații, situația este la fel de neclară și incertă, de aceea, de multe ori, proiectanții, pentru a evita unele soluții mai puțin reușite, aplică metode acoperitoare sau una din metodele recomandate în literatura de specialitate, dar fără a se cunoaște rezultatele în comparație cu capacitatea portantă reală a masivelor de pămînt.

Încercări în teren pe astfel de fundații în adevărată mărime au fost executate extrem de puține la noi în țară, deoarece sînt necesare fonduri importante și o tehnologie destul de greoaie, cu rezultate uneori neconcludente.

În prezenta lucrare, pe baza unor cercetări experimentale pe modele reduse executate în laborator și a unor încercări în teren pe fundații în adevărată mărime, de geometrii diferite și în condiții de teren variate, se prezintă indicații pentru proiectare, în ceea ce privește utilizarea metodelor actuale de calcul la smulgere, pentru a obține o dimensionare mai rațională.

Prin fundații cu efort predominant axial se înțeleg acelea utilizate la stîlpii metalici ai L.E.A., a căror fixare în teren se realizează cu ajutorul a patru fundații separate (în alte țări uneori se utilizează soluții numai cu trei fundații), solicitate în special la compresiune sau întindere, iar valoarea momentului încovoietor este destul de redusă în comparație cu efortul axial (fig. 1.1).

Fundațiile luate în considerare au fost de tip „ciupercă" (fig. 1.2), deoarece acestea sînt utilizate de cele mai multe ori la noi în țară. Lucrarea se ocupă de calculul la smulgere al acestor fundații, deoarece calculul la compresiune nu ridică probleme speciale.

Pentru efectuarea studiilor comparative, s-au folosit șase metode de calcul elaborate în diferite țări și în diferite etape, unele din ele la o dată recentă (metoda Biarez-Barraud în 1968). Una din aceste metode este folosită și la noi în țară (Müller-Fröhlich) de mai multă vreme.

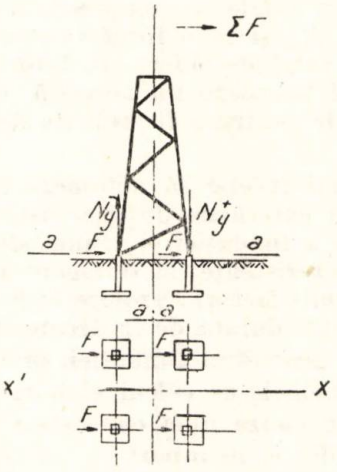


Fig. 1.1

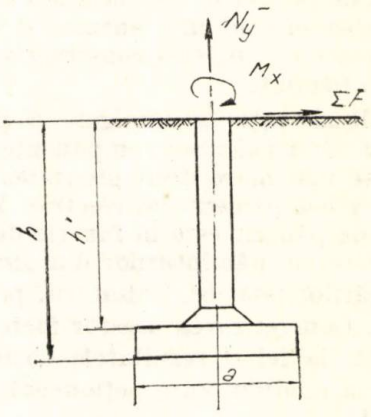


Fig. 1.2

Experiențele pe modele la scară redusă au fost executate în laboratoarele Centrului de mecanică a solidelor[1]) și pe traseele liniilor Brazi-Brașov și Vaslui-Iași, iar pentru încercările pe teren la scară naturală s-au folosit rezultatele obținute în diferite țări și publicate în literatura de specialitate [1], [2].

Prin efectuarea acestor cercetări s-au urmărit două obiective:

— să se precizeze care din metodele analizate dau rezultatele cele mai apropiate de experiment și în ce condiții mecanice, geometrice și geotehnice;

— în ce măsură legile similitudinii se respectă în mecanica pămînturilor pentru acest tip de fundație și care din criteriile oferite de literatura de specialitate dau rezultate satisfăcătoare.

2. METODE DE CALCUL UTILIZATE PENTRU DETERMINAREA CAPACITĂȚII PORTANT A MASIVELOR DE PĂMÎNT

Metodele de calcul elaborate pînă în prezent pentru aceste fundații au la bază o serie de ipoteze simplificatoare destul de diferite uneori. Metodele cele mai vechi considerau fundațiile ca elemente de greutate, deci nu luau în considerare aportul favorabil al masivului de pămînt, ci numai greutatea proprie a fundației și a stîlpului cu echipamentul electric corespunzător și uneori și greutatea pămîntului ce se afla dea-

[1]) Colaboratori: ing. Vincenz Mihai, ing. Bratosin Dinu, tehn. Mușatescu Nicolae și Munteanu Mircea.

supra tălpii fundației. Aceste metode sînt mult acoperitoare și nu vor fi analizate în această lucrare. Se vor considera numai metodele de calcul care țin seama de calculul capacității portante de forțele de frecare și de rezistență la forfecare ale masivului de pămînt.

Forțele exterioare care acționează asupra stîlpilor dau naștere în secțiunea de la nivelul terenului la eforturi axiale de compresiune sau de întindere N_y, la un moment încovoietor M_x și la o forță tăietoare ΣF destul de redusă în comparație cu efortul axial, de obicei sub 1/10 N_y [4]. De aceea efectul momentului și al forței tăietoare nu necesită, de cele mai multe ori, măsuri constructive speciale pentru a fi preluate de masivul de pămînt.

Rezistența la smulgere a pămîntului începe să acționeze în momentul cînd valoarea componentei forțelor exterioare după această direcție este mai mare decît greutatea proprie a fundației și a unui sfert din aceea a echipamentului electric. Mărimea rezistenței la smulgere a masivului de pămînt este în funcție de mai mulți factori : proprietățile fizico-mecanice ale pămînturilor din amplasament, durata de încărcare, natura încărcărilor (statice, pulsatorii, prin șoc), geometria fundației, orientarea ei etc. Concretizarea acestor factori în schemele de calcul elaborate este diferită, la fel și rezultatele obținute, din cauza unei cunoașteri insuficiente a modului cum acționează fiecare din ei în raport cu ceilalți.

În raport de cum este considerat în calcul aportul masivului de pămînt la capacitatea portantă a fundației, metodele actuale se pot grupa în trei categorii :

a) *Metode ce consideră aportul masivului de pămînt ca o suprasarcină* (fig. 2.1). Sînt metodele cele mai utilizate în proiectare, datorită modului simplu de aplicare. Rezistența la smulgere a masivului de pămînt se consideră egală cu greutatea unui trunchi de piramidă sau con de pămînt (după cum baza fundației este de formă pătrată sau rotundă) care are baza mică egală cu suprafața tălpii fundației, fețele laterale sînt înclinate cu un unghi de suprasarcină α, iar baza mare se află la suprafața terenului. Mărimea unghiului α este în funcție de forma tălpii fundației și de natura masivului de pămînt. Diferiți autori dau diferite valori ale unghiului α, dar el se poate determina mai precis numai prin încercări.

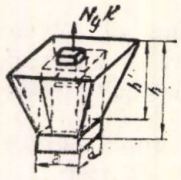


Fig. 2.1

Valoarea forței admisibile de tracțiune N_y este

$$N_y \cdot K = Q_f + Q_p + Q_m,$$

K fiind coeficientul de siguranță,
Q_f — greutatea fundației, a stîlpului cu echipament, aferentă unei fundații,
Q_p — greutatea pămîntului de deasupra tălpii fundației,
Q_m — greutatea pămîntului evazat cu unghiul α.

Dificultățile care apar la aplicarea acestor metode se datoresc atît aprecierii valorii unghiului α, care variază considerabil în funcție de modul cum se realizează compactarea pămîntului de deasupra tălpii fundației, cît și stabilirii valorii coeficientului de siguranță.

b) *Metode de calcul care țin seama de frecări* (fig. 2.2). În aceste metode, rezistența la smulgere este egală cu limita frecării ce ia naștere între fundație și pămîntul de deasupra ei, pe de o parte, și restul masivului, pe de altă parte, cînd începe deplasarea primei părți. Ca forță normală pe suprafața de lunecare se consideră că acționează presiunea activă a masivului de pămînt. Valoarea totală a forțelor de frecare se multiplică cu un coeficient de reducere egal cu 0,9 conform încercărilor lui Fröhlich. Rezistența la smulgere totală va fi egală cu

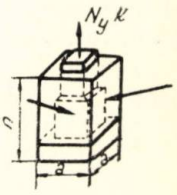


Fig. 2.2

$$N_y \cdot K = Q_f + Q_p + R_f + R_p,$$

Q_f fiind greutatea fundației și a stîlpului,
Q_p — greutatea pămîntului de deasupra,
R_f — frecarea fundației de beton cu pămîntul,
R_p — frecarea pămînt pe pămînt.

c) *Metode de calcul care iau în considerare forfecarea* (fig. 2.3). Prima metodă elaborată pe acest principiu a fost stabilită pe baza încercărilor efectuate de firma Motor-Columbus din Baden-Elveția.

Se consideră că pămîntul de deasupra tălpii fundației se foarfecă, iar rezistența la forfecare este variabilă pe toată înălțimea de fundare. Cu această ipoteză, capacitatea portantă a fundației este egală cu

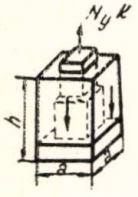


Fig. 2.3

$$N_y \cdot K = Q_f + Q_p + S_l \cdot \tau_p,$$

S_l fiind suprafața laterală a piramidei sau cilindrului de pămînt care se deplasează,
τ_p — rezistența la forfecare a pămîntului.

Valoarea forfecării crește (după cum a reieșit din încercări) neliniar cu adîncimea. Astfel, pînă la o anumită adîncime, crește după o anumită lege liniară. La o adîncime dublă, valoarea forfecării crește numai cu 20—25%, iar la o adîncime triplă sporul rezistenței la forfecare este de numai 30—40%. Deci valoarea forfecării nu crește liniar cu adîncimea, ci într-o măsură mai redusă. Pentru terenuri cu apă subterană se micșorează valoarea eforturilor de forfecare cu 50%.

În vederea efectuării unor studii comparative care să ne arate gradul de aproximație al rezultatelor teoretice față de cele experimentale, au fost analizate cîteva metode moderne de calcul elaborate în ultima perioadă de timp sau metode care au o largă aplicabilitate în alte țări. În acest sens se vor prezenta în continuare în mod succint aceste metode și modul lor de aplicare pentru a putea fi utilizate la proiectare în diferitele cazuri de calcul apărute în practică.

2.1. METODA BIAREZ-BARRAUD [1]

2.1.1. *Pentru masive de pămînt fără coeziune (sau cu coeziune foarte redusă).* Autorii indică pentru calculul fundațiilor tip ciupercă solicitate al smulgere, fundate în terenuri necoezive ($c \simeq 0$ și $\varphi > 15°$), următorul procedeu de calcul:

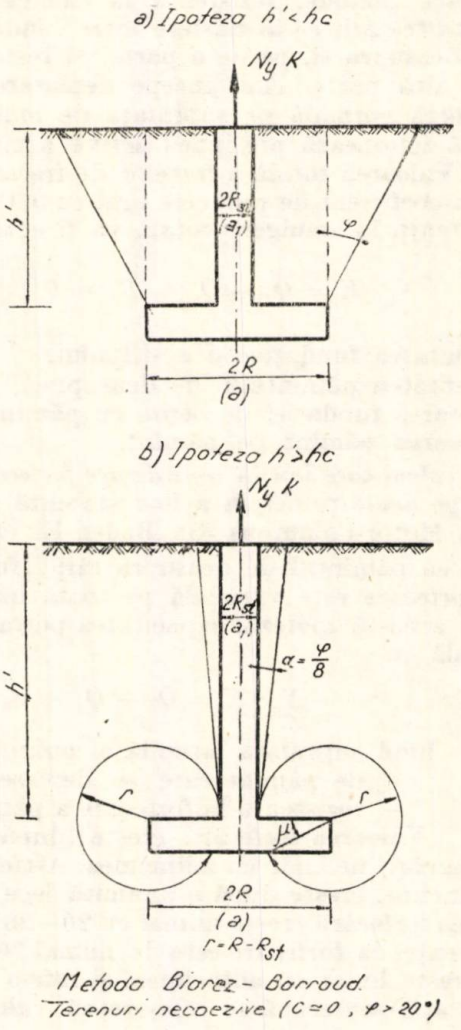


Fig. 2.4

Se calculează forța de smulgere în două ipoteze $h' < h_c$ și $h' > h_c$ și se alege valoarea minimă. Schema de calcul este indicată în figura 2.4, unde h' este distanța de la teren la fața superioară a tălpii fundației, iar h_c adîncimea critică, adică acea adîncime de la care creșterea ei influențează nesemnificativ capacitatea portantă a masivului de pămînt.

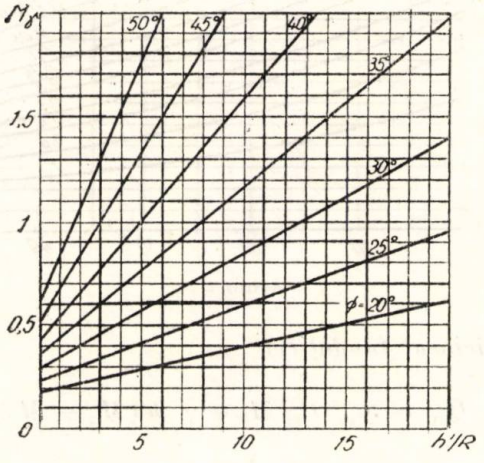
Ipoteza $h' < h_c$*:*

$$N_y \cdot K = Q_f + Q_p + S_l \cdot \gamma \cdot h' \cdot M_\gamma, \tag{2.1}$$

unde

N_y reprezintă forța verticală de smulgere (t),
K — coeficient de siguranță,
Q_f — greutatea proprie a fundației (t),
Q_p — greutatea pămîntului de deasupra fundației (t),
S_l — suprafața laterală a corpului de pămînt de deasupra fundației (m²), $S_l = 2\pi Rh$ pentru fundații rotunde. În cazul fundațiilor dreptunghiulare se calculează cu o rază echivalentă $R_e = \frac{P}{2\pi}$, unde

P este perimetrul tălpii fundației,
γ — greutatea volumetrică a pămîntului (t/m³),
M_γ — factor de rezistență care se obține din abaca 1 în funcție de φ, unghiul de frecare interioară a pămîntului, și de raportul $\frac{h'}{R}$.



Abaca 1

Ipoteza $h' > h_c$*:*

Talpa fundației și piciorul ei (stîlpul) participă la rezistență în modul următor:

— *talpa fundației*

$$(N_y \cdot K)_1 = Q_{\text{placă}} + (S - S_{st})\, m \cdot M(\gamma \cdot h' \operatorname{tg}\varphi + C), \tag{2.2}$$

unde

$Q_{\text{placă}}$ reprezintă greutatea proprie a tălpii de fundație,
S — suprafața tălpii (m²) $S = \pi R^2$ sau $S = \pi \cdot R_e^2$, unde $R_e = \frac{P_1}{2\pi}$, P_1 fiind perimetrul tălpii,

$S_{st.}$ — suprafața stîlpului (piciorului) la nivelul tălpii (m^2), $S_{st.} = \pi \cdot R_{st}^2$ sau $S_{st.} = \pi(R_{st}^e)^2$,

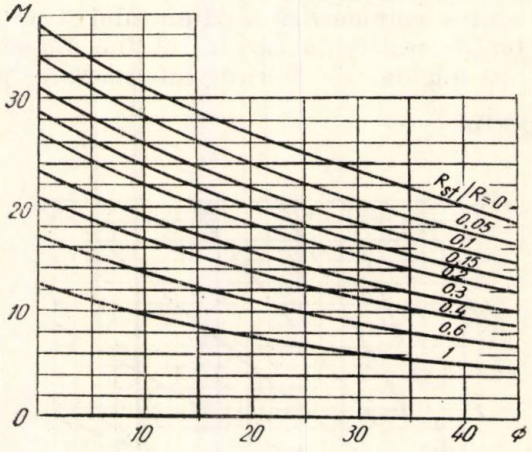
m — $1 - \frac{\mu}{2\pi}$ unde unghiul μ are semnificația din figura 2.4,

M — coeficient de rezistență obținut din abaca 2 în funcție de φ, unghiul de frecare interioară a pămîntului, și de raportul R_{st}/R,

γ — greutatea volumetrică a pămîntului (t/m^3),

h' — distanța de la suprafața terenului la fața superioară a plăcii de fundare (m),

c — coeziunea (t/m^2), de obicei nu există acest termen ;



Abaca 2

— *stîlpul (piciorul fundației)*

$$(N_y \cdot K)_2 = Q_{st.} + Sl_{st.}[C \cdot M_c + \gamma \cdot h'(M_\varphi + M_\gamma) + q \cdot M_q], \quad (2.3)$$

unde

$Q_{st.}$ este greutatea proprie a stîlpului (t),

$Sl_{st.}$ — suprafața laterală a stîlpului (m^2), $Sl_{st.} = 2\pi \cdot \cdot R_{st.} \cdot h'$ sau $Sl_{st.} = 2\pi R_{st.}^e \cdot h'$, iar $R_{st.}^e = \frac{P_2}{2\pi}$,

$(M_\varphi + M_q)$, M_c și M_q — factori de rezistență obținuți din abaca 3 în funcție de φ și de raportul $h'/R_{st.}$,

c — coeziunea (t/m^2),

q — suprasarcina (t/m^2).

Însumînd aportul plăcii și al stîlpului, se obține forța de smulgere în ipoteza

$$N_y \cdot K = (N_y \cdot K)_1 + (N_y \cdot K)_2. \quad (2.4)$$

Metoda nu ia în considerare pămînturile necoezive cu un $\varphi<15°$, deoarece acestea practic nu se întîlnesc la L.E.A.

2.1.2. *Pentru masive de pămînt cu coeziune.* Pămînturile din această categorie se împart în două grupe:

a) Pămînturile cu coeziune saturate cu apă și cu o slabă consistență ($c \neq 0$; $\varphi \leqslant 15°$).

b) Pămînturile cu coeziune, nesaturate și cu frecare interioară importantă ($c \neq 0$; $\varphi > 15°$).

a) *Fundații amplasate în masive de pămînt din prima categorie.* Se calculează adîncimea critică cu una din relațiile:

$$h_c = 5(R - R_{st.}) \text{ sau } h_c = 2{,}5\,(a - a_1).$$

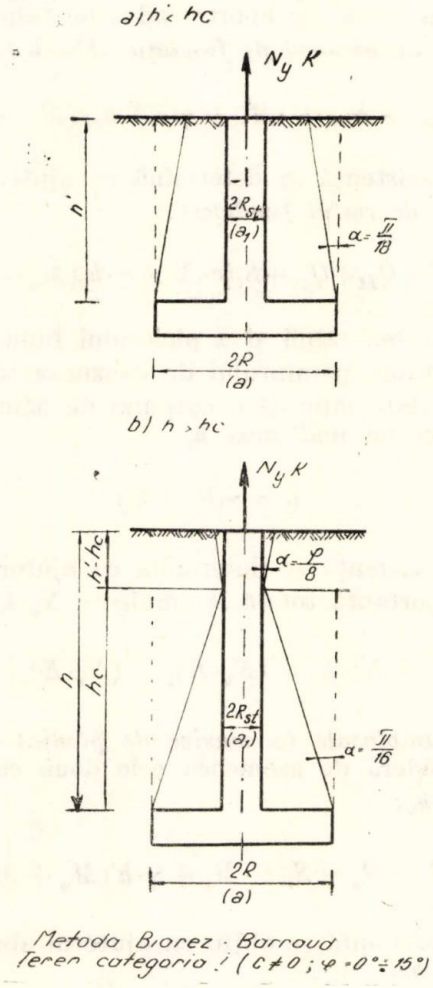


Fig. 2.5

În funcție de valoarea adîncimii critice pot apărea două cazuri (fig. 2.5).

— *Cazul* $h' < h_c$:

$$N_y \cdot K = Q_f + Q_p + S_l[C \cdot M_c + \gamma \cdot h'(M_\varphi + M_\gamma) + q \cdot M_q], \quad (2.5)$$

$S_l = 2\pi R \cdot h'$, pentru fundații cu talpa rotundă,

$S_l = 2\pi R_e h'$, pentru fundații cu talpa dreptunghiulară,

$R_e = \frac{P}{8}$, P fiind perimetrul tălpii.

Factorii de rezistență se obțin cu ajutorul abacei 4.

— *Cazul* $h' > h_c$:

Se consideră separat aportul adus de stîlp (piciorul fundației), dar numai pe înălțimea $h' - h_c$, și aportul adus de talpa fundației.

Aportul adus de piciorul de fundație $(h' - h_c)$:

$$(N_y \cdot K)_1 = Q_{st.} + S_{l_{st.}}[C \cdot M_c + \gamma(h' - h_c)(M_\varphi + M_\gamma) + q \cdot M_q]. \quad (2.6)$$

Factorii de rezistență se determină cu ajutorul abacei 3.

Aportul adus de restul fundației:

$$(N_y \cdot K)_2 = Q_{f2} + Q_{p2} + S_l[c \cdot M_c + \gamma \cdot h_c(M_\varphi + M_\gamma) + q \cdot M_q], \quad (2.7)$$

Q_{f2} fiind greutatea tălpii și a piciorului fundației pe înălțimea h_c,

Q_{p2} — greutatea pămîntului de deasupra tălpii pe înălțimea h_c,

S_l — suprafața laterală a corpului de pămînt de deasupra fundației pe înălțimea h_c,

$$q = \gamma(h' - h_c).$$

Factorii de rezistență se determină cu ajutorul abacei 4.

Capacitatea portantă totală la smulgere $N_y \cdot k$ este

$$N_y \cdot K = (N_y \cdot K)_1 + (N_y \cdot K)_2. \quad (2.8)$$

b) *Fundații amplasate în masive de pămînt din a doua categorie* (fig. 2.6.). Se consideră de asemenea cele două cazuri:

— *Cazul* $h' < h_c$:

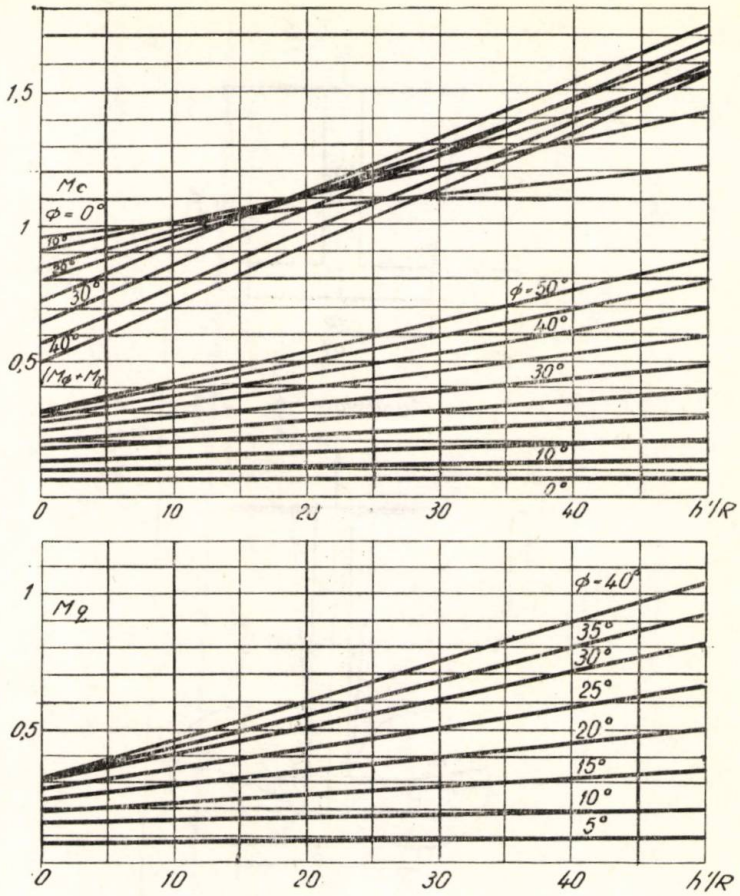
$$N_y \cdot K = Q_f + Q_p + S_l[C \cdot M_c + \gamma \cdot h'(M_\varphi + M_\gamma) + q \cdot M_q]. \quad (2.9)$$

Factorii de rezistență se obțin cu ajutorul abacei 5

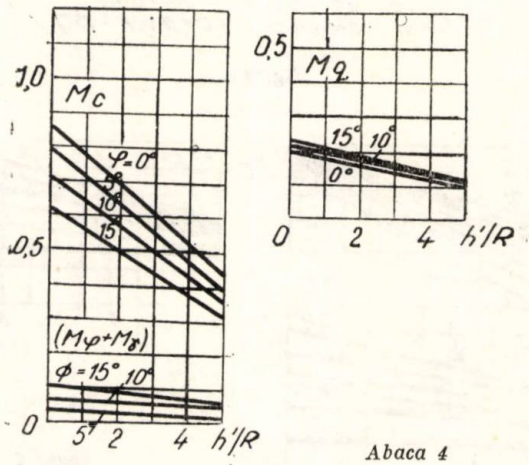
— *Cazul* $h' > h_c$:

Aportul tălpii fundației:

$$(N_y \cdot K)_1 = Q_{\text{placă}} + (S - S_{st.})\, m \cdot M(\gamma \cdot h' \operatorname{tg}\varphi + C). \quad (2.10)$$

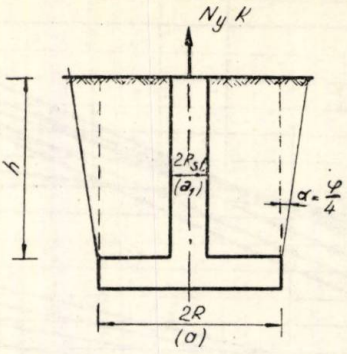


Abaca 3

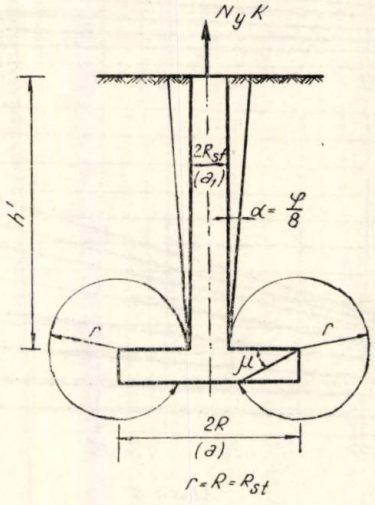


Abaca 4

a) Ipoteza $h' \leq h_c$



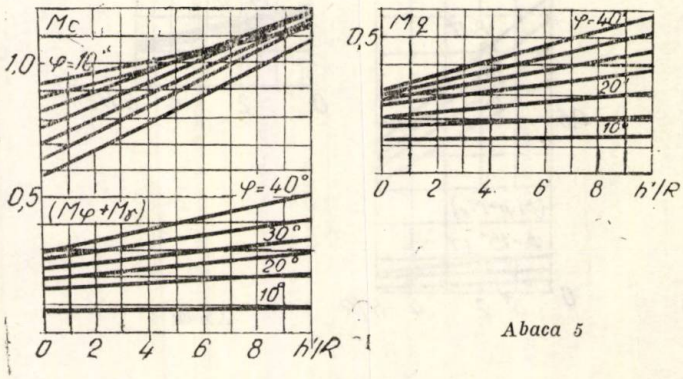
b) Ipoteza $h' > h_c$



$r = R = R_{st}$

Metoda Biarez - Borroud
Teren categoria II ($C \neq 0$; $\varphi > 15°$)

Fig. 2.6



Abaca 5

Aportul piciorului de fundație:

$$(N_\gamma \cdot K)_2 = Q_{st} + S'_{st}[C \cdot M_c + \gamma \cdot h'(M_\varphi + M_\gamma) + q \cdot M_q]. \quad (2.11)$$

Factorii de rezistență se determină cu abaca 3. Rezistența totală la smulgere a masivului este

$$N_\gamma \cdot K = (N_\gamma \cdot K)_1 + (N_\gamma \cdot K)_2. \quad (2.12)$$

2.2. METODA GUDUȘAURI-DJIOEV [2]

Metoda se aplică la următoarele tipuri de fundație: cu talpă (tip ciupercă), masive, pe piloți.

Relația generală de calcul este

$$N_\gamma \cdot K \leqslant Q_f + Q_p + T, \quad (2.13)$$

T fiind rezultanta forțelor de frecare.

Se consideră că rezistența la smulgere crește sensibil cu adîncimea de fundare h' pînă la o anumită valoare notată cu h_{opt} (adîncimea optimă de fundare). Peste această adîncime creșterea capacității portante este nesemnificativă. Valoarea lui h_{opt} se determină cu relațiile:

$h_{opt} = 1{,}5\sqrt{S}$ — pentru fundații cu baza dreptunghiulară,

$h_{opt} = 1{,}5\ d$ — pentru fundații cu baza rotundă,

unde

S este suprafața bazei,

d — diametrul bazei.

Capacitatea portantă este în funcție de modul cum se face ruperea masivului de pămînt, iar aceasta este în funcție de valoarea raportului

$$\varkappa = \frac{S_q}{S},$$

S_q fiind suprafața fundului săpăturii, iar S suprafața bazei fundației.

Dacă $\varkappa > 2$, ruperea masivului se face după niște suprafețe de alunecare înclinate cu unghiul φ (fig. 2.7).

Dacă $\varkappa < 2$, ruperea se face de-a lungul pereților verticali ai săpăturii (fig. 2.8).

Cazul I, $\varkappa > 2$

— Pentru fundații cu baza dreptunghiulară

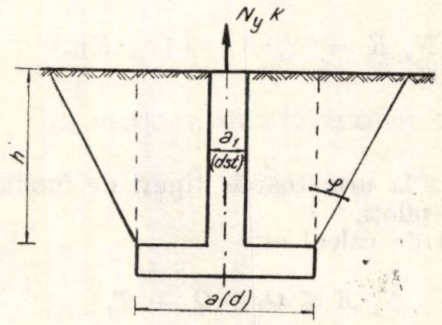
Se aleg dimensiunile fundației, inclusiv a adîncimii de fundare (după experiența calculatorului) și se verifică dimensiunile alese. Se deosebesc două situații:

dacă $h' \geqslant h_{opt}$, atunci

$$S_{opt.} = \sqrt[3]{\left[\frac{N_\gamma \cdot K - Q_f + V_{st} \cdot \gamma}{4{,}5\ \gamma(0{,}333 + \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\psi)}\right]^2}, \quad (2.14)$$

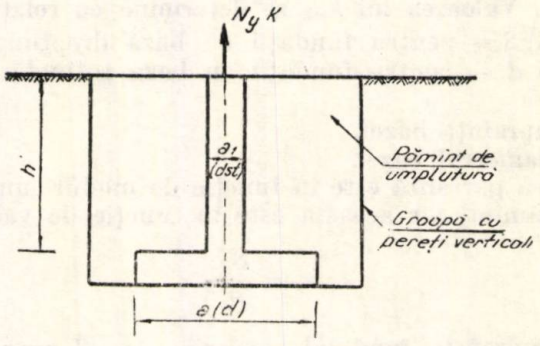
unde

$V_{st.}$ este volumul piciorului fundației în m^3,
γ — greutatea volumetrică a pământului t/m^3,
ψ — unghiul de tăiere, care se poate determina cu relația
$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi + c$, c fiind coeziunea în kg/cm^2;



Metoda Gudușauri-Djioev
Fundații executate cu gropi cu pereți oblici

Fig. 2.7



Metoda Gudușauri Djioev
Fundații executate în gropi cu pereți verticali

Fig. 2.8

dacă $h' < h_{opt.}$, atunci
dimensiunile tălpii de fundație se determină cu relația

$$a^2 + A_1 a + A_2 = 0, \tag{2.15}$$

a și b sînt laturile tălpii fundației,

$$A_1 = h' \operatorname{tg} \psi \left(\frac{1+i}{i} \right); \qquad i = \frac{a}{b},$$

$$A_2 = \frac{1}{\gamma \cdot h' \cdot i} \left[\frac{4}{3} \gamma \cdot h'^3 \cdot \operatorname{tg} \psi + Q_f - V_{st.} \cdot \gamma - N_y \cdot K \right].$$

— *Pentru fundații cu baza rotundă*

dacă $h' \geqslant h_{opt.}$, atunci

$$d_{opt.} = 2\sqrt{\frac{N_y \cdot K - Q_f + V_{st.} \cdot \gamma}{9\pi\gamma(0{,}333 + \operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}^2\psi)}}, \tag{2.16}$$

dacă $h' < h_{opt.}$, atunci

$$d^2 + B_1 d + B_2 = 0,$$

$$B_1 = 2h' \operatorname{tg}\psi; \qquad B_2 = \frac{4(Q_f - V_{st.} \cdot \gamma - N_y \cdot K)}{\pi \cdot \gamma \cdot h'}.$$

Cazul II, $\varkappa \leqslant 2$

— *Pentru fundații cu baza dreptunghiulară:*

dacă $h' \geqslant h_{opt.}$, avem

$$S_{opt.} = \sqrt[3]{\left\{\frac{(N_y \cdot K - Q_f)\left[1 - \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\psi}{2}\right)\operatorname{tg}\psi\right] + V_{st.} \cdot \gamma}{1{,}58\,\varkappa}\right\}^2}; \tag{2.17}$$

dacă $h' < h_{opt.}$, atunci

$$S = \left(2{,}5 - \frac{h'}{\sqrt{S_{opt.}}}\right) S_{opt.}, \tag{2.18}$$

unde

$S_{opt.}$ se determină cu ajutorul relației (2.17).

— *Pentru fundații cu baza rotundă:*

dacă $h' \geqslant h_{opt.}$, atunci

$$d_{opt.} = \sqrt{\frac{(N_y \cdot K - Q_f)\left[1 - \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\psi}{2}\right)\operatorname{tg}\psi\right] + V_{st.} \cdot \gamma}{1{,}188\,\varkappa}}, \tag{2.19}$$

dacă $h' < h_{opt.}$, avem

$$d = \left(1{,}66 - 0{,}34\frac{h}{d_{opt.}}\right) d_{opt.}, \tag{2.20}$$

unde $d_{opt.}$ se determină cu ajutorul relației (2.19).

Au fost prezentate aceste două metode de calcul (Biarez-Barraud și Guduşauri-Djioev) mai dezvoltat deoarece au fost elaborate la date mai recente (după 1960) și nu se găsesc publicate în literatura de specialitate curentă. În afară de aceste metode de calcul, s-au utilizat pentru studiile comparative efectuate în această lucrare și metode elaborate în trecut, dar care au încă o aplicabilitate destul de mare în diferite țări. Aceste metode sînt: Kudrin, Girkmann, Richter, Mors și Müller-Fröhlich, ce sînt publicate în diferite manuale clasice de calcul al fundațiilor pentru stîlpii L.E.A. sau în reviste de mare circulație [3], [4], [6].

3. REZULTATELE CERCETĂRILOR EXPERIMENTALE ȘI ALE STUDIILOR COMPARATIVE

În vederea obținerii unor rezultate cît mai utile pentru proiectare, s-a căutat să se analizeze cazurile cele mai frecvent întîlnite în practică, urmînd ca pentru alte cazuri să se obțină indicații pe baza unor extrapolări ale rezultatelor prezentate. S-a căutat să se țină seama de cei trei factori hotărîtori în valoarea capacității portante : mecanici, geometrici și geotehnici, fără a cuprinde însă toată gama posibilă de variație, dar suficienți pentru a putea realiza o dimensionare mai judicioasă a acestor fundații, cu posibilitățile actuale.

Au fost considerate trei categorii de pămînturi : fără coeziune ($c=0$) și cu o frecare medie, cu coeziune medie ($c=0{,}12-0{,}38$ kg/cm^2) și frecare medie ($\varphi = 15° - 35°$) și cu coeziune puternică ($c=0{,}32-0{,}68$ kg/cm^2) și frecare redusă ($\varphi=3° - 5°$).

Se apreciază că pămînturile cu o coeziune mai mare decît aceea luată în considerare în această lucrare nu schimbă concluziile obținute.

Pentru a ține seama și de influența factorilor geometrici și de formă, au fost considerate următoarele tipuri de fundații :

— fundații cu baza rotundă, avînd diametrul mai mic decît 1,00 m (încercări de teren),

— fundații cu baza pătrată, avînd latura mai mare decît 1,00 m (încercări de teren),

— fundații cu baza pătrată, avînd latura mai mică decît 1,00 m (încercări de laborator).

3.1. PĂMÎNTURI FĂRĂ COEZIUNE ȘI CU FRECARE INTERIOARĂ MEDIE

Pentru a avea o bază de comparație cît mai reală, s-a căutat să se utilizeze rezultatele încercărilor executate de diferiți experimentatori și în diferite țări, deoarece, după cum se cunoaște, chiar modul de apreciere a încărcărilor de rupere este diferit uneori, neexistînd criterii precise pentru definirea la experimentări a sarcinii-limită la pămînturi. Rezultatele acestor încercări în terenuri fără coeziune au o importanță sporită, putîndu-se verifica în ce măsură legile similitudinii se respectă la aceste categorii de fundații, deoarece încercările de laborator pe modele reduse tot în pămînturi necoezive se execută.

S-a căutat să se analizeze adîncimi de fundare h cuprinse între 1,00 și 3,00 m, deoarece în acest interval sînt cuprinse cea mai mare parte din fundațiile executate în practică.

În acest scop au fost utilizate rezultatele încercărilor executate în R. P. Polonă de către „Energoproject" în anii 1961 [1]. Toate aceste fundații erau de tip „ciupercă", avînd baza rotundă cu diametrul de 0,70 m. Toate încercările au fost executate în același masiv de pămînt, avînd caracteristicile următoare : unghiul de frecare interioară $\varphi = 32°$, iar greutatea volumetrică $\gamma = 1{,}6$ t/mc. Valorile capacității portante teoretice calculată cu metodele de calcul specificate mai înainte și ale rezultatelor experimentale au fost trecute în tabela 3.1 și în figura 3.1.

Tabela 3.1

Nr. crt.	Fundaţia	Caracteristici geometrice		Caracteristici geotehnice			F. exp.	METODA DE CALCUL											
								Biarez-Barraud		Guduşauri Djioev		Girkman		Richter		Mors		Müller Fröhlich	
		$a \times b$ sau d	h	c	φ	γ		F	$\frac{F}{F.\text{exp.}}$	F	$\frac{F}{F.\text{exp.}}$	F	$\frac{F}{F.\text{exp.}}$	F	$\frac{F}{F.\text{exp.}}$	F	$\frac{F}{F.\text{exp.}}$	F	$\frac{F}{F.\text{exp.}}$
		m	m	t/m²	grade	t/m³	t	t	%	t	%	t	%	t	%	t	%	t	%
I Încercări efectuate de „Energoproiect" — Polonia																			
1	—	0,70	1,00	0	32	1,6	—	2,61	—	2,59	—	5,43	—	2,26	—	2,11	—	3,22	—
2	3/30.11.61	0,70	1,35	0	32	1,6	4,66	4,47	96	7,65	164	9,44	203	3,75	80	3,36	72	6,68	143
3	2/23.11.61	0,70	1,45	0	32	1,6	5,62	5,43	97	7,65	136	10,81	192	4,28	76	3,79	67	7,76	137
4	4/ 2.12.61	0,70	1,50	0	32	1,6	6,72	5,92	88	7,66	114	14,36	214	4,56	68	4,00	60	8,20	122
5	2/24.11.61	0,70	2,00	0	32	1,6	10,60	12,10	114	7,67	72	19,93	165	8,02	76	6,48	61	14,13	133
6	1/20.11.61 4/ 6.12.61	0,70	2,40	0	32	1,6	12,75	12,57	99	7,69	39	28,31	225	11,78	92	8,94	70	20,03	157
7	3/29.11.61 4/ 7.12.61	0,70	2,90	0	32	1,6	13,30	13,58	102	7,72	58	40,81	307	17,95	135	12,56	94	28,85	217
II Încercări efectuate de Guduşauri şi Djioev — U.R.S.S.																			
1	—	1,40×1,40	1,00	0	24	1,9	—	7,46	—	7,96	—	10,9	—	7,87	—	6,40	—	9,23	—
2	—	1,40×1,40	1,50	0	24	1,9	—	13,57	—	10,86	—	20,91	—	11,33	—	10,72	—	17,29	—
3	1	1,40×1,40	1,70	0	24	1,9	13,57	14,20	105	13,39	99	25,83	190	14,38	106	12,62	93	21,28	157
4	2	1,40×1,40	2,10	0	24	1,9	18,92	23,68	125	19,41	103	37,24	197	19,35	102	17,16	91	29,33	155
5	—	1,40×1,40	2,25	0	24	1,9	—	25,95	—	19,64	—	42,07	—	21,45	—	18,99	—	34,23	—
6	3	1,40×1,40	2,40	0	24	1,9	22,32	30,21	136	20,63	92	47,18	211	23,81	107	21,02	94	38,29	172
7	—	1,40×1,40	2,75	0	24	1,9	—	33,70	—	21,61	—	60,27	—	29,35	—	25,70	—	48,64	—
8	—	1,40×1,40	3,00	0	24	1,9	—	40,33	—	22,06	—	70,62	—	33,84	—	29,42	—	56,80	—
III Încercări pe modele efectuate în laborator — România																			
1	—	0,30×0,30	0,30	0	30	1,62	0,126	0,129	102	0,135	107	0,221	175	0,090	71	118	94	0,186	148
2	—	0,30×0,30	0,40	0	30	1,62	0,167	0,199	119	0,235	141	0,363	217	0,140	84	177	106	0,306	183
3	—	0,30×0,30	0,50	0	30	1,62	0,227	0,285	123	0,250	110	0,540	238	0,204	90	250	110	0,456	200
4	—	0,30×0,30	0,60	0	30	1,62	0,334	0,386	116	0,252	75	0,725	217	0,284	85	334	100	0,636	190
5	—	0,30×0,30	0,70	0	30	1,62	0,480	0,501	104	0,252	53	1,000	208	0,383	78	433	90	0,848	177

Pentru a vedea dacă forma sau caracteristicile geometrice nu au o influenţă importantă asupra rezultatelor, au fost analizate de asemenea şi încercările executate în U.R.S.S. de către Guduşauri-Djioev, care au elaborat şi o metodă nouă de calcul. Numărul încercărilor ce se înca-

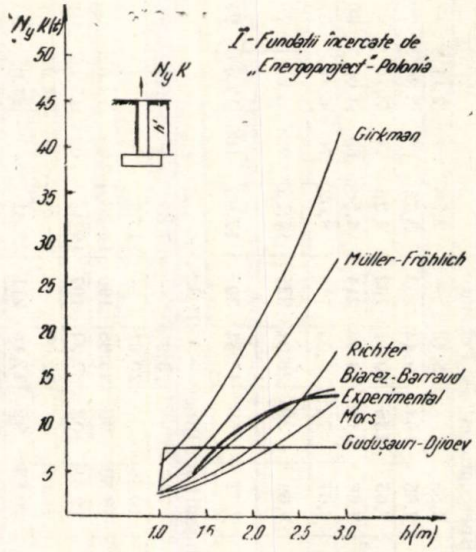


Fig. 3.1

drează în categoriile stabilite în această lucrare este destul de redus (3 încercări), dar cuprinde adîncimile de fundare cele mai utilizate, de aceea au permis să se obţină indicaţii satisfăcătoare. Valorile capacităţii portante experimentale şi teoretice au fost trecute de asemenea în tabela 3.1 şi în figura 3.2. Aceste încercări au fost executate într-un masiv de pămînt avînd valoarea unghiului de frecare interioară mai redusă $\varphi=24°$, iar greutatea volumetrică ceva mai mare $\gamma=1{,}9$ t/mc. Forma tălpii era pătrată, avînd latura de $a = 1{,}4$ m.

De asemenea, tot în această categorie de pămînturi se încadrează o serie de încercări executate în laborator la Centrul de mecanică a solidelor, în masive de nisip, avînd unghiul de frecare interioară $\varphi = 30°$, iar greutatea volumetrică $\gamma = 1{,}62$ t/mc. Încercările de bază au fost efectuate pe tălpi metalice de formă pătrată, avînd latura de $a = 0{,}30$ m. Încercări asemănătoare au fost efectuate şi pe fundaţii cu latura bazei de $a = 0{,}40$ m, $a = 0{,}50$ m şi $a = 0{,}60$ m.

În tabela 3.1 şi în figura 3.3 s-au trecut rezultatele pentru placa cu latura de 0,30 m. În tabela 3.2 au fost trecute rezultatele pentru fundaţii cu latura tălpii de 0,40 m şi 0,60 m. Deoarece s-a observat din cazurile anterioare analizate că rezultate teoretice mai apropiate de cele experimentale pentru terenuri fără coeziune se obţin prin utilizarea metodelor de calcul Mors şi Richter, în tabela 3.2 au fost luate în considerare numai aceste metode.

Din analiza rezultatelor obținute pentru pămînturile fără coeziune se pot face următoarele observații :

a) influența formei bazei fundațiilor și a dimensiunilor ei nu este importantă, (cînd se compară rezultatele teoretice cu cele experimentale),

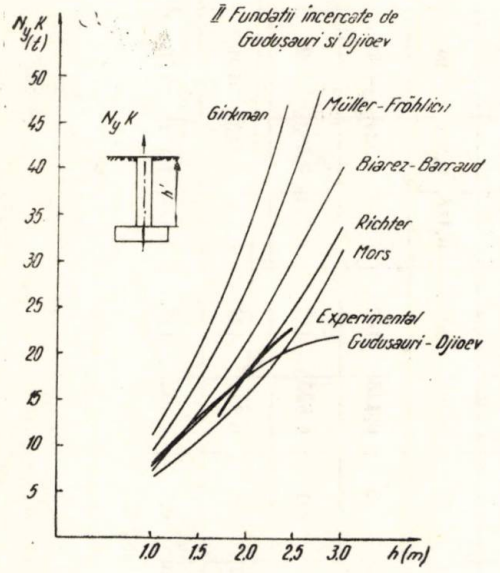


Fig. 3.2

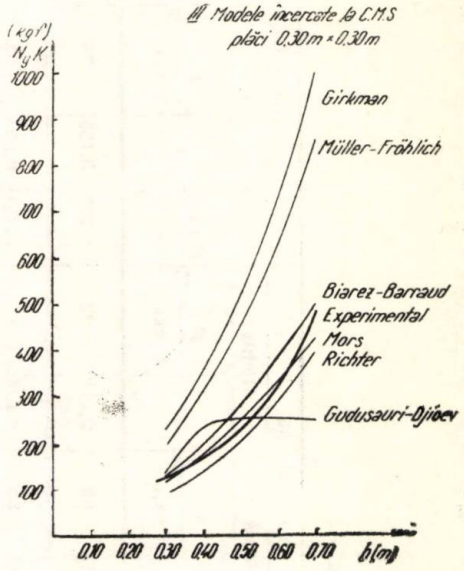


Fig. 3.3

cu condiția ca latura bazei să fie egală sau mai mare de 0,30 m. Într-adevăr, încercări făcute pe plăci cu latura $a = 0{,}20$ m au arătat că se obțin rezultate experimentale mai reduse decît cele teoretice, probabil apar anumite stări critice. Acest aspect este în curs de cercetare și nu s-au obținut încă rezultate definitive. Faptul că forma tălpii fundației și mărimea ei nu influențează în mai mare măsură ne permite a reduce pe viitor numărul categoriilor de fundații studiate;

b) se observă că unele din metodele de calcul analizate dau rezultate mult mai mari decît cele experimentale în toate cele trei categorii de fundații luate în considerare. Astfel, metoda Girkmann, destul de utilizată în practică, are rezultate mai mari decît cele experimentale în medie cu 100%. Cum de obicei la această categorie de fundație coeficienții de siguranță sînt în jurul valorilor $K = 1{,}5 - 1{,}8$, s-ar putea ca în exploatare să fie depășită capacitatea portantă și să se producă eventuale avarii. De asemenea, într-o situație aproximativ similară se găsește și metoda Müller-Fröhlich.

Se pare că luarea în considerare atît a forțelor de frecare, cît și a rezistenței la forfecare a masivului de pămînt, în modul în care se face în aceste metode (care au practic aceleași principii), duce la subdimensionări apreciabile, pentru această categorie de pămînturi;

c) metoda Gudușauri-Djioev caută să țină seama de adîncimea critică, fenomen sesizat și de alți autori, prezentînd o relație cu care se

Tabela 3.2

Nr. crt.	h (m)	Placă 40×40					Placă 50×50					Placă 60×60				
			Mors		Richter			Mors		Richter			Mors		Richter	
		F exp. (t)	F (t)	$\frac{F}{F\ \text{exp.}}$ %	F (t)	$\frac{F}{F\ \text{exp.}}$ %	F exp.	F	$\frac{F}{F\ \text{exp.}}$ %	F	$\frac{F}{F\ \text{exp.}}$ %	F exp.	F	$\frac{F}{F\ \text{exp.}}$ %	F	$\frac{F}{F\ \text{exp}}$ %
1	0,2	0,099	0,076	77	0,077	78	0,121	0,111	92	0,111	92	0,193	0,152	79	0,151	79
2	0,3	0,148	0,133	90	0,141	95	0,226	0,191	85	0,196	87	0,261	0,255	98	0,260	100
3	0,4	0,212	0,205	86	0,229	96	0,306	0,288	94	0,307	100	0,416	0,379	91	0,392	94
4	0,5	0,293	0,292	100	0,345	118	0,434	0,403	93	0,448	103	0,526	0,524	100	0,567	108
5	0,6	0,382	0,396	104	0,495	130	0,532	0,537	101	0,625	117	0,754	0,692	92	0,774	103
6	0,7	0,482	0,518	107	0,681	141	0,662	0,692	105	0,841	127	0,876	0,882	101	1,024	117
7	0,8	0,617	0,658	107	0,911	148	0,802	0,869	108	1,103	138	1,136	1,141	100	1,321	116

poate determina această adîncime. Acest fenomen are loc, concretizarea lui prin relația prezentată nu a fost confirmată de încercările de laborator în pămînturi fără coeziune, executate de autor, și nici de experiențele în adevărata mărime în pămînturi cu coeziune, executate în diverse țări și analizate în această lucrare. Din această cauză în diagramele prezentate apar neconcordanțe importante (la unele adîncimi) între rezultatele experimentale și cele obținute cu metoda Guduşauri-Djioev;

d) metoda cea mai indicată a se utiliza pentru această categorie de pămînturi este metoda Mors.

3.2. PĂMÎNTURI CU COEZIUNE MEDIE ȘI FRECARE MEDIE

Deoarece s-a constatat că forma și caracteristicile geometrice nu au o influență importantă din punct de vedere al comparației între rezultatele teoretice și cele experimentale, au fost analizate în această categorie numai fundații cu talpa pătrată, avînd latura mai mare sau mai mică de 1,00 m, și fundații cu baza dreptunghiulară. Încercările luate în considerare au fost executate în Marea Britanie și în Spania. Deoarece la unele din aceste fundații în literatură se prezintă cîte două rezultate pentru aceeași fundație încercată de două ori în aceleași condiții, iar rezultatele au variat destul de mult, cu pînă la 20%, au fost trecute în tabelă ambele valori. Rezultatele obținute au fost trecute în tabela 3.3 și în diagramele din figura 3.4.

Pe baza acestor rezultate se pot face următoarele observații:

a) se observă că rezultatele teoretice obținute cu diferite metode au o împrăștiere destul de mare față de cele experimentale;

b) nu se mai observă la nici o metodă rezultate prea optimiste care să ducă la subdimensionări periculoase. Însăși metoda Girkmann dă rezultate satisfăcătoare, cele mai apropiate de cele experimentale. O singură dată aceasta dă o depășire de 23%, ceea ce este acceptabil pentru calculul acestui gen de fundații;

c) de asemenea metoda Müller-Fröhlich dă rezultate satisfăcătoare.

Din aceste rezultate se poate observa că este foarte dificil a se utiliza o singură metodă de calcul pentru toate cazurile apărute în practică. Acest lucru este explicabil ținînd seama de stadiul actual de cunoaștere a fenomenului fizic și de posibilitățile matematice utilizate pînă acum la rezolvarea problemelor de calcul al fundațiilor.

3.3. PĂMÎNTURI PUTERNIC COEZIVE ȘI CU FRECARE INTERIOARĂ REDUSĂ

În această categorie de pămînturi au fost analizate încercările executate în Franța, pe fundații cu talpa de formă dreptunghiulară de diferite dimensiuni, dar avînd aceeași adîncime de fundare, $h = 2{,}20$ m. Greutatea volumetrică a pămînturilor din diferitele amplasamente era aproximativ aceeași, $\gamma = 1{,}95 \div 2{,}12$ t/mp, iar unghiul de frecare interioară de asemenea a variat foarte puțin, $\varphi = 3° \div 5°$. În acest mod s-a putut urmări influența coeziunii asupra capacității portante a acestor fundații.

Rezultatele studiilor au fost trecute în tabela 3.4 și în figurile 3.5 și 3.6.

Tabela 3.3

Nr. crt.	Numele fundației	$a \times b$ (m)	h (m)	c t/m²	γ t/m³	φ	$K.N_y.$ exp (t)	Biörez Barraud		Girkman		Müller-Fröhlich		Djioev		Richter		Mors	
								KN_y (t)	%	KN_y (t)	%	KN_y (t)	%	KN_y (t)	%	KN_y (t)	%	KN_y (t)	%
1	3 21.10.60 (M.B.)	1,37 1,37	2,16	3,7	2,03	15°	34	27,08	79,6	36,4	107,1	23,87	96,7	19,5	57,3	28,63	84,2	10,86	31,9
2	VIT-CH (Sp)	0,85 0,85	1,95	3,5	1,98	20°	25,16 20,71	27,72	110,2 138,8	20,31	80,7 98,1	18,23	72,8 88,5	4,62	18,4 22,3	12,79	50,8 61,8	4,26	16,9 20,6
3	1 Bis 1 1 Bis 2 (Sp)	1,80 1,80	1,45	3,85	1,39	30°	63	45,13	71,6	50,71	80,5	45,83	72,7	15,13	24,0	20,35	32,3	12,31	19,5
4	5 (Sp)	2,00 2,00	1,70	3,85	1,39	30°	70,0	61,6	88	75,2	107,4	67,94	97,1	26,07	37,2	29,02	41,5	17,53	25
5	PAL-ESP (Sp)	1,45 0,40	1,95	1,2	2,02	35°	45,45 55	18,93	41,7 34,4	56,04	123,3 101,9	50,49	111,1 91,8	3,33	7,3 6,1	19,15	42,1 34,8	1,33	2,9 2,4

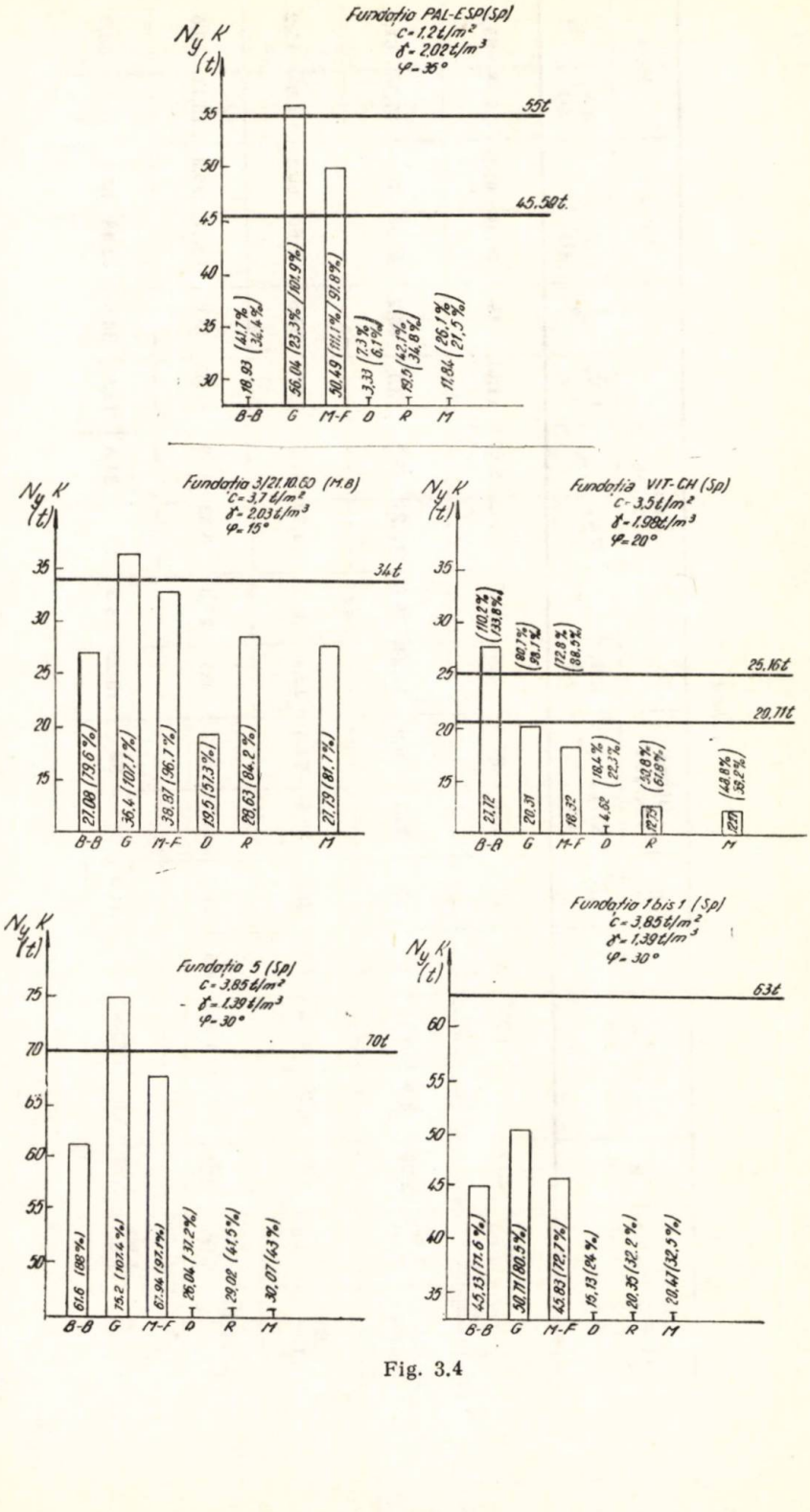

Fundatia PAL-ESP(Sp)
c=1,2t/m²
γ=2,02t/m³
φ=35°
55t
45,50t
18,93 (41,7% 34,4%)
56,04 (23,3% /101,9%)
50,49 (111,1% /91,8%)
3,33 (7,3% 6,1%)
19,5 (42,1% 34,8%)
11,84 (26,1% 21,5%)
B-B G M-F D R M
Fundatia 3/21.10.60 (M.B)
c=3,7t/m²
γ=2,03t/m³
φ=15°
34t
27,08 (79,6%)
36,4 (107,1%)
38,87 (96,7%)
19,5 (57,3%)
28,63 (84,2%)
27,79 (81,7%)
Fundatia VIT-CH (Sp)
c=3,5t/m²
γ=1,98t/m³
φ=20°
25,16t
20,71t
(110,2% 133,8%)
(80,7% 98,1%)
(72,8% 88,5%)
27,72
20,31
18,32
4,62 (18,4% 22,3%)
12,75 (50,8% 61,8%)
12,11 (48,8% 58,2%)
Fundatia 5 (Sp)
c=3,85t/m²
γ=1,39t/m³
φ=30°
70t
61,6 (88%)
75,2 (107,4%)
67,94 (97,1%)
26,04 (37,2%)
29,02 (41,5%)
30,07 (43%)
Fundatia 1 bis 1 (Sp)
c=3,85t/m²
γ=1,39t/m³
φ=30°
63t
45,13 (71,6%)
50,71 (80,5%)
45,83 (72,7%)
15,13 (24%)
20,35 (32,2%)
20,47 (32,5%)

Fig. 3.4

Tabela 3.4

Nr. crt.	Simbolul fundației	$a \times b$ (m)	h (m)	c t/m²	γ t/m³	φ	K N_y exp (t)	Biarez Barraud		Girkman		Müller-Fröhlich		Djioev		Richter		Mors	
								KN_y (t)	%	KN_y (t)	%	KN_y (t)	%	KN_y (t)	%	KN_y (t)	%	KN_y (t)	%
1	200 (Fr)	1,40 1,00	2,20	4	1,97	3°	27	28,5	87,8	8,81	32,6	8,02	29,7	11,61	43	16,64	61,6	17,78	65,9
2	313 (Fr)	1,40 1,00	2,20	4,9	2,12	4°	29	32,1	96,2	11,24	38,8	10,21	35,2	13,1	45,2	20,56	70,9	17,78	61,3
3	282 (Fr)	1,40 1,00	2,20	6,25	1,95	4,5°	35,8	39,5	78,4	12,44	34,7	11,29	31,5	12,8	35,8	21,66	60,5	4,97	15,2
4	282 bis (Fr)	1,40 1,00	2,20	3,2	1,95	4,5°	26,0	24,1	92,2	9,7	37,3	8,82	33,9	11,33	43,6	15,31	58,9	13,14	50,5
5	316 (Fr)	1,40 1,00	2,20	5,6	2,08	5°	34,5	35,6	89	13,23	38,3	12	34,8	13,3	38,6	22,48	65,2	19,55	56,7

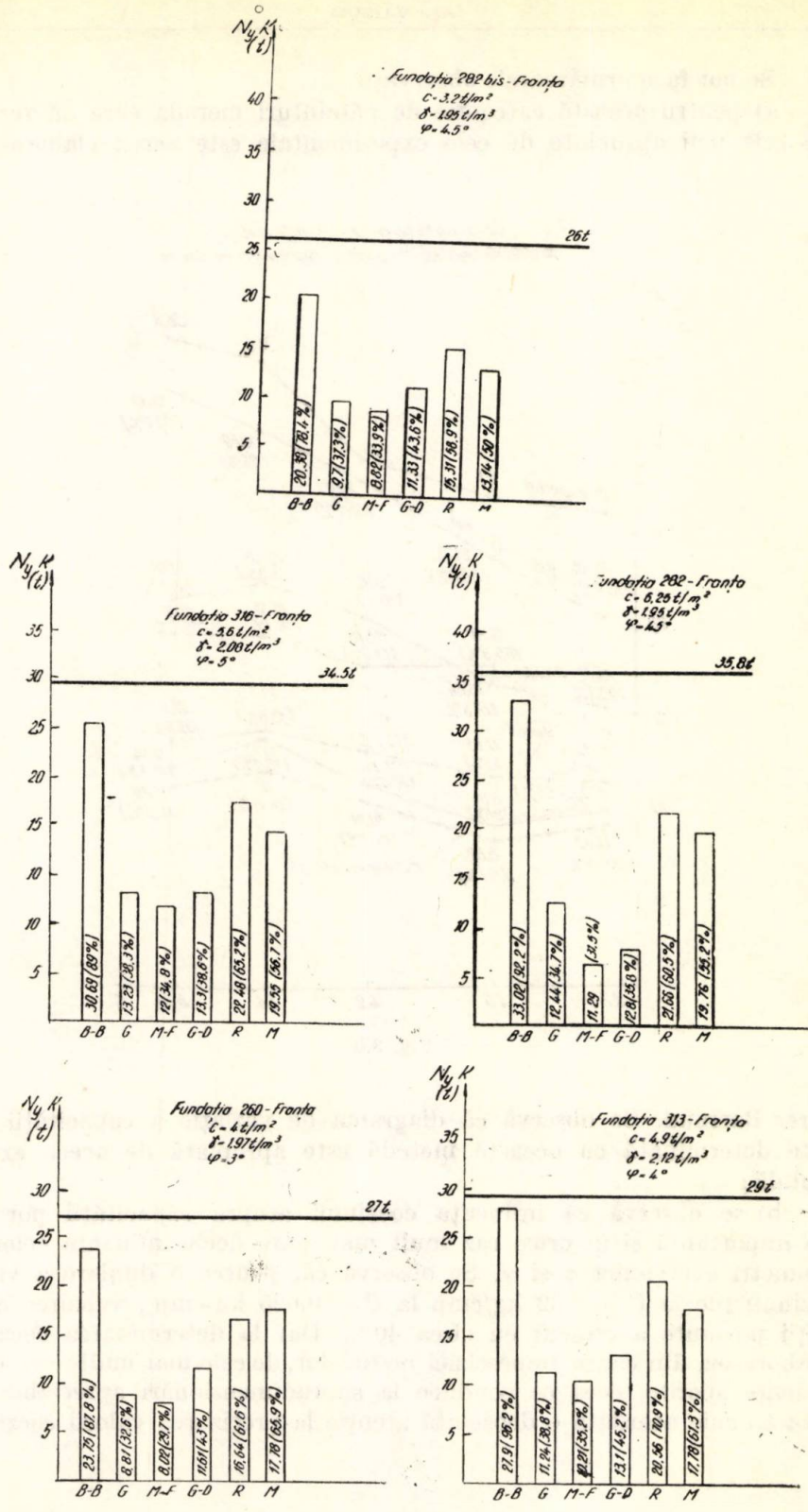

Fundatia 282 bis - Fronta
c - 3,24 t/m²
δ - 1,95 t/m³
φ - 4,5°
26t
20,36 (78,4 %)
9,7 (37,3 %)
8,62 (33,2 %)
11,33 (43,6 %)
15,31 (58,9 %)
13,14 (50 %)
Fundatia 316 - Fronta
c - 3,6 t/m²
δ - 2,00 t/m³
φ - 5°
34,5t
30,69 (89 %)
13,23 (38,3 %)
12,1 (34,8 %)
13,3 (38,6 %)
22,48 (65,2 %)
19,55 (56,7 %)
Fundatia 282 - Fronta
c - 6,28 t/m²
δ - 1,95 t/m³
φ - 4,5°
35,8t
33,02 (92,2 %)
12,44 (34,7 %)
11,29 (31,5 %)
12,8 (35,8 %)
21,65 (60,5 %)
19,76 (55,2 %)
Fundatia 260 - Fronta
c - 4 t/m²
δ - 1,97 t/m³
φ - 3°
27t
23,75 (87,8 %)
8,81 (32,6 %)
8,09 (29,7 %)
11,61 (43 %)
16,64 (61,6 %)
17,78 (65,9 %)
Fundatia 313 - Fronta
c - 4,94 t/m²
δ - 2,12 t/m³
φ - 4°
29t
27,9 (96,2 %)
11,24 (38,8 %)
10,29 (35,5 %)
13,1 (45,2 %)
20,36 (70,9 %)
17,78 (61,3 %)
B-B G M-F G-D R M

Fig. 3.5

Se pot face următoarele observaţii :

a) pentru această categorie de pământuri metoda care dă rezultatele cele mai apropiate de cele experimentale este aceea elaborată de

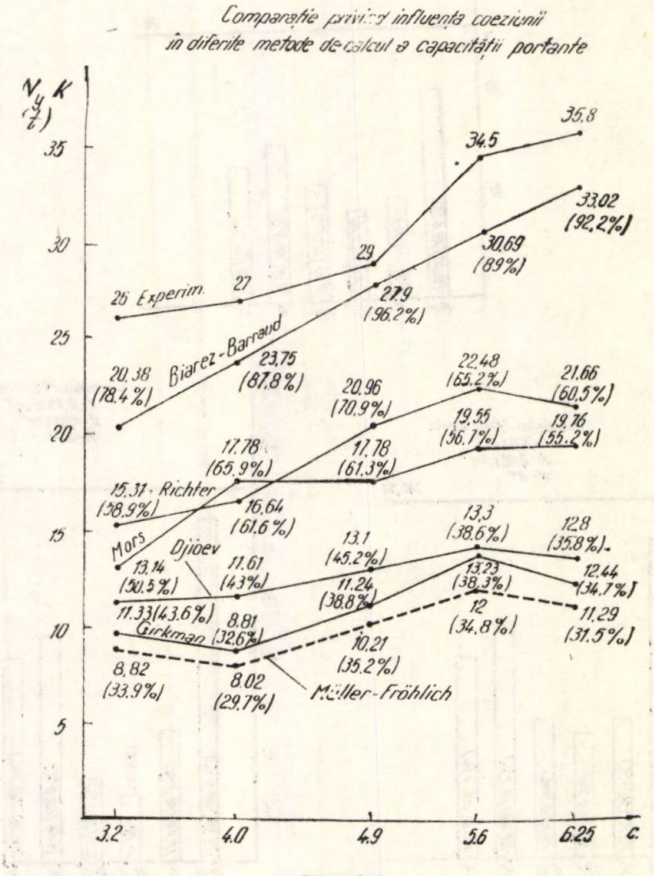


Fig. 3.6

Biarez-Barraud. Se observă că diagrama de variaţie a capacităţii portante determinată cu această metodă este apropiată de aceea experimentală ;

b) se observă că influenţa coeziunii asupra capacităţii portante este importantă şi în orice caz mult mai mare decît influenţa celorlalţi parametri geotehnici φ şi γ. Se observă că, pentru o dublare a valorii coeziunii (de la $C = 0{,}32$ kg/cmp la $C = 0{,}625$ kg/cmp), valoarea capacităţii portante a crescut cu circa 40%. Dar la determinarea coeziunii în laborator, din cauza impreciziei metodelor, de cele mai multe ori se iau prudenţe sporite, ceea ce conduce la supradimensionări apreciabile, de aceea trebuie acordată o deosebită atenţie la precizarea valorii coeziunii.

4. CONCLUZII

Din analiza rezultatelor obținute prin încercări pe modele și pe fundații în adevărată mărime se pot trage următoarele concluzii generale, ce vor trebui să constituie preocupări pentru viitor:

a) Pentru calculul fundațiilor tip „ciupercă" au fost elaborate multe metode, dar rezultatele lor au o împrăștiere destul de mare și de multe ori depărtate considerabil de cele experimentale. De cele mai multe ori aceste rezultate sînt acoperitoare, totuși uneori ele pot da naștere la subdimensionări apreciabile, din care cauză se pot produce avarii (metodele Girkmann sau Müller-Fröhlich pentru pămînturi necoezive).

b) O influență considerabilă asupra capacității portante o are coeziunea. Din această cauză este necesar ca determinarea valorii acestui parametru să se facă cu cea mai mare atenție posibilă.

c) Este recomandabil a se folosi dintre metodele actuale de calcul pe acelea ce utilizează separat cei doi parametri geotehnici, adică unghiul de frecare interioară, φ și coeziunea c, deoarece prin întrebuințarea unui singur parametru (unghiul de tăiere ψ) se măresc incertitudinile, căci nu există o relație satisfăcătoare care să determine acest parametru cînd se cunosc φ și c, caracteristice ce se prezintă în referatul geotehnic al lucrării.

d) În etapa actuală de cunoaștere, se consideră că nu este posibil a se elabora o metodă generală complet teoretică de calcul pentru fundațiile din această categorie. Ținînd seama de numărul mare de fundații necesare a se construi anual, în vederea realizării unei dimensionări mai judicioase ar fi necesar:

— să se inițieze un plan de cercetări experimentale pe modele reduse și mari, executate în laborator și pe teren care să permită determinarea unor coeficienți de corecție ce se vor aplica rezultatelor metodelor recomandate în această lucrare. În același timp să se elaboreze o metodă experimentală de dimensionare și o aparatură corespunzătoare, care vor permite să se determine, la proiectare, în mod mai apropiat de realitate capacitățile portante ale masivelor de pămînt,

— de asemenea, concomitent să se caute elaborarea unor scheme noi de calcul, care să reflecte mai fidel posibilitățile de rezistență a masivelor de pămînt solicitate de fundații cu efort predominant axial.

Primită la redacție la 12 iulie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. I. Biarez, Y. Barraud, *Adaptation des fondations de pylônes au terrain par les méthodes de mécanique des sols*, C.I.G.R.É., 1968.
2. I. I. Guduşauri, L. N. Djioev, *Issledovanie rabotî fundamentov opor linii elektroperedaci v neskalnîh gruntah*, Gosenergoizdat, Moskva, 1963.
3. * * * *Tabele și abace pentru fundații smulse*, București, I.S.P.E., 1961.
4. H. Mors, *Das Verhalten von Mastgründungen bei Zugbeanspruchung*, Die Bautechnik *10* (1959).
5. Alexandru Vaicum, *Fundații încastrate*, București, Edit. Academiei, 1970.
6. Girkmann K., E. Königshofer, *Die Hochspannungs — Freileitungen*, Springer-Verlag, 1952.

INTRAREA ÎN TIMP MINIM A VEHICULELOR SPAȚIALE ÎN ATMOSFERA PLANETARĂ

AL. MARINESCU și V. CARDOȘ
Institutul de mecanica fluidelor
și construcții aerospațiale

În lucrare se studiază intrarea în timp minim a vehiculelor spațiale în atmosfera planetară, folosind calculul variațional.

Se urmărește în special determinarea legilor optime de variație ale parametrilor mișcării astfel încît vehiculul să parcurgă traiectoria între două înălțimi date în cel mai scurt timp, distanța pe orizontală fiind dată.

În acest caz problema variațională a intrării, așa cum a fost formulată în [2], este o problemă izoperimetrică de tipul „cu o extremitate mobilă".

Pe baza ei autorii deduc legile optime de variație ale parametrilor mișcării vehiculului în timpul intrării, cu ajutorul unui calculator electronic efectuînd o serie de aplicații numerice de interes practic.

1. NOTAȚII

Oxz — sistemul inerțial de axe de coordonate (fig. 2),
z — altitudinea,
l — distanța orizontală parcursă de vehicul,
R_0 — raza planetei,
r — raza vectoare a vehiculului,
S — suprafața de referință pentru portanță și rezistență la înaintare,
P — portanța,
R — rezistența la înaintare,
C_z — coeficientul de portanță,
C_x — coeficientul de rezistență la înaintare,
θ — unghiul de înclinare al traiectoriei față de orizontala locală,
ψ^* — unghiul razei vectoare a vehiculului la un moment dat față de raza vectoare inițială,

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 2, 1972, P. 413–427

Φ, ψ — unghiuri azimutale de latitudine,
ρ — densitatea,
β^* — constantă în definire a densităţii, funcţie de altitudine,
g — acceleraţia gravitaţiei,
m — masa vehiculului,
V — viteza vehiculului,
μ — parametru gravitaţional.

2. INTRODUCERE

După cum este bine cunoscut, scopul final al oricărei misiuni spaţiale este ca vehiculul angajat într-o astfel de misiune să ajungă intact pe suprafaţa planetei de pe care a pornit sau a altei planete. Uneori, în literatură se foloseşte termenul de „intrare" în atmosferă pentru cazul cînd vehiculul vine din spaţiu cu viteza supercirculară şi de „reintrare" în cazul cînd acesta vine de pe orbită cu viteza apropiată de cea circulară sau, cum i se mai spune, orbitală.

Ecuaţiile de mişcare ale vehiculului din momentul contactului cu atmosfera sensibilă fiind aceleaşi atît pentru cazul cînd vehiculul vine din spaţiu, cît şi pentru cazul cînd vine de pe orbită, termenul de intrare apare ca indicat pentru ambele cazuri şi-l vom folosi ca atare.

Trebuie menţionat că în ultima vreme această tendinţă de unificare a exprimării preocupă pe unii autori care folosesc termenul de „coborîre" în atmosferă pentru ambele situaţii.

Pentru planete cu atmosferă, atingerea suprafeţei acestora de către vehicul implică o importantă decelerație (frînare) şi încălzire şi, în acelaşi timp, un riguros control al timpului şi poziţiei de aşezare.

Dacă încălzirea nu ridică probleme, deoarece protecţia termică prin mijloacele actuale poate fi asigurată, în special pentru vehicule cu echipaj deceleraţia în limite admisibile trebuie să aibă o acţiune cît mai scurtă.

Din acest motiv, pe linia optimizării intrării vehiculelor spaţiale în atmosfera planetară, problema intrării în timp minim capătă o importanţă practică deosebită.

Preocupările în această direcţie sînt de dată destul de recentă şi în acest sens se poate cita lucrarea [1], care abordează intrarea în timp minim pe o traiectorie plană, într-un caz idealizat al densităţii constante, unde problema variaţională este formulată ca o problemă de tip Meyer.

În lucrarea de faţă vom aborda problema intrării în timp minim pe o traiectorie plană în cazul real al densităţii variabile cu înălţimea, formulînd problema variaţională ca o problemă izoperimetrică — aşa cum s-a arătat în [2].

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE VEHICULULUI ÎN TIMPUL INTRĂRII ÎN ATMOSFERĂ

Să considerăm vehiculul care intră în atmosfera planetară într-un punct al traiectoriei de intrare presupusă plană (fig. 1). Cu notațiile din figură, ecuațiile intrinseci ale mișcării vehiculului presupus ca punct material vor fi

$$m\frac{dV}{dt} = -R - mg\sin\theta, \tag{1}$$

$$mV\frac{d\alpha}{dt} = P - mg\cos\theta. \tag{2}$$

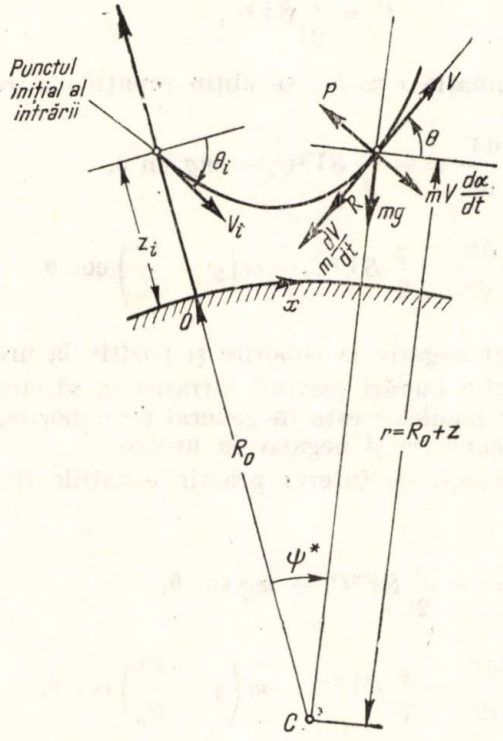


Fig. 1

Exprimînd unghiul de rotație absolută a tangentei la traiectorie sub forma

$$\alpha = \theta - \psi^*, \tag{3}$$

vom avea, evident,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\psi^*}{dt}. \tag{4}$$

Ţinînd seama că

$$r\frac{d\psi^*}{dt} = V\cos\theta, \tag{5}$$

rezultă

$$mV\frac{d\alpha}{dt} = mV\frac{d\theta}{dt} - \frac{mV^2}{r}\cos\theta. \tag{6}$$

Cu acestea, observînd că

$$R = \frac{\rho}{2}SV^2C_x, \tag{7}$$

$$P = \frac{\rho}{2}SV^2C_z \tag{8}$$

şi introducînd aproximaţia $r \approx R_0$, se obţin ecuaţiile intrării sub forma

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= -\frac{\rho}{2}SV^2C_x - mg\sin\theta, \\ mV\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\rho}{2}SV^2C_z - m\left(g - \frac{V^2}{R_0}\right)\cos\theta, \end{aligned} \tag{9}$$

unde θ este considerat negativ la coborîre şi pozitiv la urcare.

În cele mai multe lucrări privind intrarea în atmosferă, avînd în vedere că mişcarea vehiculelor este în general de coborîre, unghiul θ se consideră pozitiv la coborîre şi negativ la urcare.

Cu aceste observaţii de interes practic ecuaţiile (9) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= -\frac{\rho}{2}SV^2C_x + mg\sin\theta, \\ -mV\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\rho}{2}SV^2C_z - m\left(g - \frac{V^2}{R_0}\right)\cos\theta, \end{aligned} \tag{10}$$

pe care o vom folosi în cele ce urmează.

4. INTRAREA OPTIMĂ ÎN TIMP MINIM. PROBLEMA VARIAŢIONALĂ

În cele ce urmează vom determina legile optime de variaţie ale parametrilor mişcării astfel încît un vehicul portant (a cărui decelerаţie să nu întrecă anumite limite) să parcurgă traiectoria de coborîre între două înălţimi z_i şi z_f în cel mai scurt timp, distanţa pe orizontală $x = l$

fiind dată (fig. 2). Cu unghiul θ considerat pozitiv la coborîre scriem ecuațiile (10) sub forma

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{SC_x}{2m}\rho V^2 + g\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{SC_z}{2m}\rho V + \left(g - \frac{V^2}{R_0}\right)\frac{\cos\theta}{V}, \end{aligned} \tag{11}$$

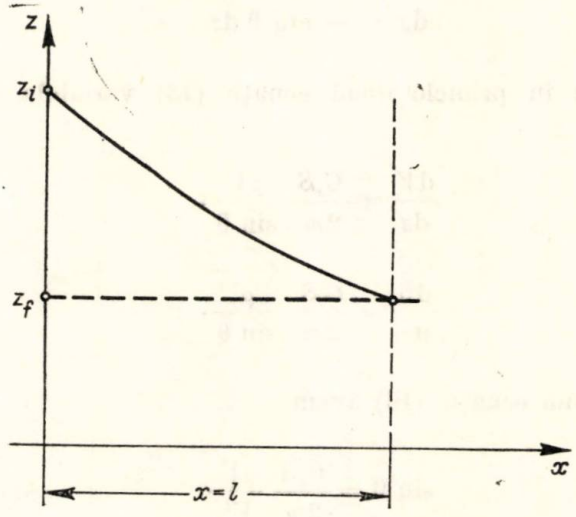


Fig. 2

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1848

cărora le asociem ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -V\sin\theta, \\ \frac{dx}{dt} &= V\cos\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

Considerînd cazul intrării la unghiuri mici și medii și portanță diferită de zero, vom reține sistemul complet de ecuații sub forma

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{SC_x}{2m}\rho V^2, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{SC_z}{2m}\rho V, \\ \frac{dz}{dt} &= -V\sin\theta, \\ \frac{dx}{dt} &= V\cos\theta. \end{aligned} \tag{13}$$

Din a treia ecuaţie (13) avem

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}z}{V \sin \theta}, \tag{14}$$

iar din a treia şi a patra ecuaţie (13) rezultă

$$\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} \theta \, \mathrm{d}z. \tag{15}$$

Introducem în primele două ecuaţii (13) variabila z scriindu-le sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} &= \frac{C_x S}{2m} \frac{\rho V}{\sin \theta}, \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} &= \frac{C_z S}{2m} \frac{\rho}{\sin \theta}, \end{aligned} \tag{16}$$

astfel că din prima ecuaţie (16) avem

$$\sin \theta = \frac{C_x S}{2m} \frac{\rho V}{V'}. \tag{17}$$

Timpul în care vehiculul străbate traiectoria de coborîre între înălţimile z_i, z_f este

$$t = -\int_{z_i}^{z_f} \frac{\mathrm{d}z}{V \sin \theta} \tag{18}$$

sau, ţinînd seama de (17), ştiind că m este constant şi presupunînd C_x constant,

$$t = \frac{2m}{SC_x} \int_{z_f}^{z_i} \frac{V'}{\rho V^2} \mathrm{d}z. \tag{19}$$

Exprimînd ctg θ în funcţie de sin θ şi ţinînd seama de (17), din (15) avem

$$x = \int_{z_f}^{z_i} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{C_x S}{2m} \frac{\rho V}{V'}\right)^2}}{\frac{C_x S}{2m} \frac{\rho V}{V'}} \mathrm{d}z. \tag{20}$$

Deoarece $\left(\frac{C_x S}{2m}\frac{\rho V}{V'}\right)^2 \ll 1$ în intervalul z_i, z_f, notînd $\frac{C_x S}{2m} = a$, putem scrie integrala (20) sub forma

$$x = \int_{z_f}^{z_i} \left(\frac{1}{a\frac{\rho V}{V'}} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'} \right) \mathrm{d}z. \tag{21}$$

Problema variațională care se pune acum este de a găsi minimul integralei (19) cu condiția

$$x = \int_{z_f}^{z_i} \left(\frac{1}{a\frac{\rho V}{V'}} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'} \right) \mathrm{d}z = l, \tag{22}$$

l fiind o lungime dată. Problema variațională deci este o problemă tipic izoperimetrică.

Deoarece pentru $z = z_i$ viteza dată este $V = V_i$, iar pentru $z = z_f$ neprecizată, extremala problemei trece prin punctul $V(z_i)$, z_i și intersectează dreapta $z = z_f$ într-un punct oarecare. În acest caz problema variațională izoperimetrică este de tipul „cu o extremitate mobilă", implicînd evident o condiție de transversalitate.

Curba care realizează extremul integralei (19) este o extremală a funcționalei

$$J = \int_{z_f}^{z_i} H \, \mathrm{d}z, \tag{23}$$

unde

$$H = \frac{1}{a}\frac{V'}{\rho V^2} + \lambda\left(\frac{1}{a}\frac{V'}{\rho V} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'}\right), \tag{24}$$

λ fiind o constantă.

Cum extremala trebuie să verifice ecuația lui Euler

$$\frac{\partial H}{\partial V} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial H}{\partial V'} = 0, \tag{25}$$

ținînd seama de expresia (24) a funcției H, ecuația lui Euler (25) conduce la ecuația diferențială

$$V'' - \frac{\rho'}{2\rho}V' - \frac{V'^2}{V'} + V'^3\left(\frac{\rho'}{a^2\rho^3 V^2} + \frac{\rho'}{\lambda a^2 \rho^3 V^3}\right) = 0. \tag{26}$$

Condiția necesară și suficientă de transversalitate pentru extremitatea mobilă aflată pe dreapta $z = z_f$ se poate scrie sub forma [3]

$$\left[\frac{\partial H}{\partial V'}\right]_{z=z_f} = \left[H_{v'}\right]_{z=z_f} = 0, \tag{27}$$

de unde deducem

$$\lambda \approx -\frac{1}{V(z_f)}. \tag{28}$$

Pentru integrarea exactă a ecuației (26), de o deosebită importanță sînt soluțiile ei în partea finală a evoluției, care dau, conform relației (28), valoarea lui λ. Deoarece în partea finală a evoluției cînd $V \to V_f$ ținînd seama de (28) mărimea $\left(\frac{\rho'}{a^2\rho^3V^2} + \frac{\rho'}{\lambda a^2\rho^3V^3}\right) \to 0$ și cum în plus $\frac{\rho'}{2\rho}V' + \frac{V'^2}{V} \approx \frac{\rho'}{2\rho}V'$, ecuația (26) devine

$$V'' - \frac{\rho'}{2\rho}V' = 0 \tag{29}$$

sau pentru legea exponențială de variație cu înălțimea unanim admisă

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta^* z}, \tag{30}$$

ecuația (29) ia forma simplă

$$V'' + \beta V' = 0 \left(\beta = \frac{\beta^*}{2}\right), \tag{31}$$

a cărei soluție este

$$V = C_1 + C_2 e^{-\beta z}. \tag{32}$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condiția ca, la $z = z_i$, $V = V_i$ și în plus din condiția (22).

Ținînd seama de prima condiție, expresia (32) a vitezei devine

$$V = V_i + C_2 (e^{-\beta z} - e^{-\beta z_i}). \tag{33}$$

Urmează acum să determinăm constanta C_2 din condiția (22).

Pentru aceasta introducînd expresia (33), derivata sa și expresia exponențială (30) în (22) se obține

$$-\frac{1}{a\rho_0}\int_{z_f}^{z_i} e^{\beta z} \cdot \frac{\beta C_2 e^{-\beta z}}{V_i + C_2 (e^{-\beta z} - e^{-\beta z_i})} dz -$$

$$-\frac{a\rho_0}{2\beta}\int_{z_f}^{z_i} e^{-\beta z}\left(e^{\beta(z-z_i)} - \frac{V_i}{C_2}e^{-\beta z} - 1\right) dz = l \tag{34}$$

sau, după simplificări și reduceri,

$$-\frac{\beta C_2}{a\rho_0}\int_{z_f}^{z_i}\frac{1}{V_i + C_2\,(\mathrm{e}^{-\beta z} - \mathrm{e}^{-\beta z_i})}\,\mathrm{d}z -$$

$$-\frac{a\rho_0}{2\beta}\int_{z_f}^{z_i}\left(-\mathrm{e}^{-\beta z} + \mathrm{e}^{-\beta z_i} - \frac{V_i}{C_2}\right)\mathrm{d}z = l. \tag{35}$$

Notînd prima integrală cu A și a doua cu B, vom observa mai întîi că

$$B = -\frac{a\rho_0}{2\beta}\left[\frac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{-\beta z} + z\left(\mathrm{e}^{-\beta z_i} - \frac{V_i}{C_2}\right)\right]_{z_f}^{z_i} =$$

$$= -\frac{a\rho_0}{2\beta}\left[\frac{1}{\beta}\,(\mathrm{e}^{-\beta z_i} - \mathrm{e}^{-\beta z_f}) + (z_i - z_f)\left(\mathrm{e}^{-\beta z_i} - \frac{V_i}{C_2}\right)\right], \tag{36}$$

Introducînd substituția $y = \mathrm{e}^{-\beta z}$, deci $\mathrm{d}y = -\beta y\,\mathrm{d}z$, prima integrală A devine

$$A = \frac{C_2}{a\rho_0}\int_{y(z_f)}^{y(z_i)}\frac{\mathrm{d}y}{[V_i + C_2\,(y - \mathrm{e}^{-\beta z_i})]\,y} =$$

$$= \frac{C_2}{a\rho_0}\int_{y(z_f)}^{y(z_i)}\frac{\mathrm{d}y}{[C_2 y + (V_i - C_2\,\mathrm{e}^{-\beta z_i})]\,y}. \tag{37}$$

Cu notația $C = V_i - C_2\,\mathrm{e}^{-\beta z_i}$, integrala (37) devine

$$A = \frac{C_2}{a\rho_0}\int_{y(z_f)}^{y(z_i)}(C_2 y + C)^{-1}\,y^{-1}\,\mathrm{d}y, \tag{38}$$

care este de formă ușor calculabilă. În urma descompunerii putem scrie

$$A = -\frac{C_2}{a\rho_0}\int_{y(z_f)}^{y(z_i)}\frac{\mathrm{d}y}{C\left(y + \dfrac{C}{C_2}\right)} + \frac{C_2}{a\rho_0}\int_{y(z_f)}^{y(z_i)}\frac{\mathrm{d}y}{y}. \tag{39}$$

Efectuînd integralele avem

$$A = -\frac{C_2}{Ca\rho_0}\left[\ln\left(y + \frac{C}{C_2}\right)\right]_{y(z_f)}^{y(z_i)} + \frac{C_2}{Ca\rho_0}\,[\ln y]_{y(z_f)}^{y(z_i)} \tag{40}$$

sau, revenind la vechea variabilă,

$$A = -\frac{C_2}{a\rho_0(V_i - C_2\,\mathrm{e}^{-\beta z_i})}\left[\ln\left(\mathrm{e}^{-\beta z} + \frac{V_i - C_2\,\mathrm{e}^{-\beta z_i}}{C_2}\right) - \ln\mathrm{e}^{-\beta z}\right]_{z_f}^{z_i}, \tag{41}$$

care se poate pune în definitiv sub forma

$$A = \frac{C_2}{a\rho_0(V_i - C_2\,e^{-\beta z_i})}\left\{\ln\left[1 + \frac{C_2}{V_i}(e^{-\beta z_f} - e^{-\beta z_i})\right] - \beta(z_i - z_f)\right\}. \quad (42)$$

Cu aceasta, ţinînd seama şi de (36), integrala devine

$$\frac{C_2}{a\rho_0(V_i - C_2\,e^{-\beta z_i})}\left\{\ln\left[1 - \frac{C_2}{V_i}(e^{-\beta z_i} - e^{-\beta z_f}) - \beta(z_i - z_f)\right\}\right. =$$

$$= \frac{a\rho_0}{2\beta}\left\{(z_i - z_f)\left(e^{-\beta z_i} - \frac{V_i}{C_2}\right) + \frac{1}{\beta}(e^{-\beta z_i} - e^{-\beta z_f})\right\} + l. \quad (43)$$

Deci pentru determinarea constantei C_2 va trebui rezolvată ecuaţa transcendentă (43).

4.1. REZOLVAREA ECUAŢIEI TRANSCENDENTE

Dacă separăm logaritmul în (43) obţinem

$$\ln\left[1 - \frac{C_2}{V_i}(e^{-\beta z_i} - e^{-\beta z_f})\right] =$$

$$= \frac{a^2\rho_0^2}{2\beta C_2}(V_i - C_2\,e^{-\beta z_i})\left\{(z_i - z_f)\left(e^{-\beta z_i} - \frac{V_i}{C_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta}(e^{-\beta z_i} - e^{-\beta z_f})\right\} + \frac{la\rho_0}{C_2}(V_i - C_2\,e^{-\beta z_i}) + (z_i - z_f). \quad (44)$$

Introducînd substituţia

$$E = \frac{V_i}{C_2} - e^{-\beta z_i}, \quad (45)$$

ecuaţia (44) devine, în urma calculelor,

$$\ln\frac{E + e^{-\beta z_f}}{E + e^{-\beta z_i}} = \frac{a^2\rho_0^2}{2\beta}(z_f - z_i)\,E^2 +$$

$$+ \left[\frac{a^2\rho_0^2}{2\beta^2}(e^{-\beta z_i} - e^{-\beta z_f}) + la\,\rho_0\right]E + \beta\,(z_i - z_f), \quad (46)$$

sau, sub forma mai restrînsă,

$$\ln\frac{E + e^{-\beta z_f}}{E + e^{-\beta z_i}} = A_2E^2 + A_1E + A_0, \quad (47)$$

unde

$$A_2 = \frac{a^2 \rho_0^2}{2\beta}(z_f - z_i),$$

$$A_1 = \frac{a^2 \rho_0^2}{2\beta^2}(e^{-\beta z_i} - e^{-\beta z_f}) + la\rho_0,$$

$$A_0 = \beta(z_i - z_f). \tag{48}$$

Rezolvarea ecuației (47) se poate face numai prin metode numerice.

Vom face în acest sens mai întîi un studiu calitativ al acestei ecuații, care ne va permite stabilirea unui algoritm de calcul pentru aflarea soluției.

a. Valoarea lui E care satisface ecuația (47) se va afla la intersecția graficului funcției logaritmice (partea stîngă)

$$\ln \frac{E + e^{-\beta z_f}}{E + e^{-\beta z_i}}$$

cu o parabolă (partea dreaptă).

b. Pentru ca expresia vitezei dată de (33) să oglindească fenomenul real al coborîrii în atmosferă trevuie ca V să scadă cu z, ceea ce presupune $C_2 < 0$.

Substituția (45) restrînge deci valorile lui E care corespund problemei la domeniul valorilor $E < -e^{-\beta z_i}$.

c. Valoarea lui A_2 este strict negativă ($z_f < z_i$), deci trinomul $y = A_2E^2 + A_1E + A_0$ are un punct de maximum.

d. Valoarea $E = 0$ satisface ecuația (47), deoarece se obține

$$\ln e^{\beta(z_i - z_f)} = A_0$$

sau

$$\beta(z_i - z_f) = A_0$$

ceea ce este adevărat potrivit celei de a treia substituții (48). Dat fiind că $z_i > z_f$, ordonata punctului de intersecție va fi strict pozitivă și implicit punctul de maximum al trinomului se va afla în semiplanul superior.

e. Pe baza considerațiilor de mai sus graficul atașat ecuației (47) va avea alura din figura 3. Din examinarea graficului se poate remarca faptul că există trei valori ale lui E (soluții) care satisfac ecuației (47). Una dintre ele $E = 0$ ($1 \equiv 1'$) a fost deja semnalată.

Relativ la poziția punctului de maximum al trinomului se disting două cazuri:

— abscisa punctului de maximum este pozitivă și în acest caz rădăcina 2 iese din cîmpul cercetării noastre deoarece $E > 0$;

— abscisa punctului de maximum este negativă: rădăcina 2′ nu corespunde $E > e^{-\beta z_i}$.

Soluţia unică a problemei (abscisa punctului 3 sau 3′ după caz) îşi are astfel existenţa demonstrată, deoarece intersecţia parabolei cu ramura spre E negativ a funcţiei logaritmice este evidentă.

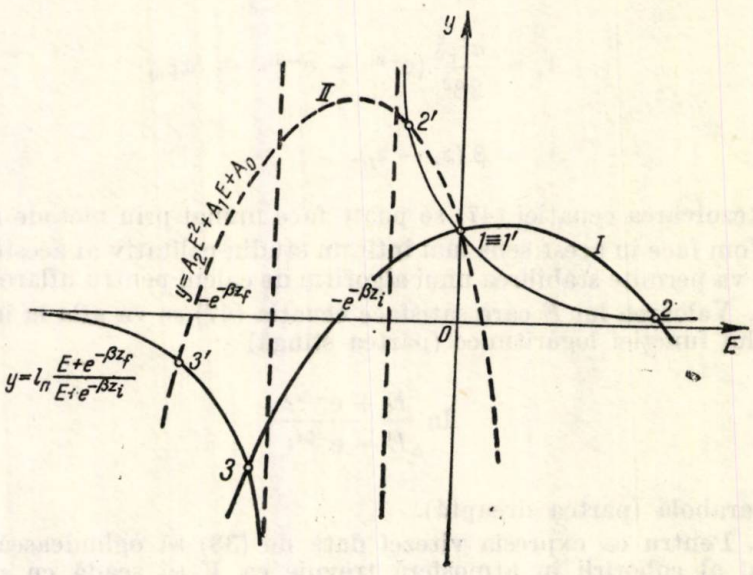


Fig. 3

Cu aceste consideraţii dăm mai jos algoritmul de calcul al rădăcinii E care este foarte rapid convergent şi nu necesită mai mult de cîţiva paşi de calcul. El este inspirat de metoda coardei pentru aflarea rădăcinilor reale ale unei ecuaţii (după ce în prealabil au fost separate).

Să calculăm valoarea trinomului pentru $E = -e^{-\beta z_f}$:

$$P(-e^{-\beta z_f}) = A_2 e^{-2\beta z_f} - A_1 e^{-\beta z_f} + A_0. \tag{49}$$

În ce priveşte semnul acestei mărimi, deosebim două cazuri de calcul, şi anume:

1. $P(-e^{-\beta z_f}) < 0$. Dreapta $E = -e^{-\beta z_f}$ este intersectată de parabolă în regiunea y-cilor negativi.

În acest caz, ca primă aproximaţie se alege

$$E_1 = \frac{e^{P(-e^{-\beta z_f})-\beta z_i} - e^{-\beta z_f}}{1 - e^{P(-e^{-\beta z_f})}}. \tag{50}$$

Aproximaţiile următoare vor avea forma

$$E_n = \frac{e^{P(E_{n-1})-\beta z_i} - e^{-\beta z_f}}{1 - e^{P(E_{n-1})}}. \tag{51}$$

2. $P(-e^{-\beta z_f}) > 0$. Prima aproximație se consideră punctul de intersecție al trinomului cu $E = 0$, adică rădăcina negativă a ecuației

$$A_2E^2 + A_1E + A_0 = 0. \tag{52}$$

Valoarea logaritmului în punctul E_1 va fi

$$L(E_1) = \ln \frac{E_1 + e^{-\beta z_f}}{E_1 + e^{-\beta z_i}}. \tag{53}$$

Pentru a doua aproximație trebuie intersectat trinomul cu dreapta $y = L(E_1)$, deci E_2 va fi rădăcina negativă a ecuației

$$A_2E^2 + A_1E + A_0 - L(E_1) = 0. \tag{54}$$

În aproximația de ordinul n, E_n va fi rădăcina negativă a ecuației

$$A_2E^2 + A_1E + A_0 - L(E_{n-1}) \tag{55}$$

$$n = 3, 4, \ldots$$

Algoritmul se pretează foarte bine la programarea pe calculatorul electronic.

4.2. LEGILE OPTIME DE VARIAȚIE ALE PARAMETRILOR MIȘCĂRII VEHICULULUI

Determinînd după cele văzute mai sus constanta C_2, legea optimă de variație a vitezei dată de (32) este complet definită. Cu aceasta, din prima ecuație (16) avem

$$\sin \theta = \frac{C_x S}{2m} \frac{\rho V}{V'}, \tag{56}$$

de unde rezultă, ținînd seama de notația anterioară $\frac{C_x S}{2m} = a$,

$$\theta = \text{arc sin } a \frac{\rho V}{V'}. \tag{57}$$

După cum am menționat la început, coeficientul de rezistență la înaintare a fost presupus constant. Coeficientul de portanță C_z însă este variabil și, practic, el trebuie să fie modificat astfel în timpul intrării (mijloace gazodinamice), încît a doua ecuație (16) să fie satisfăcută identic.

Din a doua ecuație (16), ținînd seama de (56) și (57), vom avea

$$C_z = \frac{2m}{S} \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{d\left(\text{arc sin } a \frac{\rho V}{V'}\right)}{dz} \tag{58}$$

sau, exprimînd raportul $\frac{C_z}{C_x}$ aşa cum se procedează obişnuit,

$$\frac{C_z}{C_x} = \frac{\sin\theta}{a\rho} \frac{\mathrm{d}\left(\arcsin a \frac{\rho V}{V'}\right)}{\mathrm{d}z}. \tag{59}$$

5. APLICAŢIE NUMERICĂ. CONCLUZII

Cu următoarele date (valabile pentru Pămînt)

$z_i = 110.000$ m,
$z_f = 40.000$ m,
$l = 700.000$ m,
$\rho_0 = 0{,}125$ kg sec^2/m^4,
$\beta^* = 1{,}395 \cdot 10^{-4}$ m^{-1},
$V_i = 7\,800$ m/sec,

s-au calculat pentru mai multe valori ale parametrului $a = \frac{C_x S}{2m}$ viteza şi unghiul θ pentru intrarea optimă în timp minim, rezultatele fiind înscrise în graficele din figurile 4 şi 5. Este vizibil din graficul din figura 5 că traiectoria tinde în partea finală să se apropie de orizontală.

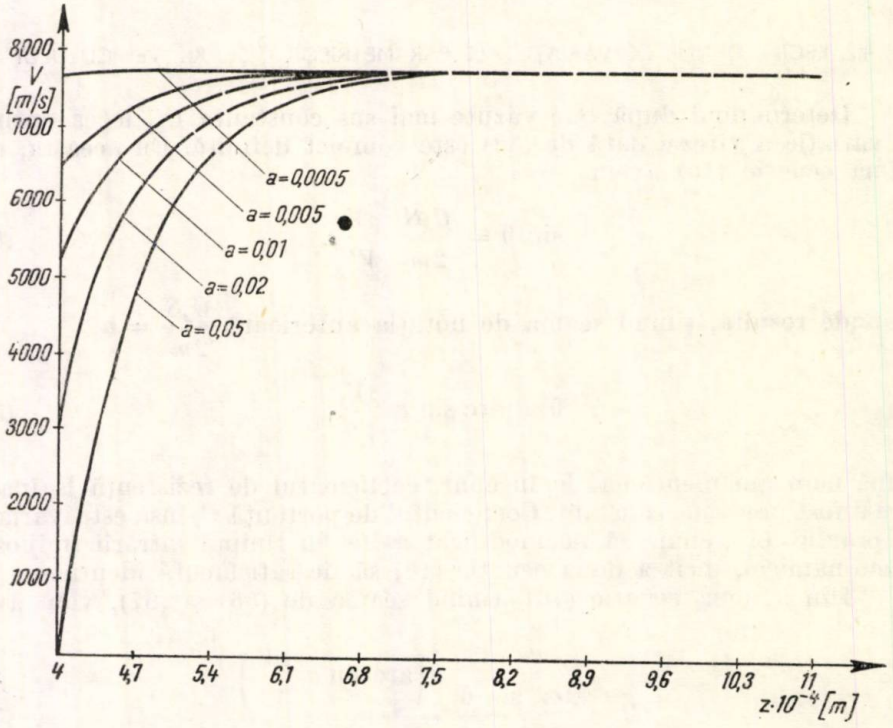


Fig. 4

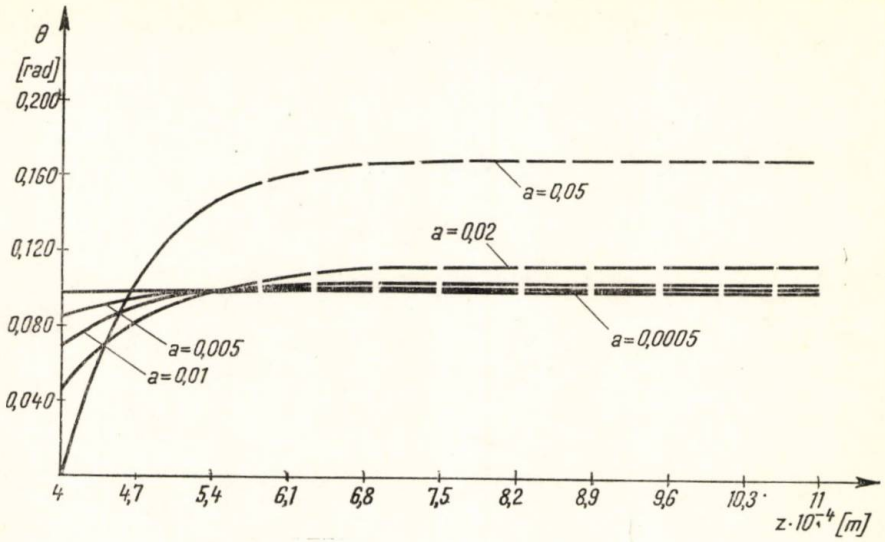


Fig. 5

Pentru valori uzuale ale parametrului a, variația unghiului θ fiind mică (cu excepția părții finale a evoluției), raportul $\frac{C_z}{C_x}$ se menține la valori mici.

Primită la redacție la 30 martie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. L. Pottsepp, Y. Shi, *Optimal Lift Control of a Hypersonic Glieder*, AIAA Journal **6**, June (1968).
2. Al. Marinescu, *Sur l'optimisation de l'entrée du vehicles spatiales dans l'atmosphère planetaire*, Rendiconti di Academia Nazionale dei Lincei (sub tipar).
3. M. A. Lavrentiev, L. A. Liusternic, *Curs de calcul variațional*, București, Edit. tehnică, 1955.
4. Al. Marinescu, *Considerații privind intrarea vehiculelor spațiale în atmosfera planetară*, Revista transporturilor *6* (1971).

ASUPRA UNOR PROBLEME DE MIŞCARE NESTAŢIONARĂ A UNUI FLUID VÎSCOS

de T. OROVEANU
Institutul de petrol Ploieşti

Se studiază problema mişcării nestaţionare a unui fluid vîscos incompresibil în cazul în care viteza este paralelă cu o anumită direcţie, fapt care permite aducerea ecuaţiei diferenţiale a problemei la o formă simplă. Se consideră în particular mişcarea în tuburi cilindrice de secţiune transversală circulară sau între două tuburi coaxiale. De asemenea, se studiază aceeaşi problemă pentru un tub cu secţiunea transversală dreptunghiulară. În aceste cazuri, soluţiile pot fi găsite uşor prin aplicarea unor transformate integrale. Rezultatele sînt în bună parte cunoscute, dar procedeul propus permite obţinerea lor cu mai multă uşurinţă şi în acelaşi timp conduce la diverse generalizări.

1. INTRODUCERE

În cadrul studiului mişcării laminare nestaţionare a fluidelor vîscoase, problemele cele mai simple apar atunci cînd viteza este paralelă cu o anumită direcţie, care poate coincide cu una dintre axele de coordonate, de exemplu Ox. Dacă presupunem că fluidul este incompresibil şi neglijăm forţele de masă, ecuaţia de mişcare ia forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$v(y, z, t)$ fiind viteza, p presiunea, ρ masa specifică a fluidului şi ν viscozitatea sa cinematică. După cum am arătat în altă parte [4], nu este însă absolut necesar să nu luăm în consideraţie forţele de masă.

Este uşor de constatat că $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ este în acest caz o funcţie numai de timp şi prin urmare putem pune

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f(t). \tag{2}$$

Ecuaţia (1) ia deci forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f(t) = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

şi cu notaţia

$$u = v + \int_0^t f(t)\,dt \tag{4}$$

devine

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{5}$$

fiind deci de acelaşi tip cu ecuaţia omogenă a căldurii sau a difuziei. Evident, în acelaşi mod se tratează şi cazul în care $\frac{\partial p}{\partial x}$ este o constantă.

Una dintre problemele care pot fi studiate pe această cale este aceea a mişcării laminare nestaţionare într-un tub cilindric infinit. Dacă secţiunea transversală a tubului este circulară, cazul particular astfel precizat este cel mai simplu, o soluţie bine cunoscută fiind aceea dată de F. Szymanski [6]. De asemenea nu prezintă dificultăţi deosebite nici studiul unei astfel de mişcări între doi cilindri circulari coaxiali [2].

Pentru tuburi cu secţiunea transversală de altă formă poate fi utilizată metoda propusă de G. Arnaud şi J. L. Peube [1], pe care autorii au aplicat-o, pentru exemplificare, la mişcarea nestaţionară într-un tub de secţiune eliptică.

În cele ce urmează ne propunem să reluăm această problemă pentru cîteva cazuri de secţiuni transversale de formă simplă, care permit rezolvarea ecuaţiei (5) cu ajutorul unor transformate integrale. Pe această cale pot fi regăsite, cu destulă uşurinţă, unele rezultat cunoscute, dar şi diverse generalizări ale acestora, mai greu de obţinut altfel. Evident, acest mod de a proceda nu are un caracter general, transformatele integrale amintite putînd fi utilizate cu succes numai pentru anumite forme de secţiuni transversale.

2. MIŞCAREA NESTAŢIONARĂ ÎNTR-UN TUB DE SECŢIUNE CIRCULARĂ

În coordonatele cilindrice (r, θ, x), axa Ox coincizînd cu aceea a tubului, ecuaţia (1) are forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) \tag{6}$$

datorită simetriei axiale.

Viteza satisface condiţia iniţială

$$t=0, \quad v=0 \tag{7}$$

şi condiţiile la limită

$$r=0, \quad \frac{\partial v}{\partial r}=0; \qquad r=r_0, \; v=0, \tag{8}$$

r_0 fiind raza tubului.

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\bar{r}=\frac{r}{r_0}, \quad \bar{x}=\frac{x}{r_0}, \quad \bar{t}=\frac{\nu t}{r_0^2}, \tag{9}$$

precum şi notaţiile

$$\bar{v}=\frac{v}{v_0}, \quad \bar{p}=\frac{p}{\rho v_0^2}, \tag{10}$$

în care v_0 este o viteză constantă convenabil aleasă, obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}}=-\mathcal{R}_0\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}}, \tag{11}$$

în care

$$\mathcal{R}_0=\frac{v_0 r_0}{\nu} \tag{12}$$

este numărul lui Reynolds.

Trebuie deci găsită soluţia ecuaţiei (11) care satisface condiţiile

$$\bar{t}=0, \qquad \bar{v}=0, \tag{13}$$

respectiv

$$\bar{r}=0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}}=0; \quad \bar{r}=1, \quad \bar{v}=0. \tag{14}$$

Schimbarea de funcţie (4) se scrie în acest caz

$$\bar{u}=\bar{v}+\mathcal{R}_0\int_0^{\bar{t}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\,d\bar{t}=\bar{v}+\varphi(\bar{t}) \tag{15}$$

şi ne dă ecuaţia

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}=\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}, \tag{16}$$

a cărei soluție trebuie găsită cu condițiile

$$\bar{t}=0, \qquad \bar{u}=0 \tag{17}$$

și

$$\bar{r}=0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}=0; \quad \bar{r}=1, \quad \bar{u}=\varphi(\bar{t}). \tag{18}$$

În acest scop, vom aplica transformata finită a lui Hankel sub forma [5]

$$\bar{u}_H=\int_0^1 \bar{r}\,\bar{u}J_0(\lambda_n\bar{r})\,\mathrm{d}\bar{r}, \tag{19}$$

$J_0(\lambda_n\bar{r})$ fiind funcția lui Bessel de prima specie de ordinul zero, iar λ_n rădăcinile pozitive ale ecuației

$$J_0(\lambda_n)=0. \tag{20}$$

Se poate arăta [5] că în acest caz avem

$$\int_0^1 \bar{r}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{r}}\right)J_0(\lambda_n\bar{r})\mathrm{d}\bar{r}=\lambda_n J_1(\lambda_n)\varphi(\bar{t})-\lambda_n^2\bar{u}_H \tag{21}$$

și prin urmare ecuația (16) devine

$$\frac{d\bar{u}_H}{d\bar{t}}+\lambda_n^2\bar{u}_H=\lambda_n J_1(\lambda_n)\varphi(\bar{t}). \tag{22}$$

Soluția care satisface condiția

$$\bar{t}=0, \qquad \bar{u}_H=0, \tag{23}$$

dedusă imediat din (17), este

$$\bar{u}_H=\lambda_n J_1(\lambda_n)\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \tag{24}$$

iar prin aplicarea teoremei de inversiune [5] găsim

$$\bar{u}=2\sum_n \frac{\lambda_n J_0(\lambda_n\bar{r})}{J_1(\lambda_n)}\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)}\mathrm{d}\tau. \tag{25}$$

Din (15) rezultă

$$\bar{v}=2\sum_n \frac{\lambda_n J_0(\lambda_n\bar{r})}{J_1(\lambda_n)}\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)}\mathrm{d}\tau-\varphi(\bar{t}) \tag{26}$$

și, dacă observăm că pentru $0<\bar{r}<1$ este valabilă dezvoltarea

$$\varphi(\bar{t})=2\varphi(\bar{t})\sum_n \frac{J_0(\lambda_n\bar{r})}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}, \tag{27}$$

expresia precedentă a vitezei adimensionale ia forma

$$\bar{v} = 2 \sum_n \left[\lambda_n \int_0^{\bar{t}} \varphi(\tau) e^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)} \, d\tau - \frac{\varphi(\bar{t})}{\lambda_n} \right] \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{J_1(\lambda_n)} \tag{28}$$

şi reprezintă soluţia problemei studiate.

Introducînd un debit constant de referinţă

$$Q = \pi r_0^2 v_0, \tag{29}$$

putem pune

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_0} = 2 \int_0^1 \bar{r} \bar{v} \, d\bar{r} \tag{30}$$

şi, după efectuarea calculelor, găsim

$$\bar{Q} = 4 \sum_n \left[\int_0^{\bar{t}} \varphi(\tau) e^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)} \, d\tau - \frac{\varphi(\bar{t})}{\lambda_n^2} \right]. \tag{31}$$

Observăm însă că avem [7]

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{4}, \tag{32}$$

ceea ce ne permite să scriem debitul adimensional sub o formă puţin modificată şi anume

$$\bar{Q} = 4 \sum_n \int_0^{\bar{t}} \varphi(\tau) e^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)} \, d\tau - \varphi(\bar{t}). \tag{33}$$

Ca un caz particular poate fi considerat acela în care $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$ nu depinde de timp şi prin urmare

$$\varphi(\bar{t}) = \mathcal{R}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \bar{t}. \tag{34}$$

După cîteva calcule simple, soluţia (28) devine

$$\bar{v} = 2\mathcal{R}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \sum_n \frac{e^{-\lambda_n^2 \bar{t}} - 1}{\lambda_n^3} \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{J_1(\lambda_n)} \tag{35}$$

şi, dacă ţinem seama de dezvoltarea cunoscută

$$1 - \bar{r}^2 = 8 \sum_n \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}, \tag{36}$$

găsim imediat în loc de (35) expresia

$$\bar{v} = -\frac{1}{4} \mathcal{R}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \left[1 - \bar{r}^2 - 8 \sum_n \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \bar{t}} \right] \tag{37}$$

sau, dacă revenim la mărimile dimensionale,

$$v = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} r_0^2 \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} - 8 \sum_n \frac{J_0\left(\lambda_n \frac{r}{r_0}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\frac{\nu \lambda_n^2}{r_0^2} t} \right]. \tag{38}$$

Acesta este rezultatul cunoscut al lui F. Szymanski pe care l-am semnalat mai înainte, obţinut aci pe o cale destul de simplă.

De asemenea, expresia (31) a debitului devine

$$\bar{Q} = \frac{1}{8} \mathcal{R}_0 \left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right| \left(1 - 32 \sum_n \frac{e^{-\lambda_n^2 \bar{t}}}{\lambda_n^4} \right) \tag{39}$$

sau

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \left(1 - 32 \sum_n \frac{e^{-\frac{\nu \lambda_n^2}{r_0^2} t}}{\lambda_n^4} \right), \tag{40}$$

derivata $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$, respectiv $\frac{\partial p}{\partial x}$, fiind luată în valoare absolută.

La $t=0$, dacă observăm că avem [7]

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n^4} = \frac{1}{32}, \tag{41}$$

rezultă, aşa cum este normal, $Q=0$, concluzie la care se ajunge de altfel direct din examinarea formulelor generale (31) sau (33).

Evident, metoda propusă poate fi aplicată şi pentru alte condiţii iniţiale. Astfel, dacă înlocuim condiţia (7) cu

$$t=0, \quad v=v_0, \tag{42}$$

avem în loc de (17)

$$\bar{t}=0, \quad \bar{u}=1, \tag{43}$$

iar pentru ecuația (22) găsim condiția

$$\bar{t}=0, \qquad \bar{u}_H=\frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n}, \tag{44}$$

soluția corespunzătoare fiind

$$\bar{u}_H=\lambda_n J_1(\lambda_n)\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau+\frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n}\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\bar{t}}. \tag{45}$$

Aplicarea aceleiași teoreme de inversiune ne dă

$$\bar{u}=2\sum_n\left[\lambda_n\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\bar{t}}}{\lambda_n}\right]\frac{J_0(\lambda\bar{r})}{J_1(\lambda_n)}, \tag{46}$$

respectiv

$$\bar{v}=2\sum_n\left[\lambda_n\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda_u^2(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\bar{t}}-\varphi(\bar{t})}{\lambda_n}\right]\frac{J_0(\lambda_n\bar{r})}{J_1(\lambda_n)}. \tag{47}$$

De asemenea, debitul adimensional are de data aceasta expresia

$$\bar{Q}=4\sum_n\left[\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\bar{t}}-\varphi(\bar{t})}{\lambda_n^2}\right] \tag{48}$$

sau

$$\bar{Q}=4\sum_n\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda_n^2(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\bar{t}}-\varphi(\bar{t}) \tag{49}$$

dacă utilizăm din nou relația (32).

În cazul în care $\varphi(\bar{t})$ are expresia (34), rezultă, după cîteva calcule, asemănătoare cu cele din cadrul exemplului precedent,

$$\bar{v}=-\frac{1}{4}\mathcal{R}_0\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}(1-\bar{r}^2)+2\sum_n\left(1+\mathcal{R}_0\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\frac{J_0(\lambda_n\bar{r})}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\bar{t}} \tag{50}$$

sau

$$\bar{v}=-\frac{1}{4}\mathcal{R}_0\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}\left[1-\bar{r}^2-8\sum_n\frac{J_0(\lambda_n\bar{r})}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\bar{t}}\right]+$$

$$+2\sum_n\frac{J_0(\lambda_n\bar{r})}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}\mathrm{e}^{-\lambda_n^2\bar{t}}, \tag{51}$$

această ultimă formă scoțînd mai bine în evidență deosebirea față de soluția (37).

În ceea ce privește debitul adimensional, găsim cu ușurință expresia

$$\overline{Q} = \frac{1}{8}\mathcal{R}_0 \left|\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}\right| \left(1 - 32 \sum_n \frac{e^{-\lambda_n^2 \overline{t}}}{\lambda_n^4}\right) + 4 \sum_n \frac{e^{-\lambda_n^2 \overline{t}}}{\lambda_n^2} \tag{52}$$

și la $\overline{t}=0$ rezultă $\overline{Q}=1$, ceea ce concordă cu (29) și (42).

3. MIȘCAREA NESTAȚIONARĂ ÎNTRE DOI CILINDRI CIRCULARI COAXIALI

Luînd din nou ca punct de plecare ecuația (6), vom căuta să găsim soluția acesteia care satisface condițiile

$$t = 0, \qquad v = v(r) \tag{53}$$

și

$$r = r_1, \quad v = v_1(t); \qquad r = r_2, \quad v = 0 \tag{54}$$

cu $r_1 < r_2$. Studiul acestei mișcări între doi cilindri coaxiali cu razele r_1 și r_2, cilindrul interior mișcîndu-se cu o viteză $v_1(t)$, a fost efectuat în lucrarea pe care am menționat-o înainte. Există însă posibilitatea de a se rezolva problema pe o cale mult mai simplă, așa cum vom arăta în cele ce urmează.

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\overline{r} = \frac{r}{r_2}, \qquad \overline{x} = \frac{x}{r_2}, \qquad \overline{t} = \frac{\nu t}{r_2^2}, \tag{55}$$

precum și notațiile (10), ajungem la ecuația

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{t}} = -\mathcal{R}_2 \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{r}^2} + \frac{1}{\overline{r}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{r}}, \tag{56}$$

în timp ce condițiile precizate mai sus iau forma

$$\overline{t} = 0, \qquad \overline{v} = \overline{v}(\overline{r}), \tag{57}$$

respectiv

$$\overline{r} = \overline{r}_1, \quad \overline{v} = \overline{v}_1(\overline{t}); \qquad \overline{r} = 1, \quad \overline{v} = 0. \tag{58}$$

De data aceasta am introdus numărul lui Reynolds sub forma

$$\mathcal{R}_2 = \frac{v_0 r_2}{\nu}. \tag{59}$$

Schimbarea de funcție (4) a forma

$$\bar{u} = \bar{v} + \mathcal{R}_2 \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \, d\bar{t} = \bar{v} + \varphi(\bar{t}) \tag{60}$$

și ne conduce din nou la ecuația (16), a cărei soluție trebuie să satisfacă, de data aceasta, condițiile

$$\bar{t} = 0, \qquad \bar{u} = \bar{v}(\bar{r}) \tag{61}$$

și

$$\bar{r} = \bar{r}_1, \quad \bar{u} = \psi(\bar{t}); \qquad \bar{r} = 1, \quad \bar{u} = \varphi(\bar{t}), \tag{62}$$

unde am introdus notația

$$\psi(\bar{t}) = \bar{v}_1(\bar{t}) + \varphi(\bar{t}). \tag{63}$$

Transformata finită a lui Hankel adecvată pentru rezolvarea acestei probleme este [5]

$$\bar{u}_H = \int_{\bar{r}_1}^{1} \bar{r}\bar{u}[J_0(\alpha_n \bar{r}) Y_0(\alpha_n \bar{r}_1) - Y_0(\alpha_n \bar{r}) J_0(\alpha_n \bar{r}_1)] \, d\bar{r}, \tag{64}$$

în care α_n sînt rădăcinile ecuației

$$J_0(\alpha_n) Y_0(\alpha_n \bar{r}_1) - Y_0(\alpha_n) J_0(\alpha_n \bar{r}_1) = 0. \tag{65}$$

În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii, vom utiliza notația

$$B_0(\alpha_n \bar{r}) = J_0(\alpha_n \bar{r}) Y_0(\alpha_n \bar{r}_1) - Y_0(\alpha_n \bar{r}) J_0(\alpha_n \bar{r}_1). \tag{66}$$

Se poate arăta că în acest caz avem [5]

$$\int_{\bar{r}_1}^{1} \bar{r} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) B_0(\alpha_n \bar{r}) \, d\bar{r} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{J_0(\alpha_n \bar{r}_1)}{J_0(\alpha_n)} \varphi(\bar{t}) - \psi(\bar{t}) \right] - \alpha_n^2 \bar{u}_H, \tag{67}$$

astfel că ecuația (16) devine

$$\frac{d\bar{u}_H}{d\bar{t}} + \alpha_n^2 \bar{u}_H = \frac{2}{\pi} \left[\frac{J_0(\alpha_n \bar{r}_1)}{J_0(\alpha_n)} \varphi(\bar{t}) - \psi(\bar{t}) \right]. \tag{68}$$

Soluția acesteia care satisface condiția

$$\bar{t} = 0, \qquad \bar{u}_H = \bar{u}_H^{(0)}, \tag{69}$$

unde

$$\bar{u}_H^{(0)} = \int_{\bar{r}_1}^{1} \bar{r} \, \bar{v}(\bar{r}) B_0(\alpha_n \bar{r}) \, d\bar{r}, \tag{70}$$

este

$$\overline{u}_H=\overline{u}_H^{(0)}e^{-\alpha_n^2\bar{t}}+\int_0^{\bar{t}} g(\tau)\,e^{-\alpha_n^2(\bar{t}-\tau)}\,d\tau. \tag{71}$$

Precizăm că pentru simplificarea scrierii am introdus notația

$$g(\bar{t})=\frac{2}{\pi}\left[\frac{J_0(\alpha_n\bar{r}_1)}{J_0(\alpha_n)}\varphi(\bar{t})-\psi(\bar{t})\right]. \tag{72}$$

Teorema de inversiune pentru această transformată finită [5] ne dă

$$\begin{aligned}\overline{u}=&\frac{\pi^2}{2}\sum_n \overline{u}_H^{(0)}\frac{\alpha_n^2J_0^2(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n\bar{r}_1)-J_0^2(\alpha_n)}B_0(\alpha_n\bar{r})+\\&+\pi\sum_n\frac{\alpha_n^2J_0(\alpha_n\bar{r}_1)J_0(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n\bar{r}_1)-J_0^2(\alpha_n)}B_0(\alpha_n\bar{r})\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)e^{-\alpha_n^2(\bar{t}-\tau)}d\tau-\\&-\pi\sum_n\frac{\alpha_n^2J_0^2(\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n\bar{r}_1)-J_0^2(\alpha_n)}B_0(\alpha_n\bar{r})\int_0^{\bar{t}}\psi(\tau)e^{-\alpha_n^2(\bar{t}-\tau)}d\tau,\end{aligned} \tag{73}$$

respectiv

$$\begin{aligned}\overline{v}=&\pi\sum_n\frac{\alpha_n^2J_0(\alpha_n)B_0(\alpha_n\bar{r})}{J_0^2(\alpha_n\bar{r}_1)-J_0^2(\alpha_n)}e^{-\alpha_n^2\bar{t}}\left[\frac{\pi}{2}J_0(\alpha_n)\int_{\bar{r}_1}^1\bar{r}\,\overline{v}(\bar{r})B_0(\alpha_n\bar{r})\,d\bar{r}+\right.\\&\left.+J_0(\alpha_n\bar{r}_1)\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)e^{\alpha_n^2\tau}d\tau-J_0(\alpha_n)\int_0^{\bar{t}}\psi(\tau)e^{\alpha_n^2\tau}d\tau\right]-\varphi(\bar{t}),\end{aligned} \tag{74}$$

soluție găsită anterior pe o cale sensibil mai complicată.

Precizăm că în problema tratată în lucrarea citată [2] axa cilindrilor era presupusă verticală, ceea ce face să intervină în orice caz și forța de masă. Acest fapt nu modifică însă cu nimic calculele, deoarece putem pune

$$-\left(g+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=f(t), \tag{75}$$

axa Ox avînd ca sens pozitiv pe acela al verticalei ascendente. Această observație este valabilă și pentru problema tratată anterior, precum și atunci cînd axa tubului sau a cilindrilor face un unghi oarecare α cu verticala.

Nu mai insistăm asupra soluției găsite deoarece în [3] a fost efectuat calculul debitului și s-a prezentat o aplicație în care s-a presupus gradientul de presiune independent de timp și s-a precizat forma funcției $v_1(t)$.

4. MIȘCAREA NESTAȚIONARĂ ÎNTR-UN TUB DE SECȚIUNE DREPTUNGHIULARĂ

Ca un ultim exemplu, vom studia cazul mișcării într-un tub de lungime infinită cu secțiunea transversală dreptunghiulară. Alegînd ca axă Ox o muchie a tubului, secțiunea transversală este delimitată de dreptele $y=0$, $y=a$, $z=0$, $z=b$.

Ecuația problemei este (1) și condițiile pe care trebuie să le satisfacă soluția au forma

$$t=0, \quad v=0, \tag{76}$$

respectiv

$$\begin{aligned} &y=0, \quad v=0; \quad y=a, \quad v=0, \\ &z=0, \quad v=0; \quad z=b, \quad v=0. \end{aligned} \tag{77}$$

Cu variabilele adimensionale

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y}=\frac{y}{a}, \quad \bar{z}=\frac{z}{a}, \quad \bar{t}=\frac{\nu t}{a^2} \tag{78}$$

și cu notațiile (10), ecuația (1) devine

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = -\mathcal{R}_a \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}, \tag{79}$$

unde

$$\mathcal{R}_a = \frac{v_0 a}{\nu}, \tag{80}$$

iar condițiile precedente iau forma

$$\bar{t}=0, \quad \bar{v}=0 \tag{81}$$

și

$$\begin{aligned} &\bar{y}=0, \quad \bar{v}=0; \quad \bar{y}=1, \quad \bar{v}=0, \\ &\bar{z}=0, \quad \bar{v}=0; \quad \bar{z}=\frac{b}{a}, \quad \bar{v}=0. \end{aligned} \tag{82}$$

Cu schimbarea de funcție (4), care are acum forma

$$\bar{u}=\bar{v}+\mathcal{R}_a \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \, d\bar{t} = \bar{v} + \varphi(\bar{t}), \tag{83}$$

ajungem la ecuația

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}, \tag{84}$$

iar condiţiile pe care trebuie să le satisfacă soluţia acesteia sînt

$$\bar{t}=0, \quad \bar{u}=0, \tag{85}$$

respectiv

$$\bar{y}=0, \quad \bar{u}=\varphi(\bar{t}); \quad \bar{y}=1, \quad \bar{u}=\varphi(\bar{t}),$$

$$\bar{z}=0, \quad \bar{u}=\varphi(\bar{t}); \quad \bar{z}=\frac{b}{a}, \quad \bar{u}=\varphi(\bar{t}). \tag{86}$$

Dacă aplicăm sinus-transformata finită a lui Fourier [5]

$$\bar{u}_s=\int_0^1 \bar{u}\sin m\pi\bar{y}\,\mathrm{d}\bar{y}, \tag{87}$$

obţinem în loc de (84) ecuaţia

$$\frac{\partial\bar{u}_s}{\partial\bar{t}}=\frac{\partial^2\bar{u}_s}{\partial\bar{z}^2}+m\pi[(-1)^{m+1}+1]\varphi(\bar{t})-m^2\pi^2\bar{u}_s \tag{88}$$

dacă ţinem, bineînţeles, seama de primele două condiţii (86).
Celelalte condiţii devin

$$\bar{t}=0, \quad \bar{u}_s=0 \tag{89}$$

şi

$$\bar{z}=0, \quad \bar{u}_s=\frac{(-1)^{m+1}+1}{m\pi}\varphi(\bar{t}); \quad \bar{z}=\frac{b}{a}, \quad \bar{u}_s=\frac{(-1)^{m+1}+1}{m\pi}\varphi(\bar{t}). \tag{90}$$

O nouă aplicare a aceleiaşi transformate, de data aceasta în raport cu variabila $\bar{z}$,

$$\bar{u}_{ss}=\int_0^{\frac{b}{a}}\bar{u}_s\sin\frac{n\pi a}{b}\bar{z}\,\mathrm{d}\bar{z}, \tag{91}$$

ne conduce la ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_{ss}}{\mathrm{d}\bar{t}}+\pi^2\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\bar{u}_{ss}=$$

$$=[(-1)^{m+1}+1][(-1)^{n+1}+1]\frac{b}{a}\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{\varphi(\bar{t})}{mn}, \tag{92}$$

care trebuie rezolvată cu condiţia

$$\bar{t}=0, \quad \bar{u}_{ss}=0. \tag{93}$$

Găsim cu ușurință soluția

$$\bar{u}_{ss}=[(-1)^{m+1}+1]\,[(-1)^{n+1}+1]\,\frac{b}{a}\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{mn}\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\pi^2\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \tag{94}$$

iar aplicarea teoremei de inversiune pentru acest gen de transformată finită [5] ne dă

$$\bar{u}=4\sum_m\sum_n\left\{\frac{[(-1)^{m+1}+1][(-1)^{n+1}+1]}{mn}\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\pi^2\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right\}\sin m\pi\bar{y}\sin\frac{n\pi a}{b}\bar{z}, \tag{95}$$

respectiv

$$\bar{v}=4\sum_m\sum_n\left\{\frac{[(-1^{m+1})+1][(-1)^{n+1}+1]}{mn}\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\pi^2\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right\}\sin m\pi\bar{y}\sin\frac{n\pi a}{b}\bar{z}-\varphi(\bar{t}). \tag{96}$$

Pe de altă parte, avem

$$\varphi(\bar{t})=\frac{4\varphi(\bar{t})}{\pi^2}\sum_m\sum_n\frac{[(-1)^{m+1}+1]\,[(-1)^{n+1}+1]}{mn}\sin m\pi\bar{y}\sin\frac{n\pi a}{b}\bar{z} \tag{97}$$

și, prin urmare, putem scrie

$$\bar{v}=4\sum_m\sum_n\frac{[(-1)^{m+1}+1]\,[(-1)^{n+1}+1}{mn}\left[\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\bar{t}}\varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\pi_2(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2})(\bar{t}-\tau)}\,\mathrm{d}\tau-\frac{\varphi(\bar{t})}{\pi^2}\right]\sin m\pi\bar{y}\sin\frac{n\pi a}{b}\bar{z}\,. \tag{98}$$

În cazul în care gradientul de presiune nu depinde de timp, respectiv

$$\varphi(\bar{t})=\mathcal{R}_a\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}\bar{t}, \tag{99}$$

rezultă

$$\bar{v} = \frac{4}{\pi^2}\mathcal{R}_a \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \sum_m \sum_n \frac{[(-1)^{m+1}+1][(-1)^{n+1}+1]}{mn} \frac{e^{-\pi^2\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\bar{t}} - 1}{m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}} \times$$

$$\times \sin m\pi\bar{y} \sin \frac{n\pi a}{b}\bar{z}. \qquad (100)$$

Luînd ca punct de plecare aceste formule, putem calcula cu uşurinţă debitul. De asemenea, extinderea la cazul în care la $t=0$ viteza nu este nulă se poate face fără nici o dificultate.

5. CONCLUZII

Din exemplele tratate rezultă că, atunci cînd forma secţiunii transversale permite acest lucru, aplicarea transformatelor integrale finite conduce pe cea mai simplă cale la soluţiile căutate. Remarcăm şi faptul că deşi apar condiţii la limită dependente de timp, această situaţie nu produce nici un fel de dificultăţi.

Primită la redacţie la 16 decembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. G. ARNAUD, J. L. PEUBE, *Sur l'écoulement instationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans un tube cylindrique infini*, C. R. Acad. Sc. Paris, 268 (1969).
2. T. OROVEANU, P. IONESCU, *Determinarea pierderilor prin spaţiul dintre piston şi cilindru la pompe*, Comunicările Academiei R.P.R., **VI**, 7 (1956).
3. — *Determinarea pierderilor de fluid prin spaţiul dintre piston şi cilindru la pompele de extracţie*, Lucrările Institutului de petrol şi gaze din Bucureşti, **III** (1967).
4. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor viscoase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967, p. 137.
5. I. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1951, p. 74, 80, 83, 85, 87, 90.
6. F. SZYMANSKI, *Quelques solutions exactes des équations de l'hydrodynamique des fluides visqueux dans le cas d'un tube cylindrique*, Proceedings of the 3rd International Congres of Applied Mechanics, Stockholm, I (1930).
7. G. N. VATSON, *Teoriia Besselevth funkţii, Ciast pervaia*, Izdatelstvo inostrannoi literaturi, Moskva, 1949, p. 553.

O METODĂ GRAFO-ANALITICĂ DE DETERMINARE A DIAGRAMEI WEIBULL-ALAN-PLAIT ÎN CAZUL UNEI ÎMPRĂŞTIERI MARI A DATELOR EXPERIMENTALE

de D. PANTAZOPOL şi DUMITRU GHEORGHE

În lucrare se prezintă o metodă grafo-analitică de determinare a pantei şi plasamentului corect al dreptei lui Weibull pe graficul de probabilitate. Metoda este ilustrată printr-un exemplu de calcul furnizat de datele culese din exploatarea autoturismelor Dacia 1100 în perioada de garanţie.

1. INTRODUCERE

Atunci cînd se consideră un eşantion destul de numeros dintr-o populaţie oarecare de echipamente mecanice ale căror fiabilităţi urmează a se determina şi cînd se asigură totodată condiţii de observaţie sau experimentare similare (teoretic identice) pentru fiecare exemplar din eşantion, punctele reprezentative care se obţin de obicei pe diagramele Weibull se înşiră mai mult sau mai puţin în apropierea unei drepte, ce poate fi astfel trasată cu o aproximaţie suficient de bună. Dacă însă dispunem de un număr mic de date şi dacă, în plus, aceste date sînt obţinute direct din exploatare, în condiţii practic necontrolabile, atunci punctele reprezentative pe diagrama Weibull prezintă o împrăştiere relativ mare. În acest caz, dreapta, care pe graficul logaritmic de probabilitate corespunde legii de fiabilitate a echipamentului studiat, nu mai poate fi trasată direct, cu o precizie suficientă.

Această situaţie se întîlneşte foarte des în cazul urmăririi în exploatare a autoturismelor, prin date culese de la diferite unităţi de reparaţii şi întreţinere şi, în mod special, în timpul perioadelor iniţiale şi finale (infantile şi de uzură) ale vieţii de funcţionare, cînd intensitatea medie a căderilor suferă variaţii rapide în funcţie de timp.

În cele ce urmează vom indica o metodă grafo-analitică, foarte simplă în principiu, cu ajutorul căreia se pot determina relativ uşor şi cu o aproximaţie suficient de bună panta şi plasamentul corect al dreptei Weibull pe graficul logaritmic de probabilităţi.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 2, 1972, P. 443–450

2. CONSIDERAȚII GENERALE, DEFINIȚII ȘI PRECIZĂRI

Să considerăm legea lui Weibull de variaţii a *intensităţii momentane a căderilor [1], [2]:*

$$\lambda(x) = \lambda_0 (x - \alpha)^{\gamma - 1}, \tag{1}$$

în care λ este intensitatea de cădere, iar λ_0, α şi γ sînt parametri constanţi. După unii autori [2], α poartă denumirea de *parametru de reper*, iar γ *parametru de formă.* În formula de mai sus s-a notat cu x variabila independentă (timpul, numărul de cicluri, numărul de kilometri parcurşi etc.).

Fie $w(x)$ funcţia de densitate probabilistică. Dacă notăm cu $W(x)$ *funcţia de fiabilitate* (adică probabilitatea ca $W\%$ din echipamentele încercate să fie încă în funcţiune la momentul x), se ştie, [2], [3], că

$$\lambda(x) = \frac{w(x)}{1 - \int_0^x w(x)\,\mathrm{d}x} \tag{2}$$

şi că

$$W(x) = \mathrm{e}^{-\int_0^x \lambda(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{3}$$

Cazul de care ne vom ocupa este cel al unei populaţii oarecare de echipamente mecanice a căror observare începe din momentul zero al funcţionării lor (sau dintr-un alt moment al existenţei lor în stare de funcţionare, care însă se alege, prin convenţie, acelaşi pentru toate exemplarele din populaţia studiată). În acest caz parametrul de reper poate fi anulat şi legea lui Weibull capătă forma

$$\lambda(x) = \lambda_0 x^{\gamma - 1}. \tag{4}$$

Introducîndu-se relaţia (4) în (3) şi efectuînd integrarea, se obţine funcţia de fiabilitate a lui Weibull:

$$W(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_0}{\gamma} x^{\gamma}}. \tag{5}$$

Relaţia (5) poate fi pusă, după cum se ştie, sub forma

$$\ln \cdot \ln \frac{1}{W(x)} = \ln \frac{\lambda_0}{\gamma} + \gamma \ln x. \tag{6}$$

Făcînd notaţiile

$$\ln \cdot \ln \frac{1}{W(x)} = \eta, \quad \ln \frac{\lambda_0}{\gamma} = \xi_0, \quad \ln x = \xi, \tag{7}$$

obţinem următoarea ecuaţie liniară:

$$\eta = \gamma\xi + \xi_0. \tag{8}$$

În loc să calculeze valorile lui ξ şi η pentru fiecare valoare a lui x şi $W(x)$ deduse pe cale experimentală (în laborator sau în exploatare), Alan-Plait construieşte dreapta luînd pe axele coordonate diviziuni logaritmice, la o scară oarecare. În dreptul diviziunilor de pe abscisă el notează direct valorile lui x, iar în dreptul diviziunilor de pe ordonată valorile funcţiei

$$F(x) = 1 - W(x).$$

Este uşor de văzut că această funcţie reprezintă probabilitatea de pană (cădere) sau *defiabilitatea* la momentul x. Ea poate fi calculată (de obicei se tabulează, [4]) în funcţie de mărimea eşantionului ce se extrage din populaţia care se studiază, pentru fiecare loc pe care-l ocupă fiecare echipament „mort" din eşantion, ordonat după valorile crescătoare ale lui x. Din acest motiv fiecare din valorile astfel calculate poartă şi denumirea de *rang mediu*.

Evident, dreapta obţinută în acest fel de Alan-Plait diferă ca înclinare (coeficient unghiular de dreapta (8) trasată în sistemul cartezian ξ, η). Corespondenţa dintre panta obţinută pe graficul logaritmic Alan-Plait şi panta reală γ se face printr-o nomogramă (raportor logaritmic), care se desenează direct pe hîrtia logaritmică pe care se trasează diagrama.

Deoarece utilizarea graficelor Alan-Plait este deosebit de răspîndită fiind foarte comodă, vom considera în cele de mai jos că toate datele obţinute pentru diverse eşantioane sînt figurate pe astfel de diagrame (fig. 1).

3. PUNEREA PROBLEMEI. DESCRIEREA METODEI

Fie un eşantion de n puncte, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, pe care le aranjăm pe graficul logaritmic de probabilitate după metoda cunoscută [3]. Aşa cum se arată în figura 1, aceste puncte nu se înşiră în lungul unei linii drepte, ci prezintă o împrăştiere suficient de mare, pentru ca să nu putem aprecia cu destulă precizie dreapta în jurul căreia se situează.

În scopul determinării într-un mod cît mai simplu a dreptei care să medieze cel mai bine mulţimea celor n puncte, *vom lucra într-un plan de coordonate carteziene*, utilizînd o scară zecimală obişnuită.

Cu alte cuvinte, în locul coordonatelor reale ale fiecărui punct, care sînt variabila x (adică timpul, numărul de cicluri, km parcurşi etc.) şi F (rangul mediu), vom considera coordonatele X_i şi Y_i, pe care le măsurăm pur şi simplu cu o riglă gradată obişnuită, direct pe diagramă, exprimîndu-le într-o unitate de lungime oarecare (cm, mm etc.). Aceasta presupune, evident, că originea axelor planului de coordonate carteziene, suprapus peste planul graficului logaritmic, coincide cu punctul O, iar axele O_x şi O_y ale acestui plan coincid cu axele O_x şi O_F. (De notat că,

în planul graficului logaritmic, în punctul O variabilele x şi F nu se anulează, ci au, funcţie de scara logaritmică aleasă, valori pozitive.)

Aşadar, în noile coordonate, dreapta căutată va avea o ecuaţie de forma

$$Y - Y_0 = g(X - X_0). \tag{9}$$

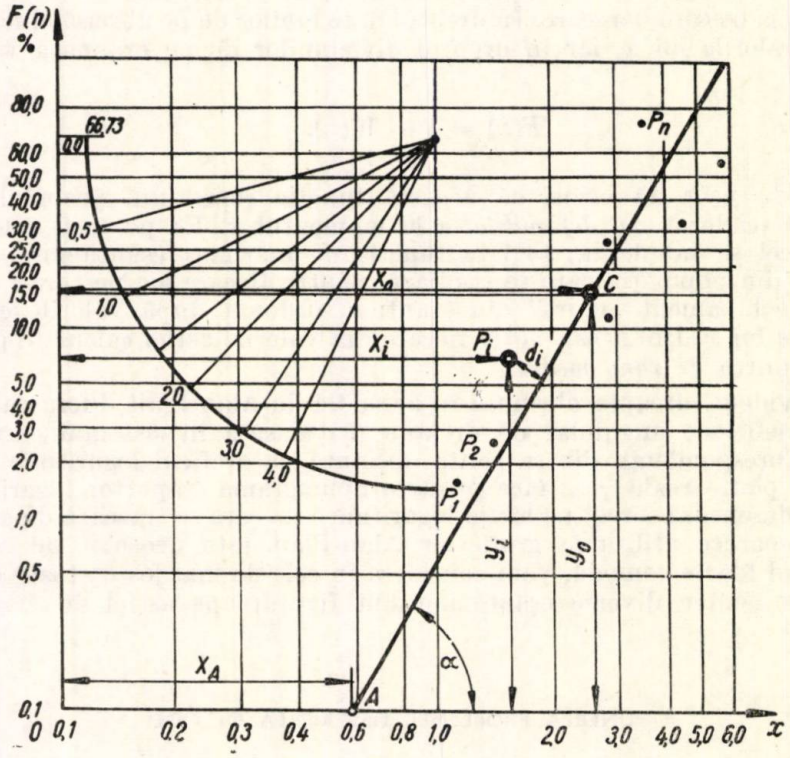


Fig. 1

Este evident că parametrul g, care reprezintă coeficientul unghiular (panta) al dreptei (9) în coordonatele *măsurate* în unităţi zecimale, nu va coincide cu *parametrul de formă* γ, care reprezintă panta dreptei (8), în care ξ şi η sînt date de relaţiile (7).

În (9), X_0 şi Y_0 sînt coordonatele centrului de greutate geometric al sistemului celor n puncte:

$$X_0 = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i; \quad Y_0 = \frac{1}{n}\sum_1^n Y_i. \tag{10}$$

Vom căuta să determinăm dreapta respectivă punînd condiţia ca *suma pătratelor distanţelor* d_i *de la punctele* P_i *la această dreaptă să fie minimă.*

Prin urmare, problema care se pune este următoarea:

Fiind date sistemul de n puncte P_i, să se determine parametrul g (panta) din relaţia (9), astfel încît funcţia

$$S(g) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \tag{11}$$

să fie minimă.

Referindu-ne la figura 1, este uşor de văzut, ţinînd seama că $g = \operatorname{tg}\alpha$, că

$$d_i = (Y_i - Y_0)\cos\alpha - (X_i - X_0)\sin\alpha. \tag{12}$$

Rezultă imediat

$$S(g) = \cos^2\alpha \sum_{1}^{n} (Y_i - Y_0)^2 + \sin^2\alpha \sum_{1}^{n} (X_i - X_0) -$$

$$- \sin 2\alpha \sum_{1}^{n} (X_i - X_0)(Y_i - Y_0). \tag{13}$$

Pentru a afla valoarea unghiului pentru care S este minimă, punem condiţia

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0. \tag{14}$$

Se obţine

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \sum_{1}^{n} (X_i - X_0)(Y_i - Y_0)}{\sum_{1}^{n} (X_i - X_0)^2 - \sum_{1}^{n} (Y_i - Y_0)}, \tag{15}$$

de unde

$$g = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2\alpha}}. \tag{16}$$

Cele două valori ale lui g corespund la două drepte perpendiculare care trec prin C (similare cu axele centrale de inerţie ale unui sistem de puncte materiale). Una din drepte corespunde valorii minime a lui S, iar celelalte valorii maxime. Se va alege, evident, valoarea lui g pentru care S este minimă.

Determinarea parametrului de formă γ se face grafic, cu ajutorul raportului logaritmic al graficului de probabilitate.

În rezumat, determinarea dreptei Weibull-Alan Plait se poate face în felul următor:

— se măsoară în unităţi zecimale coordonatele X_i şi Y_i ale celor n puncte,

— se determină din relaţiile (10) coordonatele centrului geometric de greutate al sistemului,

— se aplică formulele (15) şi (16) pentru determinarea pantei,

— după trasarea dreptei se citeşte pe raportorul logaritmic valoarea γ a parametrului de formă.

Determinarea, în continuare, a duratei medii de funcţionare, a limitelor de confidenţă şi a celorlalte mărimi probabilistice necesare în studiul fiabilităţii populaţiei de echipamente mecanice considerate se va face prin metodele obişnuite indicate în literatură [3].

4. EXEMPLU DE APLICAŢIE

Pentru a ilustra printr-un exemplu metoda prezentată mai sus, vom considera comportarea garniturii (simering) pompei de apă de la autoturismul Dacia 1100 în cursul perioadei de garanţie. Din datele obţinute de la unităţi de întreţinere şi reparaţii prin observarea unui lot de opt autoturisme care au prezentat defecţiuni în perioada de garanţie, şi anume pierderi de lichid în sistemul de răcire prin *uzura simeringului pompei de apă*, s-a extras următorul *eşantion de 8*, ordonat după valorile crescătoare ale numărului de kilometri parcurşi pînă la constatarea penei (căderii):

Tabela 1

Nr. de ordine	Nr. de km (variabila x)	Rangul mediu (variabila F)
1	2 400	0,083
2	2 800	0,201
3	3 200	0,320
4	3 500	0,440
5	4 400	0,560
6	4 700	0,680
7	4 900	0,771
8	5 000	0,906

Rangul mediu se calculează cu ajutorul formulei următoare [3]:

$$F = \frac{J - 0{,}3}{N + 0{,}4} \tag{17}$$

sau se extrage din tabele [3].

Prin măsurare, se obţin următoarele valori, exprimate în mm:

Tabela 2

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	10,5	11,0	11,4	11,7	12,5	12,7	12,8	12,8
Y_i	7,4	8,9	9,7	10,4	10,9	11,4	11,9	12,6

Pe baza lor se calculează

$$X_0 = 11{,}925\,; \qquad Y_0 = 10{,}4. \tag{18}$$

Rezultă

Tabela 3

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
$X_i - X_0$	−1,425	−0,925	−0,525	−0,225	+0,575	+0,775	+0,875	+0,875
$Y_i - Y_0$	−3,0	−1,5	−0,7	0	+0,5	+1,0	+1,5	+2,2

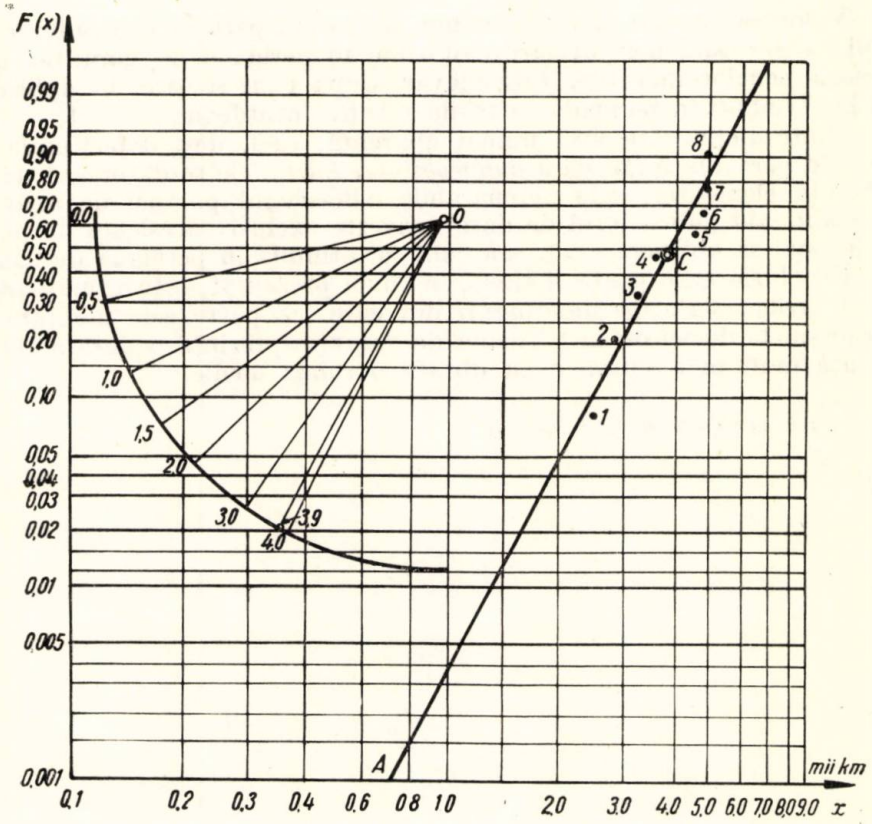


Fig. 2

Cu aceste valori se calculează

$$(X_i - X_0)^2 = 5{,}679,$$
$$(Y_i - Y_0)^2 = 20{,}08,$$
$$(X_i - X_0)(Y_i - Y_0) = 10{,}332.$$

Rezultă, după formula (15),

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -1{,}435.$$

Valoarea căutată pentru g, calculată după (16), este

$$g = 1{,}94.$$

Ducînd prin O o paralelă la dreapta AC (fig. 2), se obţine prin citire directă pe raportorul logaritmic

$$\gamma \simeq 3{,}9.$$

Valoarea ridicată a parametrului de formă pare în contradicţie cu faptul că autoturismele urmărite se aflau în perioada de garanţie, deci în epoca penelor infantile. Într-adevăr, după cum se ştie, în aplicarea legii lui Weibull în perioada infantilă rezultă întotdeauna $\gamma < 1$.

Contradicţia este însă numai aparentă, căci, deşi defecţiunile au apărut în perioada infantilă a *automobilului întreg*, ele se datorează uzurii unuia din elementele sale nereparabile (simeringul pompei de apă) şi, cum *eşantionul* (adică lotul de date) priveşte exclusiv acest tip de piese, este normal să obţinem $\gamma > 1$, aşa cum se întîmplă în perioada de uzură.

Concluzia care poate fi trasă, în cazul prezentat, este următoarea:

Întreaga serie de simeringuri din care fac parte cele montate pe autoturismele defectate în perioada de garanţie prezintă o durată totală de viaţă mult mai redusă decît durata normală medie.

Primită la redacţie la 12 iulie 1971

DIRECŢII DE CERCETARE ÎN PROIECTAREA OPTIMĂ A STRUCTURILOR DE REZISTENŢĂ

de S. RĂUTU şi V. BĂNUŢ
Centrul de mecanică a solidelor

În lucrare se prezintă succint problemele proiectării optime a structurilor de rezistenţă, precum şi metodele utilizate în prezent. Deşi lucrarea are un caracter documentar, prima parte cuprinde punctul de vedere al autorilor în această problemă.
Lucrarea este însoţită de o amplă bibliografie, prin care autorii au căutat să scoată în evidenţă interesul manifestat în această direcţie de cercetătorii din întreaga lume.

Prin însăşi natura sa, activitatea inginerului, ca cercetător sau proiectant, se manifestă prin alegerea, din mulţimea soluţiilor posibile pentru o problemă, a aceleia care corespunde cel mai bine din punct de vedere funcţional cerinţelor producţiei şi care satisface concomitent condiţia de eficienţă economică pentru o etapă dată de dezvoltare a societăţii. Chiar dacă această tendinţă de alegere a soluţiei celei mai indicate nu este exprimată ca atare în fiecare caz în parte, totuşi inginerul, bazîndu-se pe experienţa acumulată şi pe intuiţie, urmăreşte în permanenţă să obţină cea mai eficientă soluţie, considerată optimă pentru momentul respectiv.

În ultimii ani, avînd în vedere cuceririle ştiinţifice în domeniul matematicii, mecanicii, statisticii şi în mod special dezvoltarea calculatoarelor electronice, inginerul caută pe cît îi este posibil să înlăture factorii subiectivi din activitatea de alegere a soluţiei optime. Folosind cu maximum de eficienţă datele furnizate de practică, se urmăreşte să se dea o formă matematică operaţiei de stabilire a soluţiei optime.

Stabilirea soluţiei optime este, în general, o problemă foarte complexă şi necesită trei etape :

— fixarea funcţiei care trebuie optimizată (funcţia de optimizat);

— alegerea condiţiilor care trebuie satisfăcute de proiectul respectiv (condiţiile restrictive);

— stabilirea algoritmului de calcul al soluţiei optime.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 2, 1972, P. 451–472

Fără îndoială că dificultatea cea mai mare o prezintă fixarea funcției de optimizat. Pentru ilustrarea complexității acestei probleme este suficient să se arate că la realizarea unui anumit obiectiv industrial trebuie să se țină seama de un număr mare de factori, care influențează eficiența investiției, dintre care cei mai importanți sînt:

— specificul și caracteristicile procesului tehnologic. În acest sens trebuie avute în vedere atît necesitățile actuale, cît și posibilitatea de schimbare în viitor a procesului tehnologic. În consecință, este necesar să se fixeze perioada pentru care se construiește obiectivul și perioada pentru care se pot prevedea schimbările în structura procesului tehnologic;

— gradul de confort necesar desfășurării procesului tehnologic. Asigurarea unui grad de confort corespunzător permite obținerea de rezultate bune din punct de vedere al productivității muncii, dar exagerările în această direcție au ca efect creșterea prețului de cost al construcției și instalațiilor aferente și deci o perioadă mai mare pentru amortizarea investițiilor;

— soluția constructivă a structurii de rezistență. Se urmărește să se asigure satisfacerea exigențelor procesului tehnologic în condițiile realizării unei construcții de preț minim;

— procesul de realizare a construcției. Prețul de cost al construcției este influențat de dotarea cu utilaje, de numărul de muncitori calificați, de prețul manoperei;

— durata de execuție a construcției. Scurtarea timpului de execuție poate conduce în anumite cazuri la creșterea prețului de cost al execuției, dar această creștere poate fi compensată de valoarea produselor realizate de noul obiectiv în perioada cu care a fost scurtată execuția.

În momentul de față nu există încă suficiente date pentru a putea ataca problema în ansamblul ei, nu există suficiente date statistice pentru fiecare parametru luat separat pentru a putea trece la asamblarea elementelor și obținerea funcției generale de optimizat, din care cauză optimizarea se face pe faze (proces tehnologic, proiectarea construcției, organizarea șantierului etc.).

Nivelul actual al cunoștințelor în acest domeniu reprezintă o bună bază pentru ca într-un viitor nu prea îndepărtat să se poată obține funcții de optimizare din ce în ce mai generale.

Celelalte operații ale procesului de optimizare — fixarea condițiilor restrictive și stabilirea algoritmului de calcul — ridică la rîndul lor probleme destul de dificile. Este evident că aceste dificultăți depind de tipul problemei și ele pot fi mai ușor depășite decît acelea impuse la stabilirea funcției de optimizare.

*

În prezentul articol ne propunem să abordăm problema optimizării unei singure faze, și anume problema determinării soluției optime a structurilor de rezistență utilizate în construcții, comentînd direcțiile urmate pentru stabilirea acestor soluții pînă în prezent, și în special să prezentăm în lista bibliografică principalele lucrări apărute în acest domeniu.

*

Problema optimizării structurilor de rezistență apare ca atare odată cu cristalizarea metodelor de calcul ale mecanicii construcțiilor (începînd din secolul XVII).

Forma sub care se caută în general soluția optimă este construcția de egală rezistență. Cunoscînd forma structurii, iar solicitările exterioare fiind date, se urmărește să se stabilească dimensiunile secțiunilor transversale ale elementelor componente astfel încît să se obțină în orice secțiune eforturi unitare maxime egale cu eforturile admisibile [1], [2], [6], [7], [14], [19], [26].

Rezolvarea dată unor probleme simple arată cel mult o cale de cercetare, însă nu rezolvă eficient problema. De exemplu, în lucrarea [14] se arată că bara de egală rezistență la încovoiere nu este utilizabilă, deoarece dimensiunile secțiunilor transversale de pe reazeme rezultă egale cu zero.

De asemenea, condiția de egală rezistență, deși permite stabilirea modulului de rezistență, nu dă o indicație asupra formei secțiunii.

Prin această metodă, în cazul grinzilor cu zăbrele de egală rezistență nu se poate stabili întotdeauna concomitent poziția nodurilor și deci a barelor și nici mărimea secțiunii.

Problema construcțiilor de egală rezistență a fost continuată de școala lui I. M. Rabinovich, care studiază problemele referitoare la grinzile cu zăbrele, grinzile continue și la arce [37], [46]. Metoda folosită este transformarea structurilor static nedeterminate în structuri static determinate prin stabilirea poziției secțiunilor de efort nul.

Studiile întreprinse, deși interesante din punct de vedere teoretic, nu se pot aplica decît unui număr mic de cazuri. Trebuie remarcat însă faptul că s-a enunțat o serie de teoreme generale referitoare la această problemă, dintre care cea mai interesantă este aceea care afirmă că o structură de egală rezistență conduce la o structură de greutate minimă.

Proiectarea structurilor de egală rezistență fiind foarte laborioasă, s-au căutat criterii mai generale și eventual mai puțin restrictive pentru determinarea structurilor optime.

O metodă mai des utilizată este metoda criteriului energiei potențiale minime în condițiile unui volum constant de material. Problema poate fi pusă și sub altă formă, și anume se caută structura de rigiditate maximă în condițiile unui volum constant de material [94], [121], [122], [257], [276].

În cazul corpurilor omogene și izotrope, lucrînd în domeniul elastic se obține o problemă de programare neliniară cu condițiile restrictive date de limitarea eforturilor unitare în secțiuni. Soluția acestei probleme se caută să se obțină sub formă numerică, punînd condițiile-limită într-un număr limitat de puncte.

Soluțiile obținute pentru calculul structurilor în domeniul elastic fiind foarte complicate, mulți cercetători, printre care W. Prager, J. Foulkes, J. Heyman, au arătat avantajele calculului capacității portante a structurilor.

Considerînd relațiile liniare dintre greutatea unei structuri și capacitatea de rezistență a secțiunilor transversale, se determină pentru o structură de dimensiuni date momentul plastic al elementelor în condiți-

ile realizării greutății minime concomitent cu atingerea capacității portante [58], [67], [68], [73], [91], [148], [266], [248], [366].

În acest mod se obține o problemă liniară care se rezolvă cu ajutorul metodei Simplex [103], [245], [358].

Se constată că structura de greutate minimă conduce la structura de egală rezistență în ipoteza că numărul punctelor în care se pun condițiile-limită este suficient de mare.

Din cele arătate mai sus rezultă că, în general, problema optimizării soluțiilor s-a referit la structuri a căror schemă este cunoscută. Realizarea unei structuri optime presupune, în primul rînd, alegerea celei mai bune configurații a structurii. Această problemă este deosebit de complexă și ea a fost rezolvată doar pentru cazuri simple — grinzi cu zăbrele și grinzi continue — de școala poloneză condusă de Wasiutynski [55], [56].

În același sens au fost întreprinse și alte cercetări pentru diferite cazuri particulare [239], [253], [258], [295].

Criteriile de alegere a formei structurii depind de condițiile ce trebuie satisfăcute de construcții în timpul exploatării. Oricare dintre criterii poate avea o influență hotărîtoare asupra rezultatului final, ceea ce conduce la concluzia că nu există un criteriu absolut de proiectare optimă, valabil pentru toate cazurile de structuri și pentru orice condiții restrictive.

Căile urmate în proiectarea optimă sînt foarte diverse și ele se referă la o gamă mare de aspecte. Dintre aceste aspecte în continuare sînt amintite următoarele :

— cazul structurilor de poduri și al structurilor de construcții industriale supuse acțiunii unor sarcini mobile la care optimizarea soluțiilor s-a căutat prin aplicarea principiului energiei totale minime [315], [318], [321], [322];

— optimizarea structurilor supuse la acțiunea sarcinilor seismice la care soluția s-a căutat prin limitarea primei frecvențe a vibrațiilor proprii sau prin limitarea săgeților maxime admisibile [289] — [292], [294] — [296].

— optimizarea proiectării structurilor la care poate apărea fenomenul de pierdere a stabilității. Și aici s-au căutat soluții care conduc la determinarea sarcinii maxime în condițiile unui volum constant de material [257], [330], [333].

— optimizarea structurilor de beton armat (structuri formate din două materiale). Această problemă a căpătat o deosebită amploare în ultimul timp și în special în problema optimizării soluțiilor la elementele sau structurile precomprimate sau postcomprimate [334], [340], [343], [352].

*

Proiectarea structurilor optime a devenit în prezent o ramură a mecanicii construcțiilor, care permite realizarea unor structuri raționale, sigure și economice.

Desigur, mai sînt încă probleme de studiat în acest domeniu, însă considerăm că în stadiul actual nu se mai poate vorbi despre o proiectare rațională fără un studiu de optimizare. Numărul mare de lucrări apărute

în ultimii ani în întreaga lume indică interesul general, real, privind această latură a proiectării prin consecințele economice și practice pe care le are.

Este absolut necesar să se observe că proiectarea optimă, sub diversele ei aspecte, nu trebuie confundată cu proiectarea obișnuită, că nu o exclude pe aceasta din urmă, ci o completează, prin aceea că proiectarea optimă precedă proiectarea obișnuită, oferindu-i datele necesare referitoare la forma și dimensiunile structurii în ansamblu, precum și la forma sau dimensiunile secțiunii transversale a elementelor.

Problema optimizării soluțiilor este deosebit de complexă și implică depășirea multor dificultăți, însă rezolvarea problemei generale va putea fi realizată în condițiile existenței calculatoarelor electronice de mare capacitate.

★

La întocmirea bibliografiei s-au folosit titlurile de articole și cărți consultate de autori, lucrările bibliografice [235], [410], lucrarea bibliografică prezentată de Brandt A. la conferința PTMTS ce a avut loc în Republica Populară Polonă la Gliwice-Szczyrk în 1967, precum și recenziile din Applied Mechanics Reviews și Referativnîi Jurnal.

Pentru lucrările la care s-au găsit și scurte prezentări în diferite reviste, au fost indicate și aceste reviste (de exemplu, la lucrarea [280], în afara revistei care a publicat această lucrare, s-a indicat și revista ce conține recenzia, și anume AMR 17 (1964), Rev. 2574).

Primită la redacție la 6 februarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Galileo Galilei Linceo, *Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno, a due nuove scienze atteneti alla mecanica et i movimenti locali*, Leida 1638.
2. F. Blondel, *Epistola ad P. Wurtius in qua famosa Galilei propositio discutitur circa naturam lineae qua trabes secari debeant ut suit aequalis ubique resistentiae et in qua lineam illam non quidem parabolicam ut Galiloeus arbitratus est, sed ellipticam esse demonstratum*, Data Parisiis 1661.
3. A. Marchetti, *De resistentia solidirum*, 1669.
4. Johan Bernoulli, *Letter to Leibnitz on the beams of uniform strength*, 1687.
5. P. La Hire, *Remarques sur la forme de quelques arcs dont on se sert dans l'architecture*, Mem. Acad. Roy. Sci., 1702.
6. A. Parent, *Des resistances des poutres... et des poutres de plus grande resistance, independemment de tout systeme physique*, Mém. Acad. Roy. Sci. 1708.
7. — *Des points de la rupture des figures. D'en déduire celles qui sont partout d'une resistance égal...*, Mem. Acad. Roy. Sci. 1710.
8. A. Marchetti, *Lettera nella si ribattono l'ingiuste accuse dati dal*, P.D.G.G., 1711.
9. J. L. Lagrange, *Sur la figure des collonnes*, Miscellanea Taurinensia 1770—1773.
10. — *Sur la force des Ressorts pliés*, Mem. Acad. Berlin, 1771.
11. E. M. Gauthey, *Mémoire sur l'application de la mecanique a la construction des voûtes et des dômes*, 1772.
12. C. A. Coulomb, *Mémoires sur la stabilité des voûtes*, Acad. des Sciences 1776.
13. P. S. Girard, *Traité analitique de la résistance des solides et des solides d'égale resistance*, 1798.
14. T. Young, *Cours of Lectures on Natural Philosophy*, 1807.
15. J. B. Bérard, *Théorie de l'équilibre des voûtes*, 1810.
16. J. T. R. Robinson, *Mechanical Philosophy*, 1822.
17. — *Description of Col. Long's bridges, together with a series of directions to bridge builders*, Philadelphia. 1841.

18. P. J. Ardant, *Nouvelles recherches sur le profil de revêtement le plus économique*, 1848.
19. J. Séguin, *Ann. Ponts et Chausse*, 1851.
20. P. W. Schwedler, *Z. Bauwesen* 1851—1859; ZVDI 1859—1880.
21. A. J. Morin, *Résistance des Matériaux*, 1853.
22. F. A. Pauli, *Grosshesseloher Brücke uber die Isar*, 1853.
23. Y. Villarceau, *Sur l'établissement des arches de pont envisagé au point de vue de la plus grande stabilité*, 1853.
24. J. A. C. Bresse, *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des piéces courbes*, 1854.
25. A. Fink, *Allgemeine Betrachtungen über die Biegungsfestigkeit und Biegungswiderstand zur Erzielung eines einheitlichen Standpunktes für Beurteilung verschiedener Brücken-Systeme*, Z. Ost. Ing. Ver. 1860.
26. B. de St. Venant, *Notes et appendices, au résumé des leçons sur application de la mécanique de Navier*, 1864.
27. K. Culmann, *Die Graphische Statik*, 1866.
28. P. Barlow, *A treatise on the strength of materials*, 1867.
29. M. Levy, *La statique graphique et ses applications aux constructions*, 1873.
30. A. G. M. Michell, *The limit of economy of material in frame structures*, Phil. Mag, **6**, *8*, 589—597 (1904).
31. S. I. Belzecki, *Linear elastic arch of uniform strength*, S.P.B. 1904.
32. S. Miller, *Proceedings of the conferences of the Engineering Association*, Warsaw Technical University 1919.
33. S. Kaufman, *Graphical determination of the form of special lattice trusses*, Lwow 1920.
34. I. Shtayerman, *A uniform strength beam subjected to bending*, Proc. KPI. 1928.
35. V. C. Blinov, *The problem of rational design of vaults*, Proc. Leningrad Inst. Inzh. Put. Sob. 1929.
36. V. I. Rudnev, *The rational form of a continuous elastic arch in the light of modern methods of construction*, Proc. MIIT. 1930.
37. I. M. Rabinovich, *On the theory of statically indeterminate lattices Centr*, Inst. Transp. Stroit 1933.
38. W. Swida, *Über die Form eines Pfeilers gleicher Festigkeit bei gleichzeitiger Druck und Biegebeanspruchung*, ZAMM p. 378. 1934.
39. N. G. Chentsov, *Minimum weight struts*, Proc. CLGI 1936.
40. K. Ludwig, *Über Träger mit Eigengewicht und gleichem Widerstand gegen Biegung*, ZAMM 1936.
41. O. Zanaboni, *Atti Acad*, Lincei *25*, 117—121, 535—601, 1937.
42. Z. Wasiutynski, *The strength design*, Acad. Tech. Sci. Warszawa 1939.
43. D. S. Sikorski, *Bent heavy beams of uniform strength*, Vestnik Inzhem. Tekh. 1941.
44. J. Drymael, *The design of trusses and its influence on weight and stiffness*, J. Roy. Aeronaut. Soc. 46, 297—308, 1942.
45. H. L. Cox şi H. E. Smith, *Structures of minimum weight*, Aeronaut, Res. Comm., Rep. Memor. nr. 1923, 1943.
46. I. M. Rabinovich, *Analysis of continuous beams on rigid and elastic foundation by the method of prescribed moments and stresses*, Issl. Teor. Sooruj. 1946.
47. Yu. A. Radtsig, *On the determination of minimum volume of statically indeterminate trusses*, Proc. Kazan. Aviat. Inst 17, p. 55—59, 1946.
48. K. G. Protasov, *Determination of statically indeterminate bridge lattices with consideration of plastic strains*, Transgeldorisdat 1947.
49. K. M. Khuberyan, *The stress method*, Issl. Teor. Sooruj. 1949.
50. Yu. A. Radtsig, *Solution of a system of algebric linear equations by methods of multidimensional geometry*, Proc. Kazan. Aviat. Inst. 23, 1949.
51. A. R. Rzhanitsyn, *The problem of theoretical weight of bar structures*, Issl. Teor. Sooruj. 4, 1949.
52. V. M. Vakhurkin, *The most convenient form of double-tee beams*, Bull. Stroit. Tekh. 1949.
53. A. I. Vinogradov, *Problem of the design of roof structures for prescribed stresses*, MIIT 1949.
54. A. F. Smirnov, *Bars and arches of minimum weight subjected to bending*, Proc. MIIT 1950.
55. Z. Wasiutynski, *Transformation of lattices by introducing new nodes Jubilee book of M. T. Huber*, Gdansk 1950.
56. Z. Wasiutynski, *Transformation of lattices by introducing new bars*, Inzyn Budoum. *11* (1950).

57. A. N. Filin, *Rational design of bridge beams*, Proc. Khabarovsk Inst. Zhelezn. Trans. 1951.
58. J. Heyman, *Plastic design of beams and plane frames for minimum material consumption*, Quart. Appl. Math. 8, 1951; AMR 4 (1951), Rev. 2889.
59. K. M. Khuberian, *Analysis of crossed lattices for immobile load by the method of stress*, Issl. Teor. Sooruj, *5* (1951).
60. Yu. A. Radtsig, *Analysis of statically indeterminate lattices by the minimum volume method*, Proc. Kazan. Aviat. Inst. *25* (1951).
61. V. M. Vakhurkin, *The form of double-tee beams with the condition of minimum cost*, Vestnik Inzhen. Tekh. 1951.
62. A. I. Vinogradov, *Some invariants of statically indeterminate system and their application to rational design Proc*, Khark. Inst. Inzhen. Zhelezn. Transp. 1951.
63. Z. Wasiutynski, *Design of column cross section*, Arch. Mech. *3*, p. 345—370 (1951).
64. F. R. Shanley, *Weight-strength analysis of aircraft structures*, McGraw-Hill Book Co. Inc. N. Y. 1952; AMR 6 (1953).
65. F. I. Slyusarchuk, *Design of statically indeterminate beams of uniform strength*, 1952.
66. — *Rational design of statically indeterminate trusses by the method of prescribed stresses*, Proc. Novosibirsk. Inst. Inzhen. Zhelen. Trans. *8*, 34—71 (1952).
67. J. Foulkes, *Minimum weight design and the theory of plastic collapse*, Quart. Appl. Math. **10**, *4*, 347—358 (1953); AMR 6 (1953) Rev. 2787.
68. J. Heyman, *Plastic design of plane frames for minimum weight*, Struct. Engr. **31**, *5*, 125—129 (1953), AMR 7 (1954) Rev. 768.
69. V. A. Kiselev, *Rational forms of arches and suspended systems*, 1953.
70. B. Kopycinski, *Dimensioning of a pre-tensioned concrete beam from the economical point of view*, Inzyn. Budown, *11* (1953).
71. Yu. A. Radtsig, *Symetric properties of mirror function*, Proc. Kazan. Aviat. Instit. *28*, 109—134 (1953).
72. Z. Brzoska, *Symmetrically loaded circular plates of uniform strength*, Arch. Budowy. Maszyn. **1**, *3* (1954).
73. J. Foulkes, *The minimum weight design of structural frames*, Proc. Roy. Soc. London (A) 223, 482—494, 1954; AMR 8 (1955), Rev. 75.
74. A. S. Grigoriev, *Plates of uniform strength for bending*, Lectures at the conference of applied mechanics problems Akad. Nauk. SSSR, 1954.
75. Ya. I. Gurevich, *Problems of rational variability of the cross sections of statically indeterminate bar system*, Proc. Khabarovsk. Instit. Zhelezn. Transp. 1954.
76. Y. Guyon, *Béton précotraint*, Eyrolles, Paris 1954.
77. S. Kaufman, *Determination of the form of a continuous prestressed beam with straight cable*, Inzyn. Budown, *4* (1954).
78. E. P. Klavin, *Rational form of stone arches*, Gosudar. Univ. Rigal 1954.
79. I. M. Rabinovich, *Textbook of structural mechanics of bar systems*, Part II, 2nd ed. 1954.
80. R. G. Robertson, *Prestressed concrete beams: the economical shape of section*, Proc. Inst. Civil. Engrs. part III, *1* (1954); AMR 8 (1955), Rev. 636.
81. N. A. Serov, *Computation methods of statically indeterminate lattices with condition of minimum weight*, 1954.
82. A. I. Vinogradov, *Some problems of analysis of bar systems with given stresses*, Issl. Teor. Soorj. *6* (1954).
83. — *Statical indetermination of bar systems of minimum weight*, Issl. Teor. Sooruj. *6* (1954).
84. A. V. Alexandrov, *Another proof of a theorem of the prescribed stresses method*, Proc. Novosibirsk. Inst. Inzh. Zhelez. Transp, 1955.
85. T. Hop, *The influence of geometric and mechanical qualities of a cross section on the economy of prestressed structures* (doctor's thesis), Gliwice 1955.
86. H. G. Hopkins şi W. Prager, *Limits of economy of material in plates*, J. Appl. Mech. *22*, 372—374 (1955); AMR 9 (1956), Rev. 2157.
87. V. A. Kiselev, *Some problems of the theoretical form of a beam of uniform strength for bending, with consideration of its own weight*, Proc. Moskov. Avtom. Dorozh. Instl. 1955.
88. V. G. Lozhkin, *The rational form of rolled steel beams*, 1955.
89. J. Mames, *Design of the axes of posttensioned cables in prestressed concrete beams*, Inzyn. Budown. *5* (1955).
90. E. T. Onat şi W. Prager, *Limits of economy of material in shells*, Ingenieur *10* (1955).

91. W. PRAGER, *Minimum weight design of plates*, Ingenieur 67, 141—142, 1955; AMR9 (1956), Rev. 1095.
92. F. I. SLYUSARCHUK, *Investigation of the volume of statically indeterminate lattices carrying a single load system*, Proc. Novosibirsk. Inst. Inzh. Zhelezn. Transp. 1955.
93. — *A contribution to the problem of existence of statically indeterminate lattices of uniform strength*, Proc. Novosibirsk. Inst. Inzh. Zhelezn. 1955.
94. A. I. VINOGRADOV, *Problems of the analysis of minimum weight structures*, Proc. Khrak. Kirov's Inst. Inzh. Zhelezn. Transp. *25*, 1—173 (1955).
95. A. I. VINOGRADOV, *Problems of the design of structures for minimum weight*, Proc. Khabarovsk. Inst. Zhelezn. Transp. 1955.
96. D. C. DRUCKER şi R. T. SHIELD, *Design for minimum weight*, Proc. 9th. Internat. Congr. Appl. Mech. Brusselsl, 1956.
97. W. FREIBERGER şi B. TEKINALP, *Minimum weight design of circular plates*, J. Mech. Phys. Solids 4, 294—299, 1956. AMR *10* (1957), Rev. 420.
98. W. FREIBERGER, *Minimum weight design of cylindrical shells*, J. Appl. Mech. *23*, 576—580 (1956).
99. G. GERARD, *Minimum weight analysis of compression structures*, N. Y. Interscience Publishers, 1956; AMR *10* (1957) Rev. 695.
100. A. V. IZRAELIT, *The existence of positive solutions in the computation of statically indeterminate beams and frames by the method of prescribed forces*, Proc. Vsesoyuz. Zaoch. Lesotekh. Inst, *2*, 136—138 (1956).
101. — *Analysis of statically indeterminate thinwalled structures by the method of prescribed forces and stresses*, Proc. Vsesoyuz. Zaoch. Lesotekh. Inst, *2*, 167—183 (1956).
102. S. KAUFMAN, *Rational design of prestressed bent cross sections*, Inzyn. Budown, *4* (1956).
103. R. K. LIVESLEY, *The automatic design of structural frames*, Quart. J. Mech. Appl. Math, *9*, 257—278 (1956).
104. W. PRAGER, *Minimum-weight design of a portal frame*, Proc. Amer. Civil Engrs, *82*, 1073 (1956).
105. YU. A. RADTSIG, *Analysis of statically indeterminate trusses subjected to live load*, Proc. Kazan. Aviat. Inst, *32*, 3—43 (1956).
106. YU. A. RADTSIG, *Application of the minimum volume method to analysis of statically indeterminate beams*, Proc. Kazan. Aviat. Inst, *32* (1956).
107. Z. WASIUTYNSKI, *Determination of the arch rise-to-span ratio in combined arch systems* Inzyn. Budown. *2* (1956).
108. — *Fundamental relations of strength design*, Arch. Inzyn. Ladowej, **2**, *1* (1956).
109. — *Methods of strength design*, vol. 1, Podst. Probl, Wspolcz. Tech. PWN, Warszawa, 1956, 49—110.
110. A. BRANDT şi Z. WASIUTYNSKI, *Strength design of prestressed concrete plates*, Inzyn. Budown. *2* (1957).
111. A. BRANDT, Z. WASIUTYNSKI şi J. KOSMOWSKI, *On the transformation of trusses by the displacement of a nonloaded node with three bars* (in Polish), Rozpr. Inzyn. **5**, *2*, 157—205 (1957); AMR *11* (1958), Rev. 2113.
112. D. C. DRUCKER şi R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight design, Quart*, Appl. Math. **15**, *3*, 269—281 (1957); AMR *11* (1958), Rev. 2125.
113. W. FREIBERIGER, *On the minimum weight design problem for cylindrical sandwich shells*, J. Aeronaut. Sci. *24*, 847—848 (1957); AMR *11* (1958), Rev. 3078.
114. A. V. IZRAELIT, *Regular analysis of continuous beams* (in Russian), Tekh. Inform. LTA, *46*, 29—32 (1957).
115. S. KAUFMAN, *Design of prestressed bend cross sections with the use of full eccentricity* (in Polish), Inzyn. Budown. *1* (1957).
116. B. KOPYCINSKI, *Economic design of prestressed beams* (in Polish), Zesz. Nauk. Pol. Krak., Budown Ladowej *1*, 7—17 (1957).
117. J. MAMES, *Design and analysis of a continuous prestressed beam* (in Polish), Arch. Inzyn. Ladowej **3**, *4*, 487—515 (1957).
118. M. SH. MIKELADZE, *On the minimum weight of anisotropic shells*, Proc. Akad. Nauk. GSSR, **19**, *1* (1957).
119. E. T. ONAT, W. SCHUMANN şi R. T. SHIELD, *Design of circular plates for minimum weight*, J. Appl. Phys. (ZAMP), **8**, *6*, 485—499 (1957).
120. YU. I. KUZNECOV, *Bar of uniform strength subject to beding* (in Rusian), Information of Inst. Stroit. Mekh., Akad. Nauk USSR, 1957.
121. A. I. VINOGRADOV, *Some properties of systems of given geometrical scheme* (in Rusian), Iss Teor. Sooruzh. *7*, 365—371 (1957).

122. — *Computation of systems in the form of a closed contour with given stresses* (in Rusian), Issl, Teor. Sooruzh. *7*, 373—400 (1957).
123. Z. Wasiutynski, *Arranging of internal forces systems as main tendency in the development of arch concrete bridges* (in Polish), Inzyn. Budown. *1*, 8—10 (1957).
124. A. Brandt, *Design of prestressed beams* (in Polish), Inzyn. Budown, *1* (1958).
125. A. Brandt şi J. Ignaczak, *The form of a cantilever beam* (in Polish), Rozpr. Inzyn, **6**, *1*, 167—180 (1958).
126. H. L. Cox, *The theory of design*, Aero. Res. Council, Rep., *19791* (1958).
127. — *Structures of minimum weight: the basic theory of design applied to the beam under pure bending*, Aero, Res. Council, Rep., *19785* (1958).
128. D. C. Drucker, *On minimum weight design and strength of nonhomogeneous plastic bodies*, Proc. Symposium IUTAM, Warsaw 1958, 139—146.
129. S. Kh. Gaynullina, *Analysis of statically indeterminate beams and frames of minimum weight* (in Rusian), Proc. Kazan Aviat. Inst., *33—34*, 439—459 (1958).
130. W. S. Hemp, *Theory of structural design, College of Aeronautics, Cranfield*, England, Rep. *115*, 1958; AMR 12 (1959), Rev. 5580.
131. J. Heyman, *Minimum weight of frames under shakedown loading*, Ing. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. (J. Engng. Mech. Div.), 1958; AMR 12 (1959), Rev. 2410.
132. H. H. Hilton, *Minimum weight analysis for combined loads based on probability of failure*, Hughes Aircraft Company Rep. S.F. 1, *3—16* (1958).
133. A. V. Izraelit, *Method of prescribed stresses and diplacements for statically indeterminate beams and frames* (in Rusian), Proc. Vsesoyouz. Zaoch. Lesotekh. Inst., *3*, 67—80 (1958).
134. Z. Mroz, *The load-carrying capacity and minimum weight design of annular plates* (in Polish), Rozpr. Inzyn. **6**, *4*, 603—626 (1958); AMR 13 (1960), Rev. 626.
135. — *On the design of nonhomogeneous technically orthotropic plates*, Proc. Symposium IUTAM, Warsaw, 1958, 191—202.
136. W. Prager, *On a problem design, of optimal design*, Proc. Symposium IUTAM, Warsaw, 1958.
137. Yu. A. Radtsig, *Minimum volume method and its application to the analysis of statically indeterminate bar structures in engineering mechanics* (in Rusian), Proc. Kazan. Gorki's Sielskokhoz. Inst., *37*, 101—114 (1958).
138. — *Basic assumptions of the theory of mirror functions* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *33—34*, 139—199 (1958).
139. W. Starosolski, *Design of prestressed beams subjected to bending with consideration of all the programmed loads* (in Polish), Arch. Inzyn. Ladowej 4, *3* (1958).
140. Z. Wasiutynski, *Plate bridges* (in Polish), Min. Gosp. Kom., 1958.
141. Z. Zielinski, *Problems relative to the design and use of economical prestressed concrete beams*, Proc. 3rd Congress FIP, Berlin, ser. III, *17* (1958).
142. V. P. Borisov, *On the analysis of continuous beams of uniform strength subjected to bending* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *46*, 95—105 (1959).
143. — *On the analysis of frames of uniform strength to bending* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *46*, 107—112 (1959).
144. S. Kh. Gaynullina, *On the problem of verification of the stability of frames of uniform strength to bending* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *46*, 113—119 (1959).
145. — *Approximate method of analysis of minimum volume waves* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *46*, 67—74 (1959).
146. — *On the problem of limits of the sectional surfaces near the zero-values of bending moments* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *46*, 35—43 (1959).
147. A. S. Grigorev, *On plates of uniform strength subjected to bending* (in Russian), Inst. Mech. Acad. Nauk USSR, Inzhen. Sbornik, *25* (1959); AMR *14* (1961), Rev. 6555.
148. J. Heyman, *On the absolute minimum-weight design of framed structures*, Quart. J. Mech. Appl. Math., *12*, 314—324, (1959); AMR *13* (1960), Rev. 3997.
149. — *Inverse design of beams and grillages*, Proc. Instn. Civil Engrs., *13* (1959); AMR *13* (1960), Rev. 5668.
150. Su. Hsuan-Loh, *Statistical approach to structural design*, Proc. Instn. Civil Engrs., *13* (1959); AMR *13* (1960), Rev. 5186.
151. Hu. T. C., şi R. T. Shield, *Uniqueness in the optimum design of structures*, Brown University Tech. Rep. DA-4795/2, 1959.
152. J. Ignaczak, *The spans of cantilever beams designed with the conditions of equalized stresses* (in Polish), Rozpr. Inzyn., **7**, *2*, 181—189 (1959); AMR 16 (1963), Rev. 1533.

153. S. KAUFMAN şi T. HOP, *A study of rational design of the cross section of a prestressed beam* (in Polish), Arch. Inzyn. Lad., *5*, 1 (1959).
154. S. KRISHNAN şi K. V. SHETTY, *On the optimum design of an I section beam*, J. Aero-Space Sci., *26* (1959); AMR *13* (1960), Rev. 2741.
155. M. SH. MIKELADZE, *Weight and strength analysis of orthotropic rigid-plastic shells* (in Rusian), Arch. Mech. Stos., **11**, *1* (1959); AMR *15* (1962), Rev. 106.
156. W. PRAGER, *Dimensionnement plastique et économie des matériaux Bull*, Centre Etudes Rech. Essais Sci. Genie Civil, Liege, *10* (1959).
157. W. PRAGER şi K. T. SHIELD, *Minimum weight design of circular plates under arbitrary loading*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), **10**, *4*, 421—426 (1959).
158. YU. A. RADTSIG, *Analysis of a minimum volume truss with numerous redundant members, subjected to mobile concentrated forces* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *46*, 45—65 (1959).
159. — *Properties of application of limits of the dimensions of cross-section analysis of statically indeterminate trusses* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *46*, 15—33 (1959).
160. J. R. ROBINSON, *Cours de béton précontraint*, Dunod, Paris 1959.
161. W. STAROSOLSKI, *Prestressed continuous beams with variable moment of inertia-the choice of the force* (in Polish), Arch. Inzyn. Ladowej 5, *3* (1959).
162. — *Design of prestressed continous beams with variable moment of inertia and variable prestressing force* (in Polish), Arch. Inzyn. Ladowej 5, *4* (1959).
163. — *The bending of cables in a prestressed beam with consideration of all the possible states of a loading* (in Polish), Inzyn. Budown, *10* (1959).
164. V. G. VASILIEV, *On the most convenient variation of cross section in arches of uniform strength* (in Rusian), Stroit., *1*, 111—118 (1959).
165. A. I. VINOGRADOV, *On the problem of analysis of bar structures of minimum weight* (in Rusian), Issl. Teor. Sooruzh. *8*, 499—521 (1959).
166. — *Consideration of own weight in bar structures with prescribed stresses* (in Rusian), Issl. Teor. Sooruzh., *8*, 523—534 (1959).
167. Z. WASIUTYNSKI, *Arch bridges* (in Polish), PWN, Warsawa, 1959.
168. V. K. YURIEV, *On the problem of theoretical form of a bar of uniform bending strength* (in Rusian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *46*, 87—94 (1959).
169. A. BIERNAWSKI şi B. GROCHOWSKI, *Minimum potential design of a lattice* (in Polish), Rozpr. Inzyn., **8**, *2*, 137—165 (1960); AMR *14* (1961), Rev. 1936.
170. A. BRANDT, *The design of prestressed beams by equalizing the extremal stresses* (in Polish), Rozpr. Inzyn., **8**, *2* (1960).
171. — *Détermination de la forme des poutres précontraintes Bull*, Acad. Polonaise Sci. Ser. Sci. Tech., **8**, *5*, 219—224 (1960).
172. G. EASON, *The minimum weight design of circular sandwich plates*, ZAMP *11*, 368—375 (1960); AMR 14 (1961), Rev. 4674.
173. J. GRYCZ, *On the transformation of a four-node structure by exchanging bars* (in Polish), Rozpr. Inzyn., **8**, *1*, 31—43 (1960); AMR *14* (1961), Rev. 1397.
174. H. H. HILTON şi M. FEIGEN, *Minimum weight analysis based on structural reliability*, J. Aerospace Sci., **27**, *9*, 641—657 (1960); AMR *14* (1961), Rev. 2464.
175. T. C. HU, *Optimum design for structures of perfectly-plastic materials*, Ph. D. Thesis, Brown University, 1960.
176. J. KAPKOWSKI, *A panel of uniform strength loaded with a concentrated force* (in Polish), Arch. Budowy Maszyn 7, *1* (1960).
177. K. M. KHUBERYAN, *Stresses in statically indeterminate truss of minimum weight analyzed on several loading systems* (in Rusian), Izv. Akad. Nauk, SSSR, Otd. Tekh. Nauk, Mekh. i Mashinostr. *3*, 24—29 (1960).
178. J. KOSMOWSKI, *The determination for minimum potential of a bar system in a four-node lattice field* (in Polish), Rozpr. Inzyn., **8**, *1*, 3—30 (1960).
179. S. LUKASIEWICZ, *Circular plates of uniform strength under the axialy symmetrical load*, Arch. Budowy, **7**, *1* (1960).
180. Z. MROZ, *On a problem of minimum weight design*, Brown University, 1960; AMR *14* (1961), Rev. 661.
181. YU. A. RADTSIG, *On the problem of the design and the analysis of trusses* (in Rusian), Proc. Gorki's Kazan. Agr. Inst. Part. III, **42**, 165—174 (1960).
182. YU. A. RADTSIG, *Statically indeterminate trusses of minimum volume* (in Russian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *51*, 10—107 (1960).
183. R. G. ROBERTSON, *The two-span haunched continuous beam in prestressed concrete*, Proc.

Instn. Civil Engrs., *15* (1960); AMR *13* (1960), Rev. 5177.
184. R. T. Shield, *On the optimum design of shells*, J. Appl. Mech., *27*, 316—322 (1960); AMR *14* (1961), Rev. 1933.
185. — *Optimum design methods for structures*, Plasticity, Pergamon Press, 1960.
186. — *Plate design for minimum weight*, Quart. Appl. Math., **18**, *2*, 131—144 (1960); AMR *14* (1961), Rev. 659.
187. L. Sobrero, *Les voûtes minces*, Trieste, Inst. Mecc. 1960, p. 120.
188. W. Starosolski, *General case of a prestressed section, analysis and the choice of the prestressing force* (in Polish), Arch. Inzyn. Ladowej, **6**, *3* (1960); AMR *15* (1962), Rev. 3360.
189. — *Design of excentrically loaded prestressed cross section* (in Polish), Zesz. Nauk. Politech. Slask. Budown., *3* (1960).
190. Z. Wasiutynski, *On the congruency the forming according to the equal strength*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech., **8**, *6*, 259—268 (1960); AMR *15* (1962), Rev. 3189.
191. — *The design of steel double-tee and box beams* (in Polish), Jubilee book of W. Wierzbicki, PWN, Warszawa, 1960, 401—427.
192. — *Application of science to the determination of the forms structures* (in Polish), Nauka Polska, **8**, *1*, 79—107 (1960).
193. D. K. Bendyng, *Tabular calculation of a hingeless arch of minimum weight* (in Russian), Proc. Kirov's Inst. Zhelezn. Transp., *14*, 67—86 (1961).
194. A. Biernawski, *Application of geometry to design problems of lattices.*, VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
195. A. Biernawski, *The theorem on the potential of a three- dimensional lattice with four loaded nodes* (in Polish), VII Conf. PZITBPAN, Krynica, 1961.
196. V. P. Borisov, *Method of prescribed stresses applied to the analysis of a caisson subjected to compression* (in Russian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *62*, 19—29 (1961).
197. A. Brandt, *A historical survey of design problems* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
198. — *A comparison between the bases and developments of the minimum weight design and of the minimum potential design* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
199. A. Brandt, *Design of a prestressed beams* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
200. W. Dzieniszewski, *The influence of normal forces in arches, beams, suspension rods and columns on the distribution of internal forces in Langer and Maillart structures* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
201. — *The determination of the variability of moments of inertia of beams in Maillart structures* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
202. S. P. Fesik, *On the minimum weight of frames with single redundant members* (in Rusian), Stroit. Mekh. Sooruzh., *1*, 32—37 (1961).
203. S. Kh. Gaynullina, *On the analysis of indeterminate structures of minimum weight with variable depth of cross sections* (in Russian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *62*, 31—36 (1961).
204. J. Grycz, *Fundamental relations in the design of concrete beams prestressed with arbitrary thin wires distributed in a continuous manner, assuming equal principal stresses* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
205. — *Determination of isostatic lattices of minimum potential for a given node configuration and an invariable load* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
206. T. C. Hu şi R. T. Shield, *Minimum-volume design of discs*, ZAMP, *12*, 414—433 (1961).
207. — *Uniqueness in the optimum design of structures*, J. Appl. Mech., *28*, 284—287 (1961).
208. A. V. Izraelit, *Proper design of continuous beams and fixed frames with prescribed stresses* (in Russian), Proc. Vsesoyuz. Zaoch. Lesotekh. Inst., *7*, 139—152 (1961).
209. J. Kapkovski şi S. Lukasiewicz, *The influence of temperature on rotating discs of uniform strength* (in Polish), Arch. Budowy Maszyn, **8**, *2* (1961).
210. J. Kosmowski, *The design of a steel cantilever beam of constant depth and constant width of the flanges* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
211. — *Determination and practical verification of the system of bars in a four-node plane lattice field for minimum potential* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
212. J. Kosmowski, *Minimum potential lattices composed of two and three fields* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.

213. J. KOSMOWSKI *Determination of the distribution of points of zero-values of bending moments in continuous beams designed for equal unit potential* (in Polish), VII conf., PZITB PAN, Krynica, 1961.
214. S. KRISHNAN şi K. V. SHETTY, *A method of minimum weight design for thin-walled beams*, Struct. Engr., *5* (1961); AMR *15* (1962), Rev. 832.
215. YA. B. LIVIN, *Canonical formulae of the method of prescribed stresses* (in Russian), Stroit. Mekhan. Konstr. Sbom. Trudov, *8*, 119—124 (1961).
216. M. SH. MIKELADZE, *On sandwich structures of uniform strength* (in Russian), Proc. Akad. Nauk. GSSR, **26**, *4*, 397—404 (1961).
217. Z. MROZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., *19*, 127—135 (1961); AMR *14* (1961), Rev. 661.
218. D. POINTZ, *Design problems of building structures* (in Polish), Biul. Tech. BSPTBP, 1961.
219. YU. A. RADTSIG, *On the determination of minimum value of a mirror function of numerous independent variables* (in Russian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *62*, 91—97 (1961).
220. B. SAELMAN, *A note on the minimum weight design of spherical and cylindrical pressure surfaces*, J. Aeronaut. Sci. **28**, *1*, 72—73 (1961); AMR *14* (1961), Rev. 4236.
221. E. ŞUHUBI, *Design of plates for minimum weight*, Bull. Tech. Univ. Istambul, **14**, *1*, 11—30 (1961); AMR *15* (1962), Rev. 2582.
222. W. STAROSOLSKI, *Design of continuous prestressed beams* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
223. Z. SULIMOWSKI, *Analysis of a simply supported beam with variable prestressing force* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
224. E. S. TSENTSEVITSKAYA, *On the analysis of beams of minimum weight* (in Russian), Proc. Kazan, Aviat. Inst., *62*, 45—57 (1961).
225. A. A. VASILIEV, *Optimum paramenters of steel beams with a single prestressing* (in Russian), Stroit. Mech. Rasch. Sooruzh., *4*, 47—51 (1961).
226. A. I. VINOGRADOV şi S. P. FESIK, *On the most convenient distribution of forces in combined (arch and rib) structures* (in Ukrainian), Prikl. Mech. (Kharkov), **7**, *2*, 157—163 (1961).
227. N. S. VOLKOVA, YU. A. RADTSIG şi N. KH. KHASANSHIN, *On the analysis of statically indeterminate trasses of minimum weight* (in Russian), Stroit. Mekh. Rasch. Sooruzh., *4*, 10—14 (1961).
228. N. S. VOLKOVA, *On the design of statically indeterminate trusse of minimum weight of the II kind* (in Russian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *62*, 73—80 (1961).
229. Z. VASIUTYNSKI, *Design problems of uniform strength concrete beams prestressed with arbitrary thin wires aistributed in a continuous manner* (in Polish), VII Conf. PZITB-PAN, Krynica, 1961.
230. V. K. YURIEV, *On design of continuous beams of uniform strength to bending considering their own weight* (in Russian), Proc. Kazan. Aviat. Inst., *62*, 39—43 (1961).
231. A. BIERNAWSKI, *A theorem on the potential of a spatial grating with four loaded nodes*, Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Tech., **10**, *1*, 1—10 (1962); AMR *15* (1962), Rev., 6479.
232. A. BRANDT, *Some theorems on statically determinate prestressed beams designed for minimum potential*, Bull. Acad. Polonaise Sci, Ser. Sci. Tech., **10**, *2*, 57—62 (1962); AMR 15 (1962), Rev. 7066.
233. Z. WASIUTYNSKI şi A. BRANDT, *The present state of knowledge in the field design of structures* (in Polish), Rozpr. Inzyn., **10**, *2*, 307—322 (1962).
234. Z. WASIUTYNSKI, A. BRANDT, J. GRYCZ şi J. IGNACZAK, *Recherches des formes des poutrea précontraintes*, Proc. IV Congress FIP, theme III, *9*, 76—81, Rome-Naples (1962).
235. Z. WASIUTYNSKI şi A BRANDT, *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures*, Appl. Mech. Rev., *16*, 341—350 (1963).
236. G. G. GOBLE şi P. V. DE SANTIS, *Optimal design of mixed steel composite girders*, Proc. ASCE 92, ST 6, 25—34, 1966; AMR *21* (1968), Rev., 2640.
237. R. A. RHIDA şi R. N. WRIGHT, *Minimum cost design of frames*, Proc. ASCE 93, ST *4*, 165—183 (1967).
238. D. N. GHISTA, *Structural optimization with probability of failure constraint*, NASA, Tech. Note D-3777 (1966); AMR, *20* (1967), Rev. 3344.
239. N. KHACHATURIAN şi G. S. HALTER, *Probabilistic design of determinate structures*, Proc. Speciality Conference, ASCE, NewYork, 1966, 623—641.
240. F. MOSES şi D. E. KINSER, *Optimum structural design with failure probability constraints*, AIAA J. 5, 1152—1158, (1967); AMR 21 (1968), Rev. 309.

241. Jr. H. A. Sawyer, *Status and potentialities of nonlinear design of concrete frames*, Proc. Internat'l Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, (Miami, Florida, Nov. 1964) ASCE, New-York, 1965.
242. H. P. Kunzi, W. Krelle și W. Oettli, *Nonlinear programming*, Blaisdell Publ. Co., Waltham, Mass., 1966.
243. F. Moses, *Optimal structural design using linear programming*, Proc. ASCE 90, ST 6, 89—104, 1964; AMR 18 (1965), Rev. 2839.
244. W. C. Broding, F. W. Dietrich și P. S. Parker, *Structural optimization and design based on a reliability design criterion*, J. Spacecraft Rockets *1*, 56—61 (1964); AMR *17* (1964), Rev. 7173.
245. G. A. Best, *A method of structural weight minimization suitable for high-speed computers*, AIAA J.*1*, 478—479, (1963); AMR 16 (1963), Rev. 3953.
246. R. L. Fox, *Constraint surface normals for structural synthesis techniques based on matrix analysis*. AIAA J. *3*, 1517—1518 (1965).
247. C. A. Cornell, K. F. Rienschmidt și J. F. Brotchie, *A method for the optimum design of structures*, Proc. Internat'l Symposium on the Use of Computers in Structural Engineering (Newcastle-upon-Tyne, England, 1966) See also Ref. 145.
248. R. A. Gellatly și R. H. Gallagher, *A procedure for automated minimum weight structural design*, Part I: Theoretical basis. Part II: Applications, Aeronautical Quart. 17, 216—230 and 332—342, 1966; AMR 20 (1967) Rev. 6517.
249. T. E. Hess, J. C. Bailey și H. J. Most, *Re-entry vehicle optimization and synthesis program*, Proc. ASCE 89, ST *4*, 249—268 (1963); AMR *17* (1964), Rev. 2126.
250. J. F. Brotchie, *Direct design of framed structures*, Proc. ASCE 90 ST *6*, 243—257 (1964); AMR *18* (1965), Rev. 2840.
251. D. N. Ghista, *Fully-stressed design for alternative loads*, Proc. ASCE 92, ST *5*, 237—260 (1966); AMR *20* (1967), Rev. 2495.
252. G. G. Pope, *The design of optimum structures of specified basic configuration*, Internat'l J. Mech. Scis. *10*, 251—263 (1968).
253. P. Rawat, *A note on the design synthesis of primary ship structure using iterative approach*, J. Ship Research *11*, 123—130 (1967); AMR *20* (1967), Rev. 8626.
254. G. I. N. Rozvany, *A new calculus for optimum design*. Internat'l J. Mech. Scis. 9, 885—886, 1967.
255. Jr. L. A. Schmidt și W. M. Morrow, *Structural syntesis with buckling constraints*, Proc. ASCE 89, ST *2*, 107—126 (1963); AMR *18* (1965), Rev. 2043.
256. A. R. Toakley, *The optimum design of triangulated frameworks*, Internat'l J. Mech. Scis. *10*, 115—127 (1968); AMR *21* (1968), Rev. 6598.
257. R. Razani, *Behavior of fully stressed design of structures and its relationship to minimum-weight design*, AIAA J. *3*, 2262—2268 (1965); AMR *19* (1966), Rev. 5652.
258. Jr. L. A. Schmidt și R. L. Fox, *An integrated approach to structural synthesis and analysis*, AIAA J. *3*, 1104—1112 (1965); AMR *19* (1966), Rev. 2279.
259. W. S. Dorn, R. E. Gomory și H. S. Greenberg, *Automatic design of optimal structures*, J. de Mécanique *3*, 25—52 (1964).
260. H. S. Y. Chan, *Optimum Michell framework for three parallel forces*, Coll, Aeronautics, Cranfield, Rep., *167* (1963); AMR *17* (1964), Rev. 5825.
261. H. S. Y. Chan, *Tabulation of some layouts and virtual displacement fields in the theory of Michell optimum structures*, Coll. Aeronautics, Cranfield, Note Aero., 161, 1964; AMR *17* (1964), Rev. 6474.
262. D. N. Ghista, *Optimum frameworks under single load system*, Proc. ASCE 92, ST *5*, 261—286 (1966); AMR *20* (1967), Rev. 2505.
263. D. N. Ghista și M. M. Resnikoff, *Development of Michell minimum weight structures*, NASA Tech. Note D-4345, 1968; AMR *21* (1968), Rev. 2642.
264. W. S. Hemp, *Studies in the theory of Michell Structures*, Proc. 11th Congr. Appl. Mech. (Munich 1964), Springer, Berlin, 1966, 621—628; AMR *20* (1967), Rev. 4826.
265. G. A. Hegemier și W. Prager, *On Michell trusses*, University of California, San Diego, Report 3 to U.S. Army Research Office-Durham, 1968.
266. J. D. Foulkes, *Minimum-weight design and the theory of plastic collapse*, Quart. Appl. Math. 10, 347—358, 1953; AMR *6* (1953), Rev. 2787.
267. J. Heyman și W. Prager, *Automatic minimum weight design of steel frames*, J. Franklin Inst. 266, 339—364, 1958; AMR *12* (1959), Rev. 2046.
268. A. R. Toakley, *Some computational aspects of optimum rigid-plastic design*, Internat'l J. Mech. Scis. *10*, 531—537 (1968).

269. P. V. Marçal şi W. Prager, *A method of optimal plastics design*, J. de Mécanique *3*, 509—530 (1964); AMR *18* (1965), Rev. 5288.
270. P. V. Marçal, *Optimal plastic design of circular plates*, Internat'l J. Solids Structs. *3*, 427—443 (1967); AMR *20* (1967), Rev. 7862.
271. W. Prager şi R. T. Shield, *A general theory of optimal plastic design*, J. Appl. Mech., *34*, 184—186 (1967).
272. W. Prager şi J. E. Taylor, *Problems of optimal Structural design*, J. Appl. Mech. *35*, 102—106 (1968); AMR *21* (1968), Rev. 6597.
273. C. Y. Sheu şi W. Prager, *Minimum-weight design with piecewice constant specific stiffness*, J. Optimization Theory Applications *2*, 179—186 (1968).
274. Z. Mroz, *Limit analysis of plastic structures subject to boundary variations*, Archiwum Mech. Stos. *15*, 63—76 (1963); AMR *17* (1964), Rev. 6291.
275. W. Prager, *Optimality criteria in structural design*, Proc. Nat'l. Acad. Scis. USA, in press.
276. W. Prager şi R. T. Shield, *Optimal design of multi-purpose structures*, Internat'l. J. Solids Structures *4*, 469—475 (1968).
277. R. T. Shield, *Optimum design methods for multiple loading*, J. Appl. Math. Phys (ZAMP) *14*, 38—45 (1963); AMR *17* (1964), Rev. 5812.
278. Jr. E. J. Haug şi P. G. Kirmser, *Minimum weight design of beams with inequality constraints on stress and deflection*, J. Appl. Mech. *34*, 999—1004 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 4981.
279. R. L. Barnett, *Minimum weight design of beams for deflection*, Proc. ASCE 87, EM *1*, 75—109 (1961).
280. — *Minimum deflection design of a uniformly accelerating cantilever beam*, J. Appl. Mech. *30*, 466—467 (1963); AMR *17* (1964), Rev. 2574.
281. I. Tadjbaksh, *An optimum design problem for the nonlinear elastica*, IBM Research Paper RC-1949, 1967.
282. E. H. Mansfield, *Optimum tapers for eccentrically loaded ties*, J. Roy. Aero. Soc. *71*, 647—650 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 2639.
283. W. Dzieniszewski, *Optimum design of plates of variable thicknees for minimum potential energy*, Bull. Acad. Polonaise Scis. Ser. Scis. Techn., *13*, 45—52 (1965); AMR *20* (1967), Rev. 77.
284. Z. Wasiutynski, *On the equivalence of design principles: minimum potential-constant volume and minimum volume-constant potential*, Bull. Acad. Polonaise Scis. Ser. Scis. Techn. *14*, 537—539 (1966); AMR *20* (1967), Rev. 7868.
285. — *On the criterion of minimum deformability design of elastic structures: effect of own weight of material*, Bull. Acad. Polonaise Scis. Sér. Scis. Techn., *14*, 529—532 (1966).
286. B. A. Boley şi J. H. Weiner, *Theory of thermal stresses*, John Wiley & Sons, New York, 1960, p. 77; AMR *14* (1961), Rev. 1790.
287. L. E. Hackman şi J. E. Richardson, *Design optimization of aircraft structures with thermal gradients*, J. Aircraft *1*, 27—32 (1964); AMR *17* (1964), Rev. 5835.
288. W. Prager, *Optimal structural design for given stiffnes in stationary creep*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) *19*, 252—256 (1968).
289. F. I. Niordson, *On the optimal design of a vibrating beam*, Quart. Appl. Math. *23*, 47—53 (1965); AMR *18* (1965), Rev. 5343.
290. M. Turner, *Design of minimum-mass structures with specified natural frequencies*, AIAA J. *5*, 406—412 (1967); AMR *20* (1967), Rev. 9278.
291. J. E. Taylor, *Minimum-mass bar for axial vibration at specified natural frequency*, AIAA J. *5*, 1911—1913 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 5628.
292. — *Optimum design of a vibrating bar with specified minimum cross section*, AIAA J. *6*, 1379—1381 (1968).
293. M. S. Zarghamee, *Optimum frequency of structures*, AIAA J. *6*, 749—750 (1968); AMR *21* (1968), Rev. 5655.
294. C. Y. Sheu, *Elastic minimum-weight design for specifield fundamental frequency*, Internat'l J. Solid Structures *4*, in press.
295. W. Prager, *Optimization of structural design, Invited lecture at the Simposium on Optimization*, SIAM 1968 National Meeting in Toronto; to be published by SIAM.
296. L. J. Icerman, *Optimal structural design for given dynamic deflection*, M. S. Theisis, University of California, San Diego, 1968.
297. S. C. McIntosh şi F. E. Eastep, *Design of minimum-mass structures with specified stiffnes properties*, AIAA J. *6*, 962—964 (1968); AMR *21* (1968), Rev. 6599.

298. M. J. FRENCH, *The design of rotors to have the minimum weight consistent with a required first critical speed*, J. Mech. Engg. Sci. *1*, 99—100 (1964); AMR *17* (1964), Rev. 5688.
299. R. M. BRACH, *Minimum dynamic response for a class of simply supported beam shapes*, Internat'l J. Mech. Sci. *10*, 429—439 (1968).
300. I. TADJBAKSH și J. B. KELLER, *Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues*, J. Appl. Mech. *29*, 159—164, (1962); AMR *15* (1962), Rev. 5774.
301. J. B. KELLER și F. I. NIORDSON, *The tallest column*, J. Math. Mech. *16*, 433—446 (1966); AMR *20* (1967), Rev. 3975.
302. J. E. TAYLOR, *The strongest column: an energy approach*, J. Appl. Mech. *34*, 486—487 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 155.
303. J. E. TAYLOR și C. Y. LIU, *Optimal design of columns*, AIAA, J. *6*, 1497—1502 (1968).
304. N. C. HUANG și C. Y. SHEU, *Optimal design of an elastic column of thin-walled cross section*, J. Appl. Mech. *35*, 285—288 (1968).
305. F. R. SHANLEY, *Optimum design of eccentrically loaded columns*, Proc. ASCE 93, ST 4, 401—226, 1967; AMR *21* (1968), Rev. 2496.
306. G. A. COHEN, *Optimum design of truss-core sandwich cylinders under axial compression*, AIAA J. *1*, 1626—1630 (1963); AMR *17* (1964), Rev. 141.
307. W. PRAGER, *Optimal plastic design of rings*, *Contributions to Mechanics*, Edited by D. Abit, Pergamon Press, 1968, 163—169.
308. R. H. BIGELOW și E. H. GAYLORD, *Minimum weight of plastically designed steel frames*. Univ. Illinois Engg. Exp. Station, Bull. 485, 1966; AMR *20* (1967), Rev. 2507,
309. L. P. FELTON și M. W. DOBBS, *Optimum design of tubes for bending and torsion*, Proc. ASCE 93, ST *4*, 185—200 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 3245.
310. G. A. HOFFMAN, *Optimal proportions of pressure vessel heads*, J. Aerospace Sci. *29*, 1471—1475 (1962); AMR *16* (1963), Rev. 5722.
311. F. G. SHAMIEV, *Designing shells of minimum weight*, Izv. Acad. Nauk. Azerb. SSR, Ser. Fiz-Mat i Tekh. Nauk, *5*, 37—44 (1963); AMR *18* (1965), Rev. 3370.
312. L. M. LACKMAN și R. M. AULT, *Influence of plasticity correction factor in minimum weight analysis*. AIAA J, *4*, 714—715 (1966); AMR *19* (1966), Rev. 6914.
313. G. J. MEGAREFS, *Minimal design of sandwich axisymetric plates*, I: Proc. ASCE 93, EM 6, 245—269 (1967); II: ibid. 94, Em *1*, 177—178 (1968); AMR *21* (1968), Rev. 7220.
314. C. Y. SHEU și W. PRAGER, *Optimal plastic design of circular and anular sandwich plates with piecewise constant cross section*, J. Mech. Phys. Solids, in press.
315. W. MARKS, *A method to determine the optimum form of prestressed beams under moving load*, (in Polish), Rozprawy Inzynierskie *14*, 49—68 (1966).
316. Z. WASIUTYNSKI, *On the criterion of optimum design of elastic structures subjected to n various systems of solicitations*, Bull. Acad. Polonaise Scis. Sér. Scis. Techn., *14*, 533—535 (1966); AMR *20* (1966), 6509.
317. M. R. IBRAGIMOV, *Designing a circular plate of minimum weight for two independented load systems*, (in Russian), Izv. Akad. Nauk. Azerb. SSR. Ser. Fiz. Mat. i Tekh. Nauk, *3*, 33—40 (1965); AMR *19* (1966), Rev. 7689.
318. O. GROSS și W. PRAGER, *Minimum weight design for moving loads*, Proc. 4th U.S. Nat'l. Congress Appl. Mech. (Berkeley 1962), ASME, New York, 1962, vol. 2, p. 1047—1051; AMR *16* (1963), Rev. 5042.
319. R. MAYEDA și W. PRAGER, *Minimum weight design of beams for multiple loading*, *Internat'l J*, Solids Structures *3*, 1001—1011 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 3230.
320. W. PRAGER, *Optimum plastic design of a portal frame for alternative loads*, J. Appl. Mech. *34*, 772—774 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 2653.
321. M. SAVE și W. PRAGER, *Minimum weight design of beams subjected to fixed and moving loads*, J. Mech. Phys. Solids *11*, 255—267 (1963).
322. M. A. SAVE și R. T. SHIELD, *Minimum weight design of sandwich shell subjected to fixed and moving loads*, Proc. 11th Internat'l. Congress Appl. Mech. (Munich. 1964), Springer Berlin, 1966, p. 341—349; AMR *20* (1967), Rev. 3210.
323. E. H. BROWN, *The minimum weight design of closed shells of revolution*, Quart. J. Mech. Appl. Math. *15*, 109—128 (1962); AMR *16* (1963), Rev. 745.
324. A. J. DURELLI, V. J. PARKS și S. URIBE, *Optimization of a slot end configuration in a finite plate subjected to uniformly distributed load*, J. Appl. Mech., *35*, 403—406 (1968).
325. G. GERARD și C. LAKSHMIKANTHAM, *Optimum thinwall pressure vessels of anisotropic materials*, J. Appl. Mech. *33*, 623—628 (1966); AMR *20* (1967), Rev. 1787.

326. S. MAZURKIEWICZ şi M. ZYCZKOWSKI, *Optimum design of cross section of thin-walled bar under combined torsion and bending*, Bull. Acad. Polonaise Scis. Ser. Scis. Techn. *14*, 273—281 (1966); AMR *20* (1967), Rev. 854.

327. G. M. SCHMIDLER, *Natural geometry of orbiting structures*, AIAA J. *6*, 566—567 (1968).

328. A. K. BASU şi J. C. CHAPMAN, *Optimum design of plate with symmetrical trapezoidal corrugations subjected to lateral pressure*, Quart. Trans. Roy. Instn. Naval Architects, *109*, 209—221 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 1676.

329. R. F. CRAWFORD şi A. B. BURNS, *Minimum weight potential for stiffened plates and shells*, AIAA J. *1*, 879—886 (1963); AMR *17* (1963), Rev. 743.

330. R. F. CRAWFORD şi D. B. SCHWARTZ, *General instability and optimum design of grid stiffened spherical domes*, AIAA J. *3*, 511—515 (1965); AMR *18* (1965), Rev. 6023.

331. K. KLOPPEL şi K. H. MOLLER, *A note on increasing the buckling load of a longitudinally stiffened rectangular plate by means of a suitable distribution of stiffeners* (in German) Stahlbau, *34*, 303—311 (1965); AMR 20 (1967), Rev. 1639.

332. L. YU. MAKSIMOV, *Design of cylinders to withstand high internal pressure* (in Russian), Vestnik Machinostr, *44*, *5*, 9—12 (1964). (translated in Russian Engg. J., *44*, *5*, 6—9) (1964); AMR *18* (1965), Rev. 2186.

333. H. R. MAUCH şi L. P. FELTON, *Optimum design of columns supported by tension ties*, Proc. ASCE 93, ST *3*, 201—220 (1967); AMR *21* (1968), Rev. 3255.

334. K. C. ROCKEY şi I. T. COOK, *Optimum reinforcement by two longitudinal stiffeners of a plate subjected to pure bending*, Internat'l J. Solid Structures *1*, 79—92 (1965); AMR *18* (1965), Rev. 7338.

335. V. I. TULCHII, *Optimum reinforcement of holes in plates* (in Russian), Prikl. Mekh., **1**, *3*, 77—83 (1965); AMR *19* (1966), Rev. 1390.

336. R. L. CLOUD, *Minimum weight design of a radial nozzle in a spherical shell*, J. Appl. Mech. *32*, 448—449 (1965); AMR *19* (1966), Rev. 6890.

337. A. P. GREEN şi P. R. LANCASTER, *Design of a composite drawing die with brittle insert*, Internat'l J. Mech. Scis *8*, 281—294 (1966).

338. E. F. P. BURNETT şi C. W. YU, *Reinforced concrete linear structures at ultimate load*, Proc. Internat'l Simposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete (Miami, 1964), ASCE, New York, 1965, p. 29—52.

339. M. Z. COHN, *Optimum limit design for reinforced concrete continuous beams*, Proc. Instn. Civil. Engrs. *30*, 675—707 (1965).

340. M. Z. COHN, *Limit design solutions for concrete structures*, Proc. ASCE 93, ST *1*, 37—57 (1967).

341. M. KORACH, *Economy of reinforced concrets slab structures* (in Hungarian), Magyar Tud. Akad. Müsz. Tud. Oszt. Közl **30**, *1*, *4*, 97—119 (1962); AMR *16* (1963), Rev. 5219.

342. CH. MASSONNET şi M. SAVE, *Optimum design of beams and frames in reinforced concrete*, Progress Appl. Mech. Macmillan, New York, 1963, p. 279—294.

343. C. T. MORLEY, *The minimum reinforcement of concrete slabs*, Internat'l J. Mech. Scis. *8*, 305—319 (1966); AMR *19* (1966), Rev. 7849.

344. Z. MRÓZ, *On the optimum design of reinforced slabs*, Acta Mechanica, *3*, 34—55 (1967); AMR *20* (1967). AMR *20* (1967), Rev. 9372.

345. V. PETCU, *Fundamentals of the limit design of statically indeterminate reinforced concrete structures* (in French), Rev. Mechanique Appl., *7*, 285—296 (1962); AMR *16* (1963), Rev. 3929.

346. G. I. N. ROZVANY, *Minimum volume of uncurtailed orthogonal reinforcement in freely supported slabs*, Concrete Construct'l Engg. *61*, 281—286 (1966); AMR *20* (1967) Rev. 4100.

347. A. YA. ALEKSANDROV, *Optimum paramenters of threelayer plates with a phenoplastic filler for compression* (in Russian), *Teoriya Plast*, Obolochek, Akad. Nauk USSR, Kiev, 1962, pp. 463—466; AMR *17* (1964), Rev. 5020.

348. KH. M. MUCHTARI, *The bending theory of minimum-weight plates of composite materials*, Prikl. Mekh., **3**, *4*, 1—7 (1967).

349. A. C. PIPKIN şi R. S. RIVLIN, *Minimum-weight design for pressure vessels reinforced with inextensible fibers*, J. Appl. Mech. *30*, 103—108 (1963); AMR *16* (1963), Rev. 5726.

350. V. I. KOROLEV, *Some problems in the choise of an optimum structure for glass-reinforced plastics* (in Russian), Inzhenernyi Zhurnal *5*, 306—315 (1965) (translated in Soviet Engg. J. *5*, 252—258 (1965).

351. H. U. Shuerch şi O. R. Burggraf, *Analytical design for optimum filamentary pressure vessels*, AIAA J. *2*, 809—820 (1964); AMR *17* (1964), Rev. 5831.
352. A. Brandt, *A theorem on the optimum design of prestressed beams*, Proc. Vibration Problems *11*, 559—566 (1963); AMR *18* (1965), Rev. 2169.
353. A. Gawecki, *Optimum design of post tensioned prestressed concrete beams* (in Polish), Archiwum Inzynierii Ladowej *11*, 503—537 (1965); AMR *20* (1967), Rev. 3350.
354. G. I. N. Rozvany şi A. K. J. Hampson, *Optimum design of prestressed plates*, J. Amer. Concrete Inst. *60*, 1065—1082 (1963); AMR *17* (1964), Rev. 2112.
355. G. I. N. Rozvany, *Optimum synthesis of prestressed structures*, Proc. ASCE 90, ST *6*, 189—211 (1964).
356. H. L. Cox, *The design of structures for least weight*, Pergamon Press, New-York, 1965.
357. J. B. B. Owen, *The analysis and design of light structures*, E. Arnold London, 1965.
358. Ch. Masson et şi M. A. Save, *Calcul plastique des constructions*; Vol. 1 : *Structures dépendant d'un paramètre*, 2nd ed.; ASBL, Brussels, 1967; Vol. 2 : *Structures spatiales*; ASBL Brussels, 1963 AMR 17 (1964), Rev. 3313.
359. — *Plastic analysis and design*, Vol. 1 Blaisdell, New York, 1965 (translation of [124], Vol. 1).
360. R. L. Barnett, *Survey of optimum structural design*, Exp. Mech. **6**, *12*, 19 A — 26 A (1966); AMR *20* (1967), Rev. 3361.
361. G. Gerard *Optimum structural design concepts for aerospace vehicles*, bibliography and assessment, Allied Research Associates, Inc. ARA Div. TR., *272—2*, (1965); AMR *18* (1965), Rev., 6147.
362. L. C. Johnson, *Practical design problems*, Engineering Plasticity, University Press, Cambridge, 1968, p. 363—383.
363. W. Prager, *Lineare Ungleichungen in der Baustatic*, Schweizerische Bauzeitung *80*, 315—325 (1962).
364. — *Optimization in structural design*, *Mathematical Optimization Techniques*, edited by R. Bellman, Univ. California Press, Los Angeles, 1963, p. 279—289.
365. M. I. Reitman şi G. S. Shapiro, *Theory of optimal design in structural mechanics and the theories of elasticity and plasticity* (in Russian), Ac. Sci. USSR, Moscow, 1966.
366. M. A. Save, *Some aspects of minimum-weight design*, Engineering Plasticity, University Press, Cambridge, 1968, p. 611—626.
367. L. A. Schmit, *Automated design*, *Internat'l*, Science and Technology, *54*, 63—78, 115—117 (1968).
368. W. J. Woods şi J. H. Sams III, *Geometric optimization in the theory structural synthesis* AIAA Paper No. 68—330, presented at AIAA/ASME 9th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Palm Springs, Cal., April, 1958.
369. — *Optimization and Nonlinear Problems*, Proc. ASCE Joint Specialty Conference, Chicago, April, 1968.
370. A. C. Palmer, *Optimal structural design by dynamic programming*, Proc. ASCE 94, ST *8*, 1837 (1968).
371. J. R. Benjamin, *Probabilistic structural analysis and design*, Proc. ASCE 94, ST 7, 1655—1680 (1968).
372. A. R. Toakley, *Optimal design using available sections*, Proc. ASCE 94, ST *5*, 1219—1241 (1968).
373. S. Kaliszki, *On the optimum design of reinforced concrete structures*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungaricae 60, 257—264, 1968.
374. R. Razani şi G. C. Goble, *Optimum design of constant-depht plate girders*, Proc. ASCE 92, ST *2*, 253—281 (1966).
375. M. Z. Cohn, *Limit design of continuous reinforced concrete crane girders*, Proc. ASCE 92, ST *3*, 161—177 (1966); AMR *20* (1967), Rev. 853.
376. M. F. Rubinstein şi J. Karagozian, *Building design using linear programming*, ASCE 92, ST *6*, 223—245 (1966).
377. Jr. L. A Hill, *Automated optimum cost building design*, Proc. ASCE 92, ST *6*, 247—263 (1966).
378. T. P. Kicher, *Optimum design minimum weight versus fully stressed*, Proc. ASCE 92, ST *6*, 265—279 (1966).
379. K. F. Reinschmidt, C. A. Cornel şi J. F. Botchie, *Iterative design and structural optimization*, Proc. ASCE 92, ST *6*, 281—318 (1966).
380. D. M. Brown şi A. H. Ang, *Structural optimization by nonlinear programming*, Proc. ASCE 92, ST *6*, 319—340 (1966); AMR 20 (1967), Rev. 7578.

381. B. G. NEAL, *The Plastic Method of Structural Analysis*, Chapman and Hall, London, 1956.
382. J. HEYMAN, *Automatic plastic analysis of steel frames structures under fixed and varying loads* (Rapport IBM 2038/2, Brown University, fevrier 1958 et Proc. Inst. Civ. Eng., vol. 12, p. 39, janvier 1959).
383. R. L. STONE, *Automatic minimum weight design of steel frames on the IBM 650 computer*. Brown University, Rapport IBM 2038, 1958.
384. J. J. KALKER, *Automatic minimum weight design of steel frames on IBM 704 computer*, Rapport IBM 2038/3, Brown University, septembre 1958.
385. C. I. GAVARINI, *I teoremi fondamentali del calcolo a rottura e la dualita in programmazione lineare*, Ingeneria Civile, *18* (1966).
386. A. CHARNES și H. J. GREENBERG, *Plastic collapse and linear programming*, Preliminary Report, Bull. Ann. Math. Soc., nov. (1951).
387. A. CHARNES, C. E. LEMKE și O. ZIENKIEWICZ, *Virtual work, linear programming and plastic limit analysis*, Proc. Roy. Soc., London, serie A, 110—116 (1959).
388. W. PRAGER, *Programmation linéaire en théorie des construction Mémoires du CERES*, Liege, vol. 3, p. 33—49, 1962.
389. A. KAUFMANN, *Méthodes et modéles de la recherche opérationnel*, Paris, Dunod, 1959.
390. J. D. FOULKES, *Linear programming and structural design*, Proc. 2nd Symp. Linear Programming, Washington, D.C. p. 177, 1955.
391. W. PRAGER, *Linear programming and structural design*, II: Limit design. Paper P-1123, Rang Corporation, 1957.
392. R. PRIȘCU, *Asupra profilului optim al barajelor de greutate*, St. cerc. mec. apl., (1953).
393. A. PETRE, C. STĂNESCU și L. LIBRESCU, *Asupra structurilor ortotrope optime*, St. cerc. mec. apl., *4* (1956).
394. R. PRIȘCU și C. IAMANDI, *Consideraţii asupra dimensionării barajelor de greutate cu profil trapezoidal*, St. cerc. mec. apl., *3* (1960).
395. V. PETCU, *Momente plastice optime în grinzi continui de beton armat cu secţiunea variabilă*, St. cerc. mec. apl., *2* (1962).
396. S. RĂUTU și V. CHIROIU, *În legătură cu calculul construcţiilor de greutate minimă*, Revue Roum. des Sci. Tech. Serie de Mech. Appl., *2* (1968).
397. — *Quelques problems du calcul des structures statiquement nondéterminées dans le domaine plastique*, Revue Roum. des Sci. Tech. Serie de Mech. Appl., *1* (1969).
398. V. VISARION și CR. STĂNESCU, *Calculul stărilor de tensiune în teoria plăcilor curbe. Plăci de arie minimă*, București, Editura Academiei, 1969.
399. C. BRAMSKI, *Unele probleme privind calculul rezervoarelor de oţel în formă de picătură*, A XIII Conf. PZITB-PAB, p. 349—357, Krynica, 1967.
400. A. BRANDT, *Teorema asupra raportului dintre traseul armăturii de precomprimare și greutatea proprie a grinzii de beton*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 7—14 (1967).
401. S. JENDO, *Cu privire la formarea reţelelor de grinzi*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 37—39 (1967).
402. W. KRZYS, *Proiectarea optimă a stîlpilor, ţinînd seama de condiţiile stabilităţii*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 47—48, (1967).
403. Z. OWCZAREK, *Proiectarea stîlpilor comprimaţi excentric*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 71 (1967).
404. Z. WASIUTYNSKI, *Cu privire la criteriul de formare a sistemelor elastice pentru capacitatea minimă de deformare ţinînd seama de influenţa greutăţii proprii*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 109—113 (1967).
405. J. GOLINSKI, *Un anumit proces de cercetare aplicat la căutarea valorilor extreme în problemele mecanicii tehnice*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 37—41 (1968).
406. R. JANICZEK, *Bare comprimate axial cu masa minimă*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 43—48 (1968).
407. T. KASPRZYK, *Anumite probleme de optimizare a suspensiilor de autovehicole*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 67—71 (1968).
408. T. KASPRZYK și J. MYJAK, *Alegerea optimă a caracteristicilor elastice și de amortizare care asigură vibraţii fără oscilaţii a unui anumit sistem mecanic*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 61—66 (1968).
409. S. OWCZAREK, *Alegerea formei optime a stîlpului comprimat excentric, legat monolit cu grinda, pe baza cercetărilor elasto-optice pe model*, PTMTS Gliwice-Szczyrk, 109—118 (1968).
410. C. Y. SHEU și W. PRAGER, *Recent Developments in Optimal Structural Design*, Applied Mechanics Reviews, *10* (1968).

411. F. Moses și J. D. Stevenson, *Reliability Based Structural Design*, Case Western Reserve University, DSMSMD Report, Nr. 16, January 1968.
412. K. F. Reinschmidt, C. A. Cornell și J. F. Brotchie, *Iterative Design and Structural Optimization*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, Nr. ST6, Decèmber 1966.
413. C. A Cornell, K. F. Reinschmidt și J. F. Brotchie, *Structural Optimization*, Research Report R65—26, Part 2, Dept. of Civil Engr., Mass., Inst. of Tech., Cambridge, Mass., Sept. 1965.
414. F. Moses, *Some Notes and Ideas on Mathematical Programming Methods for Structural Optimization*, Meddelelse SKB II/M8, Norges Tekniske Hogskole, Trondheim, Norway, January 1967.
415. A. V. Fiacco și G. P. McCormick, *The Sequential Unconstrained Miminization Technique for Nonlinear Programming, A Primal Dual Method*, Management Science, **10**, *2*, 360—366 (1964).
416. A. V. Fiacco și G. P. McCormick, *Computional Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming*, Management Science, *10*, *4*, 601—617 (1964).
417. L. A. Schmit, W. M. Morow și T. P. Kicher, *A Structural Synthesis Capability for Integrally Stiffened Cylindrical Shells*, AIAA Preprint Nr. 68—327, presented at the AIAA/ASME 9th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Palm Springs, Calif., April 1—3, 1968.
418. J. Moe și S. Lund, *Cost and Weight Minimization of Structures with Special Emphasis on Longitudinal Strength Members on Tankers*, De Ingenier, *47*, *49* (1967).
419. R. A. Gellatly și P. V. Marcal, *Investigation of Advanced Spacecraft Structural Design Technology*, Report Nr. 2356—95001, prepared by Bell Aerosystems Company under NASA Contract NASA-1344, July 1967.
420. G. Zoutendijk, *Nonlinear Programming: A Numerical Survey*, J. SIAM Control, *4*, *1* (1966), p. 194—210.
421. W. A. Thornton și L. A. Schmit, *Structural Synthesis of an Ablating Thermostructural Panel*, AIAA/ASME 9th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Palm Springs, California, Aprill — 3, 1968, AIAA Preprint Nr. 68—332.
422. B. Klein, *Direct Use of Extremal Principles in Solving Certain Optimization Problems Involving Inequalities*, Operations Research, Vol. 3, 1955, p. 168—175.
423. T. P. Kicher, *Optimum Design-Minimum Weight Versus Fully Stressed*, J. of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, Nr. ST6, December 1966.
424. R. A. Gellatly, *Development of Procedures for Large Scale Automated Minimum Weight Structural Design*, AFFDL-TR-*66*—180, Decembre 1966.
425. J. B. Rosen, *The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming*, Part I, Linear Constraints. SIAM Journal, **8**, *1*, 181—217 (1960).
426. J. B. Rosen, *The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming*, Part II, Nonlinear Constrains. SIAM Journal **9**, *4*, 514—532 (1961).
427. D. M. Brown și A. H. S. Ang, *A Nonlinear Programming Approach to the Minimum Weight Elastic Design of Steel Structures*, Structural Research Series Nr. 298, University of Illinois, Civil Engineering Studies, Urbana III, 1965.
428. A. Leon, *A Classified Bibliograph on Optimization. Recent Advances in Optimization Techniques*, Editors Lavi A. and Vogl T. P., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
429. R. Fletcher și M. J. D. Powell, *A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization*, Computer Journal (British) *6*, 163—168 (1963).
430. R. L. Fox și E. L. Stanton, *Developments in structural Analysis by Direct Energy Minimization*, AIAA Journal, **6**, *6*, 1036—1042 (1968).
431. W. M. Morrow și L. A. Schmidt, *Structural Synthesis of a Stiffened Cylinder*, NASA CR-1217, December 1968.
432. A. Lavi și T. P. Vogl, *Recent Advances in Optimization Technique*, John Wiley and Sons, New York, 1966.
433. F. Moses, *Optimum Design for Structural Safety*, 8thIABSE Congres, New York, September 1968.
434. D. J. Wilde și C. S. Beightler, *Foundations of Optimization*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
435. A. G. Pugsley, *The Safety of Structures*, E. Arnold (Pub!) London 1966.

436. A. M. FREUDENTHAL, *Safety and the Probability of Structural Failure*, Transaction ASCE, vol. 121, 1956.
437. O. G. JULIAN, *Synopsis of First Progress Report of the Committee on Factors of Safety*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 83, Nr. ST4, Proc. Paper 1316, July 1957.
438. J. R. BENJAMIN, *Probabilistic Structural Analysis and Design*, Proc. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, Nr. ST 7, July 1968, p. 1665—1679.
439. J. KOWALIK, *Nonlinear Programming Procedures and Design Optimization*, ACTA Polytechnica Scandinavica, Math & Computing Mach. Series Nr. 13, Trondheim 1966.
440. A. M. FREUDENTHAL, J. M. GARRELTS și M. SHINOZUKA, *The Analysis of Structural Safety*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, Nr. ST1, Proc. Paper 4682, February 1966.
441. F. MOSES și D. E. KINSER, *Analysis of Structural Reliability*, Jour. of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, ST 5, Proc. Paper 5494, October 1967.
442. A. ANG și M. AMIN, *Reliability of Structures and Structural Systems*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, **94**, EM2, April 1968, p. 671—691.
443. A. I. JOHNSON, *Stregth, Safety and Economical Dimensions of Structures*, Bulletin Div. of Building Statics and Struct. Engg. of the Royal Inst. of Tech., Stockholm, 1953.
444. W. WRIGHT, *Probability of Failure of Structures*, Transaction of the Engineering Inst. of Canada, **8**, A-*11*, 1965.
445. H. SWITZKY, *Minimum Weight Design with Structural Reliability*, AIAA 5th Annual Structures and Materials Conference, 1964, p. 316—322.
446. H. A. JR. SAWYER, *Status and Potentialities of Nonlinear Design of Concrete Frames*, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Proceedings of the International Symposium held in Miami, November 1964, ASCE-ACI, 1965.
447. C. J. TURKSTRA, *Choice of Failure Probabilities*, Journal of the Structural Division, ASCE, **93**, ST*6*, Proc. Paper 5678, December 1967.
448. F. VASCO COSTA, *Optimization of Structures*, 8th Congress IABSE, New York, September 1968.
449. N. C. LIND, *The Relation of Data to Calculated Failure Probabilities*, 8th Congress IABSE, New York, September 1968.
450. A. M. FREUDENTHAL, *Critical Appraisal of Safety Criteria and their Basic Concepts*, IABSE, New York, Sept. 1968.
451. W. H. DUCKWORTH, *Designing with Brittle Materials*, Materials in Design Engineering, Vol. 82.
452. Reinforcing Steel Institute., Study of Variation in Yield Point by Mill Tests on Intermediate Grade New Billet Reinforcement 1958, Chicago, III.
453. F. VASCO COSTA, *Critical Appraisal of Safety Criteria and their Basic Concepts*, 8th Congress IABSE, New York, September 1968.
454. J. T. P. YAO și H. YEH, *Safety Analysis of Statically Indeterminate Structures*, Technical Report CE-6, Bureau of Engineering Research, U. of New Mexico, Albuquerque New Mexico.
455. M. SHINOZUKA și I. HIROSHI, *On the Reliability of Redundant Structures*, Presented at the Fifth Annual Realiability and Maintainability Conference, New York, July 1966.
456. L. W. BONNICKSEN și S. K. SUDDARTH, *Structural Reliability Analysis of a Wood Load-Sharing System*, Journal of Material, **1**, *3*, A TM, September 1966.
457. C. A. CORNELL, *Bounds on the Reliability of Structural System*, Journal of the Structural Division, ASCE, **93**, ST *1*, Proc. Paper 5096, February 1967.
458. J. D. STEVENSON, *Reliability Analysis and Optimum Design of Structural System with Applications to Rigid Frames*, Solid Mechanics, Structures and Mechanical Design Division Report Nr. 14, Case Western University, November 1967.
459. N. KHACHATURIAN și G. S. HALDER, *Probabilistic Design of Determinate Structures*, Proceedings of the Speciality Conference, Eng. Mech. Div. ASCE, October 1966, p. 623—647.
460. I. BOUTON, *Fundamental Aspects of Structural Reliability*, Aerospace Engineering, June 1962, p. 66—93.
461. A. R. RIDHA, *Optimum Design of Frameworks*, Doctoral Thesis Presented to the University of Illinois, Urbana, Illinois, 1966.

462. M. SHINOZUKA, *Probability of Failure Under Random Loading*, Jour. of Eng. Mechanics Div., ASCE, **90**, EM *5*, Oct. 1964.
463. Y. K. LIN, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hil Book Co., 1967.
464. I. KONISHI, M. SHINOUZUKA și M. ITAGAKI, *Safety Analysis of Suspension Bridges*, 8th Congress IABSE, New York 1968.
465. S. O. ASPLUND, *The Risk of Failure*, Structural Engineer, **36**, Ne. *8*, August 1958.
466. S. EGGWERTZ și LINDSJÖ, *Analysis of the Probability of a Fail-Safe Aircraft Structures Consisting of Parallel Elements*, Air Force Flight Dynamics Lab., RTD-TDR-63—4210, Wright-Patterson A.F.B. Ohio, February 1964.
467. E. ROSENBLUETH, *Probabilistic Design to Resist Earthquakes*, Journal of the Engineering Mechanics Div., ASCE, **90**, *5*, 189—220 (1964).
468. U. V. BOLOTIN, *Statistical Methods in Structural Mechanics*, 2nd Ed. STROIIZDIAT, Moscow, 1965.
469. A. H. ANG și M. AMIN, *Safety Factors and Probability in Structural Design*, ASCE Annual Meething, Pittsburg, Sept-Oct. 1968.
470. C. A. CORNELL, *A Probability-Based Structural Code*, ACI 1968 Fall Convention (Menphis), November 1968.
471. N. C. LIND, C. J. TURKSTRA și D. T. WRIGHT, *Safety Economy and Rationality in Structural Design*, Preliminary Publication, IABSE 7th Congress (Rio de Janeiro), Zurich 1964.
472. C. J. TURKSTRA, *A Formulation of Structural Design Decisions*, Dissertation, Waterloo. 1962.
473. Y. NAKAMURA, *Optimum Design of Framed Structures Using Linear Programming*, S.M. Thesis, Departament of Civil Engineering, M.I.T., 1966.
474. D. M. BROWN și A. ANG, *Structural Optimization by Nonlinear Programming*, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, **92**, ST *6*, December 1966.
475. A. S. HALL și R. W. WOODHEAD, *Frame Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1961.
476. W. S. DOM, R. E. GOMORY și H. J. GREENBERG, *Automatic Design of Optimal Structures*, Journal de Mechanique, **3**, *1* (1964).
477. K. SOOSAAR, *Optimization of Topology and Geometry of Structural Frames*, Sc. D. Thesis, Depart. of Civil Eng. M.I.T., May 1967.
478. J. M. ROESET, *Fundamentals of the Problem of Optimization of Structural Design*, Mat. Met. para la Construccion, Barcelona, Spain, *41* (1967).
479. C. A. CORNELL, P. K. Ho și R. A. EHRLICH, *A Method for the Optimum Design of Simple Span Deck and Stringer Highway Bridges*, Research Report R67—22, Departament of Civil Engineering, M.I.T., June 1967.
480. A. J. BODHE, *Integration of Madels and Methods in Structural Optimization with Application to Suspension Bridges*, Sc. D. Thesis, Departament of Civil Engineering, M.I.T. February 1969.
481. F. MOSES și S. ONODA, *Minimum Weight Design of Structures with Application to Elastic Grillages*, Private communication.
482. G. GUZMAN-BARRON TORRES, J. F. BROTCHIE și C. A. CORNELL, *A Program for the Optimum Design of Prestressed Concrete Highway Bridges*, Journal Prestressed Concrete Institut, Chicago, III., June 1966.
483. A. CELLA, *Discrete Variable Optimization of Bar Structures*, Ph. D. Thesis, Departament of Civil Engineering, M.I.T. September 1968.
484. R. W. LATONA, *Optimization of Span Arrangement for Highway Bridges*, Research Report R68—54, Departament of Civil Engineering, M.I.T., May 1968.
485. C. A. CORNELL, R. K. MCGUIRE și R. W. LATONA, *Engineering User's Manuals: Simple Span Deck and Girder Optimization and Span Arrangement Optimization*, Research Report R68—28, Departament of Civil Engineering, M.I.T., June 1968.
486. N. A. KHACHATURIAN, *Basic Concepts in Structural Optimization*, Study Nr. 1, Solid Mechanics Division, University of Woterloo, Waterloo, Ontario, Canada. An Introduction to Structural Optimization, 1969.
487. L. A. JR. SCHMIT, *Problem Formulation, Methods and Solution in the Optimum Design of Structures*, Study Nr. 1, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, An Introduction to Structural Optimization, 1969.
488. R. L. FOX, *Mathematical Methods in Optimization*, Study Nr. 1, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada. An Introduction to Structural Optimization, 1969.

489. F. Moses, *Approaches to Structural Reliability and Optimization*, Study Nr. 1, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada. An Introduction to Structural Optimization, 1969.

490. N. C. Lind, *Deterministic Formats for the Probabilistic Design of Structural*, Study Nr. 1, Solid Mechanics Division, University of Waterloo. Waterloo, Ontario, Canada. An Introduction to Structural Optimization, 1969.

491. C. A. Cornell, *Examples of Optimization in Structural Design*, Study Nr. 1, Solid Mechanics Division, University of Waterloo. Waterloo, Ontario, Canada. An Introduction to Structural Optimization, 1969.

492. W. Prager, *Optimality Criteria Derived from Classical Extremum Principles*, Study Nr. 1, Solid Mechanics Division, University Of Waterloo. Waterloo, Ontario, Canada. An Introduction to Structural Optimization, 1969.

RECENZII

F. THAMM, GY. LUDWIG, I. HUSZÁR, I. SZANTO, *Dehnungsmessverfahren* (Procedee de măsurare a alungirii). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971, X + 328 p., 212 fig.

Cerinţele tehnicii moderne în construcţia de maşini şi în construcţii impun o dimensionare cît mai exactă a pieselor sau a diverselor elemente constructive. Deoarece în numeroase cazuri obţinerea acestui rezultat este legată de dificultăţi de ordin matematic deosebit de mari, metodele experimentale de determinare a stărilor de tensiune, respectiv a deformaţiilor produse, reprezintă un auxiliar indispensabil.

O prezentare de ansamblu a metodelor utilizabile pentru măsurarea alungirilor are un cert interes, pentru că oferă atît posibilitatea unei comparări în scopul alegerii metodei celei mai potrivite în cazul particular studiat, cît şi, la fiecare procedeu în parte, indicaţiile necesare pentru utilizarea cu succes a acestuia.

Urmărind realizarea unei lucrări pe cît se poate mai independente de literatura de specialitate, autorii au inclus un prim capitol în care sînt tratate, destul de condensat, însă clar, bazele teoretice ale rezistenţei materialelor. Un al doilea capitol conţine noţiunile fundamentale referitoare la efectuarea măsurătorilor de alungire şi la prelucrarea rezultatelor acestora.

Metodele neelectrice de măsurare a alungirilor fac obiectul unei prezentări succinte în capitolul următor. În continuare, problema studierii cîmpului de tensiuni prin încercările cu lac casant este expusă tot rezumativ.

Un spaţiu important este acordat metodelor electrice de măsurare a alungirilor. Tensometria rezistivă fiind foarte răspîndită, apare normal să i se dea şi în această lucrare o atenţie deosebită, şi în special problemelor legate de realizarea şi utilizarea mărcilor tensometrice de diverse tipuri. Capitolul al cincilea, consacrat acestui subiect, ocupă aproape o treime din volumul total al lucrării. În continuare, sînt prezentaţi şi traductorii inductivi care, prin proprietăţile lor, completează în mod fericit posibilităţile de utilizare ale metodelor electrice. Aparatura de măsură şi de înregistrare auxiliară pentru cele două metode electrice menţionate face, de asemenea, obiectul unui capitol special.

Cîteva alte metode, cu o utilizare mai restrînsă şi cu caracter special, sînt prezentate în capitolele următoare. Este vorba de măsurătorile cu corzi vibrante, cu ajutorul figurilor Moiré şi cu raze X.

Un ultim capitol este consacrat prelucrării şi utilizării rezultatelor obţinute prin măsurători şi legilor de similitudine utilizabile atunci cînd încercările sînt efectuate pe modele.

Fiecare capitol este însoțit de o bibliografie, care conține în general lucrări recente asupra problemelor tratate, precum și trimiteri la documentația elaborată de firmele care construiesc aparatură de măsurare.

Lucrarea este redactată sistematic, iar problemele sînt expuse clar, fapt care face ca lectura ei să fie ușoară. Aspectul grafic este foarte bun, figurile și diagramele fiind de calitate.

Prin materialul pe care îl conține și prin modul adecvat de prezentare a acestuia, lucrarea apare deosebit de utilă pentru cei care se ocupă de problemele experimentale în rezistența materialelor.

T. Oroveanu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 31, nr. 3 1972

OMAGIU ACADEMICIANULUI ELIE CARAFOLI

SUMAR

Pag.

T. OROVEANU, Omagiu academicianului Elie Carafoli 477

I. ANTON şi L. VÉKÁS, Studiu asupra activării centrelor de nucleaţie de diferite microgeometrii în procesul de cavitaţie 495

ŞTEFAN BĂLAN, Experienţe de cromoplasticitate 505

G. BĂRĂNESCU, Îmbunătăţirea echilibrajului momentelor externe ale forţelor de inerţie ale maselor cu mişcarea de translaţie la motorul în linie prin modificarea distanţelor dintre cilindri consecutivi 507

R. C. BOGDAN şi D. LARIONESCU, Pregătirea datelor de intrare pentru metoda sintezei armonice complexe 521

GH. BUZDUGAN, Noul laborator de rezistenţa materialelor al Institutului politehnic din Bucureşti 529

V. N. CONSTANTINESCU, Relaţii fundamentale pentru mişcările turbulente în straturi subţiri cu aplicaţii în lubrificaţie 537

D. DUMITRESCU şi I. SETEANU, Contribuţii la studiul curgerii turbulente în vecinătatea unui perete plan 559

T. HACKER, Metoda penalizării şi optimizarea zborului 567

D. MANGERON, N. M. OĞÜZTÖRELI, şi V. F. POTERAŞU, Ecuaţiile programării dinamice pentru determinarea încărcării critice de stabilitate a unui arc circular elastic cu secţiune variabilă. Nota I 579

D. MANGERON, N. M. OĞÜZTÖRELI şi V. F. POTERAŞU, Ecuaţiile programării dinamice pentru determinarea încărcării critice de stabilitate a unui arc elastic în formă de parabolă cu secţiune variabilă. Nota II. 589

N.I. MANOLESCU, M. DRANGA şi T. ARDELEANU, Contribuţii privind optimizarea transportoarelor inerţiale 601

DAN MATEESCU, O soluţie explicită pentru undele de şoc oblice 613

T. OROVEANU, Determinarea volumului de amestec la transportul succesiv al produselor petroliere printr-o conductă, în cazul utilizării separatorilor cilindrici . . 633

D. PANTAZOPOL şi F. MUNTEANU, Polara şoc-combustie (detentă-combustie) cu considerarea variaţiei raportului căldurilor specifice al gazului la trecerea prin frontul de flacără 645

ŞT. N. SĂVULESCU şi H. DUMITRESCU, Stratul-limită laminar pe pereţi curbi . 653

MIRCEA SOARE, Statica şi dinamica reţelelor spaţiale planar pătrate, simple, prin aplicarea metodei mediului continuu echivalent 673

CHR. PELECUDI, Supraacceleraţia în mişcarea tridimensională a solidului rigid . . 703

Karafoli

OMAGIU ACADEMICIANULUI ELIE CARAFOLI

Academicianul profesor Elie Carafoli, redactorul responsabil al revistei noastre, a împlinit vîrsta de șaptezeci de ani.

Născut în anul 1901, la Veria lîngă Salonic, este un vlăstar al acestei ramuri a neamului nostru care, în împrejurări istorice deosebit de neprielnice, nu numai că și-a păstrat cu dîrzenie ființa națională, ci a adus și contribuții de certă valoare la cultura românească.

După o copilărie petrecută pe meleagurile natale, în perioada frămîntată de la începutul veacului, izbucnirea primului război mondial l-a obligat să-și întrerupă studiile liceale. Deși la o vîrstă fragedă, și-a dat seama că aspirațiile sale nu se puteau realiza decît pe pămîntul patriei, pe care a reușit să pășească după un drum lung și greu, prin ținuturi cuprinse de vîltoarea războiului.

După ce a obținut diploma de inginer la Politehnica din București, a plecat la Paris unde, după studii strălucite, a devenit doctor în științele fizico-matematice. În perioada activității sale în cadrul prestigioasei instituții de învățămînt superior care a fost totdeauna universitatea pariziană, a elaborat lucrări științifice de o deosebită valoare, astfel că la vîrsta de 27 ani, cînd s-a întors în țară, era nu numai primul român specialist în aerodinamică ci și un savant cu reputație internațională bine stabilită.

Dedicîndu-se în primul rînd învățămîntului superior, Elie Carafoli a fost, cu începere din anul 1928, timp de 43 de ani, profesor la Politehnica din București. Predînd pentru prima oară în țara noastră aerodinamica și mecanica avionului, și-a legat pentru totdeauna numele de înființarea și dezvoltarea secției de aviație din cadrul acestei instituții, devenită recent facultate. Lecțiile sale, prezentate la un nivel științific superior, cu un conținut corespunzător progreselor unei discipline în continuă dezvoltare cum este aerodinamica, au fost audiate de zeci de generații de studenți din mijlocul cărora s-au ridicat numeroși profesori, oameni de știință și ingineri cu totul remarcabili. Pentru toți, scriitorul acestor rînduri avînd și el fericirea să se numere printre ei, faptul de a fi fost elevii academicianului profesor Elie Carafoli va rămîne mereu un prilej de mîndrie și adîncă satisfacție.

Pe lîngă cariera didactică, fără îndoială una dintre cele mai prodigioase din învățămîntul tehnic superior românesc, Elie Carafoli a desfășurat o deosebit de bogată activitate tehnică și științifică.

Tînăra industrie aeronautică românească de acum patru decenii a primit un impuls deosebit prin participarea sa hotărîtoare la proiectarea și construcția unor tipuri de avioane ca IAR—CV—11, IAR—14, IAR—15,

etc., care, atît prin formulele constructive cît și prin performanțe, au reprezentat realizări cu totul remarcabile pentru acea vreme (1930—1931).

Continuînd cercetările de aerodinamică, în direcțiile în care se ilustrase în timpul șederii sale în Franța, Elie Carafoli a introdus în țara noastră și tehnica experimentală corespunzătoare. Sub conducerea sa, s-a realizat sufleria aerodinamică de la Politehnica din București, prima instalație de acest gen în sudestul european, de o concepție deosebit de ingenioasă, care a servit mai multe decenii nu numai la numeroase cercetări științifice ci și la încercarea machetelor tuturor avioanelor construite de industria aeronautică românească.

Marile schimbări petrecute odată cu instaurarea regimului de democrație populară au creat și pentru Elie Carafoli condiții cu totul deosebite pentru dezvoltarea activității sale.

Ca membru titular, din anul 1948, al Academiei Republicii Socialiste România, a primit misiunea deosebit de importantă de a organiza cercetarea științifică în domeniul mecanicii aplicate în țara noastră. Timp de peste două decenii a fost directorul Institutului de mecanică aplicată al Academiei, din care s-au dezvoltat în ultimul timp Institutul de mecanică a fluidelor și construcții aerospațiale și Centrul de mecanică a solidelor.

Pe acea vreme, datorită lipsei de interes manifestată în trecut, cercetările în domeniul mecanicii erau rezultatul unor inițiative personale a cîtorva oameni de știință, printre care se afla în prima linie și Elie Carafoli. Experiența sa i-a permis să ajungă la rezultate care nu puteau fi nici măcar bănuite, eforturile depuse fiind încununate de realizări strălucite prin care s-a definit și conturat precis o școală românească de cercetare în domeniul mecanicii aplicate, în special școala românească de aerodinamică recunoscută ca atare și pe plan mondial. Înconjurîndu-se de un grup de cercetători mai tineri, dintre care cei mai mulți erau foștii săi elevi, Elie Carafoli a știut să le insufle entuziasmul pentru munca științifică, atît de frumoasă în austeritatea ei. După dificultățile inerente începutului, ne putem mîndri astăzi cu rezultate teoretice și experimentale care, în mai multe ramuri ale mecanicii aplicate, situează școala românească la nivelul acelora din țări cu veche tradiție științifică și cu posibilități materiale superioare. Cel ce scrie aceste rînduri crede că poate exprima recunoștința sa și a celorlalți cercetători din generația din care face parte pentru îndrumarea atentă și deosebit de competentă primită de la academicianul Elie Carafoli.

Activitatea științifică îndelungată a academicianului Elie Carafoli este concretizată printr-un mare număr de lucrări în domeniul Mecanicii fluidelor și Aerodinamicii, reprezentînd o contribuție însemnată la promovarea științei în aceste domenii, atît în țară, cît și pe plan mondial.

Titlurile lucrărilor sînt cuprinse în lista alăturată, iar în analiza lor succintă pe care o facem în cele ce urmează, vom încerca să desprindem liniile directoare ale multiplelor sale preocupări și să evidențiem cele mai importante dintre rezultatele obținute.

Astfel, în ordine cronologică, reamintim rezultatele importante în teoria profilelor aerodinamice (1, 2, 5, 7, 16, 17, 18)*), care constau din elaborarea unor noi metode de trasare a profilelor de diferite forme, cu caracteristici foarte generale. O categorie de astfel de profile, acelea cu

*) Cifrele între paranteze se referă la numerotarea lucrărilor din lista de lucrări.

vîrf rotunjit, au fost denumite ulterior „profile Carafoli" (Prof. L. M. Milne-Thomson — Anglia, Prof. N. L. Ghosh — India, și alții).

Mai tîrziu, a stabilit formulele pentru scurgerea în jurul unui contur oarecare într-o mișcare foarte generală de translație și rotație (1, 15, 19); în cadrul unor cercetări relativ mai recente a stabilit și o teorie a suprafețelor portante permeabile în mișcarea plană (22).

De asemenea, a găsit, pentru prima oară, expresiile forțelor și momentelor de șarnieră pe partea mobilă a aripii (aripioare) sau a ampenajelor în mișcarea plană (3), elaborînd și o teorie generală a aripioarelor în mișcarea tridimensională în jurul aripilor de anvergură finită.

Pentru a verifica teoria profilelor, academicianul Elie Carafoli a întreprins o serie de experiențe la Institutul aerotehnic de la Saint-Cyr, pe o aripă de anvergură infinită, obținînd un acord foarte bun între teorie și experiență (4).

În același timp, a extins experimentarea la aripile de anvergură finită, atît pentru determinarea coeficienților globali de portanță, rezistență și moment, cît și pentru stabilirea distribuției de presiuni pe profil, în diferite secțiuni ale aripilor, la o serie de alungiri, de la 2 pînă la infinit; aceste rezultate experimentale sînt în bun acord cu teoria (4, 96). Cercetările experimentale au fost continuate sub alte aspecte la București, în laboratorul Institutului Politehnic (5).

În monografia asupra teoriei aripii de anvergură finită (6) și cartea sa mai amplă „Aerodinamica", tradusă în limba germană la Berlin și limba rusă la Moscova (7), academicianul Elie Carafoli luînd ca bază teoria lui Prandtl prezintă mai multe rezultate originale, printre care citățm în primul rînd metoda generală pentru studiul aripii de anvergură finită. De asemenea, dă soluția generală a problemei aripilor cu incidență variabilă, din care se deduce și teoria aripioarelor de comandă laterală (7, 27) sau a aripii în viraj (7, 29).

Alte probleme care capătă soluții elegante sînt determinarea rezistenței minime a sistemelor portante generalizate (7, 40) și teoria aripii cu fuzelaj (7, 39).

Cercetările sale se îndreaptă apoi spre aerodinamica vitezelor mari, în special spre mișcările supersonice; astfel, în anul 1956 a publicat „Aerodinamica vitezelor mari" (10), care a fost tradusă și la Moscova, iar mai tîrziu, în 1969, „Wing Theory in Supersonic Flow" (11) care a fost editată la Londra.

În acest domeniu, utilizînd mișcările conice de ordin superior, a stabilit o metodă unitară care i-a permis lui și colaboratorilor săi să rezolve cu ușurință o serie de probleme ale aripilor dreptunghiulare, trapezoidale sau triunghiulare (aripi delta), acoperind aproape toate utilizările curente ale aripilor în curent supersonic (10, 11, 41, 42, 45, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 60, 63, 66, 71, 72, 73, 74, 83, 98, 99, 100, 105, 107, 108).

Prin aceeași metodă unitară, a rezolvat pentru prima oară în mod riguros — în ipoteza perturbațiilor mici — problema aripilor cruciforme, din care se deduce și problema mișcării în jurul unui ampenaj compus din planul orizontal și cel vertical, ambele de formă triunghiulară, precum și a mișcării în jurul aripii dreptunghiulare prevăzute cu discuri marginale, normale, pe aripă, în formă de suprafețe delta (10, 11, 43, 46, 50, 54, 56, 64, 82, 98, 99, 101, 102).

O altă problemă studiată de academicianul Elie Carafoli este aceea a aripii cu fuzelaj conic, care a fost rezolvată sub toate aspectele sale (11, 59, 61, 62, 64, 65, 78).

Tot în legătură cu mișcările supersonice conice, a creat un model teoretic, care ia în considerație separarea curentului la bordurile de atac subsonice și apariția cornetelor de vîrtejuri dorsale. Cu ajutorul acestui model, a putut găsi distribuția de presiuni pe aripi și a reușit să rezolve o serie de probleme extrem de actuale ale aviației supersonice (11, 77, 80, 84, 87, 88, 110, 112).

Pentru mișcările supersonice și hipersonice, academicianul Elie Carafoli stabilește o formulă unitară a coeficientului de presiune, care se aplică la mișcarea plană pe un larg interval de regimuri de la supersonic la hipersonic-moderat și este într-un acord bun cu experiența. Printr-un procedeu simplu, rezultatele obținute au fost extinse și la aripile delta, adică la mișcarea în trei dimensiuni în regim supersonic-hipersonic moderat (11, 68, 69, 70, 75, 76, 85, 86, 103, 109, 111, 113).

Reluînd aceleași probleme pentru conul circular, cu și fără incidență, a obținut rezultate foarte interesante, care sînt de asemenea în bun acord cu experiența.

Mai amintim și cercetările teoretice și experimentale asupra unui fenomen foarte interesant pentru aviație, și anume efectul jeturilor fluide plane laterale asupra caracteristicilor aerodinamice (portanță, rezistență etc.) la aripile de mică alungire. Și în această problemă a creat un model teoretic care explică fenomenul în toată complexitatea lui și este confirmat de experiență.

Lucrările academicianului Elie Carafoli sînt orientate spre posibilități de aplicații practice, împletite armonios cu dezvoltările teoretice, multe dintre ele fiind citate în cărțile de specialitate ale unor savanți de renume mondial.

★

Pe lîngă activitatea științifică, tehnică și didactică expusă mai sus, academicianul Elie Carafoli a dezvoltat o vastă acțiune de difuzare a cuceririlor științifice, precum și o bogată activitate obștească.

A contribuit astfel la afirmarea peste hotare a realizărilor științifice din țara noastră prin lucrări științifice, comunicări, conferințe și participarea la numeroase manifestări științifice internaționale.

Pentru răspîndirea cît mai largă a rezultatelor științifice din domeniul mecanicii aplicate și pentru difuzarea în străinătate a lucrărilor originale ale cercetătorilor români în aceste domenii de activitate, au fost înființate revistele de specialitate „Studii și cercetări de mecanică aplicată" și „Revue de mécanique appliquée", al căror redactor responsabil, de la înființarea lor, este academicianul Elie Carafoli. Aceste reviste se bucură de o bună apreciere din partea specialiștilor reputați din țară și străinătate și colaborări prestigioase din multe țări mai importante ale lumii aduc o contribuție foarte valoroasă.

În aceeași ordine de idei, a căutat prin conferințe și articole să valorifice creația tehnică românească din trecut, să răspîndească și să popularizeze realizările înaintașilor noștri în masele largi ale oamenilor din țara noastră, începînd cu tineretul.

De asemenea, presa noastră a consemnat de-a lungul anilor numeroase articole ale academicianului Carafoli în legătură cu diferite aspecte curente ale vieții științifice și sociale.

Menționăm în acest sens o serie de articole privind cercetarea științifică în sprijinul producției, perspective în aeronautică și astronautică, progresul tehnic, evenimentele curente ale zilei.

S-a preocupat de introducerea în învățămîntul tehnic superior a celor mai noi realizări în știință și tehnologie, militînd pentru îmbunătățirea continuă a programului de învățămînt, în special pentru aeronautică și astronautică.

Pe plan național, academicianul Elie Carafoli a îndeplinit o serie de sarcini obștești, ca membru în comitetele naționale ale diverselor Asociații și Comitete.

Sub directa sa conducere au fost organizate cele trei conferințe naționale de Mecanică aplicată, ținute în anii 1960, 1965 și 1970, precum și Simpozionul privind Hidroaerodinamica și aplicațiile sale (1967), manifestări care s-au bucurat de participarea unor personalități marcante din lumea științifică internațională și care s-au încheiat cu un deosebit succes.

Ca profesor, a contribuit pe parcursul a mai mult de patru decenii, prin cuvîntul și scrierile sale, prin exemplul său, la formarea și educarea într-un spirit științific și etic a numeroase generații de studenți, cărora le-a insuflat dragoste pentru profesiunea aleasă, încrederea în posibilitățile științei românești, în geniul creator al poporului nostru, stimulîndu-i în același timp spre o muncă asiduă pentru cercetarea științifică și pentru realizări tehnice.

Prin activitatea sa stăruitoare desfășurată pe tărîmul științific, tehnic și didactic, precum și prin organizarea cercetării științifice și amenajarea laboratoarelor în instituțiile pe care le-a condus, academicianul Elie Carafoli a contribuit direct și indirect la dezvoltarea științei românești și la afirmarea ei pe plan mondial.

În activitatea științifică menționată mai sus, academicianul Elie Carafoli a antrenat o mulțime de tineri colaboratori, cu care a elaborat un mare număr de lucrări, stimulîndu-i și orientîndu-i spre o muncă metodică de cercetare cu obiective aplicative.

Reprezentînd cu competență țara și știința noastră la multe manifestări științifice internaționale, a primit numeroase titluri și distincții românești și străine, care încununează în mod potrivit o carieră prestigioasă.

Vîrsta de șaptezeci de ani îl găsește în plină vigoare și activitate, mereu prezent în mijlocul elevilor și colaboratorilor săi și cu o forță creatoare de la care putem aștepta noi și valoroase realizări.

În cadrul şedinţei solemne a Academiei Republicii Socialiste România, închinată sărbătoririi academicianului Elie Carafoli, cei care au luat cuvîntul au dat numeroase amănunte asupra realizărilor sale multiple şi deosebit de valoroase. Cuvîntările pe care le publicăm în acest volum omagial vor da prilejul celor ce le vor citi să ia cunoştinţă de tot ceea ce, într-o viaţă închinată ştiinţei, învăţămîntului şi tehnicii româneşti, a realizat sărbătoritul.

Nu ne rămîne decît ca, în calitate de colaborator de aproape un sfert de veac al magistrului nostru, să ne asociem numeroasele omagii de pretutindeni şi să-i urăm ani mulţi şi tot atît de plini ca şi cei de pînă acum, spre folosul şi progresul continuu al ştiinţei româneşti.

Teodor Oroveanu

TITLURI ŞI DISTINCŢII

Inginer diplomat de la Politehnica din Bucureşti.
Licenţiat în ştiinţele fizico-matematice de la Sorbonne — Paris.
Doctor în ştiinţele fizice de la Sorbonne — Paris.
Doctor docent în ştiinţe.

★

Membru titular al Academiei R. S. România.
Membru al Academiei internaţionale de astronautică.
Membru corespondent al Academiei de ştiinţe din Toulouse.
Membru al biroului executiv al Federaţiei internaţionale de astronautică ca „Past president" al acesteia.
Membru în biroul Consiliului internaţional al ştiinţelor aeronautice.
Membru în consiliul GAMM (Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik).
Preşedinte al Secţiei de ştiinţe tehnice a Academiei R. S. România.
Profesor la Institutul politehnic din Bucureşti.
Director onorific al Institutului de mecanică a fluidelor şi construcţii aerospaţiale.
Preşedinte al Comisiei de astronautică a Academiei R. S. România.

★

Premiul „Louis Bréguet" şi bursa de studii „Guynemer".
Medalia de onoare de argint (Societatea naţională de încurajare la progres, Paris).
Diploma „Paul Tissandier" (Federaţia internaţională de aeronautică).
Medalia de argint (Societatea naţională de încurajare a cercetării şi invenţiilor, Paris).
Medalia „Carl Friedrich Gauss" (care se acordă anual unui om de ştiinţă din lumea întreagă de către Societatea ştiinţifică din Braunschweig).
Medalionul „Apollo 11" (N.A.S.A., S.U.A.).

★

Premiul de stat clasa I-a.
Ordinul muncii clasa I-a.
Om de știință emerit al R. S. România.
Ordinul Meritul științific clasa I-a.
Ordinul Steaua Republicii Socialiste România clasa a II-a.

★

Medalia „A 5-a aniversare a R. P. Române".
Medalia „A 10-a aniversare a Forțelor armate".
Medalia „Colectivizarea agriculturii".
Medalia „Semi-centenarul Unirii Transilvaniei cu România".
Medalia „A 50-a Aniversare a Partidului Comunist Român".

LISTA DE LUCRĂRI

a) LUCRĂRI GENERALE, TRATATE, MONOGRAFII

1. AERODYNAMIQUE DES AILES D'AVION, Librairie Chiron Editeur, 40 rue de Seine, Paris, 1928.
2. THEORIE ET TRACES DES PROFILS D'AILES SUSTENTATRICES, în colaborare cu A. Toussaint, Librairie Chiron Editeur, 40 rue de Seine, Paris, 1928.
3. INFLUENCE DES AILERONS SUR LES PROPRIETES AERODYNAMIQUES DES SURFACES SUSTENTATRICES, Publications de l'Aéro-Club de France, Centre de Documentation Aéronautique Internationale, **II** (1931).
4. RECHERCHES EXPERIMENTALES SUR AILES MONOPLANES, Publications scientifiques du Ministère de l'Air, Librairie Gauthier-Villars, Paris, 1932.
5. TRAVAUX DU LABORATOIRE AERODYNAMIQUE, Publications scientifiques de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, Imprimeriile Statului, București, 1938.
6. THEORIE DES AILES MONOPLANES D'ENVERGURE FINIE, Analele Academiei Române, seria III, **XX**, *4* (1945).
7. AERODINAMICA, București, Edit. tehnică, 1951.
   — TRAGFLUGELTHEORIE (în limba germană), Verlag Technik, Berlin 1954.
   — AERODINAMIKA KRILA SAMOLETA (în limba rusă), Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moskva 1956.
8. MECANICA FLUIDELOR, în colaborare cu T. Oroveanu Edit. Academiei, vol. I, 1952, vol. II, 1955.
9. MIȘCĂRI CONICE ÎN REGIM SUPERSONIC (în limba chineză), Academia de Științe, Pekin 1955.
10. HIGH-SPEED AERODYNAMICS (în limba engleză), București, Edit. tehnică, 1956.
    — AERODINAMICA VITEZELOR MARI, București, Edit. Academiei 1957.
    — AERODINAMIKA BOLSHIH SKOROSTEI (în limba rusă), Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moskva 1960.
11. WING THEORY IN SUPERSONIC FLOW, în colaborare cu Dan Mateescu și Adriana Năstase, Pergamon Press, Oxford 1969.

b) COMUNICĂRI ȘI STUDII ȘTIINȚIFICE

ACADEMIE DES SCIENCES DE PARIS

12. CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT PLAN DES FLUIDES, în colaborare cu A. Toussaint, Comptes-Rendus, vol. 182, 25 mai 1926, pag. 1268.
13. SUR LA THEORIE DES AILES SUSTENTATRICES, în colaborare cu A. Toussaint, Comptes-Rendus, vol. 183, 1926.
14. SUR LES SPECTRES CINEMATOGRAPHIQUES DE L'ECOULEMENT PLAN DES FLUIDES AUTOUR D'OBSTACLES VARIES, în colaborare cu A. Toussaint, Comptes-Rendus, vol. 183, 22 nov. 1926, pag. 947.
15. SUR LE MOUVEMENT AUTOUR D'UNE PLAQUE EN ROTATION, Comptes-Rendus vol. 184, 11 apr. 1927, pag. 804 și 933.
16. METHODE GENERALE POUR LE TRACE DES PROFILS D'AVIATION, Comptes-Rendus, vol. 185, 24 oct. 1927, pag. 842.
17. SUR LES PROFILS AERODYNAMIQUES DE FORME GENERALE, Comptes-Rendus, vol. 185, 14 nov. 1927, pag. 1014.
18. TRACE GENERAL DES PROFILS AVEC DIEDRE A LA POINTE, Comptes-Rendus, vol. 186, 30 apr. 1928, pag. 1196.
19. SUR LE MOUVEMENT GENERAL AUTOUR D'UN CONTOUR, Comptes-Rendus, vol. 186, 30 apr. 1928, pag. 1196.
20. SUR LES CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES DES AILES RECTANGULAIRES EN DERIVE ET A AXE PARABOLIQUE, în colaborare cu N. Tipei, Comptes-Rendus, vol. 225, 1947, pag. 1121.
21. SUR LE CALCUL DES AILES RECTANGULAIRES EN FLECHE, în colaborare cu N. Tipei, Comptes-Rendus, vol. 225, 1947, pag. 1279

ACADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI, ROMA

22. CONSIDERAZIONI TEORETICHE SUL „GIRANTE A PALETTA"., Atti, vol. IX, ser. 6, sem. L, fasc. 3, Febr. 2, 1930.

ACADEMIA DE ȘTIINȚE DIN ROMÂNIA

23. CERCETĂRI ASUPRA UNEI NOI CLASE DE PROFILE DE AVIAȚIE, Decembrie 22, 1937.
24. FORȚE ȘI MOMENTE AERODINAMICE PE ARIPIOARE, Ianuarie 15, 1938.
25. DESPRE DETERMINAREA CARACTERISTICILOR AERODINAMICE ALE ARIPILOR DEFORMATE, Februarie 26, 1938.
26. SUR LES CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES DES AILES TRAPEZOIDALES RECTANGULAIRES, Martie 19, 1943.
27. SUR LA THEORIE DES AILERONS, Ianuarie 21, 1944.
28. SUR LES TRAJECTOIRES DES BOMBES D'AVION, Noiembrie 19, 1944.

ACADEMIA ROMÂNĂ

29. INFLUENCE DU VIRAGE CIRCULAIRE PLAN SUR LES PROPRIETES AERODYNAMIQUES DES AILES, Septembrie 15, 1944, Bulletin de la Section Scientifique, vol. XXVII, nr. 2, 1944.

30. ASUPRA TEORIEI ARIPILOR ÎN SĂGEATĂ ŞI IN DERIVĂ, în colaborare cu N. Tipei, Ianuarie 31, 1949.
31. DESPRE TEORIA PROFILELOR CU UN CONTUR DAT, Februarie 14, 1949
32. ARIPA TRAVERSÎND UN CURENT DE SECŢIUNE CIRCULARĂ, în colaborare cu T. Oroveanu, Aprilie 1949
33. METODA PRACTICĂ PENTRU CALCULUL ARIPILOR DE ANVERGURĂ FINITĂ, Sesiunea ştiinţifică 1949.
34. ASUPRA UNEI TEORII A SUPRAFEŢELOR PORTANTE PERMEABILE, Sesiunea ştiinţifică a Academiei R.P.R., Iunie 2—12, 1950
35. DETERMINAREA DEBITULUI DE SCURGERE PRIN ORIFICII ŞI DEVERSOARE, St. cerc. mec. apl. metalurg., **II**, *1* (1951).
36. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE ALE PRESIUNII VÎNTULUI PE MODELE DE ESTACADE, în colaborare cu D. Taşcă, N. Tipei, C. Popescu, St. cerc. mec. metalurg., **II** (1951).
37. SCURGEREA PRIN MEDII POROASE ÎN JURUL PLĂCILOR PERMEABILE, în colaborare cu N. Patraulea, Buletinul ştiinţific al Academiei R.P.R., **IV**, *1—2* (1952).
38. MIŞCAREA PRIN MEDII POROASE ÎN JURUL SUPRAFEŢELOR PERMEABILE, în colaborare cu N. Patraulea, Comunicările Academiei R.P.R., **II**, *2* (1952).
39. ECUAŢIA CIRCULAŢIEI ÎN JURUL UNEI ARIPI CU FUZELAJ CENTRAL, în colaborare cu N. Patraulea, Comunicările Academiei R.P.R., **II**, *3—4* (1952).
40. TEOREMA REZISTENŢEI MINIME LA SISTEMELE PORTANTE COMPLEXE, Comunicările Academiei R.P.R., **II**, *7—8* (1952).
41. ASUPRA CARACTERULUI HIDRODINAMIC AL SOLUŢIILOR DIN MIŞCĂRILE CONICE APLICATE LA TEORIA ARIPILOR POLIGONALE, Comunicările Academiei R.P.R., **II**, *9—10* (1952).
42. EXTINDEREA ANALOGIEI HIDRODINAMICE DIN MIŞCĂRILE CONICE LA ARIPILE GROASE ŞI CU INCIDENTA VARABILA, Comunicările Academiei R.P.R., **III**, *3—4* (1953).
43. MIŞCAREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL ARIPII TRIUNGHIULARE CU DISCURI MARGINALE, în colaborare cu B. Horovitz, Comunicările Academiei R.P.R., **III**, *11—12* (1953).
44. ACŢIUNEA VÎNTULUI ASUPRA OBSTACOLELOR PERMEABILE, CU APLICAŢIE LA PROBLEMA PERDELELOR FORESTIERE DE PROTECŢIE AGRICOLĂ în colaborare cu I. Stroescu şi N. Cămărăşescu St. cerc. mec. metalurg. **IV** (1953).
45. ASUPRA PORTANŢEI ŞI REZISTENŢEI ARIPII TRIUNGHIULARE LA VITEZE SUPERSONICE, Comunicările Academiei R.P.R., **IV**, *5—6* (1953).
46. INFLUENŢA DISCURILOR AXIALE ASUPRA MIŞCĂRII SUPERSONICE ÎN JURUL ARIPILOR UNGHIULARE CONICE GROASE ŞI CU INCIDENŢA VARIABILA, în colaborare cu B. Horovitz, Comunicările Academiei R.S.R., **IV**, *5—6* (1954).
47. INFLUENŢA UNUI SUFLU AXIAL SUPLIMENTAR ASUPRA ARIPII TRIUNGHIULARE CONICE LA VITEZE SUPERSONICE, St. cerc. mec. apl., **V**, *1—2* (1954).
48. REZISTENŢA ARIPILOR TRIUNGHIULARE DUBLU CONICE CU PANTĂ VARIABILĂ, ÎN CURENT SUPERSONIC, în colaborare cu M. Ionescu, St. cerc. mec. apl. **V**, *3—4* (1954), — publicată şi în limba franceză în „Revue de mécanique appliquée", **I**, *1* (1956).
49. ASUPRA ARIPII DELTA SUBŢIRI DUBLU-CONICE CU INCIDENŢĂ VARIABILĂ ÎN CURENT SUPERSONIC, în colaborare cu L. Dumitrescu, St. cerc. mec. apl., **IV**, *3—4* (1955).
50. L'ECOULEMENT SUPERSONIQUE AUTOUR D'UNE AILE A DISQUE AXIAL în colaborare cu B. Horovitz, Revue de mécanique appliquée, **I**, *1* (1956), — publicată şi în St. cerc. mec. apl. **VII**, *2* (1956).

51. REZISTENȚA DE UNDĂ A UNEI CLASE DE ARIPI DELTA SUBȚIRI DUBLU CONICE CU INCIDENȚA VARIABILĂ ÎN CURENT SUPERSONIC, în colaborare cu L. Dumitrescu, St. cerc. mec. apl., **VII**, *3* (1956).
52. INFLUENȚA BRACAJULUI ARIPIOARELOR ASUPRA CARACTERISTICILOR AERODINAMICE ALE ARIPII TRIUNGHIULARE ÎN REGIM SUPERSONIC, în colaborare cu S. Săndulescu, St. cerc. mec. apl., **VII**, *4* (1956).
53. ECOULEMENTS CONIQUES D'ORDRE SUPERIEUR AUTOUR DES AILES TRIANGULAIRES MINCES OU A EPAISSEUR SYMETRIQUE, în colaborare cu M. Ionescu, Revue de mécanique appliquée, **II**, *1*(1957),— publicată și în St. cerc. mec. apl. **VIII**, *3* (1957).
54. ECOULEMENTS CONIQUES D'ORDRE SUPERIEUR AUTOUR D'UNE AILE TRIANGULAIRE A PLAQUE NORMALE, în colaborare cu B. Horovitz, Revue de mécanique appliquée, **II**, *2* (1957), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl. **VII** *4* (1957).
55. THEORIE GENERALE DE L'AILE TRIANGULAIRE A DISTRIBUTION DE PRESSIONS DONNEE (LE PROBLEME INDIRECT), în colaborare cu M. Ionescu, Revue de mécanique appliquée, **II**, *2* (1957), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **IX**, *2* (1958).
56. PROBLEMES MIXTES DES AILES TRIANGULAIRES POURVUES D'UNE PLAQUE NORMALE EN COURANT SUPERSONIQUE (AILE CRUCIFORME), în colaborare cu B. Horovitz, Revue de mécanique appliquée, **III**, *3* (1958), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl. **IX**, *4* (1958).
57. ETUDE DE AILES TRIANGULAIRES MINCES A SYMETRIE FORCEE DANS UN COURANT SUPERSONIQUE, în colaborare cu A. Năstase, Revue de mécanique appliquée **III**, *4* (1958). — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **IX**, *4* (1958).
58. CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPIOARELOR AVÎND O MIȘCARE OSCILATORIE ARMONICĂ ÎN REGIM SUPERSONIC, în colaborare cu S. Săndulescu, St. cerc. mec. apl., **X**, *2* (1959). — publicată și în limba franceză în Revue de mécanique appliquée, **IV**, *2* (1959).
59. SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL SISTEMULUI PORTANT ARIPĂ-FUZELAJ CONIC, în colaborare cu D. Mateescu, St. cerc. mec. apl. **IX**, *2* (1959), — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **IV**, *3* (1959).
60. DETERMINAREA SUPRAFEȚEI UNEI ARIPI CU MUCHIE DE SEPARAȚIE A DISTRIBUȚIEI DE PRESIUNI, ÎN CURENT SUPERSONIC, în colaborare cu A. Năstase, St. cerc. mec. apl. **X**, *4* (1959). — publicată și în limba franceză în Revue de mécanique appliquée, **V**, *4* (1960).
61. METODA GENERALĂ PENTRU DETERMINAREA INTERFERENȚEI DINTRE ARIPĂ ȘI FUZELAJ, în colaborare cu D. Mateescu, St. cerc. mec. apl., **IX**, *1*, (1960), — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **V**, *2*, (1960).
62. SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL SISTEMULUI ARIPĂ CRUCIFORMĂ-FUZELAJ CONIC, în colaborare cu D. Mateescu, St. cerc. mec. apl., **XI**, *2* (1960), — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **V**, *3* (1960).
63. ARIPI TRIUNGHIULARE DE REZISTENȚĂ MINIMĂ ÎN CURENT SUPERSONIC, PREVĂZUTE CU MUCHIE DE SEPARAȚIE, în colaborare cu A. Năstase, St. cerc. mec. apl. **XI**, *4* (1960), — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **V**, *5* (1960).
64. TEORIA ARIPILOR TRIUNGHIULARE CRUCIFORME SAU PREVĂZUTE CU FUZELAJ CONIC, Sesiunea științifică jubiliară, Institutul de Mecanică aplicată, 4—7 iulie 1960, Edit. Academiei 1962, pag. 143—173,
65. INTERFERENȚA DINTRE ARIPĂ ȘI FUZELAJ ÎN SCURGERILE CONICE DE ORDIN SUPERIOR, în colaborare cu D. Mateescu, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *2* (1962), — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VII**, *3* (1962).
66. ASUPRA PROBLEMEI DE REZISTENȚĂ MINIMĂ A ARIPII DE GROSIME SIMETRICĂ ÎN CURENT SUPERSONIC, în colaborare cu A. Năstase-Ghia, St. cerc. mec. apl. **XIII**, *1* (1962), — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VII**, *2* (1962).

67. CONSIDERAȚII TEORETICE ASUPRA JETURILOR LATERALE FLUIDE, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *5* (1962) — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VII**, *6* (1962).

68. STABILIREA UNEI FORMULE UNITARE PENTRU COMPRESIUNE-EXPANSIUNE ÎN REGIM SUPERSONIC-HIPERSONIC, Comunicările Academiei R.S.R., 1962, nr. 9, — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VII**, *5* (1962).

69. CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE PROFILELOR ÎN REGIM SUPERSONIC-HIPERSONIC, ÎN CAZUL NEGLIJĂRII PIERDERILOR DE SARCINĂ DATORITĂ UNDELOR DE ȘOC, în colaborare cu C. Berbente, St. cerc. mec. apl. 1963, **XIV**, *4* (1963), — publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VIII**, *5* (1963).

70. DETERMINATION OF THE CHARACTERISTICS OF AERODYNAMIC PROFILES IN SUPERSONIC-HYPERSONIC FLOW, CONSIDERING THE PRESSURE LOSSES THROUGH SHOCK WAVES, în colaborare cu C. Berbente, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **IX**, *5* (1964).

71. SUR UNE CLASSE D'AILES DELTA A INCIDENCE ET PENTE VARIABLES D'APRES DES FONCTIONS HOMOGENES EN REGIME SUPERSONIQUE, în colaborare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **X**, *2* (1965),— publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **XVI**, *2* (1965).

72. ASUPRA UNEI CLASE DE ARIPI ÎN SĂGEATĂ ȘI ÎN COADĂ DE RÎNDUNICĂ, în colaborare cu Fr. Atanasiu, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *3* (1965).

73. EXTENSION OF CONICAL MOTIONS TO QUASI-CONICAL MOTIONS, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **X**, *3* (1965),—publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **XVI**, *5* (1965).

74. SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL ARIPII DELTA SUBȚIRI ÎN DERIVĂ, în colaborare cu Silvia Rădulescu, St. cerc. mec. apl., **XVI**, *4* (1965).

75. DETERMINATION OF PRESSURES AND AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF DELTA WINGS IN SUPERSONIC-MODERATE HYPERSONIC FLOW, în colaborare cu C. Berbente, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *3* (1966), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl. **XVII**, *3* (1966).

76. LA DEVIATION D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE BIDIMENSIONNEL PAR L'ACTION D'UN JET FLAP, în colaborare cu D. Pantazopol, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *4* (1966), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **XVII**, *4* (1966).

77. ASUPRA TEORIEI ARIPII DELTA SUBȚIRI CU SEPARAȚIA CURENTULUI LA BORDURILE DE ATAC, în colaborare cu St. Staicu, St. cerc. mec. apl. **XXII**, *4* (1966).

78. MOUVEMENT OSCILLATOIRE HARMONIQUE DU SYSTEME AILE-FUSELAGE CONIQUE EN REGIME SUPERSONIQUE, în colaborare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *5* (1966), — publicată și în limba română în Studii și cercetări de mecanică aplicată, 1966, nr. 5.

79. APPLICATION OF QUASI-CONICAL MOTIONS TO THE THEORY OF DELTA WINGS WITH CURVED LEADING EDGES, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *6* (1966), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., *6* (1966).

80. ANTISYMMETRICAL THIN DELTA WING WITH FLOW SEPARATION AT THE LEADING EDGES, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *6* (1966), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., *6* (1966).

81. APPLICATION OF QUASI-CONICAL MOTIONS TO THE STUDY OF WING-BODY LIFTING SYSTEMS IN SUPERSONIC FLOW, în colaborare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XII**, *1* (1967). — publicată și în limba română în Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XXIII**, *3* (1967).

82. FORMA OPTIMĂ A ARIPII CRUCIFORME DE GROSIME SIMETRICĂ ÎN CURENT SUPERSONIC, St. cerc. mec. apl., **XXIII**, 6 (1966), — publicată și în limba engleză în Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XII**, *2* (1967).
83. ARIPA DELTA SUBȚIRE DE REZISTENȚĂ MINIMĂ, AVÎND VITEZA FINITĂ LA BORDURILE DE ATAC ÎN CURENT SUPERSONIC, în colaborare cu A. Năstase, St. cerc. mec. apl., **XXVI**, *5* (1967), — publicată și în limba engleză în Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XII**, *5* (1967).
84. ON THE DELTA WING WITH FORCED ANTISYMMETRY IN SUPERSONIC FLOW, CONSIDERING THE LEADING EDGE SEPARATION, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Technique, série de mécanique appliquée, **XIII**, *3* (1968), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **XXVII**, *2* (1968).
85. ECOULEMENTS PLANS SUPERSONIQUES SEPARES PAR UN JET EN FORME DE COUCHE MINCE, în colaborare cu D. Pantazopol, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée", **XIII**, *4* (1968), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **XXVII**, *4* (1968).
86. DETERMINAREA CÎMPULUI DE PRESIUNI ÎN MIȘCAREA PLANĂ SUPERSONICĂ-HIPERSONICĂ MODERATĂ, în colaborare cu C. Berbente, St. cerc. mec. apl., **27**, *5* (1968).
87. ECOULEMENT SUPERSONIQUE AUTOUR DE L'AILE DELTA ARQUEE ET GAUCHIE SYMETRIQUEMENT, COMPTE TENU DE LA SEPARATION DU COURANT AUX BORDS D'ATTAQUE, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, *3* (1969), — publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., *3* (1969).
88. ASUPRA SEPARAȚIEI CURENTULUI LA BORDURILE ARIPII DELTA ANTISIMETRICE ÎN REGIM SUPERSONIC, în colaborare cu St. Staicu, St. cerc. mec. apl., *4* (1969).
89. NOI CERCETĂRI ASUPRA ARIPILOR DE ALUNGIRE MICĂ CU JETURI LATERALE, în colaborare cu N. Cămărășescu, St. cerc. mec. apl., **29**, *4* (1970).
90. CONSIDERATIONS ON THE SUPERSONIC AND HYPERSONIC MOTION PAST THE CIRCULAR CONE WITH ZERO INCIDENCE, în colaborare cu C. Berbente, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XV**, *2* (1970).
91. OSCILLATIONS OF WINGS FITTED WITH CONICAL BODIES OF ARBITRARY CROSS-SECTION IN SUPERSONIC FLOW, în colaborare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XV**, *4* (1970).
92. CONSIDERATIONS ON WAVE DRAG OF A DELTA THIN WING WITH LEADING EDGE SEPARATION, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XV**, *5* (1970).
93. COMPARATIVE APPLICATION OF THE "THEORETICAL MODEL" CONCERNING THE SUPERSONIC FLOW PAST A DELTA WING WITH FLOW SEPARATION AT THE LEADING EDGES, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, *2* (1971).
94. CONSIDERATIONS ON THE THIN DELTA WING WITH FINITE VELOCITIES AT THE LEADING EDGES, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, *3* (1971).

c) CONGRESE ȘI CONFERINȚE INTERNAȚIONALE, ARTICOLE PUBLICATE ÎN DIFERITE REVISTE DE SPECIALITATE DIN STRĂINĂTATE

95. ETUDE SUR L'ECOULEMENT PLAN DES FLUIDES, în colaborare cu A. Toussaint, Congresul al II-lea de Mecanică aplicată, Zürich, 1926, publicată în Actele Congresului.
96. CONFRONTATION DE LA THEORIE DES AILES SUSTENTATRICES AVEC L'EXPERIENCE, Congresul al III-lea de Mecanică aplicată, Stockholm, 1930, publicată în Actele Congresului.

97. SOLUTIONS EXPLICITES POUR LES CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES DES AILES D'ENVERGURE FINIE. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES DES PROFILS DE FORME GENERALE, Congresul internațional de Mecanică aplicată, Paris, 1946, publicată în Actele Congresului.

98. L'ECOULEMENT SUPERSONIQUE HOMOGENE D'ORDRE SUPERIEUR AUTOUR D'UNE AILE CRUCIFORME. APPLICATION AU MOUVEMENT OSCILLATOIRE, în colaborare cu B. Horovitz, Congresul al IX-lea de Mecanică teoretică și aplicată, Bruxelles, sept. 1956, publicată în Actes, tome II, Bruxelles, 1957.

99. ÜBER EINE EINHEITLICHE THEORIE DES ÜBERSCHALLTRAGFLUGELS IN HOMOGENER STROMUNG HOHERER ORDNUNG, în colaborare cu M. Ionescu, Congresul anual al GAMM (Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik), Hamburg, apr. 1957.

100. OSCILLATIONS HARMONIQUES DES AILERONS DE FORME GENERALE EN REGIME SUPERSONIQUE, în colaborare cu S. Săndulescu, Simpozionul de Mecanica fluidelor, Krynica, R.P. Polonă, sept. 1957, publicată în Archiwum Mechaniki Stosowanej, Polska Akademia Nauk, Warszawa, *6* (1958).

101. LES PROBLEMES MIXTES DES AILES TRIANGULAIRES A PLAQUE NORMALE EN COURANT SUPERSONIQUE, în colaborare cu B. Horovitz, Al IV-lea Congres național de Mecanică rațională și aplicată, Opatija, R.S.F. Iugoslavia, iunie 1958, — publicată în Tehnika, Organ saveza inzejnera i tehnikare jugoslavije, **XIV** (1959).

102. SUR LA RESISTANCE MINIMUM DE L'AILE TRAPEZOIDALE EN COURANT SUPERSONIQUE, în colaborare cu A. Năstase, Congresul unional de Mecanică teoretică și aplicată, Moscova, ianuarie-februarie 1960, — publicată în Mehanika, *1*.

103. UNITARNAIA TEORIA TRIUGOLNIH ILI KRESTOBRAZNIH KRILOV V SHERHZVUKOVOM POTOKE (Partea I și II), Injenernîi Sbornik, **XXVII—XXVIII**, Moscova (1960).

104. PROBLEMES INDIRECTS DES AILES TRIANGULAIRES CRUCIFORMES EN COURANT SUPERSONIQUE, în colaborare cu B. Horovitz, The Golden Jubilee Commemoration Volume (1958—1959), Calcutta Mathematical Society, India, **II** (1961).

105. O RASPREDELENIE DAVLENIIA AERODINAMICESKIH PROFILIAH V SVERHZVUKOVOM I GHIPERZVUKOVOM POTOKAH, Izvestia Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Techniceskih Nauk, Mechanika i Mașinostroenie, Moscova, *1* (1962).

106. HIGH ORDER CONICAL FLOW AROUND THE DELTA WING FITTED WITH CONICAL BODY, în colaborare cu D. Mateescu, Proceedings of the Seminar on the Aeronautical Sciences, Bangalore, India, 1961.

107. SUR LE PROBLEME DE RESISTANCE MINIMUM EN COURANT SUPERSONIQUE, prezentată la Academia de Științe din R.S. Cehoslovacă, Praga, ianuarie 1961.

108. THE INFLUENCE OF LATERAL JETS, SIMPLE OR COMBINED WITH LONGITUDINAL JETS, UPON THE WING LIFTING CHARACTERISTICS, AL III-lea Congres al Consiliului internațional al Științelor aeronautice (ICAS), Stockholm, 27—31 aug. 1962, publicată în Proceedings of the Third ICAS Congress.

109. L'UTILISATION DE LA METHODE DES RESIDUS DANS LE PROBLEME DE RESISTANCE MINIMUM DE L'AILE TRAPEZOIDALE EN COURANT SUPERSONIQUE, în colaborare cu A. Năstase, Al VI-lea Simpozion de Mecanica fluidelor, Zakopane, R.P. Polonă, 2—6 sept. 1963, publicată în Archiwum Mechaniki Stosowanej, Warszawa **3** *16* (1964).

110. SUR LA THEORIE DES AILES A BORDS D'ATTAQUE EN COURANT SUPERSONIQUE, L'Aerotecnica, fasc. 3, mai-iunie 1966, Associazione Italiana di Aerotecnica (AIDA), Roma.

111. THEORY OF THE WING AND WING-BODY SYSTEMS OVER A WIDE RANGE OF THE SUPERSONIC-HYPERSONIC REGIME, Al V-lea Congres al Consiliului internațional al Științelor Aeronautice (ICAS), Londra, sept. 1966, — publicată în Proceedings of the Vth ICAS Congress, Londra, 1967.

112. SUR UN MODELE THEORIQUE CONCERNANT L'AILE DELTA MINCE AVEC DECOLLEMENT AUX BORDS D'ATTAQUE, în colaborare cu St. Staicu Journal de Mécanique, **VI**, *2*, juin 1967, Paris,

113. PRESSURE DISTRIBUTION ON CONICAL DELTA WINGS IN SUPERSONIC-MODERATE HYPERSONIC FLOW, publicat în Volumul omagial consacrat celei de a 80-a aniversare a Prof. Markus Reiner, Technion, Haifa, Israel 1968.
114. BESTIMMUNG DER DRÜCKE UND DER STOSSWELLENFORM BEI EBENER ÜBERSCHALL-BZW. MÄSSIGER HYPERSCHALLSTRÖMUNG, în colaborare cu C. Berbente, Zeitschrift für Flugwissenschaften, Braunschweig, *16* (1968), Heft 10.
115. DELTA WING WITH ANTISYMMETRICAL INCIDENCE AND LEADING EDGE SEPARATION, în colaborare cu St. Staicu, — publicat în Volumul „Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics", dedicat celei de a 60-a aniversare a Prof. L. I. Sedov, Moscova, 1968.
116. CONSIDERATIONS ON THE SUPERSONIC AD HYPERSONIC MOTION PAST THE CIRCULAR CONE AT ANGLE OF ATTACK, în colaborare cu C. Berbente, Zeitschrift für Flugwissenschaften, Braunschweig, **18** *2,3* (1970).

d) NOTE ȘTIINȚIFICE ȘI ALTE PUBLICAȚII

117. CONTRIBUTION A LA THEORIE DE LA SUSTENTATION EN AERODYNAMIQUE, Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. pour obtenir le grade ae docteur ès sciences physiques, Paris, Etienne Chiron, éditeur (1928).
118. CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT PLAN DES FLUIDES, în colaborare cu A. Toussaint, Recherche et Invention, Paris, dec. 1926.
119. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES DE LA THEORIE DES AILES SUSTENTATRICES, în colaborare cu A. Tussaint, L'Aérophile, Paris, 15 avril 1927.
120. SUR UNE REMARQUE AU SUJET DU THEOREME DES FORCES VIVES APPLIQUEE A L'HYDRODYNAMIQUE RATIONNELLE, L'Aérophile, Paris, 1—15 juillet 1927.
121. LE CHOIX DU PROFIL DES AILES SUSTENTATRICES, în colaborare cu A. Toussaint, L'Aéronautique, Paris, déc. 1927 et janvier 1928, nos. 11—104.
122. CONFRONTATION DES THEORIES AERODYNAMIQUES MODERNES AVEC LES, LOIS DE LA MECANIQUE RATIONNELLE, L'Aérophile, Paris, 1—15 juillet 1927.
123. CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES DES PROFILS EMPIRIQUES MINCES, în colaborare cu A. Toussaint, L'Aérophile, Paris, 1—15 juin 1928.
124. ETUDE SUR LES PERTES DE CHARGE DANS LES AJOUTAGES VENTURI, în colaborare cu A. Toussaint, Chaleur et Industrie, janvier et février 1928.
125. SUR LE CENTRAGE DES AVIONS, Bulletin des Mathématiques et de Physique Pure et Appliquée de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, no. 1-er, an 1, 1929.
126. SUR LA STABILITE LONGITUDINALE ET LE CENTRAGE DES AVIONS, L'Aéronautique, janvier 1930, no. 128, Paris.
127. SUR LE CALCUL DES AVIONS : DETERMINATION DES FORCES EXTERIEURES, L'Aérotechnique, juin-juillet 1930, nos. 133, 134.
128. OBSERVATIONS SUR UNE NOTE : LES MOUVEMENTS FLUIDES ENGENDRES PAR LA ROTATION DE CERTAINS SOLIDES DE V. VÂLCOVICI, Bull. de math. et de phys. de l'Ec. Polyt. de Bucarest, **I**, *2* (1930).
129. CALCUL DES PERFORMANCES D'UN AVION, Bull. de math. et de phys. de l'Ec. Polyt. de Bucarest. **I**, *3* (1930) și **II**, *1* (1931).
130. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR GEOMETRICE PRINCIPALE ALE UNUI AVION, Revista aeronautică, *7—8* (1936).
131. CURS GENERAL DE AERONAUTICĂ, litografiat, Școala politehnică din București, 1936—1944.
132. APLICAREA TEOREMEI IMPULSULUI LA DETERMINAREA CONTRACȚIEI UNEI VENE LICHIDE CE SE SCURGE PRINTR-UN ORIFICIU, în colaborare cu Viorica Beleș, Buletinul Societății Politehnice, an LXI, nr. 1, 1947, pag. 192—207.
183. PROFILE AERODINAMICE DE MARE VITEZĂ (PROFILE LAMINARE), Studii, *1*, Editura de Stat, București 1948.

e) NOTE PREZENTATE LA CONGRESE INTERNAȚIONALE

134. INTRODUCEREA ASTRONAUTICII ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR, în colaborare cu M. Niță, Al XVI-lea Congres al Federației internaționale de Astronautică, Atena, sept. 1965. — publicată în Proceedings of the XVIth I.A.F. Congress.
135. ASUPRA ÎNCEPUTURILOR CONSTRUCȚIEI DE RACHETE, după cercetările lui D. Todericiu, comunicată la al XVII-lea Congres al Federației internaționale de Astronautică, Madrid, oct. 1966.

f) ARTICOLE CULTURAL-ȘTIINȚIFICE

136. ISTORICUL DEZVOLTĂRII AEROTEHNICII ÎN ROMÂNIA, Buletinul Societății Politehnice, **XLV**, p. 1531—1542 (1931).
137. AUREL VLAICU, INVENTATOR, CONSTRUCTOR ȘI ZBURĂTOR, București, Edit. tehnică, 1954.
138. UN PIONIER AL AVIAȚIEI MONDIALE: TRAIAN VUIA, Sesiunea Academiei R.P.R., iulie 1956.
139. A PIONEER OF WORLD AVIATION: TRAIAN VUIA, București Edit. Academiei R.P.R., 1956.
140. ÎN SPRIJINUL PROGRESULUI TEHNIC, Scînteia Tineretului, 24 aprilie 1959.
141. CONTRIBUȚII ROMÂNEȘTI LA AERONAUTICA MONDIALĂ, Contemporanul, 10 iulie 1959.
142. DEZVOLTAREA CERCETĂRILOR DE MECANICA APLICATĂ ÎN UNIUNEA SOVIETICĂ, Revista Învățămîntul superior, an I, iulie-sept. 1959, pag. 85—93.
143. UN NOU ASALT AL COSMOSULUI, Informația Bucureștiului, 5 oct. 1959.
144. REALIZĂRI ȘI PERSPECTIVE, România Liberă, 30 dec. 1959.
145. AUREL VLAICU, PIONIER AL AVIAȚIEI ROMÂNEȘTI, Ed. a II-a, SRSC, București, 1960.
146, 147. CONGRESUL UNIONAL DE MECANICA TEORETICĂ ȘI APLICATĂ (MOSCOVA, 27.I.—2.II.1959), în colaborare cu T. Hacker, St. cerc. mec. apl., **5**, (1960), și în Scînteia, 18 febr. 1960.
148. DEZVOLTAREA CERCETĂRILOR ȘTIINȚIFICE ÎN INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ AL ACADEMIEI R.S.R., St. cerc. mec. apl., *6* (1960).
149. LA ORDINEA ZILEI: MECANICA, Veac Nou, 26 febr. 1960.
150. ȘTIINȚA VA FI ȘI EA PREZENTĂ, Scînteia, 20 mai 1960.
151. LA NIVELUL TEHNICII MONDIALE, Contemporanul, 3 iunie 1960.
152, 153, 154, 155. ARTICOLE CU PRILEJUL ÎMPLINIRII A 50 DE ANI DE LA PRIMUL ZBOR AL LUI VLAICU, Scînteia, 7 iunie 1960, Contemporanul, 17 iunie 1960, Munca, 17 iunie 1960, Luceafărul, 15 iulie 1960.
156. PROF. AUREL BARGLAZAN, Contemporanul, 21 oct. 1960.
157. CERCETĂRILE DE MECANICĂ APLICATĂ ÎN SPRIJINUL PRODUCȚIEI, Scînteia 22 dec. 1960.
158. PERSPECTIVELE PE 1962 ALE INSTITUTULUI DE MECANICĂ APLICATĂ, Contemporanul, 30 dec. 1960.
159. PERSPECTIVELE CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE, Contemporanul, 30 dec. 1960.
160. O IZBÎNDĂ EPOCALĂ, Scînteia, 14 aprilie 1961.
161. ÎNALTA DATORIE, Pentru Apărarea Păcii, nr. 5, 1962.
162. CERCETĂRI DE AEROMECANICĂ LA INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ, Sport și Tehnică, *4* (1962).
163. CUCERIREA EPOCALĂ A OMULUI: ZBORUL ÎN COSMOS (PARTEA I și II), Viața Studențească, 10 și 20 apr. 1962.
164. UN ROMÂN: CONSTRUCTORUL PRIMULUI AVION CU REACȚIE DIN LUME, HENRI COANDĂ, Flacăra, 28 iulie 1962.
165. CU PRILEJUL ÎMPLINIRII A 90 DE ANI DE LA NAȘTEREA LUI TRAIAN VUIA, România Liberă, 15 aug. 1962.
166. SE DESCHIDE CARTEA MINUNILOR DIN COSMOS, Scînteia, 16 aug. 1962,
167. ȘTIINȚA PĂTRUNDE TAINELE COSMOSULUI, România Liberă, 30 sept. 1962.
168. CERCETĂRILE DE MECANICĂ APLICATĂ ÎN CONTINUĂ DEZVOLTARE, Scînteia, 22 iunie 1963.

169. 170, 171. ARTICOLE CU PRILEJUL ÎMPLINIRII A 50 DE ANI DE LA MOARTEA LUI AUREL VLAICU, Gazeta literară, 12 sept. 1963, România Liberă, 16 sept. 1963, Viaţa Studenţească, 21 sept. 1963.
172. CONGRESUL INTERNAŢIONAL DE ASTRONAUTICĂ, Tribuna, 7 noiembrie 1963.
173. REALIZĂRI ŞI PERSPECTIVE ÎN DOMENIUL ŞTIINŢELOR TEHNICE, Sesiunea Academiei R.S.R. consacrată celei de a XX-a aniversări a Eliberării Patriei, publicat în Analele Academiei R.S.R., 1964.
174. HENRI COANDĂ ŞI CONTRIBUŢIA SA LA DEZVOLTAREA AVIAŢIEI, Sport şi Tehnică, *3* (1964).
175. S-A ÎNTORS PRIMUL ECHIPAJ COSMIC, Scînteia, 14 oct. 1964.
176. CERCETĂTORI SPAŢIALI PE ORBITĂ Neuer Weg, oct. 1964.
177, 178, 179. ARTICOLE CU PRILEJUL ÎMPLINIRII A 60 DE ANI DE LA ZBORUL EPOCAL AL LUI TRAIAN VUIA, Munca, februarie 1966, Viaţa Economică, nr. 10, 11 martie 1966, Tribuna, nr. 12, 24 martie 1966.
180. ACTIVITATEA ŞTIINŢIFICĂ ÎN DOMENIUL MECANICII ÎN ROMÂNIA, Conferinţa de Mecanică, Bucureşti, 1965, St. cerc. mec. apl. *1* (1966). — publicat şi în limba franceză în „Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, no. 1, 1966.
181. CUVÎNT DE ÎNCHIDERE LA CONFERINŢA DE MECANICĂ DIN SEPT. 1965, St. cerc. mec. apl., **21**, *1*, 27—30 (1966).
182. ROLUL ŞTIINŢELOR TEHNICE ÎN DEZVOLTAREA ECONOMIEI NAŢIONALE A ROMÂNIEI, Centenarul Academiei R.S.R., sept. 1966.
183. CÎTEVA ASPECTE A DOUĂ RECENTE MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE INTERNAŢIONALE, România Liberă, 11 noiembrie 1966.
184. O HOTĂRÎRE CRUCIALĂ, publicat în Volumul „Amintiri din anii de şcoală", Editura Politică, Bucureşti 1967.
185. ŞTIINŢELE MECANICE ŞI ROLUL LOR IN TEHNICA DE PRODUCŢIE, în colaborare cu M. Niţă, publicat în Volumul „Revoluţia ştiinţifică şi tehnică contemporană", Editura Tehnică, Bucureşti, 1967
186. RECOLTA CEA MAI BUNĂ DE INTELIGENŢĂ, Contemporanul, 17 febr. 1967.
187, 188, 189. ARTICOLE ŞI CUVÎNTĂRI CU PRILEJUL SIMPOZIONULUI PRIVIND „EFECTUL COANDĂ", BUCUREŞTI, IUNIE 1967, Henri Coandă în Scînteia, 23 iunie 1967 Simpozion despre „Efectul Coandă" în Buletinul Comisiei Naţionale a RSR pentru UNESCO, nr. 3—4, 1967 „Henri Coandă, pionier al aerodinamicii aplicate" în Studii şi cercetări de mecanică aplicată, vol. XXVII, nr. 3, publicat şi în limba franceză în Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, nr. 3, vol. XIII, 1968.
190, 191. ARTICOLE CU PRILEJUL ÎMPLINIRII A 95 DE ANI DE LA NAŞTEREA LUI TRAIAN VUIA, Scînteia, aug. 1967, Albina, 25 aug. 1967.
192. CERCETAREA ŞTIINŢIFICĂ ŞI CONSTRUCŢIILE AEROSPAŢIALE, Cronica, Iaşi, 17 febr. 1968.
193. AVIAŢIA LA TIMPUL VIITOR, Cutezătorii 11 apr. 1968.
194. AVIAŢIA CUCEREŞTE LUMEA, Cutezătorii, *53*, 26 sept. 1968.
195. ASTRONAUTICA ŞI COOPERAREA MONDIALĂ, Informaţia Bucureştiului, 30 nov. 1968.
196. PREISTORIA RACHETEI MODERNE, Informaţia Bucureştiului, 9 mai 1969,
197. O DEZBATERE FRUCTUOASĂ ÎNTR-UN DOMENIU DE LARG INTERES APLICATIV, Scînteia, iunie 28, 1969.
198. NAVIGAŢIA VIITORULUI, Informaţia Bucureştiului, 19 iulie 1969.
199. O REALIZARE IN ISTORIA CIVILIZAŢIEI UMANE, Scînteia, 22 iulie 1969.
200. FANTASTICA AVENTURĂ A DEVENIT O GLORIOASĂ FAPTĂ, Sportul 22 iulie 1969.
201. DEZVOLTAREA CERCETĂRILOR DE MECANICĂ APLICATĂ ÎN ROMÂNIA, prezentat la Conferinţa naţională de Mecanică, iunie 1969, Bucureşti, publicat în Studii şi cercetări de mecanică aplicată vol. 29, nr. 1, 1970 şi în limba engleză în Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, 1970, tome XV, no. 1.
202. CUVÎNT DE ÎNCHIDERE (CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE MECANICĂ, IUNIE 1969), St. cerc. mec. apl., **29**, *1* (1970). — publicat şi în limba engleză în Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XV**, nr. *1* (1970).

g) INSTALAȚII EXPERIMENTALE ȘI REALIZĂRI TEHNICE

— Instalația hidrodinamică folosită în diverse laboratoare din Franța și România, pentru vizualizarea mișcării fluidelor în jurul corpurilor de aviație (Paris), denumită „couve Toussaint-Carafoli".
— Tunel aerodinamic — Institutul politehnic din București — în colaborare cu I. Stroescu. Prima instalație de acest gen în sud-estul european, cu circuit continuu.
— Organizarea diferitelor instalații aerodinamice la Institutul Politehnic din București.
— Sufleria mare și alte instalații pentru viteze mari, la Institutul de Mecanica fluidelor (în colaborare cu un colectiv de ingineri).
— Avioane de vînătoare cu aripa joasă (soluție îndrăzneață pe vremea aceea), cu performanțe remarcabile, construite la Industria Aeronautică Română, Brașov, 1930—1931 (în colaborare cu un colectiv de ingineri).
— Poiectarea, construcția și conducerea Uzinei „Industria Română Mecanică și Chimică" (Ploiești-Tîrgoviște).

Omagiu academicianului ELIE CARAFOLI

STUDIU ASUPRA ACTIVĂRII CENTRELOR DE NUCLEAȚIE DE DIFERITE MICROGEOMETRII ÎN PROCESUL DE CAVITAȚIE

de I. ANTON și L. VÉKÁS

Centrul de cercetări pentru mașini hidraulice Timișoara

Considerînd formarea nucleelor ca un proces reversibil, se face un studiu comparativ al activării centrelor de nucleație de diferite microgeometrii. Se arată că acele adînciturl ale suprafeței solide care prezintă o creștere a diametrului cu adîncimea sînt cele mai favorabile activării, în concordanță cu unele observații experimentale. De asemenea, luînd în considerare și influența conținutului de gaz nedizolvat asupra activării centrelor de nucleație, se constată, pe un caz particular, că această influență este comparabilă sau chiar mai mare decît cea a formei geometrice.

INTRODUCERE

Apariția cavității, adică a unei discontinuități macroscopice în masa unui lichid, se datorește dezvoltării unor nuclee microscopice care au depășit o anumită dimensiune critică.

În cea mai mare parte nucleația bulelor are loc în fisurile și adînciturile suprafeței solide în contact cu lichidul. Determinarea condițiilor în care o astfel de microneregularitate superficială poate deveni centru de generare a bulelor de vapori, adică centru de nucleație activ, prezintă interes atît în studiul cavității, cît și în cel al fierberii.

Activarea unui centru de nucleație depinde de mai mulți factori: supraîncălzirea lichidului, unghiul de contact lichid-solid, forma geometrică și dimensiunile microneregularității suprafeței solide, cantitatea de gaz nedizolvat reținut în interiorul cavității prin adsorbție, existența unor porțiuni ale suprafeței solide neudate de lichid etc.

Cercetările experimentale și teoretice privind rolul caracteristicilor suprafeței solide au arătat că mărirea rugozității duce la o creștere a numărului de centre active și că forma geometrică a microneregularităților superficiale de asemenea influențează procesul de nucleație [1]—[5].

Lucrarea de faţă este o continuare a cercetărilor din cadrul colectivului Centrului de cercetări pentru maşini hidraulice din Timişoara, privind influenţa microgeometriei centrelor de nucleaţie asupra apariţiei bulelor cavitaţionale [5]. Considerînd că apariţia unui germene de vapori se datoreşte unei fluctuaţii, se examinează activarea unor centre de diferite forme geometrice şi se arată care sînt formele cele mai favorabile nucleaţiei bulelor cavitaţionale în anumite condiţii fizice date.

PROBABILITATEA FORMĂRII UNUI GERMENE DE VAPORI

Fie un sistem format dintr-un lichid în contact cu un solid avînd o adîncitură pe suprafaţă (fig. 1). Probabilitatea unei fluctuaţii (care poate duce la formarea unui germene de vapori) este [6]

$$P \sim \exp\,(+\Delta S_l/k),$$

unde ΔS_l reprezintă variaţia entropiei totale a sistemului prin fluctuaţia considerată (k — constanta lui Boltzmann).

Se poate arăta că

$$\Delta S_l = -\frac{L_{\min}}{T},$$

unde $L_{\min}$ este lucrul mecanic minim, care s-a cheltuit pentru variaţia pe cale reversibilă a mărimilor termodinamice corespunzătoare unei părţi mici din sistem (pentru care restul sistemului joacă rol de „mediu"), iar T temperatura sistemului. Prin urmare

$$P \sim \exp\,(-L_{\min}/kT), \tag{1}$$

care reprezintă tocmai probabilitatea formării unui germene de vapori pe cale reversibilă.

Dacă temperatura şi presiunea la interfaţa lichid-vapori sînt cele corespunzătoare condiţiilor de saturaţie, atunci temperatura şi potenţialul chimic rămîn constante la trecerea prin această interfaţă şi $L_{\min}$ este egal tocmai cu variaţia potenţialului termodinamic $\Omega = -pV$.

Înainte de formarea nucleului de vapori de volum V_v, potenţialul Ω pentru porţiunea de volum V_v din sistemul considerat are valoarea

$$\Omega_1 = -p_l V_v + \sigma_{sl} A_s, \tag{2}$$

p_l fiind presiunea, σ_{sl} densitatea energiei libere superficiale a interfeţei solid-lichid, iar A_s aria interfeţei solid-lichid.

După formarea nucleului de vapori de volum V_v apar două interfeţe noi, una solid-vapori (A_s) şi una lichid-vapori (A_l), deci potenţialul Ω are valoarea

$$\Omega_2 = -p_v V_v + \sigma_{sv} A_s + \sigma_{lv} A_l, \tag{3}$$

unde σ_{sv} și σ_{lv} sînt densitățile de energie liberă superficială a interfeței solid-vapori, respectiv lichid-vapori.

Din ultimele două relații rezultă valoarea lucrului mecanic necesar formării nucleului de vapori:

$$L_{\min} = (\sigma_{sv} - \sigma_{sl}) A_s + \sigma_{lv} A_l - V_v \Delta p. \tag{4}$$

În caz de echilibru termodinamic au loc relațiile:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r_0}, \tag{5}$$

r_0 fiind raza de curbură a interfeței lichid-vapori,

$$\sigma_{sv} - \sigma_{sl} = \sigma_{lv} \cos \theta \equiv \sigma \cos \theta, \tag{6}$$

θ — unghiul de contact, deci

$$L_{\min} = \sigma(A_l + A_s \cos \theta) - V_v \frac{2\sigma}{r_0}. \tag{4'}$$

În consecință, probabilitatea formării unui nucleu de vapori capabil să crească este

$$P \sim \exp\left\{\frac{1}{kT}\left[\sigma(A_l + A_s \cos \theta) - V_v \frac{2\sigma}{r_0}\right]\right\}. \tag{7}$$

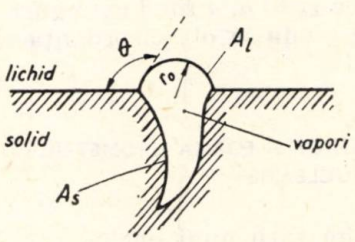


Fig. 1. — Nucleu de vapori într-o adîncitură a suprafeței solide.

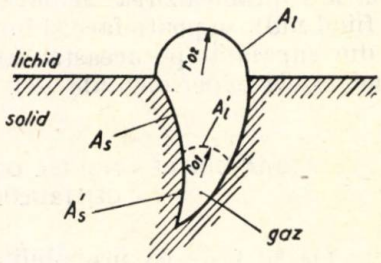


Fig. 2. — Centru de nucleație cu rest de gaz.

Dacă înainte de formarea nucleului de vapori în adîncitura considerată a existat o cantitate de gaz de volum V_g, formulele (2) și (3) se scriu astfel (vezi și fig. 2):

$$\Omega_1' = p_l(V_v + V_g) - (p_g + p_v^*) V_v + \sigma_{sl}(A_s - A_s') + \sigma_{sg} A_s' + \\ + \sigma_{lg} A' l, \tag{8}$$

$$\Omega_2' = -(p_v + p_g^*) V_v + \sigma_{sv} A_s + \sigma_{lv} A_l. \tag{9}$$

Considerînd $\sigma_{sg} \cong \sigma_{sv}$, $\sigma_{lg} \cong \sigma_{lv} \equiv \sigma$ și ținînd cont de condițiile de echilibru valabile pentru o interfață lichid-vapori de formă sferică,

$$\Delta p_1 = \frac{2\sigma}{r_{01}}, \tag{5'}$$

pentru starea 1, cînd $p_g \gg p_v^*$ (presiunea parțială a vaporilor în starea 1), și

$$\Delta p_2 = \frac{2\sigma}{r_{02}} \tag{5''}$$

pentru starea 2, cînd $p_v \gg p_g^*$ (presiunea parțială a gazului în starea 2), precum și de condiția (6), rezultă următoarea expresie a lucrului mecanic :

$$L'_{\min} = -\frac{2\sigma}{r_{02}} V_v + \frac{2\sigma}{r_{01}} V_g + \sigma[(A_l - A'_l) + (A_s - A'_s)\cos\theta]. \tag{10}$$

Evident, formula (7) a probabilității unui nucleu de vapori capabil să crească, se modifică corespunzător ultimei relații.

Condițiile (5), (5'), (5'') și (6) sînt valabile numai în cazul echilibrului termodinamic ; existența unui gradient de temperatură în lichid face ca vaporii din cavitate să nu mai fie în echilibru termic și mecanic cu lichidul înconjurător, interfața lichid-vapori avînd o formă diferită de cea sferică, specificarea ei nemaifiind posibilă cu un singur parametru. În acest caz, cel mai des întîlnit în practică, supraîncălzirea necesară activării este mai mare decît cea care rezultă din condiția de echilibru (5) și ecuația Clausius-Clapeyron [7].

Dacă supraîncălzirea lichidului este uniformă (gradientul temperaturii fiind nul), se poate face și înlocuirea $r_0 = a$, a fiind raza gurii adînciturii din supafață, pe această cale obținîndu-se o concordanță relativ bună cu datele experimentale [8].

LEGĂTURA DINTRE UNGHIUL DE CONTACT ȘI FORMA GEOMETRICĂ A CENTRULUI DE NUCLEAȚIE

Din (1) se vede că probabilitatea formării unui nucleu capabil să crească diferă esențial de zero numai cînd $L_{\min} \to 0$. Punînd această condiție în relația (4') și făcînd și înlocuirea $r_0 = a$, rezultă

$$\cos\theta = \frac{1}{A_s}\left(\frac{2V_v}{a} - A_l\right), \tag{11}$$

relație care exprimă legătura dintre unghiul de contact θ și forma geometrică a centrului de nucleație.

Această legătură a fost studiată în lucrarea [9] în cazul unor centre conice, cilindrice și de forma unei calote sferice.

Să considerăm centrele de nucleație de formă mai generală de tipul I și II din figura 3. Centrele de tipul I sînt caracterizate de parametri a,

b, h, R, φ, iar cele de tipul II de a, b, h și φ. Punînd condiția (11) pentru aceste două tipuri de centre, rezultă relațiile :

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{h(a-R)(a+b+R)-a^3-a(b^2+R^2+bR)\operatorname{ctg}\varphi}{a[(a+b)\sqrt{(a-b)^2+h^2}+(b+R)\sqrt{(R-b)^2+(a\operatorname{ctg}\varphi-h)^2}+R^2]}, \tag{12}$$

$$\cos\theta = \frac{a^3(\operatorname{ctg}^3\varphi-2)+a^2h(2-3\operatorname{ctg}^2\varphi)+(b^2+h^2)3a\operatorname{ctg}\varphi+h(2ab-b^2-h^2)}{3a[(a+b)\sqrt{(a-b)^2+h^2}+b^2+(a\operatorname{ctg}\varphi-h)^2]}. \tag{13}$$

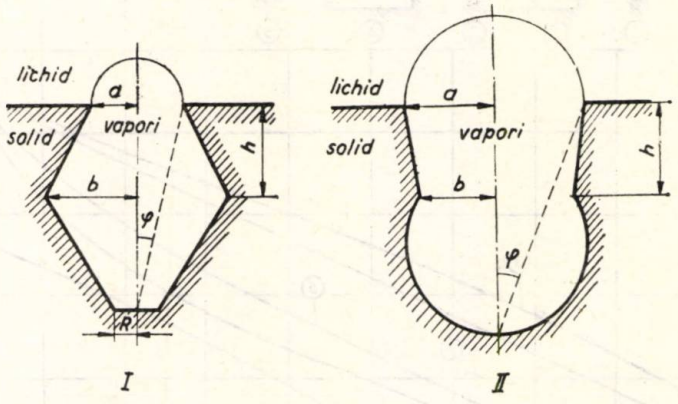


Fig. 3. — Centre de nucleație de tipul I și II.

Reprezentînd grafic $\theta = \theta(\varphi)$ pentru diferite valori ale parametrilor a, b, R și h, care specifică forma concretă a centrului de nucleație, în domeniul valorilor posibile ale unghiurilor θ și φ ($0 \leqslant \theta \leqslant 180°$, $0 < \varphi < 90°$), se delimitează două regiuni :

a) regiunea de sub curba $\theta = \theta(\varphi)$, pentru care $L_{min} > 0$ și

b) regiunea deasupra curbei, unde $L_{min} < 0$.

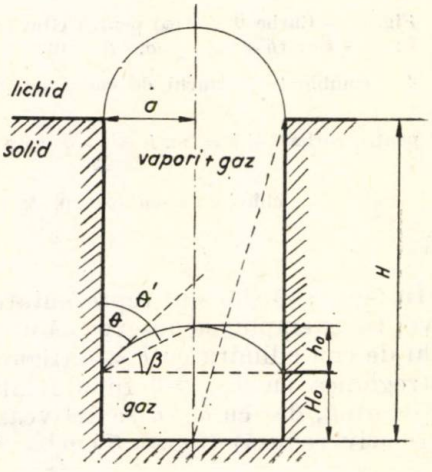


Fig. 4. — Centru de nucleație de formă cilindrică cu rest de gaz.

Cu cît regiunea b) este mai mare cu atît centrul respectiv se activează mai uşor.

Examinînd curbele $\theta = \theta(\varphi)$ pentru diferite valori ale parametrilor b, h, R (în cazul centrelor de tipul I) respectiv b, h (în cazul centrelor de tipul II), se pot trage anumite concluzii relativ la activarea centrelor de nucleaţie în funcţie de microgeometria lor.

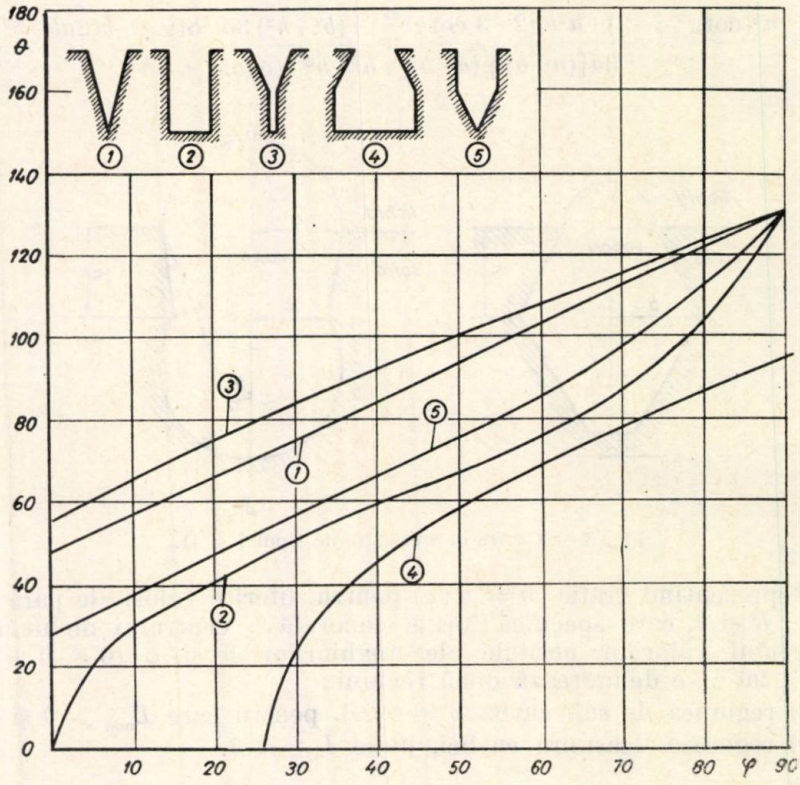


Fig. 5. — Curbe $\theta = \theta(\varphi)$ pentru cîteva cazuri particulare de centre de tipul I: *1* — con ($h = 0$, $b = a$, $R = 0$); *2* — cilindru ($h = 0$, $b = R = a$); *3* şi *4* — combinaţie trunchi de con — cilindru ($R = b$): $b = \frac{a}{4}$, $h = \frac{1}{2}$ actg φ pentru curba *3* şi $b = 2a$, $h = \frac{1}{2}\, a$ cotg φ pentru curba *4*; *5* — combinaţie cilindru — con ($b = 0$, $R = 0$) cu $h = \frac{1}{2}\, a$ cotg φ.

În figurile 5 şi 6 sînt reprezentate cîteva curbe $\theta = \theta(\varphi)$ mai semnificative. De exemplu, se observă că un centru avînd forma unei combinaţii trunchi de con-cilindru cu $b < a$ (figura 5 curba *3*) se activează în general greu (regiunea cu $L_{min} > 0$ fiind relativ întinsă), pe cînd un centru de aceeaşi formă, dar cu $b > a$ se activează foarte uşor (regiunea cu $L_{min} > 0$ fiind relativ redusă) (figura 5 curba *4*). Este interesant de remarcat că

din observațiile lui Benjamin și Westwater [10] rezultă că un centru artificial de această formă cu $b > a$ trebuie să fie într-adevăr ușor activabil, deoarece funcționarea lui în tot timpul experiențelor a fost foarte stabilă.

Din figura 5 se observă de asemenea că un centru de formă cilindrică (curba *2*) se activează mai ușor decît unul conic (curba *1*), iar combinația cilindru-con (curba *5*) va avea o comportare intermediară.

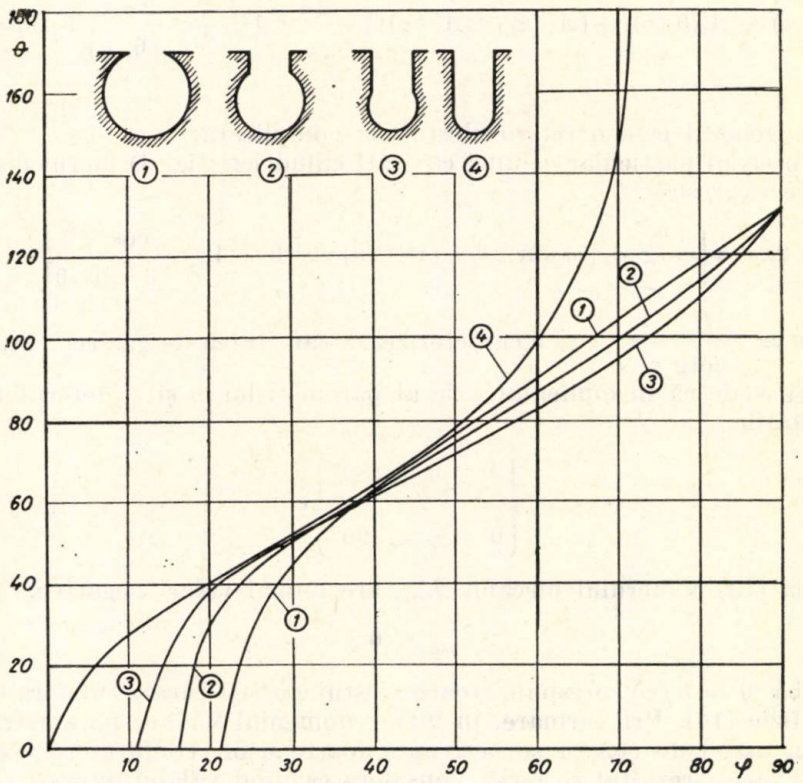


Fig. 6. — Curbe $\theta = \theta(\varphi)$ pentru centre de tipul II: *1* — calotă sferică ($b = a$, $h = 0$); *2*, *3* și *4* — combinație cilindru — calotă sferică ($b = a$): $h = \frac{1}{4}$ a cotg φ pentru curba *2*, $h = \frac{1}{2}\ a$ cotg φ pentru curba *3* și $h = a \times (\text{cotg}\,\varphi - 1)$ pentru curba *4*.

Dintre centrele de tipul II, centrul în formă de calotă sferică se activează ușor, cel puțin la unghiuri de deschidere mici.

Examinînd o serie de centre de tipul I și II se constată că acele adînciturі care prezintă o creștere a diametrului cu adîncimea, sînt favorabile activării. Curbele *3* și *4* din figura 5 constituie un exemplu elocvent în acest sens. Curba *3*, care se referă la un centru de forma unei combinații trunchi de con-cilindru cu $b < a$, se situează mult deasupra curbei *4*, valabilă pentru un centru de aceeași formă, dar cu $b > a$. Cele arătate mai sus sînt

în concordanță cu unele observații experimentale și teoretice asupra formei centrelor de nucleație, prezentate în alte lucrări [3], [8], [10].

Dacă se ia în considerare și cantitatea de gaz reținut în interiorul centrului de nucleație, lucrul mecanic necesar formării unui germene va avea expresia (10). Punînd condiția $L'_{min} = 0$ și făcînd înlocuirea $r_{02} = a$, rezultă următoarea legătură între θ și φ:

$$\sigma[(A_l(\varphi) - A'_l(\theta, \varphi)) + (A_s(\varphi) - A'_s(\varphi))] + \frac{2\sigma}{a} V_v(\varphi) + \frac{2\sigma}{r_{01}(\theta, \varphi)} V_g(\theta, \varphi) = 0, \tag{14}$$

care în general este o relație destul de complicată.

În cazul particular al unei cavități cilindrice (fig. 4) lucrul mecanic L'_{min} are expresia:

$$L'_{min} = 2\pi a^2 \sigma \left\{ \operatorname{cotg} \varphi \, [m \sin 2\theta + (1 - m) \cos \theta - 1] - \frac{\cos^2 2\theta}{6 \sin^2 \theta} \right\}, \tag{15}$$

unde $m = \dfrac{H_0}{a \operatorname{cotg} \varphi} < 1$ și θ caracterizează cantitatea de gaz reținut.

Se vede că în domeniul fizic al parametrilor θ și φ determinat de inegalitățile

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \theta \leqslant 180^\circ \\ 0 < \varphi < 90^\circ \end{array}\right\}, \tag{16}$$

expresia (15) a lucrului mecanic L'_{min} are numai valori negative,

$$L'_{min} < 0, \tag{17}$$

iar curba $\theta = \theta(\varphi)$ corespunzătoare acestui caz se situează în afara domeniului fizic (16). Prin urmare, în întreg domeniul fizic al parametrilor θ și φ un astfel de centru se activează foarte ușor, conform relației (1). Desigur, acest rezultat se poate considera ca fiind valabil numai în cazul unor adînciturи cilindrice cu unghi de deschidere suficient de mic pentru a reține o anumită cantitate de gaz.

Se observă că prezența unei cantități mici de gaz nedizolvat în interiorul centrului de nucleație, după cum era de așteptat, are un efect considerabil asupra procesului de nucleație și că acest efect este comparabil și chiar poate depăși pe cel al formei geometrice.

CONCLUZII

Din examinarea unor centre de nucleație de diferite microgeometrii s-a constatat că acele adînciturи care prezintă o creștere a diametrului cu adîncimea, sînt cele mai favorabile activării, în concordanță cu unele observații experimentale. Se arată, de asemenea, pe un caz particular, că efectul cantității de gaz reținut în interiorul centrului de nucleație este comparabil sau chiar mai mare decît cel al formei geometrice.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Corty, A. S. Foust, *Chem. Eng. Symp.*, **51**, *17*, 1—12 (1955).
2. J. W. Westwater, *Research in Heat Transfer*, Pergamon Press, 1963, p. 61—73.
3. P. J. Marto, W. M. Roshenow, Trans. ASME, J. Heat Transfer, **88**, *2*, 183—196, 196—204 (1966).
4. P. J. Marto, J. A. Moulson, M. D. Maynard, Trans ASME, J. Heat Transfer, **90**, *4*, 437—444 (1968).
5. V. Barbu, St. cerc. energ. electr. **20**, *2* 331—354 (1970).
6. L. Landau, E. Lifchitz, *Physique Statistique*, Edit. „Mir'', 1967, p. 421.
7. J. Madejski Int. J. Heat Mass Transfer, *9*, 295 (1966).
8. P. Griffith, J. D. Wallis, Chem. Eng. Progr. Symp. S., **56**, *30*, 49—63 (1960).
9. L. S. Kokorev V. I. Petrovicev, A. I. Pridanțev, A. A. Smirnov, V. I. Deev, A. V. Grabov, *Voprosî teplofiziki iadernîh reaktorov*, Atomizdat, 1968, p. 52—63.
10. J. E. Benjamin, J. W. Westwater, *International Developments in Heat Transfer*. 1961—1962, ASME, p. 212—218.

EXPERIENȚE DE CROMOPLASTICITATE

de ȘTEFAN BĂLAN
Institutul de construcții București

În lucrare se prezintă fenomenul de cromoplasticitate și cîteva experiențe efectuate în anul 1971.

În 1958 am publicat, împreună cu colegii Sandu Răutu și Valeriu Petcu, prima lucrare cu privire la cromoplasticitate intitulată *Introducerea masei plastice SDP-1 în studiul construcțiilor pe modele la scară redusă*, iar după 5 ani de studii a apărut cartea intitulată *Cromoplasticitatea* (Editura Academiei R.S.R., 1963), care s-a bucurat de o prefață amabilă a tov. acad. prof. Elie Carafoli.

Îmi face plăcere ca, în acest volum omagial, să reamintesc cîte ceva despre fenomenul de cromoplasticitate și să prezint cîteva experiențe executate în ultimul timp (în 1971).

Fenomenul cromoplastic se manifestă la anumite materiale și constă în proprietatea pe care o au aceste materiale, sub acțiunea sarcinilor, de a-și schimba culoarea în punctele în care efortul unitar atinge limita de curgere. Materialele au fost numite *cromoplastice*, iar fenomenul *cromoplasticitate*. La găsirea materialului cromoplastic cu care s-au făcut experiențele expuse în cartea amintită mai sus a avut o contribuție deosebită tov. ing. chimist N. Goldenberg, de la ICECHIM. S-au găsit mai multe sorturi de materiale și s-au efectuat numeroase experiențe și verificări.

Totdeauna s-a putut constata efectul cromoplastic : cînd apar deformațiile plastice, materialul cromoplastic își schimbă culoarea (obișnuit gălbuie), albindu-se cînd plastificarea se produce prin eforturile la întindere și înnegrindu-se cînd plastificarea se produce prin comprimare. Unde nu se produce curgere, culoarea rămîne neschimbată. De exemplu, figura 1 prezintă modul în care se colorează materialul în zona comprimată și în zona întinsă la o grindă crestată, iar figura 2 prezintă aceeași situație pentru modelul unei grinzi obișnuite. Figura 3 prezintă cazul unui colțar comprimat de două plăci paralele. În figura 4 *a* se arată o prismă găurită

supusă la compresiune cu două plăci paralele, iar în figura 4 *b* se studiază o problemă similară, în cazul unui cub, și se detaliază regiunea din jurul găurii.

În lucrarea *Cromoplasticitatea* s-au expus experiențele făcute, precum și calculele efectuate pe modele, pentru grinzi, stîlpi, arce, plăci, piese, suportînd sarcini concentrate. S-a avut în vedere faptul că în zona elastoplastică nu este totdeauna similitudine, îndeosebi cînd se ajunge pe materialul cromoplastic la fenomene de ordinul II.

Prin experiențe ulterioare s-a dovedit că metoda este de mare folos în studiile de calcul plastic al construcțiilor, mașinilor, carcaselor de nave etc.; se determină punctele în care începe plastificarea construcției, succesiunea apariției articulațiilor plastice, mecanismul de rupere, zonele periculoase etc.

De asemenea, se pot verifica unele ipoteze ale calculului plastic, mai dificil de demonstrat pe cale teoretică.

Metoda prezintă marele avantaj că nu necesită aparatură specială (ca, de exemplu, fotoelasticitatea) și nici tratamente speciale pentru materialele utilizate. Chiar materialele folosite în experimente sînt ușor de produs.

Metoda a trezit interes atît în țară, cît și peste hotare și a fost aplicată în multe cazuri. Întrucît în laboratoarele Centrului de mecanica solidelor s-au mai făcut unele experiențe interesante, considerăm că e util să prezentăm cîteva dintre ele.

Astfel în figura 5 se prezintă un cadru în momentul apropiat de stadiul de rupere; se văd clar deformațiile plastice și articulațiile plastice, se distinge existența unui mecanism de bară pe grinda superioară din partea stîngă. Figura 6 reprezintă o situație similară și atragem atenția în mod deosebit asupra colorării încastrărilor la partea de jos a stîlpilor. În figura 7 se arată modul în care apar deformațiile plastice în cazul unui panou cu găuri mari dreptunghiulare, acționat de forțe orizontale.

Pe baza acestor experiențe și a altora mai complexe s-a realizat, de către Institutul de teatru și cinematografie din București, un reușit film colorat.

La aceste experiențe am lucrat cu vechiul meu colaborator profesorul Sandu Răutu și cu alți distinși specialiști din sectorul de elasticitate-plasticitate al Centrului de mecanică a solidelor.

Am expus aceste cîteva experiențe atît pentru a le face cunoscute celor care se interesează de această problemă, cît și ca un omagiu pentru profesorul Elie Carafoli, care s-a interesat de rezultatele obținute în cromoplasticitate de la primele experimentări.

15 septembrie 1971

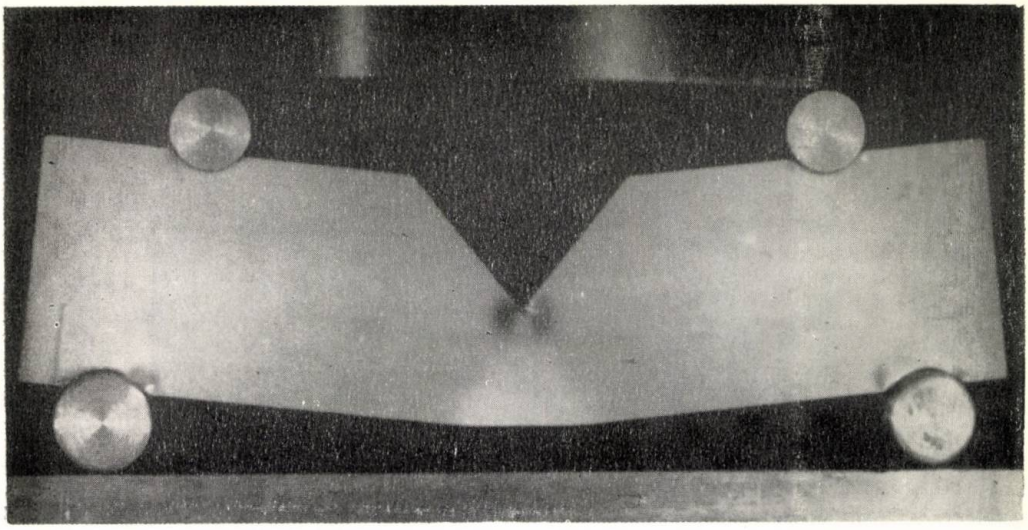


Fig. 1

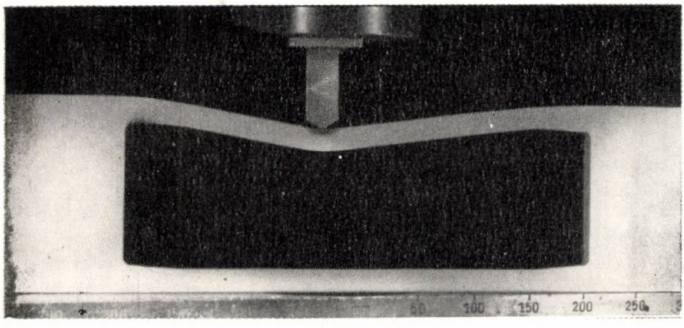


Fig. 2

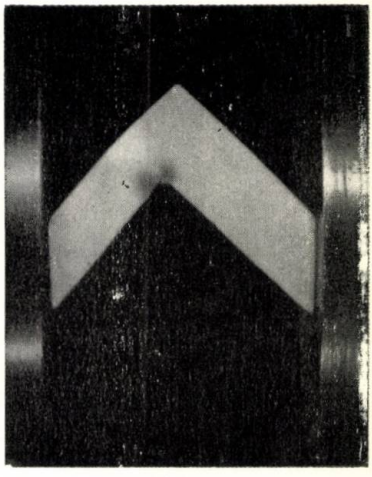


Fig. 3

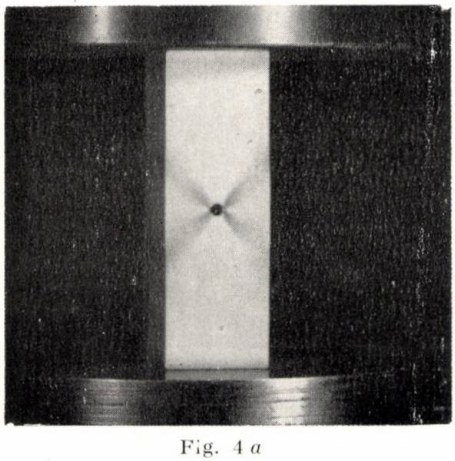


Fig. 4 *a*

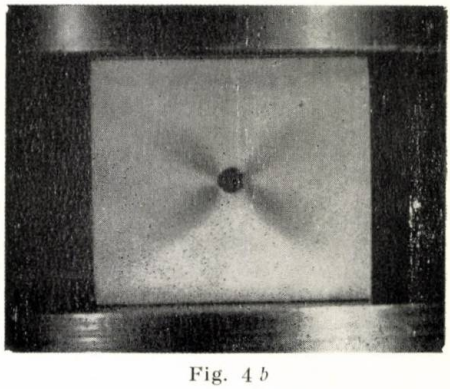


Fig. 4 *b*

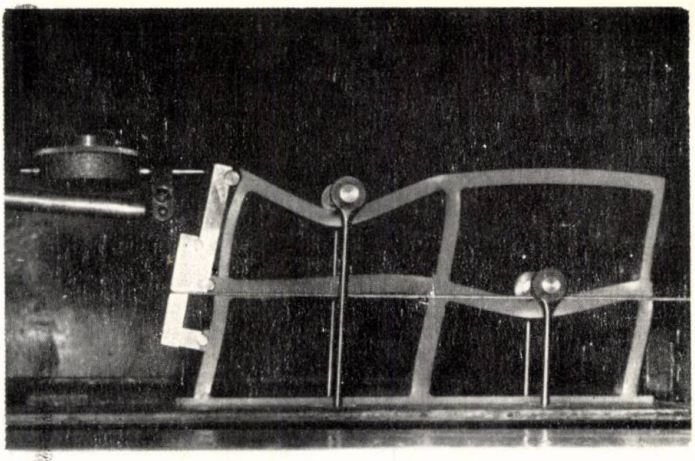


Fig. 5

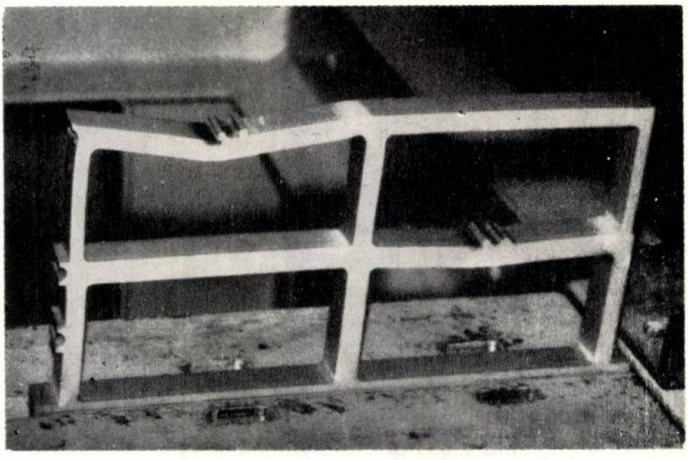


Fig. 6

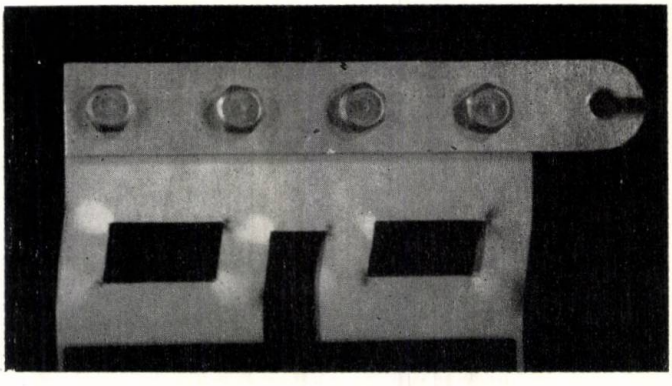


Fig. 7

Academicianului ELIE CAROFOLI, modest dar sincer omagiu

ÎMBUNĂTĂȚIREA ECHILIBRAJULUI MOMENTELOR EXTERNE ALE FORȚELOR DE INERȚIE ALE MASELOR CU MIȘCARE DE TRANSLAȚIE LA MOTORUL ÎN LINIE PRIN MODIFICAREA DISTANȚELOR DINTRE CILINDRII CONSECUTIVI

de G. BĂRĂNESCU
Institutul politehnic București

Se analizează posibilitățile de îmbunătățire a echilibrajului momentelor externe ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație la motoarele în linie, prin modificarea distanțelor dintre cilindri consecutivi. Se stabilesc condițiile generale ce trebuie îndeplinite pentru echilibrarea momentului extern produs de termenii de un ordin oarecare ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație. Este cercetată calea de rezolvare a problemei cînd numărul condițiilor de echilibrare impuse este egal sau mai mic decît numărul de variabile.

1. INTRODUCERE

O posibilitate de îmbunătățire a echilibrajului momentelor forțelor de inerție la motoarele cu ardere internă este modificarea distanțelor dintre cilindrii consecutivi. Această soluție prezintă un dezavantaj de principiu, și anume mărirea lungimii motorului, din care cauză soluția poate fi luată în considerare la motoarele cu slab echilibraj al momentelor forțelor de inerție, cum sînt motoarele cu număr impar de cilindri sau motoarele în doi timpi al căror număr de cilindri este o putere de doi.

În lucrare se stabilesc condițiile generale ce trebuie îndeplinite pentru echilibrarea momentului extern al termenilor de un ordin oarecare ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație. Se arată calea de rezolvare a problemei cînd numărul condițiilor de echilibrare impuse este egal sau mai mic decît numărul de variabile.

Aprinderile sînt presupuse uniform repartizate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 507—520

2. STABILIREA CONDIȚIILOR GENERALE DE ECHILIBRARE A MOMENTULUI EXTERN PRODUS DE TERMENII DE UN ORDIN OARECARE

Echilibrarea momentului extern al termenilor de un ordin oarecare ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație se realizează dacă s-a echilibrat momentul vectorilor care interpretează termenii respectivi într-o poziție oarecare a arborelui cotit.

Deoarece aprinderile sînt uniform repartizate, motoarele luate în considerare au manivelele uniform repartizate în jurul axei de rotație a arborelui cotit.

Fie i numărul cilindrilor. Se numerotează cu I, II, III,... i direcțiile din steaua manivelelor întîlnite consecutiv de un observator care se rotește în sensul de rotație al manivelelor, direcția I fiind aleasă arbitrar. În momentul de timp în care unghiul descris de manivela aflată pe direcția I este $\alpha_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{i}$, unghiurile pe care le fac celelalte direcții din steaua manivelelor cu originea în raport cu care se măsoară unghiurile descrise de manivele sînt

$$\alpha_{\mathrm{II}} = \frac{3}{2}\frac{2\pi}{i},\ \alpha_{\mathrm{III}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2\pi}{i},\ \ldots\ \alpha_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{i},\ \ldots\ \alpha_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{i}.$$

Fie $Oxyz$ un sistem ortogonal de axe, care are originea O la mijlocul arborelui cotit, axa Ox fiind paralelă cu planul determinat de axele cilindrilor și avînd ca sens pozitiv sensul chiulasă-carter, iar axa Oz fiind suprapusă cu axa de rotație a arborelui cotit. Se consideră de asemenea un alt sistem ortogonal de axe $O\,x'\ y'\ z$ care are comune cu sistemul precedent originea O și axa Oz, axele Ox' și Oy' fiind decalate în sensul de rotație al manivelelor față de axa Ox, respectiv, Ox cu unghiul ψ_p, a cărui mărime este definită în lucrarea [2].

Conform interpretării vectoriale a termenilor forței de inerție a maselor cu mișcare de translație [2], vectorii T_p, care interpretează termenii de ordinul p corespunzători manivelelor aflate pe direcțiile I, II, III, ... fac cu direcția Ox în sensul lor de rotație și în momentul de timp considerat unghiurile $p\alpha_{\mathrm{I}} + \psi_p$, $p\alpha_{\mathrm{II}} + \psi_p$, ...; față de direcția Ox' unghiurile sînt

$$\alpha_{\mathrm{I}_p} = \frac{1}{2}p\frac{2\pi}{i},\ \alpha_{\mathrm{II}_p} = \frac{3}{2}p\frac{2\pi}{i},\ \ldots\ \alpha_{j_p} = \left(j - \frac{1}{2}\right)p\frac{2\pi}{i},\ \ldots\ \alpha_{i_p} = \left(i - \frac{1}{2}\right)p\frac{2\pi}{i}.$$

Se proiectează vectorii T_p în planele $x'Oz$ și $y'Oz$. Momentele acestor componente sînt

$$M_{p_{x'}} = T_p \sum_{j=1}^{j=i} z_j \cos p\alpha_j,$$

$$M_{p_{y'}} = T_p \sum_{j=1}^{j=i} z_j \sin p\alpha_j,$$

z_j fiind distanța de la originea O la planul în care se mișcă manivela aflată pe direcția j.

Pentru echilibrarea momentului termenilor de ordinul p trebuie îndeplinite simultan condițiile

$$\sum_{j=1}^{j=i} z_j \cos p\alpha_j = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{j=i} z_j \sin p\alpha_j = 0. \tag{2}$$

Formulele (1) și (2) sînt ecuații liniare și omogene; în consecință echilibrarea momentului extern al oricărui termen este condiționată de mărimea relativă a distanțelor dintre cilindri consecutivi. Prin urmare, una din aceste distanțe poate fi aleasă egală cu distanța minimă posibilă d dintre doi cilindri consecutivi, celelalte distanțe, mai mari decît d, rezultînd din condițiile de echilibrare impuse.

Distanța minimă d poate fi situată între oricare doi cilindri consecutivi; există deci mai multe soluții de arbori cotiți, cea mai avantajoasă fiind evident soluția cu lungimea totală minimă.

Dintre cele $i-1$ distanțe care separă cilindri consecutivi pot fi modificate $i-2$ distanțe. Întrucît echilibrarea unui moment extern introduce două condiții, numărul maxim de momente externe care pot fi echilibrate prin modificarea distanțelor dintre cilindri consecutivi este $\frac{i-2}{2}$, cînd i este par, și $\frac{i-3}{2}$, cînd i este impar.

Motive de simetrie reclamă plasarea cilindrilor doi cîte doi la aceeași distanță de mijlocul arborelui cotit. Dacă această condiție este îndeplinită pentru distanțele

$$z_{\mathrm{I}} = -z_i,\ z_{\mathrm{II}} = -z_{i-1},\ z_{\mathrm{III}} = -z_{i-2},\ \ldots \tag{3}$$

formula (1) este totdeauna satisfăcută, deoarece

$$\alpha_{\mathrm{I}} = -\alpha_i,\ \alpha_{\mathrm{II}} = -\alpha_{i-1},\ \alpha_{\mathrm{III}} = -\alpha_{i-2},\ \ldots$$

În această situație formula (2) devine

$$z_{\mathrm{I}} \sin p\alpha_{\mathrm{I}} + z_{\mathrm{II}} \sin p\alpha_{\mathrm{II}} + \ldots + z_q \sin p\alpha_q = 0, \tag{4}$$

unde $q = \frac{i}{2}$ dacă i este par și $q = \frac{i-1}{2}$ dacă i este impar. În formula (4) pot fi modificate numai $q-1$ distanțe, deoarece, în condițiile (3), cel puțin două din distanțele dintre cilindri consecutivi sînt egale cu distanța minimă d [1]).

[1]) Dacă i este par, condiția (3) poate fi satisfăcută și cînd numai una dintre distanțele dintre cilindri consecutivi este egală cu distanța d; aceasta trebuie să fie între cilindri aflați de o parte și de alta a punctului O. Numărul distanțelor z care pot fi modificate este tot $q-1$, deoarece una din distanțele z din (4) este egală cu $\frac{d}{2}$.

3. DETERMINAREA STELEI MANIVELELOR ŞI A DISTANŢELOR DINTRE CILINDRII CONSECUTIVI CÎND NUMĂRUL MOMENTELOR EXTERNE ECHILIBRATE ESTE EGAL CU NIUMĂRUL DISTANŢELOR CARE POT FI MODIFICATE

Dacă numărul momentelor externe care urmează să fie echilibrate este $q-1$, aplicarea condiţiei (4) conduce la un sistem de $q-1$ ecuaţii liniare şi omogene cu q necunoscute. Împărţind toate ecuaţiile cu una din necunoscute, de pildă cu z_I, şi rezolvînd sistemul se obţin valorile rapoartelor $\frac{z_{II}}{z_I}, \frac{z_{III}}{z_I}, \ldots \frac{z_q}{z_I}$. Din compararea acestor valori se poate stabili mărimea relativă a distanţelor $Z_I, Z_{II}, \ldots Z_q$, ceea ce permite precizarea stelei manivelelor. Cunoscînd steaua manivelelor, se determină mărimile distanţelor $Z_I, Z_{II}, \ldots Z_q$ care conduc la cea mai mică lungime a motorului.

Ca exemplu fie cazul motorului cu nouă cilindri (pentru care $q = 4$). Se presupune că se impune echilibrarea momentelor externe ale termenilor 1, 2 şi 4; aplicînd formula (4), se obţine

$$\begin{aligned} z_I \sin \alpha_I + z_{II} \sin \alpha_{II} + z_{III} \sin \alpha_{III} + z_{IV} \sin \alpha_{IV} &= 0, \\ z_I \sin 2\alpha_I + z_{II} \sin 2\alpha_{II} + z_{III} \sin 2\alpha_{III} + z_{IV} \sin 2\alpha_{IV} &= 0, \\ z_I \sin 4\alpha_I + z_{II} \sin 4\alpha_{II} + z_{III} \sin 4\alpha_{III} + z_{IV} \sin 4\alpha_{IV} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Se consideră că acest sistem este compatibil şi că prin rezolvarea lui în raport cu z_I au rezultat pentru valorile absolute ale distanţelor $z_I \ldots z_{IV}$ următoarele condiţii:

$$|z_{II}| > |z_I| > |z_{IV}| > |z_{III}|, \tag{6}$$

obţinîndu-se totodată şi $z_{IV} < 0$.

Se numerotează cilindrii consecutiv, de la o extremitate la alta a motorului; între distanţele z_1, z_2, z_3, z_4 de la mijlocul arborelui cotit pînă la manivelele 1, 2, 3, 4 există relaţiile evidente

$$z_1 > z_2 > z_3 > z_4. \tag{7}$$

Comparînd relaţiile (6) şi (7), se deduce

$$z_{II} = z_1, \; z_I = z_2, \; z_{IV} = -z_3, \; z_{III} = z_4, \tag{8}$$

adică pe direcţiile II, I, III din steaua manivelelor se află respectiv manivelele 1, 2 şi 4, iar pe direcţia IV se află manivela care are faţă de mijlocul arborelui cotit o poziţie simetrică cu manivela 3, adică manivela 7. Plasînd celelalte manivele conform condiţiei (3), se obţine steaua manivelelor din figura 1.

Pentru stabilirea valorilor optime ale distanțelor $z_I \ldots z_{IV}$ se notează cu u, v, w distanțele necunoscute dintre cilindri consecutivi. Succesiunile posibile ale acestor distanțe sînt arătate în figura 2; variantele obținute prin schimbarea necunoscutelor între ele sînt distincte, deoarece notarea necunoscutelor nu este esențială.

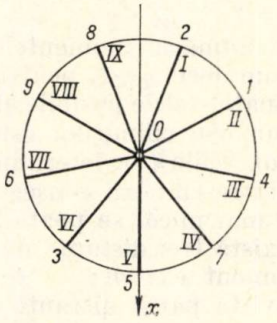


Fig. 1. — Steaua manivelelor la motorul în linie cu nouă cilindri și aprinderi uniform repartizate care asigură echilibrarea momentelor externe ale termenilor 1, 2 și 4 prin modificarea distanțelor dintre cilindrii consecutivi.

La fiecare succesiune se pot exprima distanțele $z_1 \ldots z_4$ în funcție de u, v, w, d; de pildă, pentru succesiunea a se obține

$$z_1 = d + u + v + w, \quad z_2 = u + v + w, \quad z_3 = u + v, \quad z_4 = w.$$

Relațiile (8) devin

$$z_{II} = d + u + v + w, \quad z_I = u + v + w, \quad z_{IV} = -(v + w), \quad z_{III} = w.$$

Înlocuind aceste expresii în (5) și rezolvînd sistemul, se obțin — în funcție de distanța minimă d — mărimile distanțelor u, v, w care asigură echilibrarea momentelor M_1, M_2 și M_4 în cazul succesiunii a.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a)	d	u	v	w	w	v	u	d	
b)	u	d	v	w	w	v	d	u	
c)	u	v	d	w	w	d	v	u	
d)	u	v	w	d	d	w	v	u	

Fig. 2. — Situațiile posibile de plasare a distanței minime d în cazul motorului în linie cu nouă cilindri la care se echilibrează momentele termenilor 1, 2 și 4 prin modificarea distanțelor dintre cilindrii consecutivi.

Repetînd calculul pentru celelalte succesiuni și comparînd valorile obținute, se poate preciza succesiunea care conduce la cea mai mică lungime a arborelui cotit.

4. DETERMINAREA STELEI MANIVELELOR ŞI A DISTANŢELOR DINTRE CILINDRII CONSECUTIVI CÎND NUMĂRUL MOMENTELOR EXTERNE ECHILIBRATE ESTE MAI MIC DECÎT NUMĂRUL DISTANŢELOR CARE POT FI MODIFICATE

4.1. GENERALITĂŢI

Dacă numărul momentelor externe care urmează să fie echilibrate este mai mic decît $q-1$, pentru găsirea soluţiei optime este necesar să se cerceteze toate stelele posibile ale manivelelor, operaţie extrem de laborioasă cînd numărul cilindrilor este mare.

În condiţiile (3) determinarea stelei optime a manivelelor şi a distanţelor dintre cilindrii consecutivi, care conduc la arborele cotit cu lungimea cea mai mică, se poate face relativ simplu în următoarele cazuri:

— există trei distanţe de determinat şi se impune echilibrarea unui singur moment extern;

— există patru distanţe de determinat şi se impune echilibrarea a două momente externe.

Aceste cazuri sînt analizate în continuare.

4.2. ECHILIBRAJUL UNUI SINGUR MOMENT EXTERN CÎND SÎNT DE DETERMINAT TREI DISTANŢE

Cazul corespunde, prin numărul de distanţe, motorului cu şapte cilindri.

Condiţia (4), scrisă pentru termenul al cărui moment extern trebuie echilibrat, se pune sub forma

$$\frac{z_{III}}{z_I} + \frac{z_{II}}{z_I} \cdot \frac{\sin p\alpha_{II}}{\sin p\alpha_{III}} + \frac{\sin p\alpha_I}{\sin p\alpha_{III}} = 0. \tag{9}$$

Între valorile absolute ale distanţelor z_I, z_{II}, z_{III} pot exista relaţiile

$$\begin{aligned}
&|z_I| > |z_{II}| > |z_{III}|,\\
&|z_I| > |z_{III}| > |z_{II}|,\\
&|z_{II}| > |z_I| > |z_{III}|,\\
&|z_{II}| > |z_{III}| > |z_I|,\\
&|z_{III}| > |z_I| > |z_{II}|,\\
&|z_{III}| > |z_{II}| > |z_I|.
\end{aligned} \tag{10}$$

În vederea obţinerii unor soluţii de arbori cotiţi dinamic distincte, una dintre aceste distanţe trebuie menţinută pozitivă; pentru înlesnirea calculelor este preferabil să se considere totdeauna pozitivă aceeaşi dis-

tanță, de pildă distanța corespunzătoare direcției I. Celelalte distanțe pot fi pozitive sau negative și în consecință la fiecare din relațiile (10) există patru alternative. De exemplu, în cazul relației $|z_I| > |z_{II}| > |z_{III}|$, considerînd $z_I > 0$, există alternativele

$$\begin{aligned} &z_I > 0,\ z_{II} > 0,\ z_{III} > 0,\\ &z_I > 0,\ z_{II} > 0,\ z_{III} < 0,\\ &z_I > 0,\ z_{II} < 0,\ z_{III} > 0,\\ &z_I > 0,\ z_{II} < 0,\ z_{III} < 0. \end{aligned} \tag{11}$$

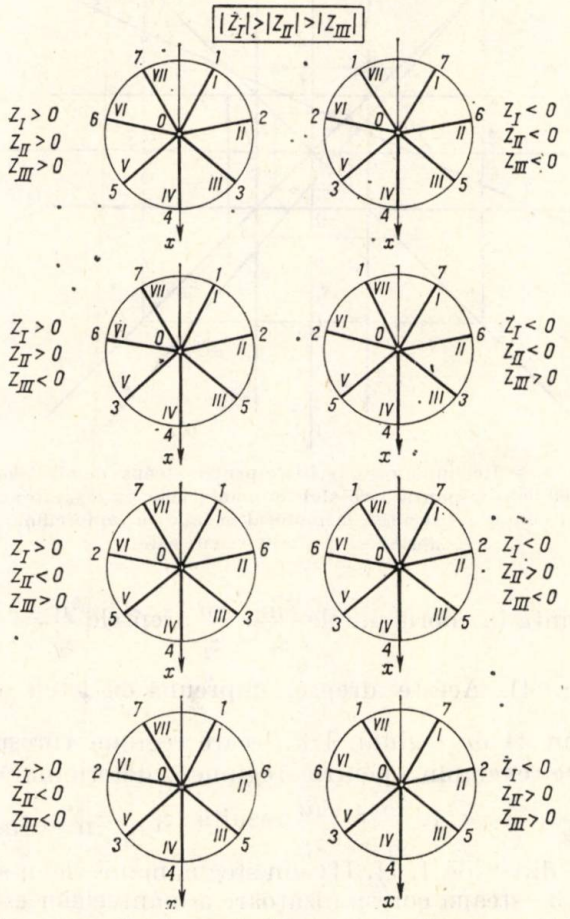


Fig. 3. — Stelele manivelelor corespunzătoare relației $|z_I| > |z_{II}| > |z_{III}|$ pentru motorul în linie cu șapte cilindri.

Deoarece fiecare alternativă pentru fiecare din relațiile (10) precizează o stea a manivelelor, există în total 24 de stele ale manivelelor care trebuie cercetate.

În figura 3 s-au reprezentat pe prima coloană stelele manivelelor corespunzătoare relației $|z_I| > |z_{II}| > |z_{III}|$ în alternativele (11), iar pe

a doua coloană stelele manivelelor pentru aceeaşi relaţie între valorile absolute ale distanţelor, dar în alternativele cu $z_I < 0$. Se observă că soluţiile sînt două cîte două simetrice în oglindă, deci două cîte două nedistincte din punct de vedere dinamic.

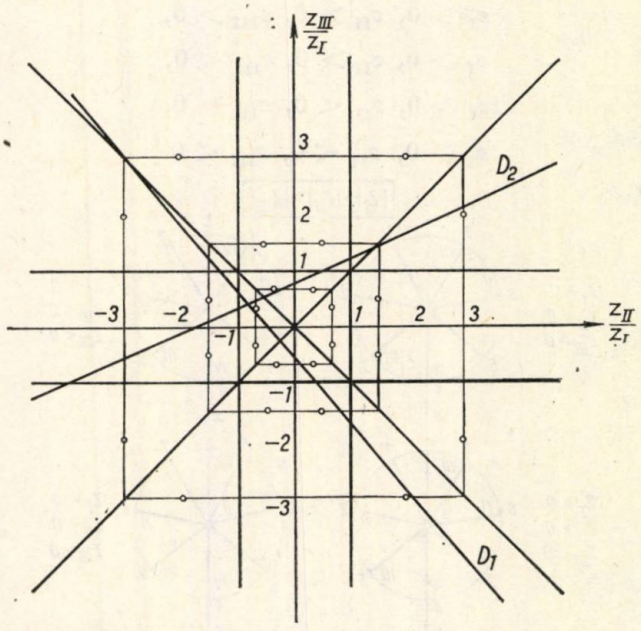


Fig. 4. — Regiunile caracteristice pentru steaua manivelelor şi punctele corespunzătoare stelelor manivelelor cu distanţe egale între cilindri consecutivi la motorul în linie cu şapte cilindri şi aprinderi uniform repartizate.

Se reprezintă în coordonatele $\frac{z_{III}}{z_I}$, $\frac{z_{II}}{z_I}$ dreptele $\frac{z_{II}}{z_I} = \pm 1$, $\frac{z_{III}}{z_I} = \pm 1$, $\frac{z_{III}}{z_I} = \pm \frac{z_{II}}{z_I}$ (fig. 4). Aceste drepte, împreună cu axele de coordonate, împart planul în 24 de regiuni. La fiecare regiune corespunde o stea a manivelelor. De exemplu, pentru regiunea determinată de condiţiile $0 < \frac{z_{II}}{z_I} < 1$, $0 < \frac{z_{III}}{z_I} < 1$, $\frac{z_{II}}{z_I} > \frac{z_{III}}{z_I}$ rezultă $z_I > z_{II} > z_{III} > 0$, ceea ce înseamnă că pe direcţiile I, II, III din steaua manivelelor se află respectiv manivele 1, 2, 3; steaua corespunzătoare a manivelelor este reprezentată în figura 5.

Dacă distanţele dintre cilindri consecutivi ar fi egale, la fiecare din relaţiile (10) distanţele de la mijlocul arborelui cotit pînă la manivele ar fi proporţionale cu numerele 3, ± 2, ± 1. Se obţin deci patru variante la fiecare relaţie, în total 24 de variante, adică 24 de stele ale manivelelor care au distanţele egale între cilindrii consecutivi şi care respectă totodată condiţia (3); acestor stele ale manivelelor le corespund 24 de puncte în figura 4 şi anume cîte un punct în fiecare din cele 24 de regiuni. Steaua

optimă a manivelelor este steaua aferentă regiunii în care dreapta (9) se află la cea mai mică distanță de unul din cele 24 de puncte.

Pentru precizarea valorilor optime ale distanțelor z_I, z_{II}, z_{III} se notează cu u distanța necunoscută dintre doi cilindri consecutivi; succesiu-

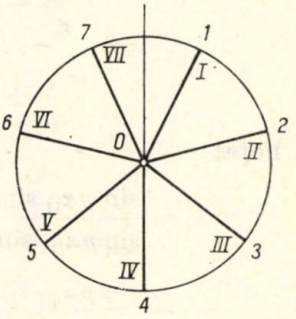


Fig. 5. — Steaua manivelelor pentru motorul în linie cu șapte cilindri și aprinderi uniform repartizate corespunzătoare condițiilor

$$0 < \frac{z_{II}}{z_I} < 1, \quad 0 < \frac{z_{III}}{z_I} < 1, \frac{z_{II}}{z_I} > \frac{z_{III}}{z_I}.$$

nile posibile ale tuturor distanțelor dintre cilindri consecutivi sînt arătate în figura 6. La fiecare succesiune se pot exprima în funcție de u și d distanțele z_1, z_2, z_3 și apoi distanțele z_I, z_{II}, z_{III} corespunzătoare stelei manivelelor determinată înainte. Înlocuind expresiile acestor distanțe în condiția (9) se obține o ecuație din care se deduce necunoscuta u în funcție de distanța minimă d. Repetînd calculul pentru toate cele șase succesiuni și comparînd rezultatele, se precizează soluția optimă de arbore cotit.

	1	2	3	4	5	6	7
a)	u	d	d	d	d	u	
b)	d	u	d	d	u	d	
c)	d	d	u	u	d	d	
e)	u	u	d	d	u	u	
f)	u	d	u	u	d	u	
g)	d	u	u	u	u	d	

Fig. 6. — Succesiunile posibile ale distanțelor dintre cilindrii consecutivi la motorul în linie cu șapte cilindri în cazul echilibrării unui singur moment extern.

4.3. ECHILIBRAJUL A DOUĂ MOMENTE EXTERNE CÎND SÎNT DE DETERMINAT PATRU DISTANȚE

Acest caz corespunde motoarelor cu opt sau cu nouă cilindri.

Fie p și p^* ordinele termenilor ale căror momente externe urmează să fie echilibrate; aplicînd acestor termeni condiția (4) se obține

$$\frac{z_{IV}}{z_I} + \frac{z_{III}}{z_I} \cdot \frac{\sin p\alpha_{III}}{\sin p\alpha_{IV}} + \frac{z_{II}}{z_I} \cdot \frac{\sin p\alpha_{II}}{\sin p\alpha_{IV}} + \frac{\sin p\alpha_I}{\sin p\alpha_{IV}} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{z_{IV}}{z_I} + \frac{z_{III}}{z_I} \cdot \frac{\sin p^*\alpha_{III}}{\sin p^*\alpha_{IV}} + \frac{z_{II}}{z_I} \cdot \frac{\sin p^*\alpha_{II}}{\sin p^*\alpha_{IV}} + \frac{\sin p^*\alpha_I}{\sin p^*\alpha_{IV}} = 0. \tag{13}$$

Eliminînd pe $\frac{z_{III}}{z_I}$ sau pe $\frac{z_{IV}}{z_I}$, rezultă

$$\frac{z_{III}}{z_I} + \lambda \frac{z_{II}}{z_I} + \mu = 0, \tag{14}$$

$$\frac{z_{IV}}{z_I} + \lambda' \frac{z_{II}}{z_I} + \mu' = 0, \tag{15}$$

unde s-a notat

$$\lambda = \frac{\sin p\alpha_{II} \sin p^*\alpha_{IV} - \sin p^*\alpha_{II} \sin p\alpha_{IV}}{\sin p\alpha_{III} \sin p^*\alpha_{IV} - \sin p^*\alpha_{III} \sin p\alpha_{IV}},$$

$$\lambda' = \frac{\sin p\alpha_{III} \sin p^*\alpha_{II} - \sin p^*\alpha_{III} \sin p\alpha_{II}}{\sin p\alpha_{III} \sin p^*\alpha_{IV} - \sin p^*\alpha_{III} \sin p\alpha_{IV}},$$

$$\mu = \frac{\sin p\alpha_I \sin p^*\alpha_{IV} - \sin p^*\alpha_I \sin p\alpha_{IV}}{\sin p\alpha_{III} \sin p^*\alpha_{IV} - \sin p^*\alpha_{III} \sin p\alpha_{IV}},$$

$$\mu' = \frac{\sin p\alpha_{II} \sin p^*\alpha_I - \sin p^*\alpha_{II} \sin p\alpha_I}{\sin p\alpha_{III} \sin p^*\alpha_{IV} - \sin p^*\alpha_{III} \sin p\alpha_{IV}}.$$

Între valorile absolute ale distanţelor $z_I \ldots z_{IV}$, pot exista relaţiile

$$|z_I| > |z_{II}| > |z_{III}| > |z_{IV}|, \qquad |z_{II}| > |z_I| > |z_{III}| > |z_{IV}|,$$

$$|z_I| > |z_{II}| > |z_{IV}| > |z_{III}|, \qquad |z_{II}| > |z_I| > |z_{IV}| > |z_{III}|,$$

$$|z_I| > |z_{III}| > |z_{II}| > |z_{IV}|, \qquad |z_{II}| > |z_{III}| > |z_I| > |z_{IV}|,$$

$$|z_I| > |z_{III}| > |z_{IV}| > |z_{II}|, \qquad |z_{II}| > |z_{III}| > |z_{IV}| > |z_I|,$$

$$|z_I| > |z_{IV}| > |z_{II}| > |z_{III}|, \qquad |z_{II}| > |z_{IV}| > |z_I| > |z_{III}|,$$

$$|z_I| > |z_{IV}| > |z_{III}| > |z_{II}|, \qquad |z_{II}| > |z_{IV}| > |z_{III}| > |z_I|,$$

$$|z_{III}| > |z_I| > |z_{II}| > |z_{IV}|, \qquad |z_{IV}| > |z_I| > |z_{II}| > |z_{III}|,$$

$$|z_{III}| > |z_I| > |z_{IV}| > |z_{II}|, \qquad |z_{IV}| > |z_I| > |z_{III}| > |z_{II}|,$$

$$|z_{III}| > |z_{II}| > |z_I| > |z_{IV}|, \qquad |z_{IV}| > |z_{II}| > |z_I| > |z_{III}|,$$

$$|z_{III}| > |z_{II}| > |z_{IV}| > |z_I|, \qquad |z_{IV}| > |z_{II}| > |z_{III}| > |z_I|,$$

$$|z_{III}| > |z_{IV}| > |z_I| > |z_{II}|, \qquad |z_{IV}| > |z_{III}| > |z_I| > |z_{II}|,$$

$$|z_{III}| > |z_{IV}| > |z_{II}| > |z_I|, \qquad |z_{IV}| > |z_{III}| > |z_{II}| > |z_I|.$$

Pentru motivele arătate în cazul precedent, trei din cele patru distanțe pot lua valori pozitive sau negative; în consecință, la fiecare din relațiile de mai sus se pot prezenta opt variante. De exemplu, în cazul $|z_I| > |z_{II}| > |z_{III}| > |z_{IV}|$ există variantele

$$\begin{array}{llll}
z_I > 0, & z_{II} > 0, & z_{III} > 0, & z_{IV} > 0, \\
z_I > 0, & z_{II} > 0, & z_{III} > 0, & z_{IV} < 0, \\
z_I > 0, & z_{II} > 0, & z_{III} < 0, & z_{IV} > 0, \\
z_I > 0, & z_{II} > 0, & z_{III} < 0, & z_{IV} < 0, \\
z_I > 0, & z_{II} < 0, & z_{III} > 0, & z_{IV} > 0, \\
z_I > 0, & z_{II} < 0, & z_{III} > 0, & z_{IV} < 0, \\
z_I > 0, & z_{II} < 0, & z_{III} < 0, & z_{IV} > 0, \\
z_I > 0, & z_{II} < 0, & z_{III} < 0, & z_{IV} < 0.
\end{array}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1848

În total există 192 de stele distincte de manivele.

Pentru determinarea stelei optime de manivele se reprezintă într-o diagramă care are în abscisă raportul $\frac{z_{II}}{z_I}$, iar în ordonată rapoartele $\frac{z_{III}}{z_I}$ și $\frac{z_{IV}}{z_I}$, dreptele $\frac{z_{II}}{z_I} = \pm 1$, dreptele $\frac{z_{III}}{z_I} = \pm 1$, care se suprapun cu dreptele $\frac{z_{IV}}{z_I} = \pm 1$, și cele două bisectoare (fig. 7). În diagramă există tot 24 de regiuni caracteristice din punctul de vedere al valorilor relative ale celor trei rapoarte de distanțe. Spre deosebire de cazul precedent, o stea a manivelelor este reprezentată prin două puncte aflate în aceeași abscisă, deoarece în ordonată sînt trecute două rapoarte; cele două puncte au valoarea absolută a ordonatelor diferită, fiindcă cilindrii ocupă poziții diferite și în consecință punctele nu pot fi simetrice față de axa absciselor.

Se figurează punctele corespunzătoare stelelor manivelelor cu distanțe egale între cilindri consecutivi; pentru aceste stele, distanțele de la mijlocul arborelui cotit pînă la manivele sînt proporționale cu numerele 4, 3, 2, 1 în cazul motorului cu nouă cilindri; pentru distanța z_I, factorul de proporționalitate este considerat pozitiv, iar pentru celelalte distanțe, pozitiv sau negativ. Deoarece la oricare dintre valorile posibile ale raportului $\frac{z_{II}}{z_I}$ rapoartele $\frac{z_{III}}{z_I}$ și $\frac{z_{IV}}{z_I}$ pot lua numai două valori conjugate (cînd una din aceste valori este atribuită unuia din rapoarte, cealaltă valoare trebuie atribuită celuilalt raport), punctele vor fi două cîte două su-

prapuse. În aceeaşi abscisă se află patru puncte distincte, două cîte două simetrice faţă de axa absciselor; diagrama comportă $\frac{192}{2} = 96$ de puncte distincte.

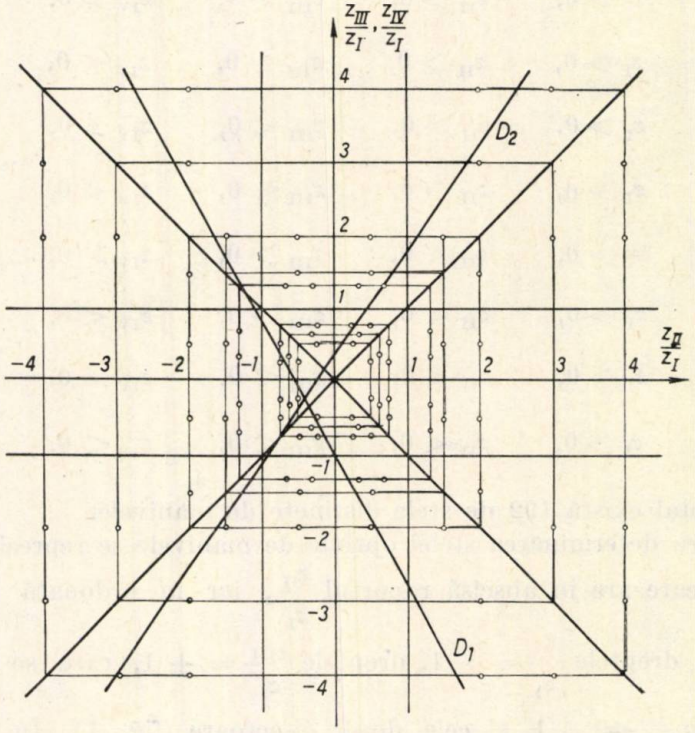


Fig. 7. — Regiunile caracteristice pentru steaua manivelelor şi punctele corespunzătoare stelelor manivelelor cu distanţe egale între cilindrii consecutivi la motorul în linie cu nouă cilindri şi aprinderi uniform repartizate.

În diagramă se trasează dreptele (14) şi (15) şi se caută printre punctele ce reprezintă stelele manivelelor în cazul distanţelor egale între cilindri consecutivi perechea de puncte q, q' care are aceeaşi abscisă, care nu este simetrică faţă de axa absciselor şi care se află la distanţa cea mai mică de cele două drepte. Steaua optimă a manivelelor corespunde regiunii sau regiunilor în care se află aceste puncte.

Dacă ordonata punctului situat în vecinătatea dreptei (14) este în valoare absolută mai mare decît valoarea absolută a ordonatei punctului aflat în vecinătatea dreptei (15), va fi îndeplinită condiţia $\left|\frac{z_{III}}{z_{II}}\right| > \left|\frac{z_{IV}}{z_{II}}\right|$; în caz contrar se obţine $\left|\frac{z_{III}}{z_{I}}\right| < \left|\frac{z_{IV}}{z_{I}}\right|$.

Cînd modificări mici ale abscisei punctelor q, q' nu ar mai situa steaua manivelelor în regiunile în care se află aceste puncte, este necesar să se analizeze și stelele „vecine" ale manivelelor, pentru stabilirea cu certitudine a stelei optime a manivelelor.

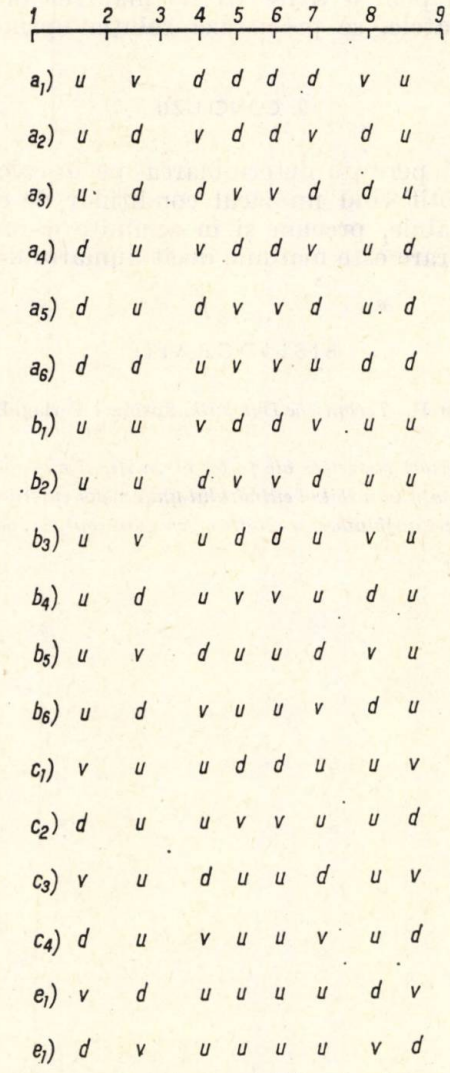


Fig. 8. — Succesiunile posibile ale distanțelor dintre cilindri consecutivi la motorul în linie, cu nouă cilindri, în cazul echilibrării a două momente externe.

În vederea precizării valorilor optime ale distanțelor $z_{\mathrm{I}} \ldots z_{\mathrm{IV}}$ se notează cu u și v distanțele necunoscute dintre cilindri consecutivi. Succesiunile posibile ale tuturor distanțelor dintre cilindrii consecutivi sînt arătate în figura 8. La fiecare succesiune posibilă se exprimă, în funcție de

u, v, şi d, distanţele $z_1 \ldots z_4$ şi apoi distanţele $z_I \ldots z_{IV}$, corespunzătoare stelei manivelelor analizată. Înlocuind expresiile acestor distanţe în formulele (12) şi (13) se obţin două ecuaţii, din care se deduc valorile necunoscutelor u şi v în funcţie de distanţa minimă d. Repetînd calculul pentru toate succesiunile şi pentru toate stelele manivelelor selectate anterior, şi comparînd rezultatele, se precizează soluţia optimă de arbore cotit.

5. CONCLUZII

Metoda expusă permite determinarea pe o cale simplă a soluţiei optime de arbore cotit cînd numărul condiţiilor de echilibrare este egal cu numărul de variabile, precum şi în anumite cazuri în care numărul condiţiilor de echilibrare este mai mic decît numărul de variabile.

BIBLIOGRAFIE

1. Biezeno C. B., Grammel R., *Technische Dynamik*, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953.
2. Bărănescu G., *Interpretări vectoriale ale forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variaţiei vitezei unghiulare de rotaţie a arborelui cotit*, St. cerc. mec. apl., 1969.

Omagiu academicianului ELIE CARAFOLI

PREGĂTIREA DATELOR DE INTRARE PENTRU METODA SINTEZEI ARMONICE COMPLEXE

de R. C. BOGDAN şi D. LARIONESCU
Centrul de mecanică a solidelor

Lucrarea de faţă este prima, dintr-o suită de lucrări, consacrată unei metode originale de sinteză, intitulată *Metoda sintezei armonice complexe*. Această metodă are ca punct de plecare o lege de mişcare prescrisă, sub forma unei dezvoltări în serie Fourier complexă limitată. Obţinerea sub această formă a legii de mişcare prescrisă constituie obiectul lucrării de faţă. Se prezintă diferite posibilităţi de calcul a coeficienţilor Fourier complecşi, modalităţi optime de utilizare a calculatoarelor pentru calculul lor, precum şi alte aspecte privind pregătirea datelor de intrare pentru metoda sintezei armonice complexe.

Metoda sintezei armonice complexe are ca punct de plecare dezvoltarea în serie Fourier complexă a legii de mişcare prescrisă unui mecanism. Legea de mişcare prescrisă poate fi dată sub forma unei curbe, în cazul sintezei mecanismelor de ghidare, sau ca o dependenţă funcţională între unghiul descris de un element cu mişcare complexă şi unghiul de manivelă, în cazul mecanismelor de transmitere.

În primul caz, curba impusă poate fi măsurată într-un număr de puncte ale intervalului dat, obţinînd o funcţie ce poate fi cunoscută printr-o tabelă a valorilor sale, într-un număr de puncte de bază.

În al doilea caz, legea de mişcare este de obicei cunoscută analitic, deci cu atît mai uşor se poate forma o tabelă a valorilor sale. În ambele cazuri se cere dezvoltarea în serie Fourier a legii de mişcare prescrisă, fiind vorba deci de o problemă de analiză armonică. Fie $\psi = f(\varphi)$ legea de mişcare prescrisă presupusă periodică de perioada 2π. Presupunînd că îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet, necesare dezvoltării în serie Fourier, fie

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin n\varphi \qquad (1)$$

seria Fourier ce corespunde lui ψ.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 521–527

În acest caz coeficienții a_n și b_n se calculează prin relațiile

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi. \tag{2}$$

Deoarece metoda sintezei armonice complexe utilizează forma complexă a seriei Fourier, se urmărește obținerea funcției sub forma

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\varphi}. \tag{3}$$

Coeficienții c_n se calculează astfel:

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi)\, \overline{e}^{in\varphi} \, d\varphi. \tag{4}$$

Se observă ușor că legătura dintre coeficienții Fourier complecși c_n și coeficienții Fourier a_n și b_n este dată de relațiile

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},$$
$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \tag{5}$$

Din acest motiv, în continuare se va arăta modul de calcul a coeficienților a_n și b_n, deoarece aceștia fiind cunoscuți, coeficienții c_n rezultă din relațiile (5). Dacă funcția nu este periodică, ea se poate aduce la această formă, fie prin modificarea valorilor sale la capătul intervalului, astfel încît să fie egale, fie prin neglijarea acestora. În acest ultim caz, seria Fourier va converge către ψ numai în interiorul intervalului dat.

O altă problemă care se impune este legătura dintre datele de intrare și numărul mecanismelor ce pot fi obținute ca urmare a sintezei. În cazul mecanismelor patrulatere, de exemplu, teorema lui Roberts indică trei mecanisme distincte ce pot realiza aceeași curbă de bielă. Pentru un punct anumit pe curba de bielă, unghiurile de manivelă ale celor trei mecanisme vor fi diferite. Rezultă că fiecare mecanism patrulater din cadrul celor trei, definite prin teorema lui Roberts, descrie curba de bielă în alt mod.

Dacă în afara curbei de bielă se indică în plus și relația bilaterală între poziția punctului pe curba de bielă și unghiul de manivelă la momentul respectiv, dintre cele trei mecanisme posibile se selecționează doar unul (în condiția în care el există). Acest lucru se întîmplă însă întotdeauna

cînd funcţia $\psi(\varphi)$ este dată printr-o tabelă a valorilor sale. O situaţie similară se poate constata şi în cazul altor mecanisme, în afara celor patrulatere. Calculul coeficienţilor Fourier complecşi c_n se realizează prin relaţia (4) sau relaţiile (2) împreună cu (5).

Sînt curente însă situaţiile cînd legea de mişcare $\psi(\varphi)$, aşa cum s-a arătat mai sus, nu este cunoscută sub formă analitică, ci sub forma unei tabele a valorilor sale.

În alte cazuri $\psi(\varphi)$, cu toate că se exprimă analitic, integralele ce apar în relaţiile (4) nu pot fi calculate exact. În ambele situaţii se impune un calcul aproximativ a acestor integrale. Cu alte cuvinte se aproximează ψ cu o sumă parţială a următoarei serii :

$$\psi \cong \sum_{n=-p}^{+p} c_n \, e^{in\varphi}. \tag{6}$$

Metoda Runge, transpusă pentru calculul coeficienţilor Fourier complecşi, conduce în acest caz la următoarele relaţii :

$$c_0 = \frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{2p} \psi_k,$$

$$c_n = \frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{2p} \psi_k \, e^{-in k\pi/p}, \tag{7}$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm (p-1),$$

$$c_{\pm p} = \frac{1}{4p} \sum_{k=1}^{2p} \psi_k (e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}).$$

În relaţiile (7) prin ψ_k se înţelege valoarea funcţiei $\psi(\varphi)$ pentru unghiul de manivelă egal cu φ_k.

Se consideră un număr par de astfel de valori pentru unghiul de manivelă, egal cu $2p$. De obicei p are valorile 6 sau 18. Pentru obţinerea unei precizii sporite se pot considera valori mai mari pentru p.

O metodă iterativă de calcul, mai adecvată pentru utilizarea calculatoarelor, este cea indicată de Romberg. Astfel, pentru calculul aproximativ al integralelor de forma

$$\int_a^b f(\varphi) \, d\varphi, \tag{8}$$

se poate alcătui următorul algoritm :

$$I_{0,1} = (b-a)\,[f(a) + f(b)]/2, \tag{9}$$

$$I_{N,1} = \left\{ I_{N-1,1} + \frac{b-a}{2^{N-1}} \sum_{k=1}^{2^{N-1}} f\left(a + \frac{b-a}{2^N} k\right) \right\}, \tag{10}$$

pentru $N = 1, 2, \ldots N_{max}$, dat.

Prin $I_{0,1}$ s-a reprezentat aproximaţia de ordin zero al integralei (8).

Deci, în cazul integralelor din relaţiile (2), mărimile se identifică astfel:

$$a = -\pi; \qquad b = +\pi, \tag{11}$$

$$f(\varphi) = (\psi(\varphi) \cos n\varphi)/\pi \text{ sau } f(\varphi) = (\psi(\varphi) \sin n\varphi)/\pi$$

pentru un n dat, $n = 0, 1, \ldots, n_{max}$.

În relaţiile (10) se dau aproximaţiile ulterioare din ce în ce mai bune ale integralei (8). Se poate demonstra că dacă funcţia $f(\varphi)$ este continuă, iar derivata de ordinul doi există şi este mărginită pe intervalul (a, b), atunci şirul $I_{1.1}; I_{2.1}; \ldots; I_{N.1}$ converge către valoarea exactă a integralei (8). Eroarea ce corespunde termenului $I_{N.1}$, din şirul de mai sus, este dată de expresia

$$-\frac{(b-a)^3}{12 \cdot (2)^{2N}} f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b). \tag{12}$$

Pentru fiecare două valori succesive $I_{N.1}$ şi $I_{N+1.1}$ metoda de extrapolare a lui Richardson permite găsirea unei valori $I_{N.2}$ mai apropiate de valoarea reală a integralei decît valorile precedente

$$I_{N.2} = \frac{4 I_{N+1.1} - I_{N.1}}{3}. \tag{13}$$

Şirul format astfel $I_{N.2}$, avînd N variabil, converge mai rapid decît valoarea exactă a integralei (8) şi decît şirul $I_{N.1}$.

Eroarea ce corespunde termenului $I_{N.2}$ din şirul format prin relaţia (13) este dată de

$$-\frac{(b-a)^5}{2880(2)^{4N}} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (a, b). \tag{14}$$

Deci, în condiţia că $f(\varphi)$ este o funcţie continuă şi admite o derivată de ordinul patru, mărginită în intervalul (a, b), expresia (14) asigură convergenţa şirului $I_{N,2}$ către valoarea exactă a integralei (8).

Utilizînd aceeaşi tehnică de extrapolare a lui Richardson, se obţine în continuare pentru fiecare două valori $I_{N.2}$ şi $I_{N+1.2}$

$$I_{N.3} = \frac{16 I_{N+1.2} - I_{N.2}}{15}, \tag{15}$$

ce aproximează integrala (8) cu o eroare dată de expresia

$$-\frac{(b-a)^7}{1.935.360 \cdot (2)^{6N}} f^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in (a, b). \tag{16}$$

Se observă că relaţiile (13) şi (15) sînt cazuri particulare ale unei formule generale ale extrapolării

$$I_{N,j} = \frac{4^{j-1} I_{N+1,j-1} - I_{N,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \tag{17}$$

Metoda lui Romberg aranjează valorile $I_{N,j}$ sub forma unei matrice

$$\begin{array}{l} I_{0,1}\ I_{0,2}\ I_{0,3}\ I_{0,4}\ I_{0,5}\ \ldots\ I_{0,j} \\ I_{1,1}\ I_{1,2}\ I_{1,3}\ I_{1,4}\ I_{1,5} \\ I_{2,1}\ I_{2,2}\ I_{2,3}\ I_{2,4}\ I_{2,5} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_{N,1}\ I_{N-1,2} \\ I_{N,1}. \end{array} \tag{18}$$

Se calculează mai întîi prima coloană, începînd de sus în jos, apoi a doua, a treia etc. Eroarea ce corespunde termenului $I_{N,j}$ al matricei este egală cu

$$\frac{p(j)}{2^{2jN}} f^{(2j)}(\xi), \qquad \xi \in (a, b), \tag{19}$$

unde $p(j)$ este o constantă ce depindde de a, b şi j, dar nu depinde de N.

Atît metoda lui Romberg, cît şi cea a lui Runge, expusă mai înainte, pot fi folosite cu deplin succes pentru calculul coeficienţilor Fourier sau a coeficienţilor Fourier complecşi. Metoda lui Romberg este însă mai adecvată utilizării calculatoarelor electronice, datorită faptului că este iterativă. Astfel o nouă iteraţie cerută pentru îmbunătăţirea preciziei calculelor nu reclamă reluarea acestora „de la capăt", ci se bazează pe calculele deja realizate. În cazul utilizării metodei Runge, mărirea preciziei cu care suma parţială (6) aproximează seria Fourier (3) se realizează pe baza calculării unui număr sporit de armonice, însă volumul de calcule creşte rapid odată cu numărul armonicelor.

Acest fapt poate constitui o dificultate de neînlăturat atunci cînd aceste calcule se efectuează manual şi, de asemenea, conduce la consumarea unui volum sporit de „timp-maşină", atunci cînd se recurge la serviciile unui calculator electronic.

Deoarece acest „timp" a devenit foarte scump pentru sistemele moderne de calcul, s-a impus găsirea unei metode care să permită determinarea aceluiaşi număr de armonici, dar cu un volum de calcule mai mic decît metodele cunoscute.

O astfel de metodă cunoscută sub numele de F.F.T. (*The fast Fourier transform*) a fost deja folosită în electronică, optică şi telecomuni-

cații, aducînd serioase economii. Odată cu extinderea analizei armonice în sinteza mecanismelor, metoda F.F.T. considerăm că se aplică și în acest domeniu.

În esență, dacă analiza Fourier după metode clasice reclamă N^2 operații, unde N este numărul de puncte date, metoda F.F.T. necesită numai $N \log_2 N$ operații. Acest fapt aduce pentru valorile mari ale lui N o serioasă economie în volumul de calcule.

Pe scurt metoda F.F.T. se prezintă astfel:

Fie x_k, $k = 0,1,..,$ N cele $N+1$ valori ale funcției reprezentînd legea de mișcare prescrisă. Ideea metodei F.F.T. constă în a împărți aceste valori în două grupe, punînd într-o grupă toate valorile ce corespund unui indice k par, iar în altă grupă toate valorile ce corespud indicilor impari, adică

$$\begin{aligned} y_k &= x_{2k}, \\ z_k &= x_{2k+1}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, N/2 - 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Plecînd de la valorile x_k, y_k și z_k, se pot construi trei serii Fourier complexe.

Se consideră a_p, b_p și c_p trei șiruri de coeficienți proporționali (abstracție făcînd de o constantă) cu coeficienții Fourier complecși corespunzători celor trei serii.

Aceștia sînt

$$\begin{aligned} a_p &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \, e^{-2\pi i pk/N}, \\ b_p &= \sum_{k=0}^{(N/2-1)} y_k \, e^{-4\pi i pk/N}, \\ c_p &= \sum_{k=0}^{(N/2-1)} z_k \, e^{-4\pi i pk/N}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, N/2 - 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Datorită legăturii între x_k, y_k și z_k, coeficienții se mai pot scrie și astfel:

$$a_p = \sum_{k=0}^{N/2-1} \{ y_k e^{-4\pi i pk/N} + z_k \, e^{-\frac{2\pi p}{N}(2k+1)} \}, \qquad p = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{22}$$

sau altfel

$$a_p = \sum_{k=0}^{(N/2-1)} y_k \, e^{-4\pi i pk/N} + e^{-2\pi i p/N} \sum_{k=0}^{(N/2-1)} z_k \, e^{-4\pi i pk/N}, \; p = 0,1, \ldots, N-1. \tag{23}$$

Ținînd seama de relațiile (21), coeficienții a_p se exprimă astfel:

$$a_p = b_p + e^{-2\pi i p/N} c_p, \qquad 0 \leqslant p < N/2. \tag{24}$$

```
      INTEGER PL(72),VW,EDU
      INTEGER PAC(36),TAC(36)
      INTEGER P,T,I,M,R
      DOUBLE PRECISION RT(72),IT(72),RV(72),IV(72),RA(72),IA(72),
     CRC(72),IC(72),RS(72),IS(72),SI(72),CO(72)
      DOUBLE PRECISION RCO,ICO,RCP(18),ICP(18),RCN(18),ICN(18),KANT
     5,E3,E4,E5,E6,E7,E8,E9,E10,X1,X2,X3,X4,X5,V(36),ERROR,F(18),G,E1,E2
     6,X(36),Y(36),S1(18),S2(18),S3(18),S4(18),U1(18),U2(18),
     7U3(18),U4(18),W1(18),W2(18),W3(18),W4(18),S0,U0,W0,E11,F1(18),
     CA(18),B(18),C(18),E(18),D(18)
    1 FORMAT (' THE EXPERIMENTAL COMPLEX HARMONIC SINTHESIS OF MECHANISM
     CS')
    4 FORMAT (//' THE COMPLEX FOURIER COEFICIENTS ARE ')
   62 FORMAT (//' THE LIST OF INPUT DATES'//)
   77 FORMAT (' X(',I3,')=',F9.5,10X,'Y(',I3,')=',F9.5)
   79 FORMAT (' THE COEFICIENT (',I3,')=',F9.5,'+',F9.5,' J',8X,
     C'THE COEFICIENT (',I3,')=',F9.5,'+',F9.5,'J')
   84 FORMAT ('*************************************************')
   98 FORMAT (//' THE COEFICIENT (0)=',F9.5,'+',F9.5,'J')
      READ (1,15) (X(I),I=1,10)
      READ (1,15) (X(I),I=11,20)
      READ (1,15) (X(I),I=21,30)
      READ (1,15) (X(I),I=31,36)
      READ (1,15) (Y(I),I=1,10)
      READ (1,15) (Y(I),I=11,20)
      READ (1,15) (Y(I),I=21,30)
      READ (1,15) (Y(I),I=31,36)
      IMIR=1
      ILU=1
 6000 FOU=1
 5001 P=1
      T=1
      R=1
      ERROR=0.5
      DO 514 I=1,36
      PAC(I)=I
      TAC(I)=-1
  514 CONTINUE
      DO 20 I=1,36
   20 V(I)=X(I)
      DO 99 I=1,18
      S1(I)=.0
```



```
      S2(I)=.0
      S3(I)=.0
   99 S4(I)=.0
      S0=.0
   32 DO 60 M=1,17
      DO 60 I=1,36
      S1(M)=S1(M)+1./36.*V(I)*DCOS(M*I*3.14159/18.)
      S2(M)=S1(M)
      S4(M)=S4(M)+1./36.*V(I)*DSIN(M*I*3.14159/18.)
      S3(M)=-S4(M)
   60 CONTINUE
      DO 213 I=1,36
      S0=S0+1./36.*V(I)
      S1(18)=S1(18)+1./72.*V(I)*DCOS(I*3.14159)
      S2(18)=S1(18)
  213 CONTINUE
      S3(18)=.0
      S4(18)=.0
      IF (P-2) 41,42,42
   41 DO 21 I=1,18
      U1(I)=S1(I)
      U2(I)=S2(I)
      U3(I)=S3(I)
   21 U4(I)=S4(I)
      U0=S0
      DO 22 I=1,36
   22 V(I)=Y(I)
      DO 78 I=1,18
      S1(I)=.0
      S2(I)=.0
      S3(I)=.0
   78 S4(I)=.0
      S0=.0
      R=P+1
      GO TO 32
   42 DO 23 I=1,18
      W1(I)=S1(I)
      W2(I)=S2(I)
      W3(I)=S3(I)
   23 W4(I)=S4(I)
      W0=S0
      RCO=U0
      ICO=W0
      DO 24 I=1,18
      RCP(I)=U1(I)-W3(I)
      ICP(I)=W1(I)+U3(I)
      RCN(I)=U2(I)-W4(I)
   24 ICN(I)=W2(I)+U4(I)
  421 RCP(1)=RCP(1)-1.
      WRITE (3,1)
      WRITE (3,84)
      WRITE (3,62)
      DO 411 I=1,36
      WRITE (3,77) PAC(I),X(I),PAC(I),Y(I)
  411 CONTINUE
      WRITE (3,4)
      WRITE (3,98) RCO,ICO
      DO 573 I=1,18
      WRITE (3,79) PAC(I),RCP(I),ICP(I),TAC(I),RCN(I),ICN(I)
  573 CONTINUE
 4000 STOP
      END
```

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
KÖNYVTÁR

```
// EXEC
THE EXPERIMENTAL COMPLEX HARMONIC SINTHESIS OF MECHANISMS
**************************************************

THE LIST OF INPUT DATES

X(  1)=  0.11746        Y(  1)=  0.86825
X(  2)=  0.17777        Y(  2)=  1.14920
X(  3)=  0.22698        Y(  3)=  1.40793
X(  4)=  0.26190        Y(  4)=  1.63174
X(  5)=  0.27301        Y(  5)=  1.81726
X(  6)=  0.25396        Y(  6)=  1.94920
X(  7)=  0.20317        Y(  7)=  2.04444
X(  8)=  0.12380        Y(  8)=  2.09682
X(  9)=  0.02063        Y(  9)=  2.10793
X( 10)= -0.10000        Y( 10)=  2.09047
X( 11)= -0.22380        Y( 11)=  2.04285
X( 12)= -0.35396        Y( 12)=  1.96666
X( 13)= -0.48095        Y( 13)=  1.86507
X( 14)= -0.59841        Y( 14)=  1.74126
X( 15)= -0.70434        Y( 15)=  1.61587
X( 16)= -0.79841        Y( 16)=  1.44444
X( 17)= -0.87619        Y( 17)=  1.27619
X( 18)= -0.93650        Y( 18)=  1.10476
X( 19)= -0.96825        Y( 19)=  0.93968
X( 20)= -0.98888        Y( 20)=  0.73333
X( 21)= -0.98730        Y( 21)=  0.60634
X( 22)= -0.96825        Y( 22)=  0.44603
X( 23)= -0.93333        Y( 23)=  0.30476
X( 24)= -0.89095        Y( 24)=  0.17460
X( 25)= -0.81269        Y( 25)=  0.06666
X( 26)= -0.73809        Y( 26)= -0.03174
X( 27)= -0.65079        Y( 27)= -0.10317
X( 28)= -0.55714        Y( 28)= -0.15714
X( 29)= -0.46349        Y( 29)= -0.17777
X( 30)= -0.36349        Y( 30)= -0.17142
X( 31)= -0.27460        Y( 31)= -0.13809
X( 32)= -0.19730        Y( 32)= -0.07619
X( 33)= -0.11428        Y( 33)=  0.03174
X( 34)= -0.04761        Y( 34)=  0.17619
X( 35)=  0.01584        Y( 35)=  0.36984
X( 36)=  0.06984        Y( 36)=  0.59841
```

Tabelul 1

```
THE COMPLEX FOURIER COEFICIENTS ARE

THE COEFICIENT (0)= -0.36852+  0.93923J
THE COEFICIENT (  1)= -0.17269+ -0.27649 J
THE COEFICIENT (  2)=  0.02131+ -0.04765 J
THE COEFICIENT (  3)=  0.00428+ -0.00701 J
THE COEFICIENT (  4)= -0.00070+ -0.00316 J
THE COEFICIENT (  5)=  0.00163+ -0.00053 J
THE COEFICIENT (  6)= -0.00019+ -0.00052 J
THE COEFICIENT (  7)=  0.00034+ -0.00014 J
THE COEFICIENT (  8)= -0.00036+  0.00028 J
THE COEFICIENT (  9)= -0.00036+ -0.00080 J
THE COEFICIENT ( 10)=  0.00096+  0.00091 J
THE COEFICIENT ( 11)= -0.00083+ -0.00100 J
THE COEFICIENT ( 12)=  0.00077+  0.00090 J
THE COEFICIENT ( 13)= -0.00082+ -0.00007 J
THE COEFICIENT ( 14)=  0.00015+  0.00030 J
THE COEFICIENT ( 15)= -0.00053+  0.00070 J
THE COEFICIENT ( 16)=  0.00046+ -0.00120 J
THE COEFICIENT ( 17)= -0.00012+  0.00117 J
THE COEFICIENT ( 18)=  0.00004+ -0.00110 J

THE COEFICIENT ( -1)= -0.30578+  0.05245J
THE COEFICIENT ( -2)= -0.08005+ -0.02583J
THE COEFICIENT ( -3)= -0.02462+ -0.01551J
THE COEFICIENT ( -4)= -0.00481+ -0.00845J
THE COEFICIENT ( -5)= -0.00207+ -0.00279J
THE COEFICIENT ( -6)=  0.00010+ -0.00098J
THE COEFICIENT ( -7)=  0.00017+ -0.00073J
THE COEFICIENT ( -8)=  0.00015+ -0.00034J
THE COEFICIENT ( -9)=  0.00089+ -0.00150J
THE COEFICIENT (-10)= -0.00085+  0.00062J
THE COEFICIENT (-11)=  0.00086+ -0.00173J
THE COEFICIENT (-12)= -0.00077+  0.00060J
THE COEFICIENT (-13)=  0.00169+ -0.00079J
THE COEFICIENT (-14)= -0.00064+ -0.00005J
THE COEFICIENT (-15)=  0.00051+  0.00029J
THE COEFICIENT (-16)= -0.00041+ -0.00089J
THE COEFICIENT (-17)=  0.00084+  0.00135J
THE COEFICIENT (-18)=  0.00004+ -0.00110J
```

Tabelul 2

Deoarece seriile Fourier reprezintă funcții periodice, înlocuind pe p cu $p + N/2$ se obține

$$a_{p+N/2} = b_p + e^{-2\pi i(p+N/2)/N} c_p = b_p - e^{-2\pi ip/N} c_p, \quad 0 \leqslant p < N/2. \tag{25}$$

Rezultă că utilizînd aceleași metode ce calculează coeficienții a_p cu un volum de calcule proporțional cu N^2, dar în scopul determinării coeficienților b_p și c_p, volumul total de calcule va fi $2(N/2)^2$. Se adaugă însă N operații pentru a calcula în continuare coeficienții Fourier a_p pe baza coeficienților b_p și c_p. Deci în total un număr mai redus de calcule, egal cu $N\,(N/2+1)$

Dar raționamentul care a permis reducerea numărului de operații pentru calculul lui a_p, utilizînd coeficienții ajutători b_p și c_p, se poate extinde mai departe pentru înseși acești coeficienți. Se ajunge astfel în final la cifra de $N \log_2 N$ operații.

Se prezintă în final un program de calcul, scris în limbaj FORTRAN, a 37 de coeficienți Fourier complecși ce corespund unui vector complex variabil în plan, măsurat în 36 de puncte. Se citesc proiecțiile pe axe ale acestui vector, separat, cîte 10 date pe o cartelă. Metoda utilizată este cea a lui Runge. Coeficienții calculați sînt scriși explicit. Lista programului de calcul este dată în lista 1. Rezultatele aplicării programului pentru un set de date apar în tabelele 1 și 2.

BIBLIOGRAFIE

1. Bogdan R. C., *Cercetarea grupelor assurice în construcția mecanismelor prin serii armonice complexe și metoda mecano-electronică*, teză de doctorat, București, 1964.
2. Bogdan R. C., Larionescu D., *Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane*. Monografie. Edit. Academiei R.S.R., 1968, 432 pag.
3. Carnahan B., Luther H. A., Wilkes J. O., *Applied numerical methods*, Jan Wiley & sons. S.U.A.
4. — *Proceedings of the I.E.E.E.*, **55**, *10*, octombrie 1967, 1664—1677.

Omagiu profesorului ELIE CARAFOLI
la împlinirea a 70 de ani

NOUL LABORATOR DE REZISTENȚA MATERIALELOR AL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN BUCUREȘTI

de GH. BUZDUGAN

În lucrare se prezintă noul laborator de rezistența materialelor, dotat pentru scop didactic, cu o serie de mașini pentru încercări mecanice ale materialelor, aparate pentru studiul experimental al tensiunilor prin diferite metode și aparate pentru studiul vibrațiilor, cît și pentru scop științific, oferind astfel toate condițiile pentru buna desfășurare a activității didactice și științifice.

Printre primele laboratoare care s-au instalat în noul ansamblu de clădiri al Institutului politehnic este cel de rezistența materialelor.

Mutat în casă nouă, acest laborator s-a înnoit și în ce privește dotarea: cel puțin 75% din echipamentul său a fost procurat în ultimii 10 ani, unele piese importante fiind achiziționate în 1970 și 1971. Laboratorul se află în corpul de clădire CA, la extremitatea pavilioanelor de clase și laboratoare ale facultăților de mecanică. Construcția are parter și etaj, precum și o hală pentru încercări pe ansamble și modele mari, care se ridică pe ambele nivele. Suprafața utilă a laboratorului este de 1 500 m^2.

Laboratorul a fost dotat ca să corespundă ambelor scopuri — didactic și științific.

Pentru scopul didactic, laboratorul posedă o serie de mașini la care se fac încercări mecanice ale materialelor, aparate pentru studiul experimental al tensiunilor prin diferite metode, precum și aparate pentru studiul vibrațiilor.

În cercetarea științifică, după plecarea din Institut a facultății de construcții, în 1948, laboratorul a fost orientat spre probleme specifice ingineriei de construcții de mașini, în special probleme de vibrații, oboseală și studiul experimental al tensiunilor. Politica de dotare a laboratorului, în ultimii 20 de ani, a fost subordonată acestui obiectiv.

În cele ce urmează, se va arăta, pe scurt, organizarea spațiilor din laborator și principalele utilaje pe care le posedă.

Hala pentru încercări pe ansamble mari, în suprafață de 326 m^2, posedă ca principal utilaj o instalație hidraulică cu verinuri, pentru încercări statice și încercări de oboseală la sarcini pulsatoare. O serie de cadre metalice pot fi fixate prin buloane pe trei platforme de cîte 36m^2, ale unui

planşeu gros de 80 cm, separate de restul clădirii, spre a nu transmite vibraţiile. Cu ajutorul cilindrilor pulsatori pentru forţe de 20 tf şi 10 tf, cadrele pot încărca elemente de construcţii şi maşini, în mărime naturală, permiţînd fie încercarea lor la oboseală, fie încercarea statică însoţită de măsurări tensometrice. Construcţia metalică a cadrelor permite realizarea de înălţimi şi deschideri după voie, putînd încărca, de exemplu, un autovehicul, un boghiu de vagon, o grindă metalică sau de beton etc.

A doua piesă importantă din hală este o maşină de încercat universală cu pulsator, putînd realiza sarcini statice pînă la 100 tf şi sarcini pulsatoare pînă la 50 tf.

În aceeaşi hală se mai găsesc : o maşină universală de 30 tf, o presă de 60 tf, ciocan de rezilienţă, aparate de măsurat duritatea.

O platformă, excitată printr-un vibrator cu excentric care lucrează la frecvenţe de 10—50 Hz, producînd forţe de 1—500 kgf, poate executa încercări de vibraţii la obiecte cîntărind cîteva sute de kgf.

Hala este prevăzută cu un pod rulant de 5 tf.

Sala pentru solicitări statice este locul unde se fac în mod curent încercările de materiale în cadrul aplicaţiilor didactice. Ea este dotată cu o maşină universală şi maşini de tracţiune, compresiune, răsucire, aparate pentru măsurarea durităţii, rezilienţei.

Sala pentru solicitări variabile, a cărei dotare urmează a se dezvolta în viitor, posedă un vibrofor Amsler de 10 tf pentru încercări de oboseală de înaltă frecvenţă, două maşini de încercat la oboseală prin încovoiere rotativă şi o maşină de încercat la răsucire prin şoc, ultimele fiind construcţii proprii.

Laboratorul didactic de tensometrie şi vibraţii este dotat, în prezent, cu 4 montaje pentru studiul tensometric al unui cadru complex şi al unui rezervor nesimetric, pentru studiul vibraţiilor libere şi forţate de răsucire.

Laboratorul de tensometrie cu scop de cercetare posedă o serie de punţi şi cutii de comutare, precum şi înregistratoare, cu ajutorul cărora s-au efectuat numeroase cercetări în uzine şi pe şantiere de construcţii.

Laboratorul de vibraţii are ca principală piesă o instalaţie Prodera pentru producerea vibraţiilor, prevăzută cu 4 excitatori electrodinamici de 200 N şi 20 captori pentru măsurarea vitezelor. Instalaţia permite producerea de vibraţii pe diferite maşini şi ansamble, determinarea răspunsului, a modurilor de vibraţie, a amortizărilor etc. În combinaţie cu platformele şi cadrele din hala mare, această instalaţie poate servi la cele mai variate studii de vibraţii.

Laboratorul de vibraţii posedă o masă vibratoare electrodinamică, punţi şi înregistratoare cu mai multe canale, captori pentru măsurarea deplasărilor, acceleraţiilor, forţelor, presiunilor etc.

Laboratorul de fotoelasticitate posedă două bancuri pe care se execută atît lucrări cu caracter didactic, cît şi de cercetare ştiinţifică.

Sala de fluaj este dotată cu o maşină pentru încercări cu sarcină constantă, provenită din import, ca şi trei maşini de construcţie proprie, toate cu cîte un singur post.

Se găseşte în curs de dotare *laboratorul de analogii*, unde se construieşte un stand moiré.

Laboratorul posedă un calculator Olivetti, tip Programma 101.

Atelierul laboratorului, bine dotat, permite executarea de epruvete și de dispozitive pentru încercări, ca și lucrări de întreținere a mașinilor și aparatelor.

Tot de laborator aparține vechea mașină de încercat orizontală Werder de 100 tf, adusă în țară cu ocazia construirii podului Cernavoda-Fetești; din cauza dimensiunilor mari, mașina a rămas în vechea clădire a Institutului politehnic.

Laboratorul are o bibliotecă cu peste 1 300 de volume, în care se găsesc principalele lucrări de specialitate din literatura universală, și este abonat la o serie de periodice românești și străine de specialitate.

În afara sălilor citate, laboratorul dispune de 9 cabinete pentru corpul didactic și secretariat, de un laborator fotografic și depozit de materiale.

Se poate spune că, instalat în noul local și așa cum este dotat, laboratorul de rezistența materialelor oferă toate condițiile pentru buna desfășurare a activității didactice și științifice. De asemenea, personalul și aparatura sa dau asistența științifică necesară industriei și diverselor șantiere, pentru rezolvarea celor mai variate probleme din domeniul specialității sale.

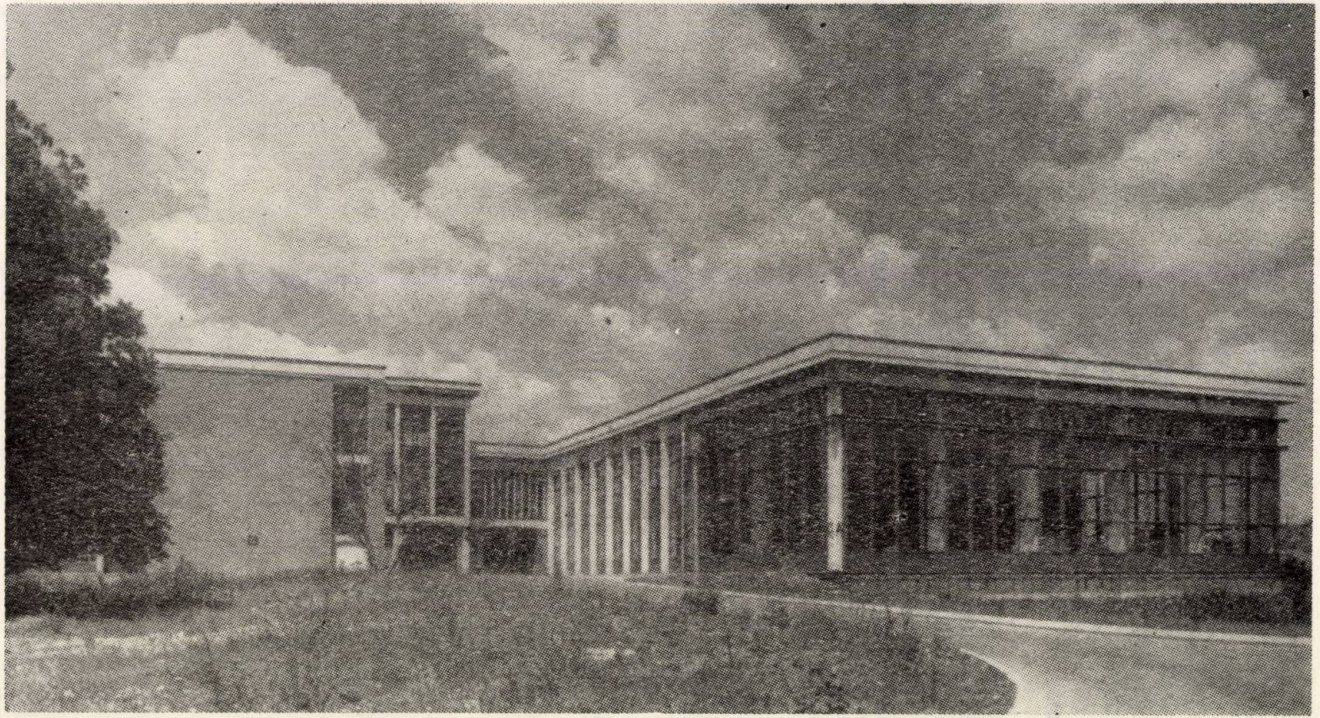


Fig. 1. — Laboratorul de rezistenţa materialelor

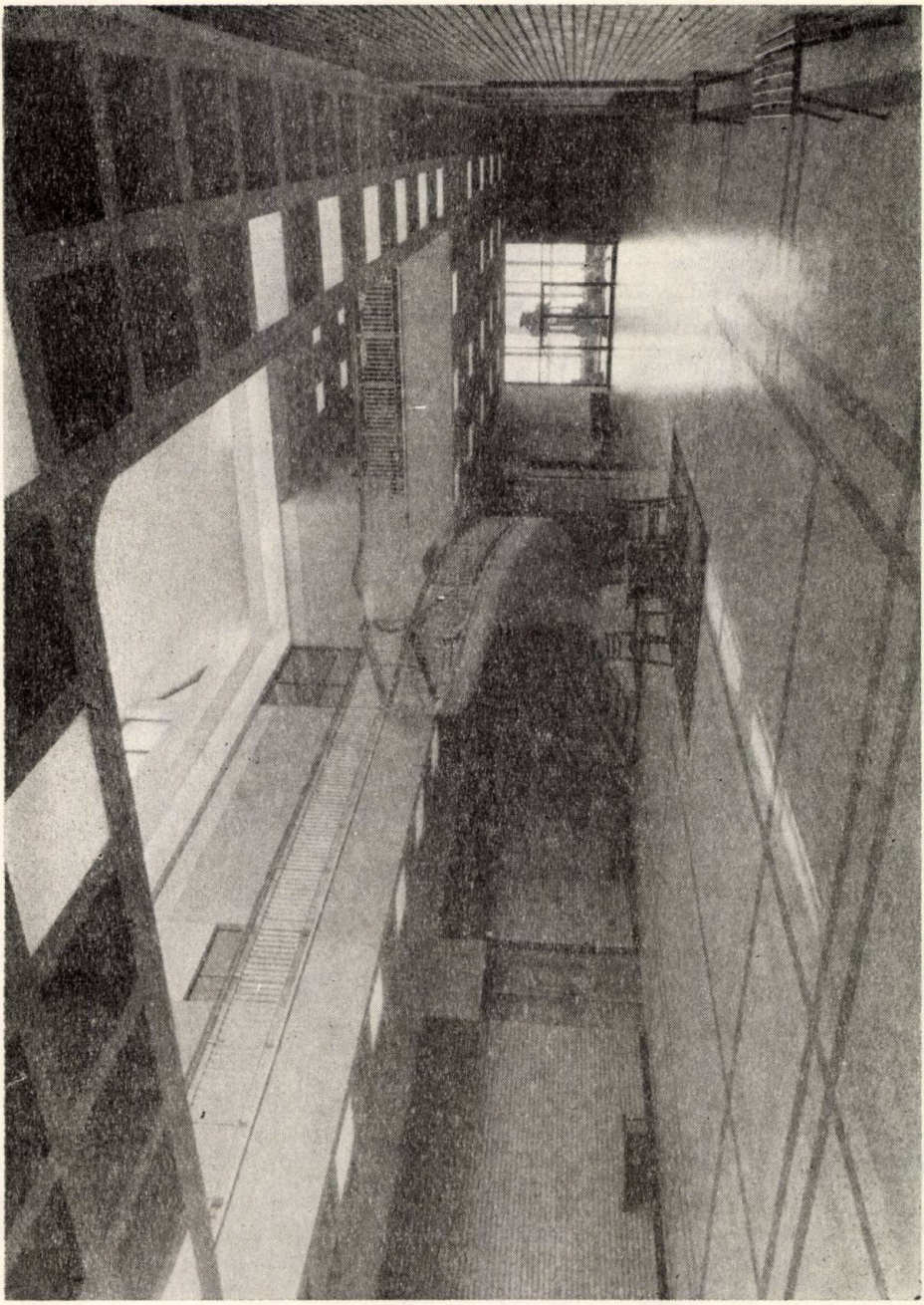


Fig. 2. — Holul laboratorului

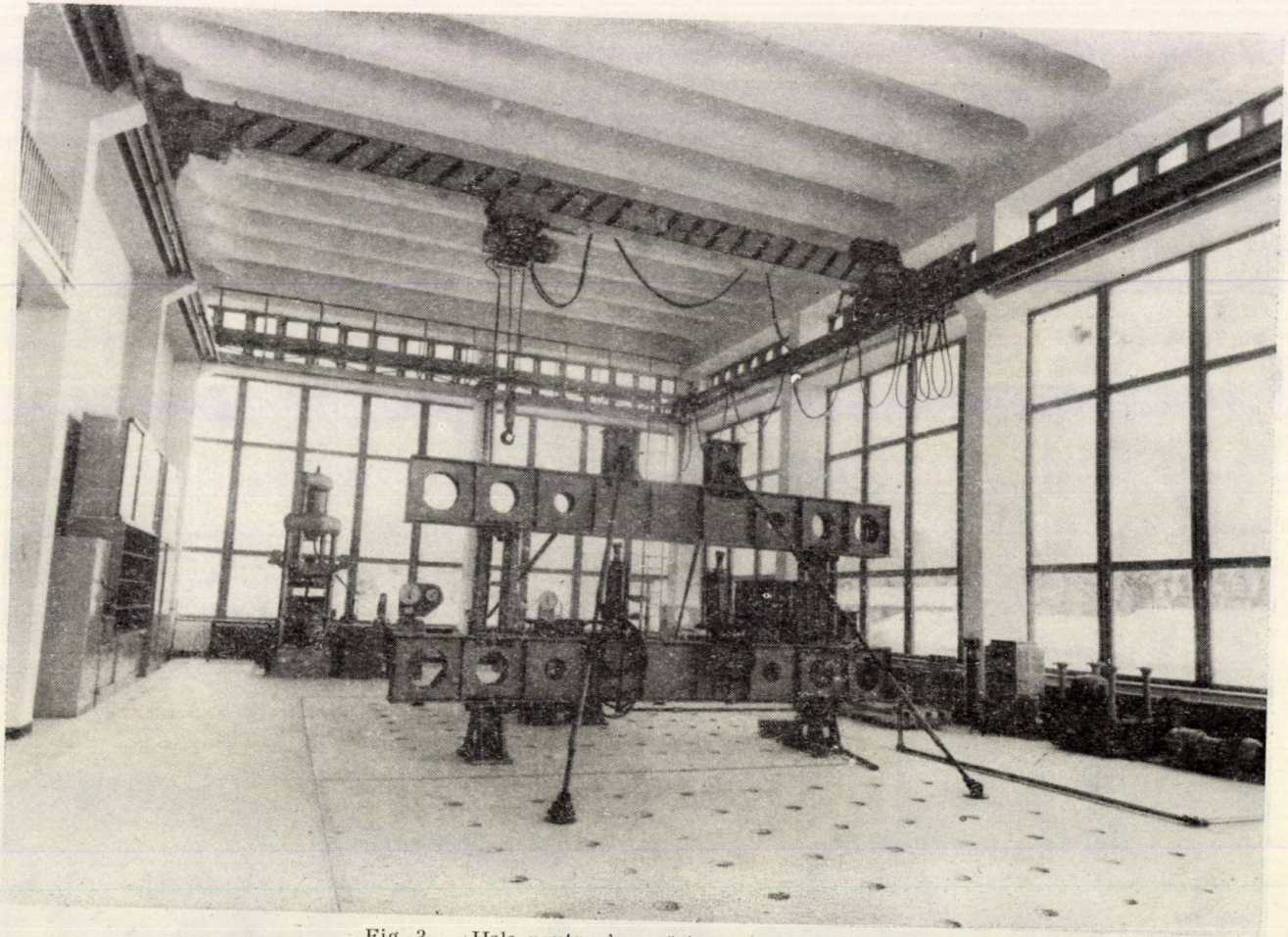


Fig. 3. — Hala pentru încercări pe ansamble mari

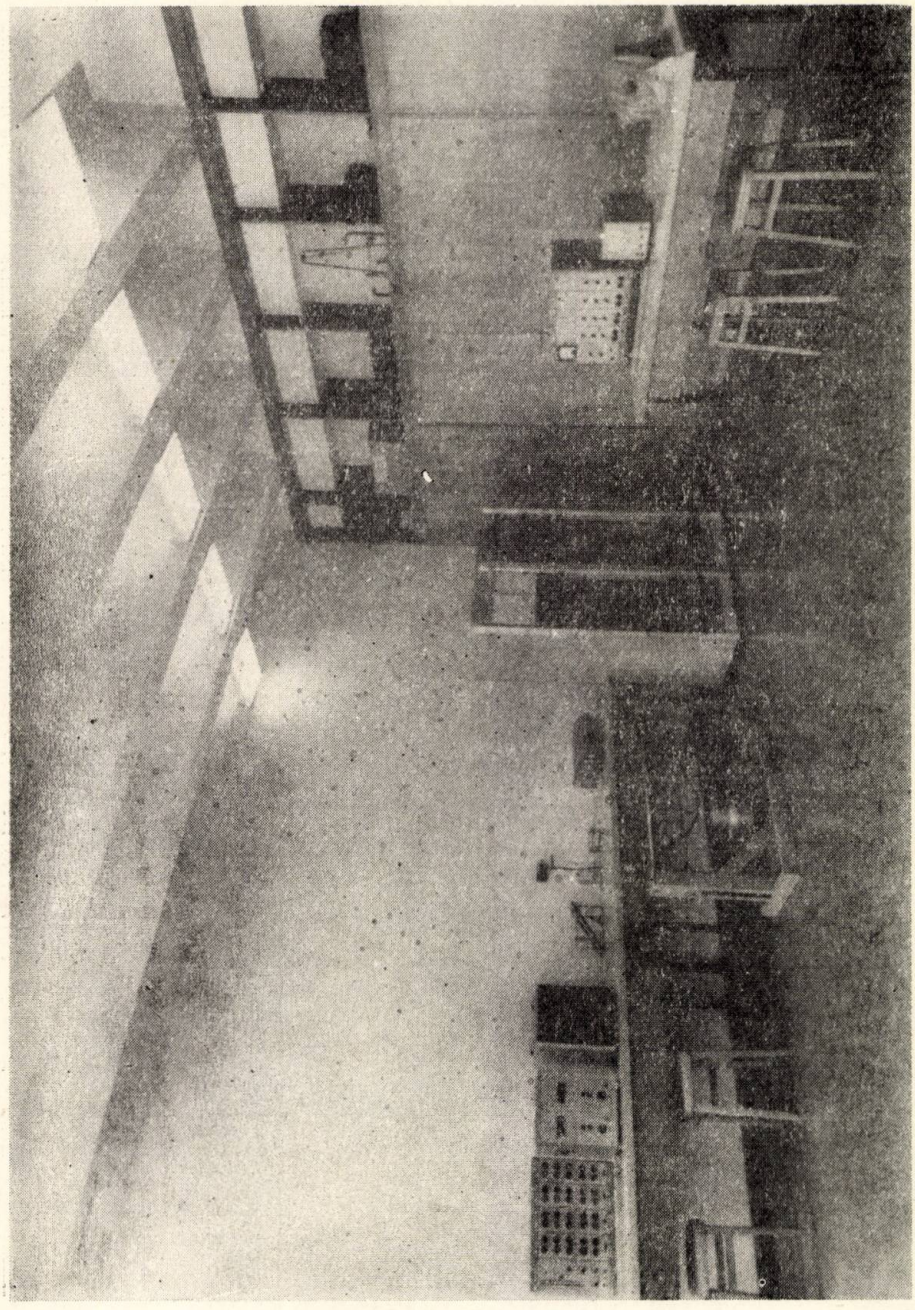


Fig. 4. — Laboratorul de vibrații

Omagiu profesorului ELIE CARAFOLI

RELAȚII FUNDAMENTALE PENTRU MIȘCĂRILE TURBULENTE ÎN STRATURI SUBȚIRI CU APLICAȚII ÎN LUBRIFICAȚIE

de V. N. CONSTANTINESCU
Institutul politehnic București

Lucrarea examinează ecuațiile de mișcare și relațiile fundamentale necesare pentru determinarea cîmpurilor de viteze, presiuni și temperaturi în mișcările turbulente în straturi subțiri, plecînd de la relații semiempirice pentru evaluarea tensiunilor turbulente. Astfel, după deducerea unor relații globale dintre debite și presiuni, se prezintă ecuația diferențială a presiunilor pentru regimuri de funcționare staționare și nestaționare. În continuare, se prezintă o metodă aproximativă pentru considerarea efectului forțelor de inerție. De asemenea, în vederea determinării cîmpului de temperaturi se deduce o relație globală de bilanț energetic. În încheiere, se prezintă unele considerații privind evaluarea naturii regimului de scurgere pentru anumite condiții date.

1. INTRODUCERE

Mișcările turbulente în straturi subțiri între două suprafețe solide în mișcare relativă au constituit în ultimii ani obiectul a numeroase studii legate de probleme de lubrificație. Astfel, dezvoltarea anumitor tipuri de mașini clasice, ca, de exemplu, turbine cu abur sau cu gaze, prin mărirea turațiilor sau a dimensiunilor au condus la apariția turbulenței în filmul de lubrifiant din lagăre. În același timp au apărut o serie de domenii noi de aplicații tehnice, ca mașini avînd lagărele unse cu lichide caracterizate printr-o viscozitate cinematică redusă, la care, chiar la turații moderate numerele Reynolds locale iau valori mari (de ordinul 10^3—10^5) : lagăre cu apă, lagăre lubrificate cu metale lichide pentru pompele sistemelor de răcire a unor reactori nucleari și chiar lagăre unse cu gaze lichefiate. În aceste condiții mișcările turbulente în straturi subțiri reprezintă o problemă actuală pentru care se urmărește a se obține relații globale, care să permită determinarea cel puțin a caracteristicilor medii ale mișcării : viteze, presiuni, forțe și momente de frecare, debite, temperaturi etc.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 537—557

Interesul pentru lubrificația turbulentă a apărut în urmă cu aproximativ 15 ani cînd, într-o serie de lucrări (Wilcock [1], Smith și Fuller [2], Abramowitz [3]), s-a demonstrat experimental că mișcarea în pelicula de lubrifiant își pierde caracterul laminar în momentul în care numărul Reynolds crește peste anumite limite. Începînd din anul 1956 au început a fi abordate cercetări ce urmăreau elaborarea unor metode de studiu a acestui tip de mișcări, bazate pe cunoștințele actuale privind mișcările turbulente. Aceste studii s-au bazat fie pe anumite date experimentale strict empirice, fie pe unele relații semiempirice de evaluare a tensiunilor turbulente.

În cele ce urmează se prezintă principalele rezultate obținute, folosind ca punct de plecare ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl [4]—[7] atît cu privire la posibilitățile de evaluare a cîmpului de viteze și presiuni, cît și cu privire la evaluarea cîmpului de temperaturi și limitele domeniilor de funcționare în regim laminar, tranzitoriu și turbulent. Este de menționat că ținînd seama de stadiul actual al cunoștințelor în domeniul turbulenței, nu ne putem aștepta ca o asemenea problemă să capete o rezolvare riguroasă și definitivă, ci numai să conducă la rezultate calitativ corecte și cantitativ suficient de apropiate de datele experimentale.

2. ECUAȚII GENERALE

Acceptînd conceptul că fiecare mărime poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o sumă de doi termeni, o valoare medie și o fluctuație, în cazul cel mai simplu cînd forțele de inerție (în afara tensiunilor turbulente) sînt neglijabile, ecuațiile de mișcare se scriu [4], [5]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'}),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'^2}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'}),$$

unde axa y este considerată normală la una din suprafețe, iar presiunea p, tensiunile tangențiale τ_{xy}, τ_{zy}, viscozitatea μ, densitatea ρ, componentele vitezei u, v, w reprezintă valori medii, u', v', w' sînt fluctuațiile vitezei, iar $\overline{u'v'}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{v'w'}$ reprezintă tensiunile turbulente.

Într-o primă aproximație sistemul de mai sus poate fi considerat ca valabil și pentru mișcări nepermanente relativ lente și chiar pentru fluide compresibile, atît timp cît numărul Mach al fluctuațiilor este redus.

În situaţiile în care termenii convectivi ai forţelor de inerţie nu sînt neglijabili (numere Reynolds mari), sistemul (1) trebuie înlocuit cu

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'}),$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'^2}), \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'}).$$

Faţă de problema corespunzătoare regimului laminar, o primă deosebire apare în faptul că presiunea nu mai este constantă pe grosimea filmului. Totuşi [4], dacă presiunea este înlocuită cu $\pi = p + \rho\overline{v'^2}$, rezultă atunci în continuare $\partial\pi/\partial y = 0$. Mai mult, $\pi = p$ pe cele două suprafeţe solide.

Sistemul (1), respectiv (2), trebuie integrat pentru a obţine mai întîi profilele de viteze $u(y)$, $w(y)$ avînd ca parametri numărul Reynolds şi derivatele $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial z$. Această integrare poate fi efectuată în principiu în cazul sistemului (1), cu condiţia ca tensiunile turbulente să poată fi estimate într-un mod oarecare.

Pînă în prezent estimarea tensiunilor turbulente s-a făcut în următoarele moduri:

(a) *Utilizarea teoriei lungimii de amestec*, plecînd de la relaţia dată de Prandtl pentru mişcări unidimensionale:

$$-\overline{u'v'}=l_a^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{3}$$

unde l_a este lungimea de amestec, considerată, de exemplu, ca fiind o funcţie de distanţa de la perete. Relaţia (3) folosită pentru mişcări cvasiunidimensionale, ca şi relaţii generalizate pentru mişcări bidimensionale au fost folosite într-o serie de lucrări [4]—[6], ca şi în monografia [7] pentru studiul lubrificaţiei cu medii incompresibile (lichide) şi compresibile (gaze), în regim staţionar şi nestaţionar, reliefînd aproximaţiile introduse şi modul în care rezultatele pot fi corectate pentru situaţii care acoperă cîmpul aplicaţiilor practice. Printre alte lucrări care pleacă de la ipoteza lungimii de amestec se pot cita cele pulicate de Chow şi Saibel [8], Wheeler [9], ca şi lucrarea publicată de A. Reynolds [10], în care se încearcă a se introduce o corecţie suplimentară pentru regiunea centrală a filmului. De asemenea, Shen [11] a dezvoltat metoda lungimii de amestec pentru cazul mai restrîns al mişcărilor care diferă puţin de o mişcare de tip Couette;

b) *Utilizarea legii la perete*, folosită succesiv de Ng [12], Pan [13] şi Elrod [14], se bazează pe evaluarea viscozităţii de vîrtej ϵ produsă de

turbulenţă, de exemplu

$$-\overline{u'v'} = \epsilon \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Astfel, în apropierea fiecărui perete, se poate lua aproximativ

$$\frac{\epsilon}{\nu} = 0{,}4\left(y^+ - 10{,}7\ \mathrm{th}\frac{y^+}{10{,}7}\right), \tag{5}$$

unde

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}; \qquad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \tag{6}$$

Relaţia (5) este dedusă pe baza datelor experimentale pentru o regiune din imediata apropiere a suprafeţelor, suficient de limitată pentru a considera $\tau = \text{const}$. În cazul lubrificaţiei, ipoteza de mai sus impune ca gradientul de presiune să fie redus, respectiv că mişcarea diferă foarte puţin de una Couette pură. În lucrarea [14] se corectează această deficienţă prin utilizarea legii (5), numai în imediata apropiere a frontierelor solide, iar în restul domeniului se admite o valoare ϵ constantă, aleasă convenabil pe baza datelor experimentale existente pentru stratul-limită.

O variantă diferită a fost propusă de Burton [15], [16], care, în locul unei relaţii $\epsilon = \epsilon(y^+)$, propune utilizarea unei relaţii $\epsilon = \epsilon(u^+)$ împreună cu $y^+ = y^+(u^+)$

$$y^+ = u^+ + \left(\frac{u^+}{8{,}74}\right)^7; \qquad \frac{\epsilon}{\nu} = 0{,}801\left(\frac{u^+}{8{,}74}\right)^7; \qquad u^+ = \frac{u}{u_\tau}. \tag{7}$$

Este interesant de remarcat că toate procedeele menţionate mai sus, în fond empirice sau semiempirice, utilizate în mod sistematic corect, conduc la rezultate finale foarte apropiate. De altfel, pentru lubrificaţie, sîntem mai puţin interesaţi în aspectele de detaliu ale mişcării, şi urmărim în primul rînd stabilirea unor relaţii între vitezele medii sau debite şi gradienţii de presiune $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial z$. Într-o mişcare Couette pură (suprafeţe paralele, cilindri coaxiali) în care $\partial p/\partial x = \partial p/\partial z = 0$, această relaţie se reduce la $U_m = V/2$, V fiind viteza suprafeţei mobile. În cazul general, structura ecuaţiilor (1) sugerează utilizarea parametrilor adimensionali:

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho V h}{\mu}; \qquad B_x = -\frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad B_z = -\frac{h^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{8}$$

pentru situaţiile tipice lubrificaţiei autoportante (presiuni generate exclusiv datorită existenţei unei viteze relative între suprafeţe). În aceste condiţii, principalul rezultat ce se poate deduce este că, întocmai ca şi pentru regimul laminar, există relaţii aproximativ liniare între debite (sau viteze

medii) și parametrii $B_{x,z}$, coeficienții de proporționalitate fiind funcții de numărul Reynolds

$$Q_x = U_m h = \frac{Vh}{2} - \frac{h^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial x},$$
$$Q_z = W_m h = -\frac{h^3}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{9}$$

Factorii de proporționalitate G_x, G_z (în unele lucrări [4]—[7] notați cu $k_{x,z} = 1/G_{x,z}$) au valori constante în regim laminar $G_x = G_z = 1/12$, în timp ce în regim turbulent scad continuu la creșterea numărului Reynolds.

Un al doilea rezultat calitativ important este dependența, de asemenea, aproximativ liniară dintre tensiunile tangențiale de pe cele două suprafețe și parametrii $B_{x,z}$

$$(\bar{\tau}_{xy})_{0,h} = \bar{\tau}_c \pm \frac{1}{2} B_x; \quad (\bar{\tau}_{zy})_{0,h} = \pm \frac{1}{2} B_z, \tag{10}$$

unde

$$\bar{\tau} = \frac{h\tau}{\mu V}, \tag{11}$$

iar $\bar{\tau}_c$ este tensiunea de frecare în mișcarea Couette pură, care este, de asemenea, o funcție de numărul Reynolds ($-\bar{\tau}_c = 1$ în regim laminar).

Dependența parametrilor G_x, G_z, $\bar{\tau}_c$ de numărul $\mathcal{R}e$ a fost determinată prin metodele menționate mai sus, analitic sau numeric. De exemplu, folosind lungimea de amestec, se deduce că pentru domeniul de numere Reynolds $1000 < \mathcal{R}e < 30\,000$

$$\frac{1}{G_x} = 12 + 0{,}0136\ \mathcal{R}e^{0.9},$$
$$\frac{1}{G_z} = 12 + 0{,}0043\ \mathcal{R}e^{0.96}, \tag{12}$$
$$-\bar{\tau}_c = 1 + 0{,}012\ \mathcal{R}e^{0.94}.$$

Folosind, de exemplu, legea la perete [13] rezultă pentru G_x, G_z și $\bar{\tau}_c$ curbele din figura 1. Se constată o concordanță satisfăcătoare cu relațiile (12).

Este, de asemenea, interesant de menționat că unii autori au propus să se deducă direct relațiile globale de tipul (9) și (10) plecînd de la datele experimentale existente pentru diferite mișcări de tip Poiseuille și Couette.

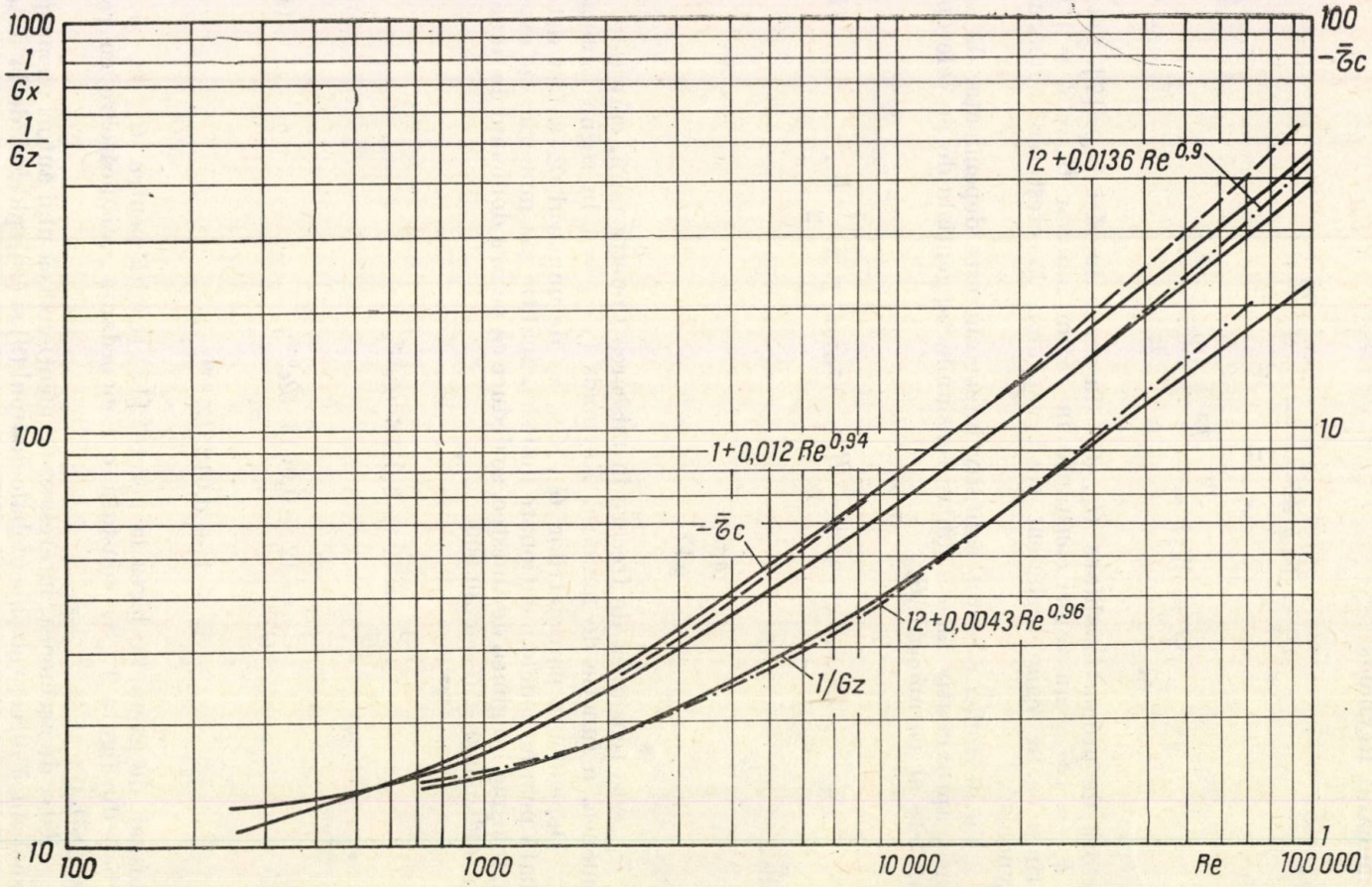


Fig. 1. — Variația parametrilor G_x, G_x și $\bar{\tau}_c$ cu numărul Reynolds $\mathcal{R}e = \rho V h/\mu$.

Primele încercări de acest gen au fost efectuate de Smith și Fuller [2] și Tao [17], dar numai relativ recent aceste metode au fost folosite în mod consistent (Burton [15], [16], Hirs [18]).

Relațiile globale (9), (10), (12) sînt valabile pentru cazurile curente de lubrificație, cînd există întotdeauna o viteză relativă V, care produce gradienți de presiune $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial z$.

Există totuși o altă categorie de aplicații (lagăre cu canale spirale sau elicoidale, lubrificația hidrostatică), pentru care există gradienți de presiune mai mult sau mai puțin independenți de viteza relativă V. În aceste condiții, relațiile (9) și (10) sînt în continuare valabile, dar parametrii G_x, G_z sînt funcții atît de numărul Reynolds (care poate fi chiar zero), cît și de gradienții $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial z$. Astfel dacă G_x, G_z sînt interpretați ca elementele diagonale ale unui tensor $G_{\alpha\beta}$, debitul total (9) poate fi scris

$$\vec{Q} = \frac{h\vec{V}}{2} - \frac{h^3}{\mu} G \operatorname{grad} p, \tag{13}$$

unde

$$G = \vec{e}_\alpha G_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta; \qquad G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} G_x & 0 \\ 0 & G_z \end{bmatrix}. \tag{14}$$

În cazul extrem al lagărelor alimentate cu presiune exterioară, avînd ambele suprafețe imobile ($V = 0$), $\mathcal{G}$ devine un scalar ($\mathcal{G} = G$), depinzînd numai de gradientul total de presiune

$$G = G(|B^*|); \qquad \vec{B}^* = -\frac{h^3}{\mu\nu} \operatorname{grad} p \tag{15}$$

sau de numărul Reynolds corespunzător

$$\mathcal{R}e' = \frac{Uh}{\nu} = \frac{Q}{\nu} = G|B^*|, \tag{16}$$

unde U este viteza medie totală datorită gradientului de presiune.

Parametrul G poate fi dedus atît teoretic, cît și plecînd de la date experimentale. O formulă analitică relativ simplă este

$$G = \frac{K_G}{\mathcal{R}e'^{n_G}}; \qquad K_G = 6{,}8; \qquad n_G = 0{,}681, \tag{17}$$

reprezentată grafic în figura 2, împreună cu unele valori numerice (14).

Rezultă deci că tensorul $G_{\alpha\beta}$ poate fi evaluat relativ simplu în cele două situații extreme : (a) turbulență produsă îndeosebi printr-o mișcare de tip Couette și (b) printr-o mișcare de tip Poiseuille. În cazurile intermediare, componentele tensorului $G_{\alpha\beta}$ pot fi evaluate folosind una dintre

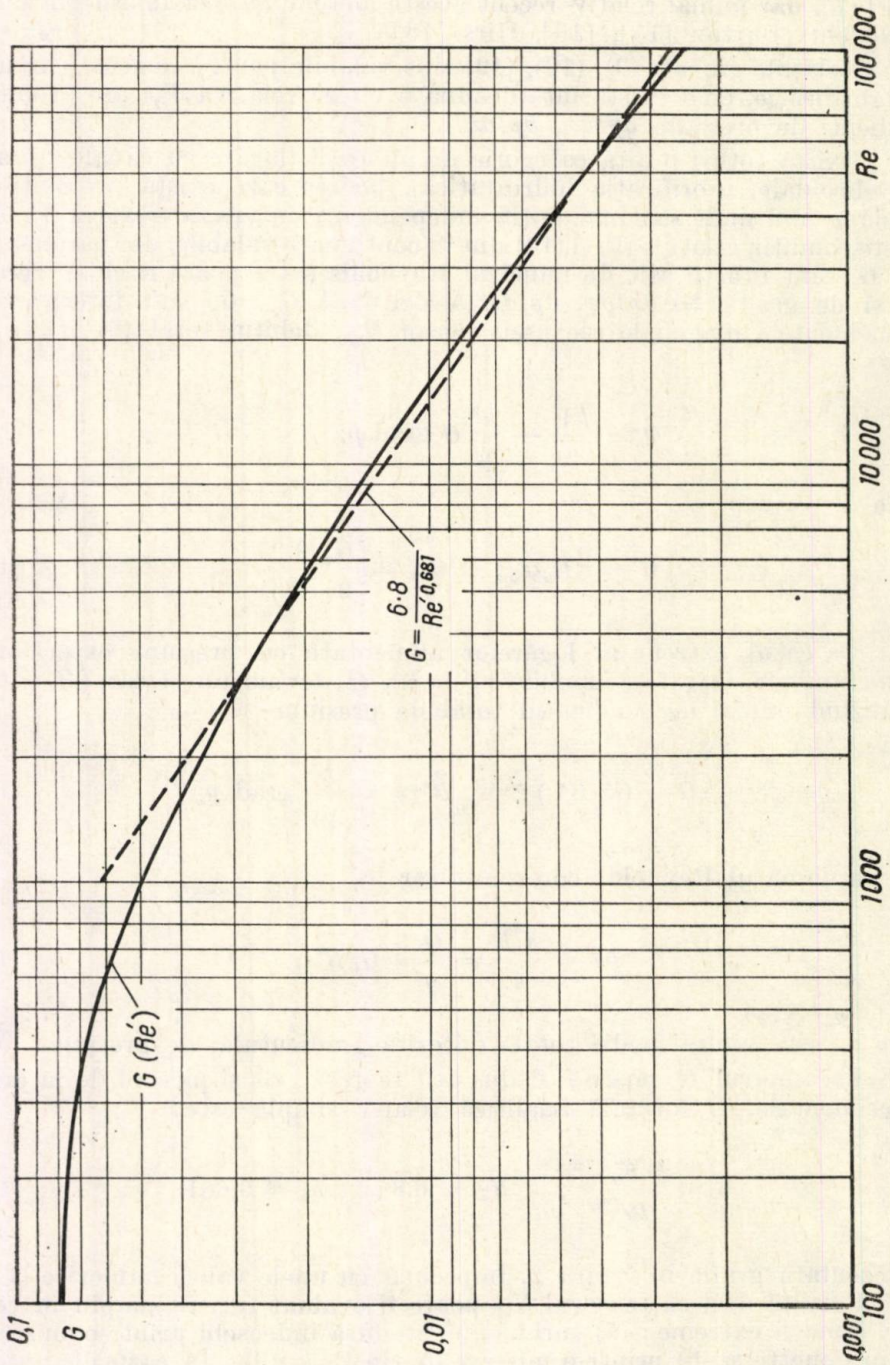


Fig. 2. — Parametrul G în funcție de numărul Reynolds pentru mișcări de tip Poiseuille.

metodele neliniare menționate [7], [14], [16], [18], dar calculele devin extrem de complicate. Cu toate acestea se poate utiliza un procedeu aproximativ destul de simplu de evaluare a componentelor $G_{\alpha\beta}$, respectiv $G_{x,z}$, plecînd de la observația [7], [14] că valorile respective se depărtează în mod gradat de valorile (12), tinzînd către valorile (17), cînd $\mathcal{R}e' \gg \mathcal{R}e$. Astfel, se pot utiliza valorile (12) atît timp cît $G_{x,z} < G$ și lua $G_{x,z} = G$ în caz contrar.

În aceste condiții, prin exprimarea ecuației de continuitate sub o formă globală, se deduce o ecuație diferențială numai în presiuni. De exemplu, pentru regimuri staționare se obține imediat

$$\operatorname{div}(\rho\vec{Q}) = \operatorname{div}\left(\frac{\rho h\vec{V}}{2} - \frac{\rho h^3}{\mu} G \operatorname{grad} p\right) = 0 \tag{18}$$

sau, în coordonate carteziene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{V}{2} \frac{\partial(\rho h),}{\partial x}, \tag{19}$$

valabilă pentru toate situațiile, cu condiția ca parametrii $G_{x,z}$ să fie evaluați în mod corespunzător.

Forma ecuațiilor (18) și (19), aproape identică cu ecuația presiunilor în regim laminar, explică similaritatea calitativă a proprietăților funcționale ale lagărelor turbulente cu cele funcționînd în regim laminar.

Această similaritate se menține și în cazurile nestaționare. Astfel, dacă pe lîngă o viteză relativă (eventual funcție de timp), suprafețele mai au în plus și o mișcare de apropiere sau de depărtare, ecuația de continuitate (18) se scrie

$$\operatorname{div}(\rho\vec{Q}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = 0, \tag{20}$$

de unde rezultă imediat, cu ajutorul relației (13), de exemplu pentru fluide incompresibile

$$\operatorname{div}\left(\frac{h}{2}\vec{V} - \frac{h^3}{\mu} G \operatorname{grad} p\right) + \dot{h} = 0. \tag{21}$$

Ecuația presiunilor (18), (19), sau (20), dedusă pentru prima oară în anul 1959 [5], a fost utilizată în ultimii ani în numeroase lucrări pentru calculul caracteristicilor statice și dinamice a diferitelor tipuri de lagăre, obținîndu-se o concordanță cu totul satisfăcătoare cu datele experimentale. Un exemplu este dat în figura 3 pentru un lagăr circular lubrificat cu apă.

În legătură cu comportarea lagărelor turbulente în regim dinamic, de exemplu pentru rotori, mișcarea în lagăre este caracterizată printr-o

excentricitate care poate fi scrisă sub forma

$$\vec{e} = \vec{e}_0 + \delta\vec{e} \tag{22}$$

$\vec{e}_0$ fiind o valoare medie constantă, iar $\delta\vec{e}$ o funcţie de timp ca mărime şi direcţie. Pentru o funcţionare corectă a ansamblului este necesar ca

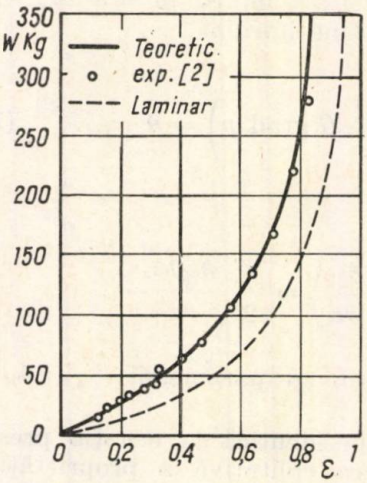


Fig. 3. — Capacitatea de încărcare în funcţie de excentricitatea relativă pentru un lagăr circular lubrificat cu apă avînd $2R = 76$ mm, $L/D = 1$, $C/R = 0{,}00293$ la 7450 rot/min $\left(\mathcal{R}e^* = \frac{\rho Vc}{\mu} = 3320\right)$.

$|\delta\vec{e}| \ll |\vec{e}_0|$, fapt care permite liniarizarea ecuaţiei (21) în raport cu $\delta\vec{e}$, ale cărui componente pot fi atunci tratate ca perturbaţii mici. Astfel

$$h = h(\vec{e}) = h_0(\vec{e}_0) + \delta h\,; \quad \dot{h} = \delta\dot{h}, \tag{23}$$

iar presiunea va rezulta sub forma

$$p = p_0 + p_i\delta e_i + p_i'\delta\dot{e}_i, \tag{24}$$

unde, pentru fiecare funcţie p_0, p_i, p_i' va rezulta din (21) cîte o ecuaţie diferenţială. Acest sistem de ecuaţii este în general neliniar în p_0, liniar în p_i, p_i' şi poate fi rezolvat folosind metode numerice pentru cazurile practice. Astfel faţă de un sistem arbitrar fix X, Y, componentele P_x, P_y ale rezultantei presiunilor vor fi

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P_{0x} + K_{xx}x + K_{xy}y + B_{xx}\dot{x} + B_{xy}\dot{y}, \\ P_y &= P_{0y} + K_{yx}x + K_{yy}y + B_{yx}\dot{x} + B_{yy}\dot{y}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

unde coeficienţii de rigiditate K_{ij} şi de amortizare B_{ij} vor fi funcţie de poziţia statică $\vec{e}_0$ (X_0, Y_0), de numărul Reynolds şi, eventual, de frecvenţa

vibraţiilor (în cazul fluidelor compresibile), în afara parametrilor adimensionali obişnuiţi pentru lagărele funcţionînd în regim laminar.

În acest mod se poate rezolva nu numai problema proiectării a diferite tipuri de lagăre funcţionînd în regim turbulent, dar şi probleme mai complexe ca, de exemplu, comportarea dinamică a rotorilor sprijiniţi pe lagăre turbulente.

3. INFLUENŢA FORŢELOR DE INERŢIE

Rezultatele precedente presupun, pe de o parte, că regimul de mişcare în film este complet turbulent, iar pe de altă parte, că numărul Reynolds local nu este prea mare, în aşa fel, încît să se poată neglija forţele de inerţie (cu excepţia tensiunilor turbulente). Un criteriu aproximativ de apreciere a ordinului de mărime a forţelor de inerţie ($\sim \rho u \partial u/\partial x$) faţă de cele de viscozitate ($\sim \mu \partial^2 u/\partial y^2$) este

$$\mathcal{R}e \frac{h}{l}, \tag{26}$$

iar faţă de tensiunile turbulente

$$\frac{\mathcal{R}e}{|\bar{\tau}_c|} \frac{h}{l} \quad \text{sau} \quad 12\, G_x \mathcal{R}e \frac{h}{l}. \tag{27}$$

Se constată că parametrul (27) este substanţial mai mic decît (26). Totuşi, chiar în aceste condiţii, la numere Reynolds mari, forţele de inerţie încep să devină importante. Astfel, de exemplu, la $\mathcal{R}e = 10\,000$, din figura 1 rezultă $|\bar{\tau}_c| \sim 12\, G_x \sim 10$, astfel încît parametrul (27) devine de ordinul de mărime 1, chiar dacă $h/l \sim 10^{-3}$.

Studiul mişcării în filmul de lubrifiant cu considerarea forţelor de inerţie este extrem de dificil, chiar şi numai în regim laminar. De aceea singura metodă de evaluare aproximativă a influenţei forţelor de inerţie este de a încerca de la început să se lucreze cu valori medii pe grosimea filmului, aducînd astfel problema la una oarecum asemănătoare cu scurgerea prin conducte sau ajutaje [7], [22]. Este interesant de remarcat că în ultimii ani şi alţi cercetători [16], [18], [23]—[26] au folosit procedee asemănătoare. În esenţă, metoda constă din a scrie sistemul (2) sub forma

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau^*_{wy}}{\partial y}, \\
&\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau^*_{zy}}{\partial y},
\end{aligned} \tag{28}$$

unde cu τ^* s-au notat tensiunile turbulente ($\tau^*_{yx} = -\rho\overline{u'v'}$ etc.) şi de a integra termen cu termen aceste ecuaţii în raport cu y de la 0 la h. În acest

scop, notînd cu

$$U_m = \frac{1}{h}\int_0^h u\,dy\,; \quad W_m = \frac{1}{h}\int_0^h w\,dy, \tag{29}$$

termenii reprezentînd forţele de inerţie sînt evaluaţi în mod aproximativ în felul următor :

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial t}\,dy = h\frac{\partial U_m}{\partial t}; \quad \int_0^h u^2 dy = \alpha_{xx} U_m^2 h,$$
$$\int_0^h uw\,dy = \alpha_{xz} U_m W_m h, \quad \int_0^h w^2 dy = \alpha_{zz} W_m^2 h. \tag{30}$$

O discuţie a aproximaţiilor introduse este dată în detaliu în lucrările [21]—[24] arătîndu-se că într-o primă aproximaţie factorii de corecţie α_{ij} pot fi luaţi constanţi şi egali cu unitatea.

În plus, dacă se presupune că tensiunile de frecare pe cele două suprafeţe pot fi evaluate în continuare ca

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_0^h = (\tau_{xy})_h - (\tau_{xy})_0 \cong \frac{\mu}{hG_x}\left(U_m - \frac{V}{2}\right); \quad \mu\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_0^h \cong -\frac{\mu}{hG_z}W_m, \tag{31}$$

atunci sistemul (28) se scrie, de exemplu pentru fluide incompresibile sub forma

$$\rho h\frac{\partial U_m}{\partial t} + \rho\alpha_{xx}\frac{\partial}{\partial x}(U_m^2 h) + \rho\alpha_{xz}\frac{\partial}{\partial z}(U_m W_m h) + h\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{hG_x}\left(U_m - \frac{V}{2}\right) = 0,$$
$$\rho h\frac{\partial W_m}{\partial t} + \rho\alpha_{xz}\frac{\partial}{\partial x}(U_m W_m h) + \rho\alpha_{zz}\frac{\partial}{\partial z}(W_m^2 h) + h\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{hG_z}W_m = 0. \tag{32}$$

În sfirşit, introducînd o funcţie ψ, astfel încît

$$U_m h = -\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad W_m h = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{33}$$

ecuaţia de continuitate este automat satisfăcută pentru regimuri staţionare, iar sistemul (32) se transformă într-un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute ψ, p ce poate fi rezolvat prin metode numerice [24]. Este interesant de remarcat că cu toate aproximaţiile introduse, rezultatele ce se obţin sînt într-o remarcabilă concordanţă cu datele experimentale. Astfel, în figura 4 se prezintă distribuţia presiunilor într-un lagăr în trepte la care din cauza influenţei forţelor de inerţie are loc o abruptă scădere de presiune în locul unde grosimea filmului scade brusc. De altfel alura curbei presiunilor din figura 4 poate fi explicată calitativ imediat

dacă se particularizează sistemul (32) pentru cazul mai simplu al lagărelor de lățime infinită. În aceste condiții mișcarea nu depinde de z; în plus, asociind prima ecuație (32) cu condiția de continuitate pentru regimuri

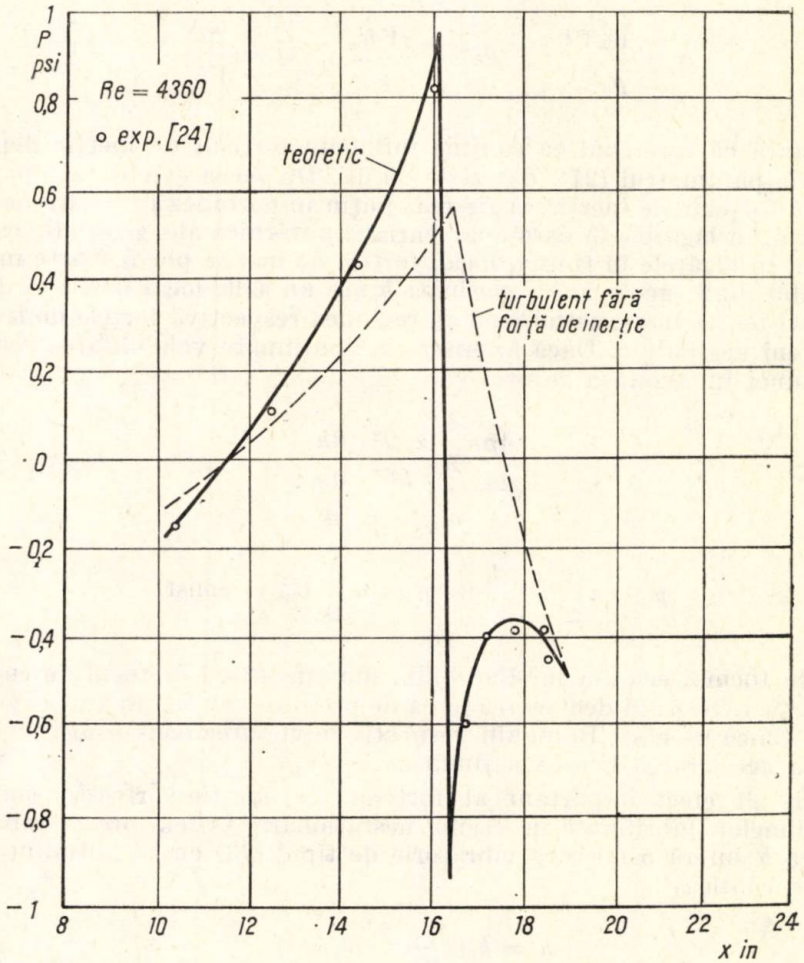


Fig. 4. — Distribuția presiunilor într-un sector în trepte al unui lagăr circular, lubrificat cu un ulei sintetic ($\nu = 1{,}018$ cst) la o turație de 546 rot/min ($\mathcal{R}e^* = 4.360$).

staționare, se deduce în final ecuația presiunilor sub forma

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu V}{2G_x h^2}\left(1 - \frac{2Q}{Vh}\right) + \frac{\alpha\rho Q^2}{h^3}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{34}$$

sau adimensional

$$\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}\bar{x}} = \Lambda\frac{1}{12G_x}\left[\frac{1}{\bar{h}^2}\left(1 - \frac{\bar{Q}}{\bar{h}}\right) + 12G_x\mathcal{R}e^*\frac{h_{in}}{l}\cdot\frac{\alpha}{24}\frac{1}{\bar{h}^3}\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right], \tag{35}$$

unde

$$\bar{p} = \frac{p}{p_a}\ ;\quad \bar{x} = \frac{x}{l}\ ;\quad \bar{h} = \frac{h}{h_m},$$

$$\Lambda = \frac{6\mu V l}{p_a h_m^2}\ ;\quad \mathcal{R}e^* = \frac{\rho V h_m}{\mu}\ ;\quad \bar{Q} = \frac{2Q}{V h_m}. \tag{36}$$

Se constată că termenul ce conține influența forțelor de inerție depinde efectiv de parametrul (27), dar și de $\mathrm{d}\bar{h}/\mathrm{d}\bar{x}$. De aceea este de așteptat ca influența forțelor de inerție să fie mai puțin importantă în lagăre netede. În schimb, în lagărele la care apar variații puternice ale grosimii, ca, de exemplu, în lagărele în trepte, local, forțele de inerție pot fi foarte importante. Mai mult, acolo unde grosimea h are un salt, local derivata $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ are valori foarte mari, astfel încît în regiunea respectivă forțele de frecare pot deveni neglijabile. Dacă admitem în continuare valabilitatea ecuației (34), atunci în regiunea respectivă

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cong \frac{\alpha\rho Q^2}{h^3}\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\,. \tag{37}$$

sau

$$p + \alpha\frac{\rho}{2}Q^2\frac{1}{h^2} = p + \alpha\frac{\rho}{2}U_m^2 = \text{const}, \tag{38}$$

care este tocmai ecuația lui Bernoulli, modificată cu factorul de corecție $\alpha = \alpha_{xx} \cong 1$. Rezultă deci că scăderea de presiune din figura 4 este perfect explicabilă ca un efect Bernoulli, respectiv în virtutea conservării presiunii totale la accelerarea bruscă a fluidului.

Un alt efect important al forțelor de inerție privește comportarea filmelor lubrifiante în regim nestaționar. Astfel, presupunînd că grosimea h suferă o mișcare vibratorie de tipul (23) cu amplitudine mică și cu frecvența ω^*,

$$h = h_0(1 + \varepsilon\cos\omega^* t), \tag{39}$$

se poate scrie formal pentru rezultanta presiunilor

$$W = W_{00} + W_{0i} + \delta W_{00} + \delta W_{0i} + \delta W_s + \delta W_{si} + \delta W_{ti}, \tag{40}$$

unde W_{00} este sarcina statică (fără forțe de inerție), W_{0i} este contribuția forțelor de inerție la sarcina statică, δW_{00} și δW_{0i} sînt creșterile corespunzătoare datorită termenului δh din (39), δW_s este variația sarcinii, datorită efectului de apropiere și de depărtare a suprafețelor, δW_{si} contribuția forțelor de inerție (proporțională cu $\dot{h}^2$) și, în sfîrșit, δW_{ti} este contribuția derivatei în raport cu timpul a vitezei (proporțional cu $\ddot{h}$).

Adimensional ordinul de mărime al acestor termeni este

$$\overline{W} = \Lambda \overline{W}_{00} + \Lambda \mathcal{R}e^* \frac{h_m}{l} \overline{W}_{0i} + \varepsilon \Lambda \delta \overline{W}_{00} + \varepsilon \Lambda \mathcal{R}e^* \frac{h_m}{l} \delta \overline{W}_{0i} +$$

$$+ \varepsilon \Lambda \frac{\omega^*}{\omega} \delta \overline{W}_s + \varepsilon^2 \Lambda \mathcal{R}e^* \frac{h_m}{l} \frac{\omega^{*2}}{\omega^2} \delta \overline{W}_{si} + \varepsilon \Lambda \mathcal{R}e^* \frac{h_m}{l} \frac{\omega^{*2}}{\omega^2} \delta \overline{W}_{ti}. \qquad (41)$$

Ultimul termen diminuează rigiditatea filmului și chiar conduce la rigidități negative dacă numărul Reynolds este mare. Într-adevăr, comparînd, de exemplu, δW_{ti} și W_{00}, se constată că $\delta W_{ti}/W_{00} \sim 1$ dacă $\varepsilon = 0{,}1$, $h_m/l = 10^{-3}$, $\omega^*/\omega = 1$ și $\mathcal{R}e^* = 10\,000$.

Rezultă deci că pentru lubrificația turbulentă la numere Reynolds mari forțele de inerție pot reprezenta efecte importante, cel puțin pentru anumite tipuri de lagăre.

4. EFECTE TERMICE ÎN FILMUL DE LUBRIFIANT

În considerațiile precedente s-a presupus implicit că viscozitatea fluidului poate fi considerată constantă sau înlocuită cu o valoare medie. În realitate temperatura nu este constantă, ci apare un cîmp de temperaturi $T(x, y, z)$ ce poate afecta substanțial valorile locale ale viscozității. Cu toate acestea trebuie menționat că în regim turbulent, efectele termice sînt comparativ mai puțin importante decît în regim laminar, deoarece turbulența este în esență un proces de amestec și deci relativ independent de viscozitate. Totuși, cel puțin pentru uleiuri la care viscozitatea variază mult cu temperatura, evaluarea efectelor termice este necesară.

O ecuație corectă a energiei este greu de scris, deoarece pe lîngă efectele globale trebuie incluse și efectele locale ce conduc la medieri complicate între fluctuațiile vitezelor, presiunilor, temperaturilor etc. [27], iar o parte din energia introdusă în sistem este utilizată pentru producerea și menținerea turbulenței. De aceea pentru aplicații în lubrificație este mai comod să evaluăm un bilanț termic global de forma

$$H_f = H_{cv} + H_{cd}, \qquad (42)$$

unde H_f este căldura produsă prin frecare, H_{cv} căldura evacuată prin convecție (prin debitul de lubrifiant), iar H_{cd} căldura evacuată prin conductibilitate.

Într-o primă etapă se poate neglija H_{cd} și considera că întreaga căldură produsă este evacuată prin debitul de lubrifiant. În regim laminar, în aceste condiții se scrie o ecuație a energiei pentru film, ecuație care eventual poate fi extinsă aproximativ la cazul turbulent [28], operînd anumite medieri pe grosimea h, analoge cu cele utilizate pentru evaluarea forțelor de inerție. Totuși, este mai corect și mai comod să se scrie direct un bilanț termic global pentru un element de film de grosime h și de dimensiuni dx, dz, avînd o temperatură T_m. Astfel căldura evacuată prin convecție este proporțională cu

$$H_{cv} \sim \rho c_v \left(Q_x \frac{\partial T_m}{\partial x} + Q_z \frac{\partial T_m}{\partial z} \right), \qquad (43)$$

în timp ce căldura produsă prin disipaţie este proporţională cu

$$H_f \sim \int_0^h \left(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy = \tau_{xy}u\,|_0^h + \tau_{zy}w\,|_0^h - Q_x\frac{\partial p}{\partial x} - Q_z\frac{\partial p}{\partial z} =$$

$$= -(\tau_{xy})_0 V - Q_x\frac{\partial p}{\partial x} - Q_z\frac{\partial p}{\partial z} = -\tau_c V + \frac{h^3}{\mu}\left[G_x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + G_z\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right], \quad (44)$$

unde s-au utilizat relaţiile (1), (9) şi (10) împreună cu condiţiile la limită pentru regimuri staţionare : $u = V$, $w = 0$ la $y = 0$ şi $u = w = 0$ la $y = h$.

În aceste condiţii obţinem ecuaţia de bilanţ termic căutată

$$\rho c_v\left[\left(\frac{Vh}{2} - \frac{h^3}{\mu}G_x\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{\partial T_m}{\partial x} - \frac{h^3}{\mu}G_z\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial T_m}{\partial z}\right] =$$

$$= -\tau_c V + \frac{h^3}{\mu}\left[G_x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + G_z\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right], \quad (45)$$

care poate fi folosită împreună cu ecuaţia presiunilor pentru a determina simultan $p(x, z)$, $T_m(x, z)$, considerînd viscozitatea ca o funcţie de tem-

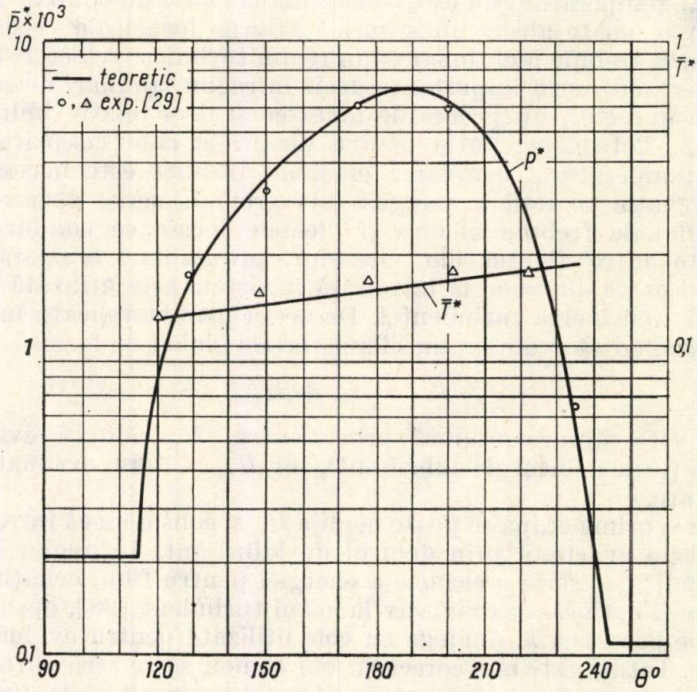


Fig. 5. — Distribuţia presiunilor şi a temperaturilor pe zona încărcată a unui lagăr circular eliptic în regim turbulent $\left(\bar{p}^* = \frac{p}{\mu N}\left(\frac{C}{R}\right)^2 \frac{1}{\mathcal{R}e^*}\right.$;

N — turaţia în rot/s ; $\left.T_m^* = \frac{T_m}{T_{m_0}\mathcal{R}e^{*0,25}}\right.$.

peratura T_m. Este, în sfîrșit, de notat că dacă în ecuația (45) se pune $12G_x = 12G_z = 1$ și $-\tau_c = \mu V/h$, se regăsește ecuația folosită curent în regim laminar. Mai mult, toate metodele utilizate în regim laminar pot fi extinse direct și pentru regimul turbulent, inclusiv evaluarea deformațiilor termice ale suprafețelor, problemă de o deosebită importanță pentru anumite lagăre de dimensiuni mari [30]. Cu titlu de exemplu, în figura 5 se redau [29] rezultate experimentale privind distribuția presiunilor și temperaturilor într-un sector de lagăr radial eliptic împreună cu datele teoretice obținute prin integrarea numerică simultană a ecuației (45) și a ecuației presiunilor (19). Se constată din nou o corelație excelentă între rezultatele teoretice și cele experimentale.

Așa după cum s-a menționat, ecuația (45) neglijează transferul termic prin conductibilitate către cele două suprafețe. Acest efect este în multe situații neglijabil. Totuși, în anumite lagăre axiale și îndeosebi în sistemele de etanșare, debitul de lubrifiant poate fi redus, astfel încît o parte din căldura produsă, uneori întreaga căldură, este evacuată prin conductibilitate. Formal, ecuația (45) poate fi completată sub forma

$$\rho c_v\left[\left(\frac{Vh}{2} - \frac{h^3}{\mu}G_x\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{h^3}{\mu}G_z\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial T_m}{\partial z}\right] =$$

$$= \varkappa_h(T_h - T_m) + \varkappa_0(T_0 - T_m) + \tau_c V + \frac{h^3}{\mu}\left[G_x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + G_z\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right], \qquad (46)$$

unde $\varkappa_0$, $\varkappa_h$ sînt coeficienți de transfer către cele două suprafețe [28]. Determinarea acestor coeficienți de transfer este însă o problemă dificilă. În plus, pe măsură ce transferul termic transversal devine important, variația temperaturii cu y devine de asemenea importantă.

Pentru a avea o idee asupra naturii acestui fenomen, se poate considera cazul extrem cînd întreaga cantitate de căldură este evacuată prin conductibilitate. În aceste condiții, notînd cu q_y fluxul termic transversal, bilanțul termic se va scrie

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} = -\left(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad (47)$$

unde q_y poate fi exprimat utilizînd analogia lui Reynolds [31]

$$q_y = -K_T\frac{\partial T}{\partial y}\ ;\quad K_T = \varkappa\left(1 + \delta\frac{\rho c_v}{\varkappa}\epsilon\right) = \varkappa\left(1 + \delta P_r\frac{\epsilon}{\nu}\right)$$

$$\mathcal{P}_t = \frac{\mu c_v}{\varkappa}, \qquad (48)$$

unde $\varkappa$ este coeficientul de conductibilitate termică, $\mathcal{P}_t$ este numărul Prandtl, ϵ este viscozitatea de vîrtej (4), iar δ este o constantă egală cu unitatea în cazul gazelor și trebuind determinată experimental în cazul lichidelor lubrifiante ($\delta \leqslant 1$). În aceste condiții, ecuația (47) se

scrie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(K_T \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \varphi,$$

$$\varphi = -\left(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\mu(1+\epsilon/\nu)}(\tau_{xy}^2+\tau_{zy}^2) = \tag{49}$$

$$= -\frac{1}{\mu(1+\epsilon/\nu)}\left\{\tau_c^2 - \tau_c\frac{\partial p}{\partial x}(h-2y) + \left(\frac{h^2}{4} - hy + y^2\right)\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right]\right\}.$$

Într-o primă aproximaţie se poate folosi un procedeu simplificat deja utilizat pentru probleme similare în regim laminar [32] cu rezultate suficient de apropiate de cele exacte [33]. Astfel, înlocuind φ, K_T cu valori medii pe grosimea y, soluţia ecuaţiei (49) se poate scrie formal

$$T = \int\frac{1}{K_T}\int\varphi dy + C_1\int\frac{dy}{K_T} + C_2; \quad T_m = \frac{1}{h}\int_0^h T dy, \tag{50}$$

ultima relaţie reprezentînd o ecuaţie în T_m. De exemplu, dacă pentru $y = 0$, h temperatura are valorile $T_{0,h}$ se deduce

$$T_m = \frac{T_0+T_h}{2} + \frac{1}{12\varkappa(1+\mathcal{P}_{tm}\delta\epsilon_m/\nu_m)(1+\epsilon_m/\nu_m)}\frac{1}{\mu_m}\left\{\tau_c^2 h^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{20}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right]\right\}, \tag{51}$$

ecuaţie ce permite calculul cîmpului de temperaturi medii $T_m(x, z)$ dacă se cunoaşte ecuaţia fizică $\mu = \mu(T)$. O evaluare aproximativă a termenilor ce intervin în ecuaţia (51) se poate face conform relaţiilor

$$1 + \frac{\epsilon_m}{\nu_m} \cong -\bar{\tau}_c = -\frac{h\tau_c}{\mu V}; \quad 1 + \mathcal{P}_{tm}\delta\frac{\epsilon_m}{\nu_m} \cong 1 + \mathcal{P}_{tm}\delta(|\bar{\tau}_c|-1). \tag{52}$$

Ţinînd în plus seama de relaţiile (8)—(10), (48), ecuaţia (51) se va scrie în final

$$\frac{T_m}{T} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{T_h}{T_0}\right) + \frac{V^2}{12c_v T_0\beta}\left(1+\frac{1}{20}\frac{B_x^2+B_z^2}{|\bar{\tau}_c|}\right);$$

$$\beta = \frac{1}{\mathcal{P}_t|\bar{\tau}_c|} + \delta\left(1-\frac{1}{|\bar{\tau}_c|}\right), \tag{53}$$

în timp ce în regim laminar se deduce în condiții similare [32]

$$\frac{T_m}{T_0} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T_h}{T_0}\right) + \frac{\mu_m V^2}{12\varkappa}\left(1 + \frac{B_x^2 + B_z^2}{20}\right). \tag{54}$$

În consecință, în regim laminar, creșterea de temperatură va fi proporțională cu

$$\Delta T \sim \frac{\mu_m V^2}{12\varkappa} \sim \frac{V^2}{180}, \tag{55}$$

ultima valoare fiind valabilă pentru uleiuri folosite la viteze mari ($\varkappa = 0{,}015$ kg/s°C, $\mu \sim 10^{-3}$ kg s/m^2). În regim turbulent din ecuația (53) rezultă creșterea de temperatură ca practic independentă de viscozitate

$$\Delta T \sim \frac{V^2}{12 c_v \delta} \sim \frac{V^2}{25.000\ \delta}, \tag{56}$$

ultima valoare fiind valabilă pentru uleiuri ($c = 0{,}49$ kcal/kg °C $= 2\,090$ m^2/s°C). În consecință, pentru a obține o creștere $\Delta T \sim 1$°C este nevoie de o viteză de ordinul a 15 m/s în regim laminar și de o viteză de circa 10 ori mai mare în regim turbulent.

5. CONDIȚII DE TRANZIȚIE

În sfîrșit, pentru a contura domeniul de utilizare a rezultatelor precedente este necesar să se precizeze condițiile de mișcare, respectiv să se verifice dacă regimul de scurgere este efectiv turbulent sau nu. În aplicațiile practice de lubrificație avem aproape întotdeauna de-a face cu mișcări produse de rotații ale unor corpuri. De aceea, din cauza unor efecte secundare (forțe centrifuge) apariția turbulenței este precedată de mișcări cu vîrtejuri [34], [35] (vîrtejuri de tip Taylor în lagărele circulare, vîrtejuri spirale în lagărele axiale). Mai mult, aceste vîrtejuri persistă și după ce mișcarea devine turbulentă, dar efectul lor asupra parametrilor globali (presiuni, debite, frecări etc.) devine repede neglijabil față de efectul tensiunilor turbulente.

Avînd în vedere cele de mai sus, rezultă că pentru precizarea regimului de mișcare în fiecare situație particulară este nevoie să se determine cel puțin două numere Reynolds locale, unul $\mathcal{R}_{e_c}$ pînă la care mișcarea păstrează caracterul laminar și un altul $R_e{}^+$ de la care se poate considera aproximativ regimul de scurgere ca fiind complet turbulent. În zona de tranziție parametrii globali medii, de exemplu presiunea sau rezultanta presiunilor, iau valori intermediare între cele corespunzătoare regimurilor extreme (laminar, turbulent). Este interesant de remarcat că rezultatele precedente, care conțin regimul laminar ca un caz particular limită, pot fi extinse cu anumite corecții și pentru evaluarea parametrilor globali medii în zona de tranziție, urmînd procedeul dat în lucrarea [35].

6. CONCLUZII

Consideraţiile prezentate în lucrarea de faţă permit să se conchidă că deşi tributare unor metode empirice sau semiempirice de evaluare a tensiunilor turbulente, rezultatele obţinute pînă în prezent au permis deducerea unei teorii unitare şi consistente a mişcărilor turbulente în straturi subţiri, utilă pentru aplicaţiile practice de lubrificaţie. Rezultatele obţinute sînt într-o concordanţă cu totul satisfăcătoare cu datele experimentale pentru diferite tipuri de lagăre fapt care permite utilizarea teoriei expuse la construirea unor metode de calcul şi proiectare a lagărelor turbulente pentru diferite aplicaţii tehnice.

BIBLIOGRAFIE

1. D. F. Wilcock, E. R. Booser, *Bearings Design and Applications*, New York, McGraw-Hill BookCo., 1957.
2. M. I. Smith, D. D. Fuller, *Journal Bearings Operation at Superlaminar Speeds*, ASME Transactions, **78**, 469—474 (1956).
3. S. Abramowitz, *Turbulence in a Tilting-Pad Thrust Bearing*, ASME Transactions, **78**, 1—6 (1956).
4. V. N. Constantinescu, *Influenţa turbulenţei asupra mişcării în stratul de lubrifiant*, St. Cerc. mec. apl., **9**, *1*, 103—137 (1958).
5. — *On Turbulent Lubrication*, Proc. of the Inst. of Mech. Engineers, Londra, **173**, *38*, 881—900.
6. — *On the Pressure Equation for Turbulent Lubrication*, Proc. of the Conference on Lubrication and Wear, Londra, 1967, The Inst. of Mech. Engineers.
7. — *Teoria lubrificaţiei în regim turbulent*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1965 ; în limba engleză, U. S. Atomic Energy Commission, Division of Technical Information AEC-TR-6959, 1968.
8. Y. T. Chow, E. Saibel, *The Effect of Turbulence on Slider Bearing Lubrication*, ASME Trans., Series E, Journ. of Appl. Mech. **81**, 122—126 (1959).
9. E. L. Wheeler, *Analysis of Turbulent Lubrication Using Prandtl's Mixing Length Theory*, ASME Paper 65-LUB-17, 1965.
10. A. J. Reynolds, *Analysis of Turbulent Bearings Films*, Journ. Mech, Eng. Sci., *5*, 258—272 (1963).
11. F. A. Shen, *Optimum Stiffness of Externally-Pressurized Thrust Bearings in Turbulent Regime*, ASME Trans., Series F, Journ. of Lubr. Techn., **92**, *3*, 457—465 ( ).
12. C. W. Ng, *Fluid Dynamic Foundation of Turbulent Lubrication Theory*, ASME Trans., Series F, Journ. of Lubr. Techn., **7**, 311—321 (1964).
13. C. W. Ng, C. H. T. Pan, *A Linearized Turbulent Lubrication Theory*, ASME Trans., Series D, Journ. of Bsic Eng., **87**, 675—698 (1965).
14. H. G. Elrod, C. W. Ng, *A Theory of Turbulent Fluid Films and its Application to Bearings*, ASME Trans., Series F, Journ. of Lubr. Techn., **89**, *3*, 356—363 (1967).
15. R. A. Burton, *Turbulent Film Bearings under Small Displacements*, ASLE Trans., **7**, 322 (1964).
16. R. A. Burton, J. H. Carper, *Fundamental Investigation of Liquid Metal Lubricated Journal Bearings*, Southwest Research Ins., San Antonio, Texas, Report SwRI-1228—T8—33, 1967.
17. L. M. Tao, *A Theory of Lubrication in Short Journal Bearings*, ASME Trans., **80**, 1734 (1958).
18. G. G. Hirs, *Fundamentals of a Bulk-Flow Theory for Turbulent Lubricant Films*, Doctoral Thesis, Delft Univ., 1970.
19. V. N. Constantinescu, *Asupra scurgerii cu frecare a gazelor între plăci paralele*, St. cerc. mec. apl., **13**, *4*, 23—40 (1961).
20. — *Asupra mişcării cu viteze mari a gazelor în straturi subţiri*, St. cerc. mec. apl., **13**, *2*, 383—400 (1962).

21. — *Lubrificaţia cu gaze*, Bucureşti, Edit. Academiei 1963.
22. — *On the Influence of Inertia Forces in Turbulent and Laminar Self-Acting Films*, ASME, Trans., Series F, Journ. of Lubr. Techn., **92**, *3*, 473—481 (1970).
23. R. A. Burton, *An Experimental Study of Turbulent Flow in a Spiral Groove Configuration*, ASME Trans., Series F. Journ. of Lubr. Techn., **90**, *2*, 339—443 (1968).
24. A. J. Smalley, J. H. Vohr, V. Castelli, C. Wachmann, *Liquid Metal Bearings Technology for Large, High-Temperature, Sodium Rotating Machinery*. Part I. *An Analytical Study and Experimental Investigation of Turbulent Flow in Bearing Films, Including Convective Inertia Forces*, MTI Report Nr. 68-TR-80, 1968, New York Mechanical Technology Inc., Latham.
25. A. J. Smalley, *Liquid Metal Bearing Technology for Large, High-Temperature, Sodium Rotating Machinery*. Part. II. *Design Data Handbook on Turbulent Flow Journal Bearings Including Fluid Inertia Effects*, MTI Report Nr. 69-TR-60, 1969, New York Mechanical Technology Inc., Latham.
26. J. M. Redecliff, J. H. Vohr, *Hydrostatic Bearings for Cryogenic Rocket Engine Turbopumps*, ASME Trans., Series f., Journ. of Lubr. Techn., **91**, *3*, 557—575 (1969).
27. J. O. Hinze, *Turbulence*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1959.
28. J. W. Lund, E. B. Arwas, *A Simultaneous Solution of the Lubrication and Energy Equations for Turbulent Journal Bearings Films*, MTI Report Nr. 64-TR-31(R.1), 1964, New York Mechanical Technology Inc., Latham.
29. M. Giberson — *Experiments on Large Turbine Bearings in Turbulence*, Proc. Conf. on Limits of Lubrication, Imperial College, London, July 12—16, 1971.
30. V. Castelli, S. B. Malanovski, *Method for Solution of Lubrication Problems with Temperature and Elasticity Effects: Application to Sector Tilting Pad Bearings*, ASME Trans., Series F, Journ. of Lubr. Techn., 1968.
31. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, New York, McGraw Hill Book Co., 1960.
32. V. N. Constantinescu, *Discussion to the paper "Simulation of Ball Bearing Lubrication with a Rolling Disk Apparatus", by J. C. Bell and J. W. Kannel*, ASME Trans., Series F, Journ. of Lubr. Techn., **92**, 12—24 (1970).
33. J. Bootsma, *The Effect of Viscosity Variation with Temperature on the Performance of Spiral Groove Bearings*, ASLE Paper 69-LC-21, 1969.
34. V. N. Constantinescu, C. H.T. Pan, A. J. Smalley, J. H. Vohr, *Lubrication Phenomena in a Film of Low Kinematic Viscosity*, Rev. Roum. Sci. Tech.-Méc. Appl., **15**, *2*, 479—502 (1970).
35. V. N. Constantinescu, C. H. T. Pan, F. C. Hsing, *A Procedure for the Analysis of Bearings Operating in the Transition Range Between Laminar and Fully Developed Turbulent Flow*, Rev. Roum. Sci. Techn-Méc. Appl., **16**, *5*, 945—982 (1971).

Omagiu profesorului ELIE CARAFOLI

CONTRIBUȚII LA STUDIUL CURGERII TURBULENTE ÎN VECINĂTATEA UNUI PERETE PLAN

de D. DUMITRESCU și I. SETEANU
Institutul politehnic București

În lucrare se prezintă un procedeu de obținere pe cale analitică a pulsațiilor vitezei fluidului pentru curgerea turbulentă în vecinătatea unui perete plan cu gradient de presiune nul în sensul curgerii, admițînd pulsații aleatorii de mică amplitudine ale fluidului incompresibil. Se deduc expresiile pulsațiilor vitezei și viteza medie în bună concordanță cu rezultatele experimentale.

1. INTRODUCERE

Încercările de studiu teoretic al turbulenței pornesc de obicei de la ecuațiile lui Reynolds obținute prin medierea statistică în timp a ecuațiilor lui Navier-Stokes pentru mișcarea nepermanentă. În acest fel se postulează tacit că, pentru intervale mici de timp, mișcarea unui fluid turbulent are un caracter laminar, existînd totodată mărimi cu variație aleatorie care determină apariția pulsațiilor vitezei.

Deoarece sistemul de ecuații al lui Reynolds este incomplet, ca urmare a măririi numărului de necunoscute (componentele pulsației vitezei), este necesar să se cunoască unele condiții suplimentare. O astfel de condiție a fost indicată de către L. Prandtl prin generalizarea noțiunii de lungime de amestec din teoria cinetică a gazelor și prin explicitarea expresiei acesteia în anumite cazuri particulare.

Menționăm, de asemenea, încercarea de generalizare a raționamentelor lui Gibbs din statistica clasică la procesul, prin esența sa disipativ, al turbulenței [1]. Pentru aceasta se suprapune peste sursa de energie (de exemplu peste gradientul de presiune în conductă) un ansamblu de forțe aleatorii de mică amplitudine ce nu dau o contribuție substanțială în bilanțul energetic al curgerii, dar posedă un spectru suficient de larg pentru a genera toate gradele de libertate posibile.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 559–566

2. ANALIZA TEORIEI LUNGIMII DE AMESTEC; COMPARAREA CU DATELE EXPERIMENTALE

Într-un mediu continuu oarecare în care există pulsații ale vitezei pot să apară tensiuni tangențiale provocate de aceste pulsații. Pentru planul xOz, aceste tensiuni au expresia

$$\tau = \rho \overline{u'v'}, \tag{1}$$

unde u' și v' sînt componentele corespunzătoare după axele x și y ale pulsației vitezei, iar bara superioară indică medierea statistică. Într-un fluid perfect, neturbulent, în curgere cvasistaționară, chiar în prezența pulsațiilor vitezei, $\tau = 0$.

Într-un fluid real pot exista cel puțin două tipuri de eforturi tangențiale. Pe lîngă efectul turbulenței care se manifestă în toată masa fluidului, dar care scade rapid în apropierea pereților solizi în cazul unor numere $\mathcal{R}e$ mari (teoria stratului-limită), se adaugă efectul forțelor de viscozitate, sensibil în special în vecinătatea pereților. Deși viscozitatea este într-o strînsă legătură cu nașterea turbulenței, se poate admite totuși că, la distanțe suficient de mari de perete, fluidul este nevîscos, dar turbulent. Datorită turbulenței, componentele vitezei sînt corelate statistic [2].

Lungimea de amestec a fost introdusă de către Prandtl prin relația

$$u' \sim l \frac{d\overline{u}}{dy}, \tag{2}$$

unde $\overline{u}$ este componenta vitezei medii. Conform formulei (1) se obține

$$\tau = \rho \overline{v' l \frac{d\overline{u}}{dy}}. \tag{3}$$

Admițînd că $v' \sim u'$, se deduce

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right| \frac{d\overline{u}}{dy}. \tag{4}$$

În vecinătatea unui perete plan, planul xOz, Prandtl admite că, la mică distanță de acesta lungimea de amestec este proporțională cu distanța la perete:

$$l = \varkappa y. \tag{5}$$

Analiza ecuațiilor lui Reynolds, pentru un gradient de presiune nul conduce la o expresie logaritmică pentru viteza medie:

$$\overline{u} = \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln y + \text{const}, \tag{6}$$

în care τ_0 este mărimea efortului tangențial în stratul-limită laminar de lîngă perete.

Teoria lui Prandtl nu explică tendința de stabilizare a vitezei medii în mișcarea turbulentă. Conform formulelor (6) și (2)

$$\lim_{y\to\infty} \overline{u} = \infty\,, \qquad u' \sim v' \sim \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \tag{7}$$

și se constată că pulsațiile sînt de amplitudini practic constante în toată masa fluidului, fără a fi îndeplinită condiția de aderență atît pentru pulsații, cît și pentru viteza medie.

Observațiile experimentale ale lui Klebanoff [3] și Minski [4] indică o creștere a amplitudinii medii pătratice a pulsației

$$u' = \sqrt{\overline{u'^2}} \tag{8}$$

în apropierea peretelui, anularea ei pe perete și micșorarea sa pe măsura îndepărtării de perete și apropierea de axa canalului plan. De asemenea, observațiile lui Nikuradse [4] evidențiază tendința de stabilizare a vitezei medii $\overline{u}$.

3. MODELUL PROPUS PENTRU CURGEREA TURBULENTĂ

În hidrodinamica statistică [5] se introduce coeficientul de corelație statistică pentru două mărimi pulsatorii aleatorii

$$R = \frac{\overline{\varphi\psi}}{\sqrt{\overline{\varphi^2}}\,\sqrt{\overline{\psi^2}}}\,. \tag{9}$$

Existența turbulenței într-un fluid cu viscozitatea neglijabilă se constată prin valori diferite de zero ale coeficientului de corelație:

$$\overline{u'v'} = R\sqrt{\overline{u'^2}}\,\sqrt{\overline{v'^2}}\,. \tag{10}$$

Spre deosebire de lucrarea [1], vom admite că elementul aleatoriu în ecuațiile lui Navier-Stokes pentru mișcarea turbulentă pe mici intervale de timp îl constituie existența unor pulsații aleatorii de mică amplitudine ale densității fluidului, considerat în medie incompresibil. Vom analiza curgerea la distanțe destul de mari de perete, unde nu se mai manifestă efectul viscozității, apoi vom suprapune efectul acesteia.

Pentru a determina expresiile analitice ale pulsațiilor în mișcarea turbulentă a fluidului incompresibil de vîscozitate neglijabilă, vom admite că ele au amplitudinile aproximativ egale cu ale pulsațiilor din mișcarea nepermanentă a fluidului perfect cu densitate pulsatorie, dar că efortul tangențial $\tau = \rho\,\overline{u'v'}$ este nenul datorită existenței corelației statistice.

Pentru simplificarea calculelor vom admite, într-o primă aproximaţie, o valoare constantă pentru coeficientul de corelaţie R în formula (10). De asemenea, vom considera că pulsaţiile densităţii depind numai de timp.

În cazul curgerii în vecinătatea unui perete plan ales ca plan de referinţă xOz se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

în care gradientul de presiune în lungul curgerii (după axa x) este considerat nul, iar componentele vitezei depind doar de y şi t:

$$\begin{aligned} &u = \overline{u}(y) + u'(y,t), \\ &v = v'(y,t), \\ &p = p(y,t), \\ &\rho = \rho_0 + \rho'(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Din ecuaţia de continuitate, admiţînd anularea lui v' pe perete ($y = 0$), se deduce

$$v' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} y. \tag{13}$$

A doua ecuaţie din (11) permite obţinerea presiunii $p(y, t)$. Prima ecuaţie devine după substituirea lui v' din (13):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} y \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{14}$$

Pentru a integra această ecuaţie facem schimbarea de variabilă:

$$\begin{aligned} &t \to \rho = \rho(t), \\ &\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \rho} \end{aligned} \tag{15}$$

și obținem

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = y \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{16}$$

Această ecuație cu derivate parțiale de ordinul I se poate integra prin metoda caracteristicilor. Sistemul Cauchy asociat se scrie :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{\mathrm{d}y}{y}. \tag{17}$$

Acest sistem admite integrala primă

$$\rho y = \text{const}, \tag{18}$$

adică soluția generală a ecuației (16) este

$$u = f\ (\rho y). \tag{19}$$

Deoarece pulsațiile ρ' sînt de amplitudine mică, în dezvoltarea

$$f\ (\rho y) = f\ (\rho_0 y + \rho' y) = f\ (\rho_0 y) + \rho' y\, f_0' + \ldots \tag{20}$$

vom păstra doar primii termeni. Primul va reprezenta viteza medie, iar al doilea pulsația vitezei :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= f\ (\rho_0 y), \\ u' &= \frac{\rho'}{\rho_0}\, y\, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}, \end{aligned} \tag{21}$$

astfel, pulsația u' este determinată prin relația

$$u' = \frac{\rho'}{\rho_0}\, y\, \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}. \tag{22}$$

Combinînd formulele (1), (13) și (22) se obține, cu ipotezele admise,

$$\tau = \rho R y^2 \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}. \tag{23}$$

Se observă că formula (23) diferă de formula lui Prandtl (4) datorită faptului că în loc de $v' \sim u'$ am obținut $v' \sim y$.

În continuare, vom integra ecuația lui Reynolds în care efortul tangențial turbulent va fi dat de formula (23):

$$0 = \nu \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \frac{d}{dy}\overline{(u'v')}. \tag{24}$$

Ecuația admite o primă integrare în care constanta se determină din condiția ca efortul tangențial în stratul-limită să fie τ_0

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho R y^2 \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_0, \tag{25}$$

care se mai poate scrie

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\frac{\tau_0}{\rho}}{1 + \frac{k}{\mu} y^2}, \tag{26}$$

unde $k = \rho R$.

Vom face substituția

$$\sqrt{\frac{k}{\mu}}\, y = \varphi, \tag{27}$$

ecuația (26) devine prin aceasta

$$\frac{d\bar{u}}{d\varphi} = \frac{\tau_0}{\sqrt{\mu k}} \frac{1}{1+\varphi^2} \tag{28}$$

și are soluția

$$\bar{u} = \frac{\tau_0}{\sqrt{\mu k}} \operatorname{arctg} \varphi + \text{const.} \tag{29}$$

Deoarece pe contur $u = 0$ (pentru $\varphi = 0$), se obține

$$\bar{u} = \frac{\tau_0}{\sqrt{\mu k}} \operatorname{arctg}\left(y \sqrt{\frac{k}{\mu}}\right). \tag{30}$$

Se poate constata că

$$\lim_{y\to\infty} \bar{u} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\tau_0}{\sqrt{k\mu}}, \tag{31}$$

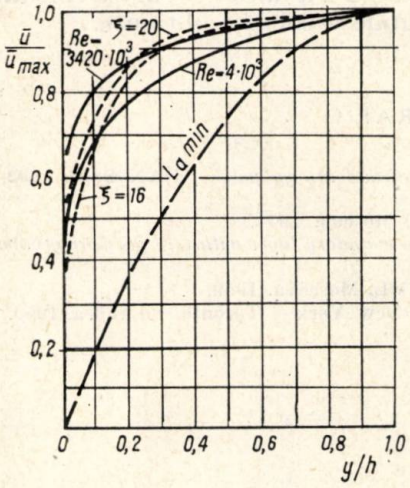


Fig. 1

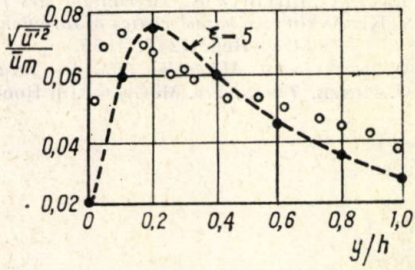


Fig. 2

adică viteza tinde să se stabilizeze. De asemenea

$$u' \sim y\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\tau_0}{\mu}\,\frac{y}{1+\frac{k}{\mu}y^2}, \tag{32}$$

adică pulsaţia se anulează pe perete şi admite un maxim în vecinătatea acestuia.

Pentru comoditate, vom nota cu y_0 distanţa la care apare maximumul pulsaţiei u'. Vom transcrie adimensional formulele (30) şi (32)

$$y_0 = \sqrt{\frac{\mu}{k}}, \qquad \bar{u}_\infty = \frac{\pi}{2}\,\frac{\tau_0}{\sqrt{k\mu}},$$

$$\frac{\bar{u}}{u_\infty} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi, \tag{33}$$

$$\frac{u'}{u'_{\max}} = \frac{2\varphi}{1+\varphi^2},$$

unde am utilizat notaţia (27).

Reprezentarea grafică a formulelor (33) şi compararea cu datele experimentale ale lui Nikuradse şi Minski este dată în figurile 1 şi 2.

În figura 1 am folosit notația

$$\varphi = \xi \frac{y}{h}, \tag{34}$$

alegînd pentru ξ valorile 16 și 20. În figura 2 s-a ales $\xi = 5$. Se constată o bună concordanță cu datele experimentale a soluției obținute.

BIBLIOGRAFIE

1. E. A. Novikov, *Statisticeskoe raspredeleniie dlia turbulentnogo potoka*, DAN SSSR, **292**, 5 (1968).
2. L. Landau, Lifchitz E., *Mécanique des fluides*, Moscou, 1971.
3. P. S. Klebanoff, *Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero-pressure gradient*, NACA, Rep. 1247, 1955.
4. L. G. Loițianskii, *Mehanika jidkosti i gaza*, GIFML, Moscova, 1959.
5. J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill Book Co., New York — Toronto — Londra, 1959.

Omagiu profesorului ELIE CARAFOLI

METODA PENALIZĂRII ŞI OPTIMIZAREA ZBORULUI

de T. HACKER
I. M. F. C. A.

Se prezintă o utilizare a tehnicii funcţiei de penalizare, asociate metodei principiului maximului, la abordarea unor probleme de optimizare a zborului. Astfel, se elimină unele constrîngeri impuse variabilelor de comandă (§ 2), şi de stare (§ 3), precum si ambelor simultan (§ 4), în probleme de programare optimală a zborului în urcare şi a accelerării. Se schiţează într-o notă (§ 5) un procedeu pentru uşurarea rezolvării efective a unor probleme bilocale prin utilizarea metodei penalizării, dîndu-se ca exemplu programarea zborului în urcare, pentru atingerea altitudinii maxime într-un interval de timp dat.

NOTAŢII

t timpul;
α unghiul de incidenţă al axei de portanţă nulă a avionului cu profundorul nebracat;
X coordonata de poziţie paralelă cu solul (orizontală) a centrului de masă a avionului;
h altitudinea de zbor;
V viteza centrului de masă a avionului, relativă la atmosfera presupusă în repaus;
γ înclinaţia traiectoriei de zbor faţă de orizontală;
g acceleraţia gravităţii;

$$a = \frac{SC_{D_0}}{2m};$$

$$b = \frac{SC_{L_\chi}^2}{2\pi A m};$$

$$c = T/m;$$

$$t = SC_L/2\,m;$$

unde au fost folosite următoarele notaţii standard:

ρ densitatea aerului la altitudinea de zbor;
m masa totală a avionului;
S aria suprafeţei portante;
A alungirea aripii;
C_{D_0} coeficientul de rezistenţă la înaintare la portanţă nulă;

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 567–577

C_{L_α} panta curbei coeficientului de portanţă, funcţie de incidenţă;
T tracţiunea totală.

1. INTRODUCERE

În definirea problemelor de optim se includ unele constrîngeri impuse variabilelor sistemului, pentru a compensa acele limitări, cerute de unele aspecte ale procesului real considerat, care nu pot fi implicate în ecuaţii. Unele dintre aceste constrîngeri complică considerabil rezolvarea problemei. După cum se ştie, metoda funcţiei de penalizare) oferă o posibilitate de a micşora dificultatea prin eliminarea acelor constrîngeri din definirea sistemului. Acest articol prezintă o tehnică de utilizare a metodei funcţiei de penalizare asociate principiului maximului, pentru abordarea unor probleme de optimizare a zborului.

Gradul de aproximaţie al ecuaţiilor de mişcare ca model matematic, precum şi acela al datelor numerice folosite în calcule justifică utilizarea metodei penalizării în unele probleme de dinamica zborului [2, § 12.7]. Procedeul constă în înlocuirea constrîngerilor impuse sistemului cu funcţii de penalizare, introduse în indicele de performanţă, astfel încît o încălcare importantă a constrîngerilor determină o înrăutăţire a performanţei definite de indice. În acest fel, grija satisfacerii (cel puţin aproximative) a constrîngerilor este trecută în seama problemei de optim, apărînd o posibilitate de a elimina, la definirea sistemului, acele constrîngeri care, într-un fel sau altul, sînt supărătoare (complică rezolvarea problemei).

Se consideră sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, u),$$

unde vectorul coloană n-dimensional x reprezintă variabilele de stare, iar vectorul r-dimensional u variabilele de comandă. Condiţiile la capete sînt date, de exemplu, sub forma unor varietăţi S^0 şi S^1, m^0-respectiv m^1-dimensionale ($x(t^0) \in S^0$, $x(t^1) \in S^1$, $m^0 \leqslant n$, $m^1 \leqslant n$). Indicele de performanţă este definit de funcţionala integrală

$$I = \int_{t^0}^{t^1} f_0(x, u)\, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Sistemului i se impun anumite constrîngeri, exprimate sub formă de inegalităţi:

$$g_i(x, u) \leqslant 0, \qquad i = 1,2, \ldots, k. \tag{2}$$

Problema de optim este formulată după cum urmează. Să se determine legea de variaţie a comenzii, $u = \tilde{u}(t)$, astfel încît soluţia ecuaţiei

*) Cu privire la unele aspecte ale teoriei generale, vezi, de exemplu, [1].

vectoriale $dx/dt = f(x, \tilde{u})$ să transfere sistemul dintr-o stare $x \in S^0$ într-o altă stare $x \in S^1$, cu satisfacerea constrîngerilor (2) şi minimizarea funcţionalei (1).

Uneori necesitatea satisfacerii unora dintre constrîngerile (2) complică considerabil soluţionarea problemei. Fie $\delta_i = g_{l+i}(x, u)$, $i = 1,2, \ldots,$ $k-l$, aceste constrîngeri. Vom formula acum o altă problemă de optim. Anume, să se determine comanda optimă $\tilde{u}(t)$ astfel încît soluţia ecuaţiei $dx/dt = f(x, \tilde{u})$ să transfere sistemul dintr-o stare S^0 într-o altă stare S^1 cu satisfacerea constrîngerilor $g_i(x, u) \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$ şi minimizînd funcţionala

$$J = \int_{t^0}^{t^1} (f_0(x, u) + p(x, u))\, dt. \tag{3}$$

Funcţia de penalizare $p(x, u)$ reprezintă suma următoarelor $k - l$ funcţii :

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \delta_i \leqslant 0, \\ \lambda_i \delta_i^2 & \text{pentru } \delta_i \geqslant 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, k-l,$$

cu λ_i constante pozitive.

Este intuitiv evident că, pentru o soluţie optimă în sensul indicat şi pentru valori suficient de mari ale constantelor λ_i, constrîngerile $\delta_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-l$, nu vor fi puternic încălcate într-un interval de timp practic semnificativ.

Este de remarcat că valoarea optimă a performanţei este, în general, mai bună pentru problema modificată decît pentru cea iniţială, dar constrîngerile sînt satisfăcute doar cu o anume aproximaţie. De aceea, pentru a putea aprecia dacă soluţia problemei modificate este practic acceptabilă, deşi nu satisface în mod strict constrîngerile, ar trebui să avem la dispoziţie o evaluare, depinzînd de alegerea funcţiei de penalizare, a măsurii în care constrîngerile sînt încălcate. Problema elaborării unor tehnici de evaluare este încă deschisă.

În paragrafele următoare metoda va fi aplicată cîtorva probleme de optimizare a zborului.

2. PENALIZAREA CONSTRÎNGERII VARIABILELOR DE COMANDĂ

Se consideră problema urcării şi accelerării unui avion în timp minim sau cu consum de combustibil minim, prin comanda incidenţei. Unghiului α i se impun următoarele constrîngeri :

$$\alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}. \tag{4}$$

Variabilelor de stare nu li se impun constrîngeri. Atunci indicele de performanţă (3) ia forma

$$J = \int_{t^0}^{t^1} (f_0 + p)\, dt, \tag{5}$$

unde funcția f_0 este independentă de variabila de comandă (și poate fi presupusă, ca în [2], independentă și de variabilele de stare) și

$$p = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \delta < 0, \\ \lambda\delta^2 & \text{pentru } \delta \geqslant 0, \end{cases}$$

cu

$$\delta = (\alpha - \alpha_{max})\ (\alpha - \alpha_{min}). \tag{6}$$

Ecuațiile de mișcare vor fi [2]

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma,$$

$$\frac{dV}{dt} = -(a + b\alpha^2)\ V^2 - g \sin \gamma + c\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = l\alpha V + \frac{c\alpha - g \cos \gamma}{V}, \tag{7}$$

cu a, b, c, l și g constante pozitive (vezi notațiile). Varietatea S^0 va fi dreapta $h = h^0 (= \text{const})$, $V = V^0 (= \text{const})$ din spațiul (h, V, γ) al variabilelor de stare, iar S^1 dreapta $h = h^1 (= \text{const})$, $V = V^1 (= \text{const})$, $h^1 > h^0$, $V^1 > V^0$, a acestui spațiu.

Conform principiului maximului [3], legea optimă a incidenței, $\tilde{\alpha}(t)$, dacă există, asigură în orice moment t, $t^0 \leqslant t \leqslant t^1$, ca funcția de α,

$$H_1 = \psi_1 V \sin \gamma + \psi_2\left[-(a + b\alpha^2)\ V^2 - g \sin \gamma + c\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)\right] + \tag{8}$$

$$+ \psi_3\left(l\alpha V + \frac{c\alpha - g \cos \gamma}{V}\right) - f_0 - p$$

cu h, V, γ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 fixate, să fie maximă. Variabilele duale ψ_1, ψ_2 și ψ_3 satisfac sistemul adjunct $d\psi_1/dt = -\partial H_1/\partial h$, $d\psi_2/dt = -\partial H_1/\partial V$, $d\psi_3/dt = -\partial H_1/\partial \gamma$. Funcția $H_1(\alpha)$ este maximă în același timp cu funcția

$$\mathcal{H}_1(\alpha) = \begin{cases} \mu\alpha^2 + \nu\alpha & \text{pentru } \delta \leqslant 0, \\ \mu\alpha^2 + \nu\alpha - \lambda\delta^2 & \text{pentru } \delta \geqslant 0, \end{cases}$$

unde $\mu = -\psi_2\ (bV^2 + c/2)$, $\nu = \psi_3(IV + c/V)$, iar δ este ca și în (6).

Căutăm maximul absolut al funcției $\mathcal{H}_1(\alpha)$, domeniul de variație al argumentului α fiind deschis. Se presupune, pentru simplificare, că $\alpha_{max} > -\alpha_{min} > 0$. Atunci sînt posibile următoarele situații: (i) $\tilde{\alpha} =$

$= \alpha_{max} + O(1/\lambda)$*, dacă $\mu > 0$ şi $\nu > 0$ sau dacă $\mu < 0$, $\nu > 0$ şi $-\nu/2\mu > \alpha_{max}$ sau, în sfîrşit, dacă $\mu > 0$, $\nu < 0$ şi $-\nu/\mu < \alpha_{max} + \alpha_{min}$; (ii) $\tilde{\alpha} = \alpha_{min} - O(1/\lambda)$ ** dacă $\mu < 0$, $\nu < 0$ şi $-\nu/2\mu < \alpha_{min}$ sau dacă $\mu > 0$, $\nu < 0$ şi $-\nu/\mu > \alpha_{max} + \alpha_{min}$; (iii) $\tilde{\alpha} = -\nu/2\mu$ dacă $\mu < 0$, $\nu < 0$ şi $-\nu/2\mu > \alpha_{min}$ sau dacă $\mu < \alpha$, $\nu > 0$ şi $-\nu/2\mu < \alpha_{max}$.

Prin urmare, pentru λ suficient de mare, rezultatul va fi oricît de apropiat de cel obţinut aplicînd principiul maximului la cazul domeniului închis al variabilei de comandă definit prin inegalităţile (4) (vezi [2, tabela nr. 12.7]). Implicit, constrîngerile vor fi încălcate oricît de puţin şi performanţa definită de indicele J doar slab afectată ***.

3. CONSTRÎNGEREA VARIABILELOR DE STARE

Sistemul considerat în paragraful precedent nu excludea posibilitatea atingerii oricărui punct la orice altitudine de zbor. Întrucît nici o condiţie a problemei nu privea coordonata de poziţie a centrului de masă paralelă cu solul (orizontală), aceasta nu apărea printre variabilele de stare. Totuşi condiţiile de exploatare ale avionului pot impune o restricţie mişcărilor orizontale în funcţie de altitudinea de zbor, conform condiţiilor orografice locale, distanţei şi înălţimei clădirilor etc. Prin urmare devine necesară introducerea coordonatei X ca variabilă de stare suplimentară şi a adăuga deci încă o ecuaţie sistemului (7), anume

$$\frac{dX}{dt} = V \cos \gamma. \tag{9}$$

Pe lîngă inegalităţile (4) se consideră o constrîngere suplimentară. Ea priveşte variabilele de stare X şi h.

$$\delta \equiv X - X_0 - kh \leqslant 0. \tag{10}$$

Pentru simplificare, membrul întîi al inegalităţii s-a presupus liniar în X şi h [2]. (X_0 şi k presupuse constante pozitive; într-adevăr, să presupunem că evoluţia are loc într-o vale; atunci ecuaţia $\delta(X, h) = 0$ reprezintă generatoarea de-a lungul căreia planul de simetrie al avionului intersectează un con înscris în suprafaţa văii.)

Să considerăm sistemul (9) + (7) cu condiţiile la limită pentru h, V şi γ, ca în paragraful precedent, şi cu $X(t^0) = X^0$ şi $X(t^1)$ liber. Comanda admisibilă satisface inegalităţile (4). Pentru a evita considerarea constrîngerii variabilelor de stare (10), ceea ce ar duce la o complicare

---

* La α_{max} se adaugă o cantitate avînd, pentru valori mari ale lui λ, ordinul de mărime $1/\lambda$ şi semnul expresiei $2\mu\alpha_{max} + \nu$ (deci pozitiv în ambele cazuri).

** La α_{min} se adaugă o cantitate avînd, pentru valori mari ale lui λ, ordinul de mărime $1/\lambda$ şi semnul expresiei $2\mu\alpha_{min} + \nu$ (deci negativ în ambele cazuri).

*** Se vede imediat că ordinul de mărime al funcţiei de penalizare p este $1/\lambda$ în punctele în care $\tilde{\alpha}$ încalcă constrîngerile (4).

considerabilă a rezolvării problemei de optim, se va folosi drept indice de performanţă o funcţională de forma (5). Funcţia δ din expresia funcţiei de penalizare p este aceeaşi ca în (10).

Comanda optimă $\tilde{\alpha}$, dacă există, va asigura în orice moment t, $t^0 \leqslant t \leqslant t^1$ maximul funcţiei

$$H_2 = \hat{H}_1 + \psi_0 V \cos\gamma,$$

unde $\hat{H}_1$ este funcţia H_1 din (8), cu p modificat ca mai sus (δ ca în (10), nu ca în (6)). Deci maximul funcţiei

$$\mathcal{H}_2(\alpha) = \mu\alpha^2 + \nu\alpha$$

cu μ şi ν, ca mai sus, va fi căutat pentru α satisfăcînd inegalităţile (4). Soluţiile care pot fi optime corespund situaţiei date în tabela nr. 12.7 din [2], regăsite aproximativ în paragraful precedent. Această tabelă va fi reprodusă mai jos, pentru comoditate (tabela nr. 1).

Tabela nr. 1

Condiţiile de comutare pentru incidenţa optimă ($\alpha_{max} > -\alpha_{min} > 0$)

μ	ν	$-\nu/2\mu$	$\tilde{\alpha}$
>0	>0	indiferent	α_{max}
<0	>0	$> \alpha_{max}$	
>0	<0	$< (\alpha_{max} + \alpha_{min})/2$	
<0	<0	$< \alpha_{min}$	α_{min}
>0	<0	$> (\alpha_{max} + \alpha_{min})/2$	
<0	<0	$> \alpha_{min}$	$-\nu/2\mu$
<0	>0	$< \alpha_{max}$	

Penalizarea încălcării restricţiei (10) afectează rezultatul prin intermediul sistemului adjunct

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial X} \equiv \begin{cases} 0 & \text{pentru } \delta \leqslant 0, \\ 2\lambda(X - X_0 - kh) & \text{pentru } \delta \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial h} \equiv \begin{cases} 0 & \text{pentru } \delta \leqslant 0, \\ -2\lambda k(X - X_0 - kh) & \text{pentru } \delta \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial V} \equiv -\psi_0 \cos\gamma - \psi_1 \sin\gamma + \psi_2 2V(a + b\alpha^2) + \psi_3\left(-l\alpha + \frac{c\alpha - g\cos\gamma}{V^2}\right),$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \equiv \psi_0 V \sin\gamma - \psi_1 V \cos\gamma + \psi_2 g \cos\gamma - \psi_3 g \sin\gamma / V.$$

Să presupunem că într-un anumit interval de timp, inițial $[t^0, \tau]$, constrîngerea (10) este satisfăcută; în momentul $t = \tau$ ea este încălcată, de exemplu, $\delta(t) > 0$ pentru $t \in [\tau, \tau + \Delta t]$. Atunci, conform relației $d\psi_3/dt = \lambda 2V(k \cos\gamma + \sin\gamma) \int_\tau^t \delta(t)\,dt + V(\psi_0(t^0)\sin\gamma - \psi_1(t^0)\cos\gamma) + + \psi_2 g \cos\gamma - \psi_3 g \sin\gamma/V$, într-un anumit interval de timp, ψ_3 va fi mare pentru un λ foarte mare și pentru $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi/2$. Termenul principal al membrului al doilea al ecuației a treia a sistemului de mai sus va fi $-(l\alpha + + g\cos\gamma/V)$ și deci ψ_2 va descreşte. Devin posibile următoarele două situații: fie $\mu > 0$ și $\nu > 0$ sau $\mu < 0$ $\nu > 0$ și $-\nu/2\mu > \alpha_{max}$. În ambele cazuri $\tilde{\alpha} = \alpha_{max}$. Deci într-un anumit interval de timp ce urmează după încălcarea constrîngerii $\delta \leqslant 0$, incidența optimă este cea maximă. Această comandă trebuie să fie suficientă pentru a avea $d\delta/dt < 0$, adică $\gamma > \operatorname{arc\,tg}(1/k)$, deci să imprime sistemului o tendință de reîntoarcere în domeniul în care condiția $\delta \leqslant 0$ este satisfăcută.

4. UN CAZ DE CONSTRÎNGERE MIXTĂ

Penalizarea încălcării constrîngerilor impuse variabilelor de stare, ca în cazul tratat în paragraful precedent, afectează rezultatul numai prin intermediul sistemului adjunct. Apare o diferență chiar din momentul aplicării principiului maximului dacă restricția impusă unor variabile de stare afectează în același timp și variabilele de comandă. Anumite informații privind traiectoria optimală pot fi astfel uşor obținute.

Se va considera o problemă de accelerare optimală în zbor cvasiorizontal cu comanda incidenței. Scriem sistemul (7) omiţînd prima ecuație, anume

$$\frac{dV}{dt} = -(a + b\alpha^2)V^2 - g\sin\gamma + c\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right) \equiv \mathcal{V},$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = l\alpha V + \frac{c\alpha - g\cos\gamma}{V} \equiv \Gamma. \tag{11}$$

Sistemului i se impune o constrîngere de forma

$$\delta(V, \alpha) \equiv \alpha - \sigma(V) \geqslant 0, \qquad \sigma = \frac{g}{lV^2 + c},$$

împiedicînd pierderea de altitudine. Se presupune că c este o constantă corespunzînd de exemplu tracțiunii maxime. Comanda α satisface în plus condiția (4). Se folosește drept indice de performanță funcționala

$$J = \int_{t^0}^{t^1} (f_0 + p)\,dt \qquad p = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \alpha \geqslant \sigma \\ \lambda\delta^2 & \text{pentru } \alpha \leqslant \sigma \end{cases} \quad \lambda = \text{const} \tag{12}$$

Dacă comanda este optimă ($\alpha = \tilde{\alpha}$), funcţia

$$H(\alpha) = \psi_1\left[-(a + b\alpha^2)V^2 - g\sin\gamma + c\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)\right] +$$

$$+ \psi_2\left(l\alpha V + \frac{c\alpha - g\cos\gamma}{V}\right) - (f_0 + p),$$

deci şi

$$\mathcal{H}(\alpha) = \begin{cases} \mu\alpha^2 + \nu\alpha & \text{pentru } \alpha > \sigma, \\ \mu\alpha^2 + \nu\alpha - \lambda(\alpha - \sigma)^2 & \text{pentru } \alpha \leqslant \sigma, \end{cases}$$

cu $\mu = -(bV^2 + c/2)\,\psi_1$, $\nu = (lV + c/V)\,\psi_2$ este maximă. Incidenţele susceptibile de a fi optimale se obţin căutîndu-se maximul funcţiei $\mathcal{H}(\alpha)$ ca funcţii de starea sistemului şi de variabilele duale ψ_1 şi ψ_2, prin intermediul funcţiilor de comutare μ şi ν. Dependenţa este în general complicată. Se poate totuşi obţine o imagine calitativă dacă coeficientul λ este luat suficient de mare. Avem atunci (i) $\tilde{\alpha} \cong \sigma$ dacă $\mu < 0$ şi $\alpha_{min} \leqslant \sigma \leqslant \alpha_{max}$ sau dacă $\mu = 0$, $\nu \leqslant 0$ şi $\alpha_{min} \leqslant \sigma \leqslant \alpha_{max}$; (ii) $\tilde{\alpha} = \alpha_{min}$ dacă $\mu = 0$, $\nu \leqslant 0$ şi $\sigma \leqslant \alpha_{min}$ sau dacă $\mu < 0$ şi $\sigma \leqslant \alpha_{min}$; (iii) $\tilde{\alpha} = \alpha_{max}$ dacă $\mu > 0$ sau dacă $\mu = 0$ şi $\nu > 0$, sau dacă $\mu = 0$, $\nu \leqslant 0$ şi $\sigma \geqslant \alpha_{max}$, sau dacă $\mu < 0$, $\nu < 0$ şi $\sigma > \alpha_{max}$.

Să presupunem că iniţial $\psi_1(t^0) > 0$; atunci $\mu < 0$ şi $\sigma < \alpha_{max}$. Conform principiului maximului, $\tilde{\alpha} \cong \sigma$. Funcţia σ descreşte, deoarece viteza de zbor creşte; cînd devine mai mică decît α_{min}, se va folosi în continuare comanda $\tilde{\alpha} = \alpha_{min}$. Principiul maximului indică o comutare a comenzii la α_{max} cînd ψ_1 devine negativ şi o comutare înapoi la $\tilde{\alpha} = \sigma$ cînd ψ_1 devine din nou pozitiv ş.a.m.d. Este de aşteptat că ψ_1 rămîne tot timpul negativ în cazurile tipice curente, deci că $\tilde{\alpha} \cong \sigma$ sau $\tilde{\alpha} = \alpha_{min}$.

Concluziile studiului calitativ pot deveni mai vizibile dacă se consideră cazul simplificat al zborului strict orizontal. Acest caz poate fi propus ca un exerciţiu de aplicare a metodei penalizării. Se va presupune că zborul poate fi menţinut orizontal ($\gamma \equiv 0$) cu ajutorul unor comenzi (diferite de cele ale incidenţei şi tracţiunii) care nu afectează ecuaţia de-a lungul tangentei la traiectoria de zbor. Atunci sistemul (11) se reduce la o singură ecuaţie:

$$\frac{dV}{dt} = -(a + b\alpha^2)\,V^2 + c\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right).$$

Rezultatul apare banal în acest caz simplificat. Incidenţa optimă este în fiecare moment cea mai mică pentru care condiţia $\alpha \geqslant \sigma(V)$ este îndeplinită, anume $\tilde{\alpha} = \sigma$ dacă $\sigma \geqslant \alpha_{min}$ şi $\tilde{\alpha} = \alpha_{min}$ dacă $\sigma \leqslant \alpha_{min}$. Exerciţiul propus constă în regăsirea acestui rezultat cu ajutorul metodei penalizării, folosindu-se indicele de performanţă de mai sus şi funcţia de penalizare (12).

5. PENALIZAREA CONDIŢIILOR FINALE

În sfîrşit vom indica o posibilitate de simplificare a rezolvării unor probleme bilocale (implicate de aplicarea principiului maximului) pentru unele probleme de optim cu timp fixat. Anume, prin penalizarea condiţiilor la limită date pentru variabilele de stare la unul din capete putem să realizăm o separare a variabilelor (de stare şi duale) ale sistemului de ecuaţii în două grupuri, astfel încît pentru variabilele dintr-un grup condiţiile sînt date numai pentru momentul iniţial, iar pentru cele din celălalt grup numai pentru momentul final. O asemenea separare poate conduce, se pare, la o simplificare a rezolvării problemei bilocale.

Procedeul va fi prezentat folosindu-se un exemplu simplu, şi anume vom considera problema urcării la o altitudine maximă într-un interval de timp dat (în loc să considerăm urcarea în timp minim la o înălţime dată) prin comanda incidenţei, astfel încît începînd de la acel moment final zborul să fie orizontal.

Se recurge la sistemul (11) descriind zborul din planul de simetrie al avionului. Variabila de comandă este o funcţie de timp continuă pe porţiuni şi este admisibilă dacă satisface constrîngerile (4). Indicele de performanţă va fi

$$J = -\int_{t^0}^{t^1} V \sin \gamma \, dt. \tag{13}$$

Condiţiile iniţiale se presupun date pentru ambele variabile ($V(t^0) = V^0$, $\gamma(t^0) = \gamma^0$). Condiţia finală este dată numai pentru înclinarea traiectoriei de zbor ($\gamma(t^1) = 0$). Dacă ψ_1 şi ψ_2 reprezintă variabilele duale corespunzînd variabilelor de stare V şi respectiv γ, atunci din condiţia de transversalitate rezultă imediat că $\psi_1(t^1) = 0$, întrucît $V(t^1)$ este liber. Condiţiile la capete ale sistemului format din ecuaţiile (11) şi ecuaţiile adjuncte corespunzătoare sînt rezumate în tabela nr. 2.

Tabela nr. 2

Condiţiile la capete pentru problema iniţială

t	V	γ	ψ_1	ψ_2
t^0	V^0	γ^0	liber	liber
t^1	liber	0	0	liber

Vom înlocui acum condiţia finală pentru γ printr-o penalizare, anume folosind în locul indicelui de performanţă (13) următorul:

$$J^* = \lambda\gamma^2(t^1) - \int_{t^0}^{t^1} V \sin \gamma \, dt,$$

unde $\gamma(t^1) = q_2$ este considerat drept parametru. Se adaugă la (11) următorul sistem adjunct:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V}, \qquad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma}, \tag{14}$$

unde $H = \psi_1 \mathcal{V} + \psi_2 \Gamma + V \sin \gamma$, $\mathcal{V}$ şi Γ reprezentînd părţile drepte ale ecuaţiilor (11). Problema modificată constă atunci în determinarea comenzii admisibile $\tilde{\alpha}$ pentru care indicele de performanţă $J^* = \lambda q_2^2 - \int_{t^0}^{t^1} V \sin \gamma \mathrm{d}t$ este minim. Se obţine astfel o traiectorie finală, apropiată de cea orizontală (în locul uneia strict orizontale) dacă valoarea factorului de penalizare λ este suficient de mare.

Vom recurge la principiul maximului pe care îl vom reformula pentru cazul unui indice de performanţă conţinînd parametri [4]. Se consideră sistemul de comandă

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, u), \qquad x(t^0) = x^0,$$

unde x este un vector coloană n-dimensional, iar u o funcţie vectorială continuă pe porţiuni aparţinînd unui domeniu U în intervalul de timp $[t^0, t^1]$. Comanda u este admisibilă dacă pentru soluţia corespunzătoare există un sistem de parametri $q \in Q \subset R^s$, astfel încît $x(t^1) = \xi(q)$ şi este optimă dacă în plus face minim indicele de performanţă $J = \varphi(q) + \int_{t^0}^{t^1} f_0(x(t), u(t))\, \mathrm{d}t$. Se consideră, de asemenea, sistemul adjunct

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -\psi \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), u(t)) - \psi_0 \frac{\partial f_0}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \tag{15}$$

vectorul linie ψ avînd n componente, adică variabilele duale corespunzînd una cîte una componentelor vectorului x. Pentru prescurtare vom folosi notaţia $H(x, \psi, u) = \psi f(x, u) + \psi_0 f_0(x, u)$ *).

TEOREMĂ. (Principiul maximului). Dacă $\tilde{u}$ este o comandă optimă, $\tilde{x}$ soluţia corespunzătoare şi $\tilde{q}$ astfel încît $\tilde{x}(t^1) = \xi(\tilde{q})$, atunci există o soluţie $\tilde{\psi}(t)$ a sistemului (15) şi o constantă $\psi_0 \leqslant 0$, astfel încît

(a) $H(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u) \leqslant H(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), \tilde{u}(t))$ în orice punct $t \in [t^0, t^1]$, în care funcţia $\tilde{u}(t)$ este continuă şi pentru orice $u \in U$;

(b) au loc condiţiile de transversalitate exprimate de relaţiile

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q}(\tilde{q}) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t^1) \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\sigma}(\tilde{q}) = 0, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

În problema considerată avem doi parametri ($q_1 = V(t^1)$ şi $q_2 = \gamma(t^1)$) corespunzînd condiţiilor finale pentru V şi respectiv γ, deci două condiţii de transversalitate,

$$\psi_1(t^1) = 0, \qquad 2\lambda q_2 - \psi_2(t^1) = 0. \tag{16}$$

*) Prin urmare (15) poate fi transcris astfel :

$$\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se notează $\chi = \psi_2 - 2\lambda\gamma$ şi în locul sistemului adjunct (14) se consideră sistemul obţinut din (14) prin schimbarea de variabile $\psi_2 = \chi + 2\lambda\gamma$ şi ţinîndu-se seama de (11), adică

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_1 2V(a + b\alpha^2) + \chi\left(-l\alpha + \frac{c\alpha - g\cos\gamma}{V^2}\right) -$$

$$- \sin\gamma + 2\lambda\gamma\left(-l\alpha + \frac{c\alpha - g\cos\gamma}{V^2}\right),$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \psi_1 g\cos\gamma - \chi\frac{g\sin\gamma}{V} - V\cos\gamma + 2\lambda\left[-l\alpha V - \frac{c\alpha - g\cos\gamma(\gamma - 1)}{V}\right]. \tag{17}$$

Condiţiile la limită pentru sistemul (11) + (17) vor fi cele indicate în tabela nr. 3.

Tabela nr. 3

Condiţiile la capete pentru problema modificată

t	V	γ	ψ_1	χ
t^0	V^0	γ^0	liber	liber
t^1	liber	liber	0	0

Conform condiţiei (a) a teoremei de mai sus, comanda optimă $\tilde{\alpha}$ dacă există, realizează maximul funcţiei H în orice moment $t \in [t^0, t^1]$. Deci comenzile care pot fi optime se obţin din condiţia $H(\tilde{\alpha}) = \max_{\alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}} H(\alpha)$ sau din $\mathcal{H}(\tilde{\alpha}) = \max_{\alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}} \mathcal{H}(\alpha)$, unde $\mathcal{H} = -\psi_1(bV^2 + c/2)\,\alpha^2 + (2\lambda\gamma + \chi)\,(lV + c/V) \equiv \mu\alpha^2 + \nu\alpha$.

Comanda optimă $\tilde{\alpha}$ este egală fie cu incidenţa maximă, fie cu cea minimă, fie cu funcţia $(2\lambda\gamma + \chi)\,(lV + c/V)/[2\psi_1(bV^2 + c/2)]$, comutarea efectuîndu-se conform condiţiilor din tabela nr. 1.

BIBLIOGRAFIE

1. Okamura K, *Some Mathematical Theory of the Penalty Method for Solving Optimal Problems*, J. SIAM (Ser. on Control)., *2*, 317–331 (1965).
2. Hacker T., *Flight Stability and Control*, New York, Elsevier, 1970.
3. Pontryagin L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze R. V., Mischchenko E. F., *The Mathematical Theory of Optimal Control Processes*, New York, Wiley (Interscience), 1962.
4. Hestenes M. R., *On Variational Theory and Optimal Control Theory*, J. SIAM (Ser. on Control), *3*, 23–48 (1965).

Academicianului ELIE CARAFOLI
cu prilejul jubileului său

ECUAȚIILE PROGRAMĂRII DINAMICE PENTRU DETERMINAREA ÎNCĂRCĂRII CRITICE DE STABILITATE A UNUI ARC CIRCULAR ELASTIC CU SECȚIUNE VARIABILĂ. Nota I

de D. MANGERON [1]), N. M. OĞUZTÖRELI [2]) și V. F. POTERAȘU [3])

Dintre metodele actuale de optimizare, și anume : programarea dinamică, principiul maximului, metoda ecuației integrale în spațiul funcțional, elaborată cu totul recent de G. J. Lastman [1], și metoda programării dinamice diferențiale [2], metoda programării dinamice, inaugurată de R. Bellman în binecunoscutul său volum apărut în 1957 și tradus apoi în mai multe limbi [3], a fost aplicată sistematic de primii doi autori la studiul teoretic și practic al sistemelor polivibrante [4]) [4] și și-a găsit un număr de aplicații deocamdată restrîns și de anvergură redusă în domeniul mecanicii corpurilor deformabile. În această lucrare, autorii, ținînd seama de rezultatele obținute în [5]—[6]și [19]—[20], stabilesc cu ajutorul programării dinamice, care aduce problemele complicate la un algoritm simplu, ideal de urmat pentru calculatoarele moderne, ecuațiile necesare pentru determinarea încărcării critice de stabilitate a unui arc circular elastic cu secțiune variabilă.

1. Luînd ca punct de plecare lucrările recente ale lui C.H. Wu [9], B. Budiansky, K. C. Frauenthal, J. W. Hutchinson [10] privind problema determinării formei optime a arcelor circulare ce au cea mai mare încărcare critică de stabilitate, autorii dau în ceea ce urmează ecuațiile necesare pentru determinarea acestei încărcări critice, folosind în acest scop metoda programării dinamice. Spre deosebire de lucrările citate, se renunță aici la condiția izoperimetrică, de volum constant. Subliniem totodată că rezolvările în [9] și [10] sînt date folosind metoda perturbației, respectiv calculul variațional clasic. Cazurile studiate de acești autori sînt dintre cele mai simple ce pot apărea practic, arcul fiind circular și avînd condițiile de capăt numai articulat-articulat. În [9] însuși autorul Wu afirmă că pentru alte condiții de capăt problema este dificilă, necesitînd rezol-

[1]), [3]) Institutul politehnic Iași
[2]) University of Alberta, Edmonton, Alberta, CANADA
[4]) Numeroși autori, ca, de exemplu, cunoscutul academician american Garrett Birkhoff [7], William Gordon [8] ș.a. au numit ecuații polivibrante, introduse în literatura științifică de primul dintre autori, „ecuații Mangeron".

varea completă a sistemului de ecuații diferențiale dat inițial. Aceeași dificultate apare vădit și în lucrarea [10]. În ce privește alte forme de arce, cum ar fi, de exemplu, cicloidală, catenoidală, parabolică,...., cu diferite condiții la capete întîlnite frecvent în practică și pentru care se pun și alte restricții decît cea izoperimetrică de volum constant, de exemplu, nedepășirea efortului unitar critic în cazul considerării flambajului sau a anumitor deplasări critice, dificultățile de calcul ce apar prin folosirea metodelor citate astăzi clasice, acea a perturbației și a calculului variațional sînt, practic vorbind, insurmontabile.

Dacă se ia în considerație faptul că pot apare în practică multe alte probleme, ca, de exemplu, determinarea ariei sau volumului minim la arce plane sau spațiale în vibrații proprii sau forțate, de determinare atît a formei axei arcului, cît și a variației ariei, greutatea de abordare a unor atare probleme prin aparate de investigație matematică, astăzi clasice, crește și mai mult, întrucît în atare probleme avem de-a face cu cazuri cu mai mulți parametri. Chiar și determinarea formei ariei transversale poate cere introducerea mai multor parametri. Autorii sînt convinși că pentru soluționarea acestor probleme de optim, calculul variațional clasic nu mai are eficacitate, el nefiind adecvat pentru rezolvări numerice. Metodele Ritz, Galerkin sau altele de acest tip nu sînt satisfăcătoare, întrucît apelează la aproximări cu diferite funcții ce se propun *apriori* în ideea de a găsi astfel mijloace de a satisface condițiile de contur prescrise. Este evident că determinarea claselor de funcții adecvate este de ajuns de dificilă, cerînd o mare experiență și intuiție [5]). În afară de aceasta metodele amintite nu dau extremele situate pe frontiera domeniului, nu pot da extremele unei funcții poligonale, nu abordează situații cu restricții de tip, inegalități algebrice sau chiar izoperimetrice. De aceea, situațiile practice rezolvate pînă acum sînt extrem de simple, autorii lor mărginindu-se la cazuri în care soluțiile pot apărea sub formă finită. Această situație se referă în special la mecanica corpurilor deformabile (continue și discontinue).

Dintre metodele actuale de optimizare, și anume: programarea dinamică, principiul maximului, metoda ecuației integrale în spațiul funcțional, elaborată cu totul recent de G. J. Lastman [1] și pentru care primele aplicații și-au găsit loc, pînă acum, doar în tezele de doctorat ale ultimului dintre autori [13], precum și metoda programării dinamice diferențiale, datorită și D.H. Jacobson [2], metoda programării dinamice, inaugurată de R. Bellman [6]) în binecunoscutul său volum apărut în 1957 și tradus apoi în mai multe limbi [3], a fost aplicată sistematic de primii doi autori la studiul teoretic și practic al sistemelor polivibrante [4] și și-a găsit un număr de aplicații deocamdată restrîns și de anvergură redusă, cel puțin în domeniul pe care-l abordăm acum, și anume în mecanica corpurilor deformabile [5]—[6], [19]—[20].

Într-un șir de lucrări elaborate de autorii acestei note și aflate sub tipar, se abordează variate situații îndeajuns de generale din cadrul celor

---

[5]) Deosebit de utilă în cazul elaborării metodelor tehnice de analiză numerică s-a dovedit a fi alegerea sistematică a bazei lui Tchebycheff, preconizată de J. Legras în cadrul Conferinței de teoria aproximațiilor din 1967, organizată de către Institutul de calcul din Cluj și expusă sistematic în volumul cu totul recent al acestui autor [11].

[6]) Unii autori găsesc că sîmburele metodei de programare dinamică se află în [12].

menționate adineaori, dînd totodată și alte date privitoare la algoritmul de calcul, convergență, viteza convergenței, stabilitatea metodei ș.a.

În această lucrare se expune rezolvarea problemei indicată în titlu cu ajutorul metodei de programare dinamică care aduce problemele complicate la un algoritm simplu, ideal de urmat pentru calculatoarele moderne. Subliniem totodată că metoda de programare dinamică permite tratarea fără dificultăți principiale a proceselor optimale cu restricții asupra variabilelor de stare. Se constată că deciziile optimale determinate pentru întreg domeniul lor admisibil satisfac automat restricțiile; problema cu valori în două puncte se transformă în problema cu valori inițiale, avantaj pe care-l are metoda programării dinamice și asupra principiului maximului; sînt asigurate extremumul global și insensibilitatea la neliniarități. Pentru procesele deterministe un dezavantaj al metodei de programare dinamică discretă îl reprezintă doar faptul că această metodă nu se poate aplica la situații unde există mai mult de trei sau patru variabile de stare, deoarece timpul de calcul și memoria cerută cresc rapid în programarea la calculatoare electronice a unor atare probleme și procesul devine prohibitiv, din acest punct de vedere, actualmente. Soluția optimală obținută este suficient de exactă. Dacă se ține seamă de faptul că procesele optimale ce au pînă la trei-patru variabile de stare cuprind o gamă largă de situații, metoda de programare dinamică se impune într-un număr din ce în ce mai mare de domenii [7]).

2. Ne restrîngem aici în problema de optimizare luată în studiu la arce circulare elastice cu secțiune variabilă și din materiale care ascultă de legea lui Hooke, cu sarcini uniform repartizate, în diferite condiții de rezemare. Se consideră cazul flambajului inextensional în planul arcelor (fig. 1). Rezultatele se aplică la arce avînd unghiul de deschidere 2α,

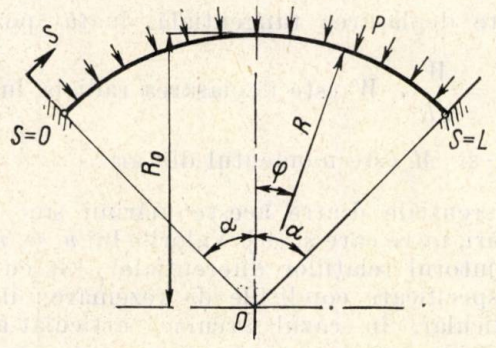


Fig. 1

îndeajuns de mare pentru ca o flambare antisimetrică să fie critică. Nu ne oprim aici asupra eventualelor ruperi bruște, simetrice, ce se produc în cazul arcelor joase. În toate cazurile se consideră că sarcinile pe unitate de lungime p sînt și rămîn normale la arc.

[7]) Subliniem prezența în volumele Congresului I.F.A.C. din 1969 a numeroase lucrări deosebit de interesante de chimie modernă, rezolvate prin metoda programării dinamice [14].

Cîtul lui Rayleigh care exprimă fenomenul de flambaj inextensional antisimetric este dat prin

$$\min \lambda = \frac{\int_0^2 h^3(s)\left(\frac{d^2w}{ds^2} + \alpha^2 w\right)ds}{k^* + \int_0^2 \left[\left(\frac{dw}{ds}\right)^2 - \alpha^2 w^2\right]ds}, \tag{1}$$

în care s-a notat

$$s = S/\alpha R \ (0 \leqslant s \leqslant 2); \tag{2}$$

$$h(s) = H(S)/\left(\frac{V}{2\alpha\, RB}\right), \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{(pR)\ (R\alpha)^2}{\frac{1}{12} EB\left(\frac{V}{2\alpha\, RB}\right)^2}, \tag{4}$$

$$k^* = u\,(s)\frac{d^2m(s)}{ds^2} - w(s)\frac{dm(s)}{ds} + m(s)\frac{dw(s)}{ds} + \alpha^2 m(s)u(s) + \tag{5}$$

$$+ u(s)\frac{d^2w(s)}{ds^2} + \alpha^2 u(s)w(s) + w(s)\frac{dw(s)}{ds}\Big|_0^2,$$

B fiind lăţimea arcului (const), H înălţimea variabilă a arcului, p încărcarea uniformă, E modulul lui Young, V volumul arcului (const), $u = \frac{U}{\alpha^2 R}$, U este deplasarea tangenţială, luată pozitivă în direcţia creşterii lui S, $w = \frac{W}{\alpha R}$, W este deplasarea radială luată pozitivă către centru, $m = \frac{M}{\alpha p R^2}$ şi M este momentul din arc.

Relaţiile diferenţiale dintre aceste mărimi sînt cunoscute şi sînt date în multe lucrări, între care şi [9]. Valorile lui u, w, m şi derivatele lor (ce se obţin cu ajutorul relaţiilor diferenţiale) sînt cunoscute la capete atunci cînd sînt specificate condiţiile de rezemare: încastrat, rezemat, articulat. În particular, în cazul arcului articulat-articulat, $k^* = 0$.

Problema considerată este echivalentă cu aceea de determinare a minimului relativ al expresiei

$$\int_0^2 \psi\,(w'' + \alpha^2 w)^2\, ds, \tag{6}$$

supusă la restricţia

$$k^* + \int_0^2 [(w')^2 - \alpha^2 w^2]ds = 1, \tag{7}$$

în care s-a notat $\psi = h^3(s)$ și la care se adaugă condiții de contur ce vor fi specificate în cele ce urmează.

Totodată, aceeași problemă este echivalentă și cu determinarea maximului relativ al expresiei

$$k^* + \int_0^2 [(w')^2 - \alpha^2 w^2] ds, \tag{8}$$

supusă la restricția

$$\int_0^2 \psi(w'' + \alpha^2 w)^2 \, ds = 1. \tag{9}$$

Abordînd, pentru a fixa ideile, problema de optimizare sub forma (6), (7) și ținînd seama de procedeele expuse în lucrările lui R. Bellman referitoare la strategie optimală [8]) și aplicate apoi de autori la studiul sistemelor polivibrante [15], [16], se consideră minimizarea problemei (6), (7) sub formă discretă, și anume

$$F = \sum_{k=1}^{N} \psi_k (w'_k - w'_{k-1} + \alpha^2 w_k)^2 . \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{N} [(w_k - w_{k-1})^2 - \alpha^2 w_k^2] = 1 - k^*, \tag{11}$$

în care condițiile $w_0 = a$, $w'_0 = c$ reprezintă unul din tipurile de condiții de contur, iar valorile w_N și w'_N urmează să fie indicate mai tîrziu.

Fazele succesive de strategie optimală sînt reflectate în considerarea expresiei

$$f_R(a, c) = \sum_{k=R}^{N} \psi_k (w'_k - w'_{k-1} + \alpha^2 w_k)^2, \tag{12}$$

ținîndu-se seama de

$$\sum_{k=R}^{N} [(w_k - w_{k-1})^2 - \alpha^2 w_k^2] = 1 - k^*, \tag{13}$$

precum și de faptul că startul începe cu starea $w_{R-1} = a$, $w'_{R-1} = c$.

Cele de mai sus ne conduc la problema de minimizare a expresiilor de forma

$$\sum_{k=R+1}^{N} \psi_k (w'_k - w'_{k-1} + \alpha^2 w_k)^2, \tag{14}$$

supuse la restricția

$$\sum_{k=R+1}^{N} [(w_k - w_{k-1})^2 - \alpha^2 w_k^2] = 1 - k^* - (w'_R)^2 \alpha^2 w_R^2. \tag{15}$$

[8]) O strategie optimă are proprietatea că oricare ar fi starea inițială și decizia inițială, deciziile rămase trebuie să constituie o strategie optimă în raport cu starea care rezultă din prima decizie.

Introducînd o nouă variabilă z_k, definită prin relaţia

$$w_k = [1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2]^{1/2} z_k, \tag{16}$$

relaţia (15) devine

$$\sum_{k=R+1}^{N} [(z_k - z_{k-1})^2 - \alpha^2 z_k^2] = 1, \tag{17}$$

în timp ce avem

$$\sum_{k=R+1}^{N} \psi_k (w'_k - w'_{k-1} + \alpha^2 w_k)^2 = [1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2] \times$$
$$\times \sum_{k=R+1}^{N} \psi_k (z'_k - z'_{k-1} + \alpha^2 z_k)^2, \tag{18}$$

n care

$$z'_R = [1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2]^{-1/2} w'_R, \tag{19}$$

şi

$$z_R = [1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2]^{-1/2} w_R. \tag{20}$$

Însă, întrucît minimul ecuaţiei (18) supusă la condiţiile (17), (19), (20) este dat prin

$$[1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2] \times$$

$$\times f_{R+1}\left[\frac{w'_R}{[1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2]^{1/2}}, \frac{w'_R + a}{[1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2]^{1/2}}\right],$$

rezultă, aplicînd principiul de optimalitate,

$$f_R(a, c) = \min_{w'_R} \left\{ [w'_R - c + \alpha^2 (w'_R + a)]^2 + [1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2] \times \right.$$
$$\left. \times f_{R+1}\left[\frac{w'_R}{[1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2]^{1/2}}, \frac{w'_R + a}{[1 - k^* - (w'_R)^2 + \alpha^2 w_R^2]^{1/2}}\right] \right\}. \tag{21}$$

Se obţine în plus

$$f_{N-1}(a, c) = [w'_{N-1} - c + \alpha^2 (w'_{N-1} + a)]^2 + [\beta - w'_{N-1} + \delta]^2, \tag{22}$$

unde w'_{N-1} este soluţia ecuaţiei

$$\{[\delta - (a + w'_{N-1})]^2 - \delta^2 \alpha^2\} + [(w'_{N-1})^2 - (w'_{N-1} + a)^2 \alpha^2] = -1 - k^*, \tag{23}$$

condițiile de contur fiind date prin

$$w_N = \delta, \; w'_N = \beta. \tag{24}$$

În cazul în care $\delta = \beta = 0$, sîntem în fața reazemului articulat al arcului.

3. Alte tipuri de condiții la capete sînt

a) capăt liber

$$w''_0 = 0, \; w'''_0 = 0; \tag{25}$$

b) capăt simplu rezemat

$$w_0 = 0, \; w''_0 = 0. \tag{26}$$

Să considerăm acum condiția de contur sub forma

$$w''_N = \gamma, \; w_N = \eta. \tag{27}$$

În acest caz se obține

$$w''_N = w'_N - w'_{N-1} = \gamma$$

și

$$f_{N-1}(a, c) = [w'_{N-1} - c + \alpha^2(w'_{N-1} + a)]^2 + (\gamma + \alpha^2\eta)^2, \tag{28}$$

unde w'_{N-1} este dat prin

$$[(\eta - a - w'_{N-1})^2 - \alpha^2\eta^2] + [(w'_{N-1})^2 - \alpha^2(a + w'_{N-1})^2] = 1 - k^*, \tag{29}$$

în care avem

$$w_{N-2} = a, \; w'_{N-1} = c. \tag{30}$$

Dacă condițiile de capăt sînt date sub forma

$$w''_N = \gamma, \; w'''_N = \xi, \tag{31}$$

se obține

$$w''_N = w''_N - w''_{N-1} = \xi$$

sau

$$w'_{N-1} = \xi - \gamma + w'_{N-1}. \tag{32}$$

Din condiția

$$\sum_{k=N-2}^{N} [(w_k - w_{k-1})^2 - \alpha^2(w_k)^2] = 1 - k^*,$$

se găsește

$$[(\gamma + w'_{N-1})^2 - \alpha^2(\gamma + a + 2w'_{N-1} + w'_{N-2})^2] + [(w'_{N-1})^2 - \alpha^2(w'_{N-1} + w'_{N-2} + a)^2] + \tag{33}$$

$$+ [(w'_{N-2})^2 - \alpha^2(a + w'_{N-2})^2] = 1 - k^*,$$

și avem, prin urmare,

$$f_{N-2}(a, c) = [w'_{N-2} - c + \alpha^2(a + w'_{N-2})]^2 + [w'_{N-1} - w'_{N-2} + \alpha^2(w'_{N-1} + w'_{N-2} + a)]^2 + [\gamma + \alpha^2(\gamma + a + 2w'_{N-1} + w'_{N-2})]^2, \tag{34}$$

unde w'_{N-1} și w'_{N-2} sînt determinate prin soluția sistemului (31), (32) și în care

$$w_{N-3} = a,\ w'_{N-3} = c. \tag{35}$$

În cazul ce corespunde la condiția de capăt liber, $\gamma = \xi = 0$, din (32) se obține

$$w_{N-2} = w'_{N-1}.$$

Relația (33) devine

$$[(\gamma + w'_{N-1})^2 - \alpha^2(\gamma + a + 3w'_{N-1})^2] + [(w'_{N-1})^2 - \alpha^2(a + 2w'_{N-1})^2] + [(w'_{N-1})^2 - \alpha^2(a + w'_{N-1})^2] = 1 - k^*, \tag{36}$$

pe cînd

$$f_{N-2}(a, c) = [w'_N - c + \alpha^2(a + w'_{N-1})]^2 + [\alpha^2(a + 2w'_{N-1})]^2 + [\gamma + \alpha^2(\gamma + a + 3w'_{N-1})]^2. \tag{37}$$

Din cele două valori ale lui w'_{N-1} ($= w'_{N-2}$) care ne oferă soluția ecuației (33), se folosește aceea care minimizează ecuația (34).

În acest mod se determină încărcarea critică de flambaj pentru un arc circular cu secțiune transversală variabilă pentru diferite condiții la limită. Alte condiții de capăt decît articulat-articulat aduc complicații mari în abordarea clasică a problemei.

4. *Observații.* În alte note privitoare la aplicarea celor mai recente metode de optimizare în mecanică tehnică am abordat și pe cea mai recentă dintre aceste metode, și anume metoda ecuației integrale în spațiul funcțional în forma de restricții, menționată în introducere. În „Referativny Jurnal Mehanika", *3*, 1971, B. Poliak afirmă că metoda nu are justificare. Această justificare este dată, dar probabil a scăpat recenzentului, în lucrarea lui G. S. Tracz și B. Bernholtz [17], care nu abordează însă probleme de convergență, transversalitate și parametri. Acești din urmă autori dezvoltă metoda indicată, pentru prima oară în literatura științifică, dar fără restricții, lucru considerat de G. J. Lastman [1].

De asemenea, într-un alt șir de note am elaborat unele aplicații ale metodei programării dinamice diferențiale, deosebit de apreciată de J. Westcott la Congresul I.F.A.C. din 1969 [18], întrucît această metodă

se prezintă pentru variațiile locale ca o metodă integrată, bazată pe programare dinamică, pe cînd pentru variațiile globale ea este o metodă de aproximare succesivă. Ea evidențiază în plus și proprietăți de convergență pătratică și prezintă o și mai bună adaptabilitate la calculatoarele electronice cifrice, fiind cristalizată într-un număr mai mic de ecuații decît aceea care se prezintă de regulă în programarea dinamică.

BIBLIOGRAFIE

1. G. J. Lastman, *An integral-equation function-space method for solving inequality-constrained optimal control problems*, Intern. J. Control, **12**, *3*, 511—525 (1970).
2. D. H. Jacobson, *Differential dynamic programming methods for solving bang-bang control problems*, IEEE Trans. Automatic control, AC-**13**, 661—675 (1968).
3. R. Bellman, S. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press, N. J., 1962.
4. D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, *Problèmes concernant les équations polyvibrantes*, Comptes rendus Acad. Sci., Paris, **270**, série A, 1970; pp. 37—40 și *Darboux Problem for a Polyvibrating Equation; Solution as an F-Equation*. Proc. National Acad. Sci., Washington. D. C., **67**, *3*, 1488—1492 (1970).
5. J. Gumowski, C. Mira, *Optimization in Control Theory and Practice*, Cambridge, University Press, 1968.
6. H. Tolle, *Optimierungsverfahren*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
7. G. Birkhoff, *Piecewise bicubic Interpolation*, în volumul *Approximations with Special Emphasis on Spline Functions*, Academic Press, New York și Londra, 1969. Vezi, în particular, p. 209 și urm.
8. W. Gordon, *Distributive Lattices and Multivariate Functions*, în volumul *Approximations with Special Emphasis on Spline Functions*, Academic Press, New York și Londra, 1969. Vezi, în particular, p. 236 și urm.
9. C. H. Wu, *The Strongest Circular-Arch. A Perturbation Solution*. J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, **35**, *3*, 476—481 (1968).
10. B. Budiansky, J. C. Frauenthal, J. W. Hutchinson, *On optimal arches*. J. Appl. Mech., Trans. ASME, series E, vol. **36**, *4*, 880—882 (1969).
11. J. Legras, *Méthodes et techniques de l'Analyse numérique*. Dunod, Paris, 1971.
12. P. Massé, *Sur les principes de la régulation d'un débit aléatoire par un réservoir*, Comptes rendus Acad. Sci., Paris, **219**, 19—21; 150—151, 173—175, 1944. Vezi și C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Leipzig-Berlin, Teubner, 1935.
13. V. F. Poteraşu, *Problema de optimizare cu aplicații la studiul barelor, plăcilor și a învelișurilor subțiri*, teză de doctorat, elaborată sub conducerea științifică a prof. dr. doc. Dumitru Mangeron, Institutul politehnic Iași, 274 p., și 670 de referințe bibliografice.
14. * * * Proc. Congress I.F.A.C., Varșovia, 1969.
15. D. Mangeron, *The Bellman's Equations with application to various Polyvibrating Equations*, J. Math. Anal. a. Appl., **9**, *1*, 141—146 (1964).
16. D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, *Estensione dei metodi di maggiorazione di Picone alle soluzioni di equazioni polivibranti*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat., s, 8, **44**, *5*, 625—632 (1968).
17. G. S. Tracz, B. Bernholtz, *An Integral Equation Approach to second variation techniques for optimal control problems*, în volumul *Optimization*, Academic Press, 1969, 151—170.
18. J. Westcott, *On the differential dynamic programming*. Congresul I.F.A.C., Varșovia, 1969.
19. A. Rigolot, *Sur le calcul des charges critiques de déversement de l'arc circulaire élastique*, Bull. Assoc. Technique, Maritime et Aéronautique, **69**, 1969, Paris, 581—597.
20. В. А. Бараненко, Ю. М. Почтман, *Динамическое программирование и нелинейные задачи статики тонких стержней*. ДАН С.С.С.Р., 182, 5, 1029—1031, 1969.

Academicianului ELIE CARAFOLI cu prilejul jubileului său

ECUAȚIILE PROGRAMĂRII DINAMICE PENTRU DETERMINAREA ÎNCĂRCĂRII CRITICE DE STABILITATE A UNUI ARC ELASTIC ÎN FORMĂ DE PARABOLĂ CU SECȚIUNE VARIABILĂ. Nota II

de D. MANGERON [1], N. M. OĞUZTÖRELI [2] și V. F. POTERAȘU [3]

Cele aproape 1 000 de lucrări apărute pînă astăzi în mecanica corpurilor deformabile, consacrate realizării unor forme optime, generatoare de mari economii, au condus la un progres neesențial din cauza inexistenței unor metode adecvate de optimizare sau a necunoașterii de către cercetători a unor metode de puternică investigație științifică, elaborate numai teoretic în ultimii ani. Dintre aceste metode, și anume : programarea dinamică, principiul maximului, metoda ecuației integrale în spațiul funcțional și metoda programării dinamice diferențiale, prima a fost aplicată cu succes de către autori în studiul variantelor sisteme polivibrante și, cu totul recent, lărgind simțitor unele rezultate cu totul recente, în mecanica corpurilor deformabile.

În această lucrare autorii, ținînd seama de conținutul lucrărilor [1]—[6], stabilesc cu ajutorul programării dinamice încărcările critice de stabilitate ale unui arc elastic în formă de parabolă cu secțiune variabilă.

1. Arcele de formă parabolică sînt cunoscute și folosite de multă vreme în construcții de poduri, civile, sportive și în perioada actuală și în construcții aeronautice și astronautice. Noile materiale apărute ca și tendința de a obține forme optime, justificată de necesitățile economice și adesea și de tehnică înaltă, a impus un studiu aprofundat al stabilității.

Vechile tehnici de calcul variațional și chiar extinderile lui recente nu sînt adaptate pentru calculatoarele electronice de astăzi. Ele duc la dificultăți insurmontabile de calcul în cazurile reale. Autorii unor lucrări recente ca C.H. Wu [4], A. C. Walker [5] ș.a. afirmă acest lucru. În cazul cînd determinarea încărcării critice de stabilitate se face cu ajutorul me-

[1], [3]) Institutul politehnic Iași și University of Alberta.

[2]) University of Alberta, Edmonton, Alberta, CANADA.

todei elementului finit [4]), procedeul utilizat este destul de complicat și are o bună convergență numai la o bună intuire a valorii inițiale a raportului Rayleigh, care exprimă flambajul inextensional antisimetric (atare raport se notează de regulă prin λ).

Avantajele metodei de programare dinamică, insensibilă la neliniarități, constă în faptul că ea se tratează fără dificultate, nu depinde de ghicirea valorii inițiale a lui λ are un algoritm simplu și ușor de mînuit, dă minimul global, are o bună convergență și viteză de convergență. Mai mult decît atît, ea permite tratarea problemelor de stabilitate într-un mod precis, fără a fi necesare multe dezvoltări prolixe, ca în metoda lui J.M.T. Thompson, sau căutări tot atît de dificile ale funcțiilor Liapunov [5]), are o sferă de utilizare foarte largă permițînd studiul unor situații deosebit de complicate caracterizate prin prezența a mai mulți parametri, conducînd la optimizări a diferitelor forme și luînd în considerație diferite restricții cerute de compatibilitatea fizică a problemelor tratate și de criteriul de performanță impus. Trebuie subliniat însă necesitatea de a ne limita astăzi la problemele deterministe cu trei sau cel mult patru variabile de stare, întrucît în cazuri mai complicate se cere o lărgire foarte serioasă a capacității memoriei calculatoarelor.

2. Ne restrîngem aici în problema de optimizare luată în studiu la arce parabolice elastice cu secțiune variabilă și din materiale care ascultă de legea lui Hooke, în diferite condiții de rezemare. Se consideră cazul flambajului inextensional în planul arcelor (fig. 1). Rezultatele se aplică la arce avînd unghiul de deschidere 2α, îndeajuns de mare pentru ca o flambare antisimetrică să fie critică. Nu ne oprim aici asupra eventualelor ruperi bruște simetrice ce se produc în cazul arcelor joase. În toate cazurile se consideră că sarcinile pe unitate de lungime p sînt și rămîn normale la arc.

Folosind metoda perturbației expusă de C.H. Wu [4], la determinarea raportului Rayleigh corespunzător arcului în formă de parabolă cu secțiune transversală variabilă în problema flambajului inextensional antisimetric, problema se reduce la minimizarea raportului Rayleigh λ, și anume

$$\min \lambda = \frac{\int_0^2 h^3(\varphi)\ (a_1^1 w'' + a_2^1 w' + a_3^1 w + a_4^1 u)\ (b_1^1 w'' + b_2^1 w' + b_3^1 w + b_4^1 u)\,\mathrm{d}\varphi}{k^* + \int_0^2 (a_1 w'^2 + a_2 w w' + a_3 u w' + a_4 u w + a_5 w^2 + a_6 u^2 + a_7 u)\ \mathrm{d}\varphi}, \qquad (1)$$

[4]) Metoda elementului finit își are temeinice justificări teoretice în teoria funcțiilor *spline*, introduse în literatura matematică de fostul elev al Iașului prof. I. J. Schoenberg [8] și cultivate pe scară largă în lucrările Institutului de calcul din Cluj [3]. Metoda programării dinamice este însă superioară metodei elementului finit, completată cu teoria bifurcației [9], în soluționarea problemelor de stabilitate de felul considerat în prezenta notă.

[5]) Materialele Congresului I.F.A.C. (Varșovia, 1969) [11] pledează pentru cultivarea simultană a invențiilor, inovațiilor și a cercetărilor teoretice, în vederea asigurării progresului tehnic și mai rapid.

unde s-a notat

$$s = S/\alpha_1 R_0, \quad (0 \leqslant S \leqslant 2) \tag{2}$$

$$h(s) = H(S) \Big/ \left(\frac{V}{2R_0 B\alpha_1}\right), \tag{3}$$

$$s = \frac{1}{2} R_0 \left[\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right],$$

$$\lambda = \frac{(pR_0)(R_0\alpha_1)^2}{\frac{1}{12}EB\left(\frac{V}{2R_0 B\alpha_1}\right)^2}, \tag{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} k^* = {} & um''C_8(\varphi) + [C_7(\varphi) - C_8'(\varphi)]\, um' + \\ & + [2C_8'(\varphi) - C_7(\varphi)]\, mu' + u''mC_8(\varphi) - \\ & - u'm'C_8(\varphi) + [C_6(\varphi) + C_7'(\varphi) + C_8''(\varphi)]\, um + \frac{2}{\alpha_1^2} uk_1 \cos\varphi + \\ & + 2\alpha_1 u'u''D_7(\varphi)\cos\varphi + 8\alpha_1[-D_6(\varphi)\sin\varphi + (D_7(\varphi)\sin\varphi)']\, uu' - \\ & - 8\alpha_1\, uu''\, D_7(\varphi)\sin\varphi\,|_0^2, \end{aligned} \tag{6}$$

$$u = u(\varphi),\ m = m\ (\varphi),\ k_1 = \lambda h^{-3} m,$$

B fiind lățimea arcului (constantă), H înălțimea variabilă a arcului, p încărcarea uniformă deja menționată, E modulul de elasticitate a lui Young, V volumul arcului (const.), $u = U/R\alpha_1$ (în care U este deplasarea tangențială, luată pozitivă în direcția creșterii lui S), $w = W/R\alpha_1$ (în care W este deplasarea radială luată pozitivă către centru), $m = M/pR^2\alpha_1$ (în care M este momentul din arc);

$$a_1^1 = -\frac{1}{\alpha_1} E_5(\varphi)C_8'''(\varphi),$$

$$a_2^1 = \frac{3C_8'(\varphi) - C_7(\varphi)}{2\alpha_1 C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi} - C_8'''(\varphi)E_8(\varphi),$$

$$a_3^1 = \frac{3C_8''(\varphi) + C_6(\varphi) - 2C_7'(\varphi)}{2\alpha_1 C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi} + \frac{E_2(\varphi)[3C_8'(\varphi) - C_7(\varphi)]}{2\alpha_1 C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi} - C_8'''(\varphi)E_7(\varphi),$$

$$a_4^1 = C_5(\varphi) - C_6'(\varphi) + C_7''(\varphi) - C_8'''(\varphi) + 3\,[2C_7'(\varphi) - C_6(\varphi) - 3C_8''(\varphi)]\,\mathrm{tg}\,\varphi +$$

$$+ \frac{E_1(\varphi)\,[C_7(\varphi) - 3C_8'(\varphi)]}{2C_1(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\varphi} - C_8'''(\varphi)E_6(\varphi),$$

$$b_1^1 = \alpha_1^2 D_7(\varphi)E_5(\varphi),$$

$$b_2^1 = -\frac{\alpha_1^2 D_6(\varphi)}{2C_1(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\varphi} + \alpha_1^3 D_7(\varphi)E_8(\varphi),$$

$$b_3^1 = -\frac{\alpha_1^2[D_5(\varphi) + D_6(\varphi)E_2(\varphi)]}{2C_1(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\varphi} + \alpha_1^3 D_7(\varphi)E_7(\varphi),$$

$$b_4^1 = -\alpha_1^3 D_4(\varphi) + 3\alpha_1^3 D_5(\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi + \alpha_1^3 D_7(\varphi)E_6(\varphi) + \frac{\alpha_1^3 D_6(\varphi)E_1(\varphi)}{2C_1(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\varphi},$$

$$a_1 = -\frac{D_7(\varphi)\cos\varphi}{2\alpha_1 C_1^2(\varphi)\,\mathrm{ctg}^2\,\varphi},$$

$$a_2 = \frac{F_2(\varphi) - 2\alpha_1 E_2(\varphi)D_7(\varphi)\cos\varphi}{4\alpha_1^2 C_1^2(\varphi)\,\mathrm{ctg}^2\,\varphi},$$

$$a_3 = \frac{2\alpha_1 E_1(\varphi)D_7(\varphi)\cos\varphi - 3\,C_1(\varphi)F_2(\varphi)}{2\alpha_1 C_1^2(\varphi)\,\mathrm{ctg}^2\,\varphi},$$

$$a_4 = -\frac{F_1(\varphi) + 3F_2(\varphi)E_2(\varphi) + 2F_3(\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2\alpha_1 C_1(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\varphi} +$$

$$+ \frac{4\alpha_1 D_7(\varphi)E_1(\varphi)E_2(\varphi)\cos\varphi - 3E_1(\varphi)F_2(\varphi)}{4\alpha_1^2 C_1^2(\varphi)\,\mathrm{ctg}^2\,\varphi},$$

$$a_5 = \frac{F_3(\varphi) + F_2(\varphi)E_2(\varphi) - 2\alpha_1 E_2^2(\varphi)D_7(\varphi)\cos\varphi}{4\alpha_1^2 C_1^2(\varphi)\,\mathrm{ctg}^2\,\varphi},$$

$$a_6 = 3F_1(\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi + 9F_3(\varphi)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi + 8\alpha_1 D_4(\varphi)\sin\varphi +$$

$$+ \frac{3E_1(\varphi)F_2(\varphi)C_1(\varphi) - \alpha_1 D_7(\varphi)E_1^2(\varphi)\cos\varphi}{2C_1^2(\varphi)\,\mathrm{ctg}^2\,\varphi},$$

$$a_7 = \frac{6}{\alpha_1}\sin\varphi,$$

iar $C_1(\varphi) - C_8(\varphi)$, $D_1(\varphi) - D_7(\varphi)$, $E_1(\varphi) - E_4(\varphi)$,

și $F_1(\varphi) - F_3(\varphi)$ sînt date prin:

$$C_1(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{(2+\cos\varphi-\cos^2\varphi)\cos^2\varphi},$$

$$C_2(\varphi) = 24C_1'(\varphi)\cos\varphi + 72C_1(\varphi)\sin\varphi,$$

$$C_3(\varphi) = 36C_1(\varphi)\cos\varphi + 4(C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)'\cos\varphi,$$

$$C_4(\varphi) = 4C_1(\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi},$$

$$C_5(\varphi) = 2\left(\frac{C_1(\varphi)C_2(\varphi)}{\sin\varphi}\right)'\cos\varphi + 6C_1(\varphi)C_2(\varphi) + 12\sin\varphi,$$

$$C_6(\varphi) = 2\cos\varphi + 6C_1(\varphi)C_3(\varphi) + 2\left(\frac{C_1(\varphi)C_2(\varphi)}{\sin\varphi}\right)\cos\varphi + 2\left(\frac{C_1(\varphi)C_3(\varphi)}{\sin\varphi}\right)'\cos\varphi,$$

$$C_7(\varphi) = 6C_1(\varphi)C_4(\varphi) + 2\frac{C_1(\varphi)C_3(\varphi)}{\sin\varphi}\cos\varphi + 2\left(\frac{C_1(\varphi)C_4(\varphi)}{\sin\varphi}\right)'\cos\varphi,$$

$$C_8(\varphi) = 2\frac{C_1(\varphi)C_4(\varphi)}{\sin\varphi}\cos\varphi,$$

$$D_1(\varphi) = 1 + 12C_1(\varphi)C_1'(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$D_2(\varphi) = 24C_1^2(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi + 4C_1(\varphi)\left(\frac{\cos^4\varphi}{\sin\varphi}C_1(\varphi)\right)'\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi},$$

$$D_3(\varphi) = -4C_1^2(\varphi)\cos\varphi\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$D_4(\varphi) = 6C_1(\varphi)D_1(\varphi) + 6C_1'(\varphi)D_2(\varphi) + 6C_1''(\varphi)D_3(\varphi),$$

$$D_5(\varphi) = 2C_1(\varphi)D_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi - D_2(\varphi)[6C_1(\varphi) - 2(C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)'] -$$

$$- D_3(\varphi)[12C_1'(\varphi) - 2(C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)'],$$

$$D_6(\varphi) = 2C_1(\varphi)D_2(\varphi) - D_3(\varphi)[6C_1(\varphi) - 4(C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)'],$$

$$D_7(\varphi) = 2C_1(\varphi)D_3(\varphi),$$

$$E_1(\varphi) = 6C_1'(\varphi) + 18C_1(\varphi)\operatorname{tg}\varphi - 6(C_1(\varphi)\operatorname{tg}\varphi)'\operatorname{tg}\varphi,$$

$$E_2(\varphi) = \frac{3C_1(\varphi) - (C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)'}{C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi},$$

$$E_3(\varphi) = 12C_1'(\varphi) - 2(C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)'',$$

$$E_4(\varphi) = 6C_1(\varphi) - 4(C_1(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi)',$$

$$F_1(\varphi) = 8(D_6(\varphi)\sin\varphi)' + 8(D_7(\varphi)\sin\varphi)'' - 2D_4(\varphi)\cos\varphi - 8D_5(\varphi)\sin\varphi,$$

$$F_2(\varphi) = 2D_6(\varphi)\cos\varphi - 2(D_7(\varphi)\cos\varphi)' - 8D_7(\varphi)\sin\varphi,$$

$$F_3(\varphi) = 2D_5(\varphi)\cos\varphi + 8D_6(\varphi)\sin\varphi + 8(D_7(\varphi)\sin\varphi)'.$$

Valorile lui u, w, m și ale derivatelor lor sînt date (cu ajutorul relațiilor diferențiale binecunoscute) la capete, atunci cînd sînt specificate condițiile de rezemare : încastrat, articulat, rezemat.

În cazul arcului articulat-articulat $k^* = 0$.

Prin urmare, problema de optimizare considerată este echivalentă cu aceea de determinare a minimului relativ al expresiei (funcționalei)

$$\int_0^2 \psi(a_1^1 w'' + a_2^1 w' + a_3^1 w + a_4^1 u)(b_1^1 w'' + b_2^1 w' + b_3^1 w + b_4^1 u)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{7}$$

supusă la constrîngerea

$$k^* + \int_0^2 (a_1 w'^2 + a_2 w w' + a_3 u w' + a_4 u w + a_5 w^2 + a_6 u^2 + a_7 u)\,\mathrm{d}\varphi = 1, \tag{8}$$

unde s-a introdus notația $\psi = h^3(\varphi)$, la care trebuie adăugate condițiile de contur, ceea ce se va face ulterior.

Aceeași problemă mai este echivalentă și cu aceea de determinare a maximului relativ al funcționalei

$$k^* + \int_0^2 (a_1 w'^2 + a_2 w w' + a_3 u w' + a_4 u w + a_5 w^2 + a_6 u^2 + a_7 u)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{9}$$

supusă la constrîngerea

$$\int_0^2 \psi(a_1^1 w'' + a_2^1 w' + a_3^1 w + a_4^1 u)(b_1^1 w'' + b_2^1 w' + b_3^1 w + b_4^1 u)\,\mathrm{d}\varphi = 1, \tag{10}$$

notația pentru ψ fiind indicată mai sus și condițiile de contur urmînd a fi specificate ulterior.

3. Abordînd, pentru a fixa ideile, problema de optimizare sub forma [7], [8] și ținînd seama de procedeele expuse în lucrările lui R. Bellman referitoare la strategie optimală [6]) și aplicate apoi de autori la studiul sistemelor polivibrante [12], se consideră minimizarea problemei [7], [8] sub forma discretă, și anume

$$F = \sum_{k=1}^{N} \psi_k [a_{1k}^1 (w_k' - w_{k-1}') + a_{2k}^1 w_k' + a_{3k}^1 w_k + a_{4k}^1 u_k] \times \\ \times [b_{1k}^1 (w_k' - w_{k-1}') + b_{2k}^1 w_k' + b_{3k}^1 w_k + b_{4k}^1 u_k], \tag{11}$$

supusă la condițiile

$$\sum_{k=1}^{N} [a_{1k}(w_k - w_{k-1})^2 + a_{2k} w_k (w_k - w_{k-1}) + a_{3k} u_k (w_k - w_{k-1}) + a_{4k} u_k w_k + \\ + a_{5k} w_k^2 + a_{6k} u_k^2 + a_{7k} u_k] = 1 - k^*, \tag{12}$$

și unde s-a pus

$$w_0 = a, \; w_0' = c, \; u_0 = b, \tag{13}$$

$$u_k = \frac{2\alpha_1 u_{k-1} C_1(\varphi_k) \operatorname{ctg} \varphi_k - w_k}{2\alpha_1 C_1(\varphi_k) \operatorname{ctg} \varphi_k - 6 C_1(\varphi_k) \alpha_1}, \tag{14}$$

iar valorile w_N, w_N' și u_N vor fi indicate mai jos. Menționăm că condiția (13) reprezintă un tip de condiții de capăt pentru un arc.

Fazele succesive de strategie optimală sînt reflectate în cele ce urmează, începînd prin considerarea expresiei

$$f_R(a, b, c) = \sum_{k=R}^{N} \psi_k [a_{1k}^1 (w_k' - w_{k-1}') + a_{2k}^1 w_k' + a_{3k}^1 w_k + a_{4k}^1 u_k] \times \\ \times [b_{1k}^1 (w_k' - w_{k-1}') + b_{2k}^1 w_k' + b_{3k}^1 w_k + b_{4k}^1 u_k], \tag{15}$$

ținîndu-se seama de

$$\sum_{k=R}^{N} [a_{1k}(w_k - w_{k-1})^2 + a_{2k} w_k (w_k - w_{k-1}) + a_{3k} u_k (w_k - w_{k-1}) + \\ + a_{4k} u_k w_k + a_{5k} w_k^2 + a_{6k} u_k^2 + a_{7k} u_k] = 1 - k^*, \tag{16}$$

---

[6]) O strategie optimală are proprietatea că oricare ar fi starea inițială și decizia inițială, deciziile rămase trebuie să constituie o strategie optimă în raport cu starea care rezultă din prima decizie.

precum şi de faptul că startul începe cu starea

$$w_{R-1} = a,\ w'_{R-1} = c,\ u_{R-1} = b.$$

Cele de mai sus ne conduc la problema de minimizare a expresiei

$$\sum_{k=R+1}^{N} \psi_k[a^1_{1k}(w'_k - w'_{k-1}) + a^1_{2k}w'_k + a^1_{3k}w_k + a^1_{4k}u_k]\times \\ \times [b^1_{1k}(w'_k - w'_{k-1}) + b^1_{2k}w'_k + b^1_{3k}w_k + b^1_{4k}u_k], \tag{17}$$

supusă la condiţia

$$\sum_{k=R+1}^{N} [a_{1k}(w_k - w_{k-1})^2 + a_{2k}w_k(w_k - w_{k-1}) + a_{3k}u_k(w_k - w_{k-1}) + \\ + a_{4k}\,u_kw_k + a_{5k}w_k^2 + a_{6k}u_k^2 + a_{7k}u_k] = 1 - k^* - C_R, \tag{18}$$

unde prin C_R s-a notat

$$C_R = a_{1R}(w_R - w_{R-1})^2 + a_{2R}w_R(w_R - w_{R-1}) + a_{3R}u_R(w_R - w_{R-1}) + \\ + a_{4R}u_Rw_R + a_{5R}w_R^2 + a_{6R}u_R^2 + a_{7R}u_R. \tag{19}$$

Introducînd o nouă variabilă z_k, definită prin relaţia

$$w_k = (1 - k^* - C_R)^{1/2}\, z_k, \tag{20}$$

şi o altă variabilă v_k, definită prin relaţia

$$u_k = (1 - k^* - C_R)^{1/2}\, v_k, \tag{21}$$

restricţia (18) devine

$$\sum_{k=R+1}^{N}\left[a_{1k}(z_k - z_{k-1})^2 + a_{2k}z_k(z_k - z_{k-1}) + a_{3k}v_k(z_k - z_{k-1}) + \right. \\ \left. + a_{4k}v_kz_k + a_{5k}z_k^2 + a_{6k}v_k^2 + a_{7k}\frac{1}{1 - k^* - C_R}\right] = 1, \tag{22}$$

în timp ce are loc egalitatea

$$\sum_{k=R+1}^{N} \psi_k[a^1_{1k}(w'_k - w'_{k-1}) + a^1_{2k}w'_k + a^1_{3k}w_k + a^1_{4k}u_k] \times \\ \times [b^1_{1k}(w'_k - w'_{k-1}) + b^1_{2k}w'_k + b^1_{3k}w_k + b_{4k}u_k] = \\ = (1 - k^* - C_R) \sum_{k=R+1}^{N} [a^1_{1k}(z'_k - z'_{k-1}) + a^1_{2k}z'_k + a^1_{3k}z_k + a^1_{4k}v_k]\times \\ \times [b^1_{1k}(z'_k - z'_{k-1}) + b^1_{2k}z'_k + a^1_{3k}z_k + a^1_{4k}v_k], \tag{23}$$

iar v_k, z'_R, z_R, v_R capătă respectiv forma

$$v_k = \frac{2\alpha_1 v_{k-1} C_1(\varphi_k) \operatorname{ctg} \varphi_k - z_k}{2\alpha_1 C_1(\varphi_k) \operatorname{ctg} \varphi_k - 6C_1(\varphi_k)\,\alpha_1}, \tag{24}$$

$$z'_R = (1 - k^* - C_R)^{-1/2}\, w'_R, \tag{25}$$

$$z_R = (1 - k^* - C_R)^{-1/2}\, w_R, \tag{26}$$

$$v_R = (1 - k^* - C_R)^{-1/2}\, u_R. \tag{27}$$

Însă, întrucît minimul ecuației (23) supusă la condițiile (22), (25), (26), (27) este dat prin

$$(1 - k^* - C_R) f_{R+1}\left[\frac{w'_R}{(1 - k^* - C_R)^{1/2}}, \frac{w'_R + a}{(1 - k^* - C_R)^{1/2}}, \right.$$

$$\left. \frac{2\alpha_1 b C_1(\varphi_R) \operatorname{ctg} \varphi_R - (w'_R + a)}{[2\alpha_1 C_1(\varphi_R) \operatorname{ctg} \varphi_k - 6C_1(\varphi_R)\,\alpha_1]\,(1 - k^* - C_R)^{1/2}}\right],$$

rezultă, aplicînd principiul de optimalitate,

$$\begin{aligned} f_R(a, b, c) = \min_{w'_R} \Bigg\{ & \psi_R \Bigg[a^1_{1R}(w'_R - c) + a^1_{2R} w'_R + a^1_{3R}(w'_R + a) + \\ & + a^1_{4R} \frac{2\alpha_1 b C_1(\varphi_R) \operatorname{ctg} \varphi_R - (w'_R + a)}{2\alpha_1 C_1(\varphi_R) \operatorname{ctg} \varphi_R - 6C_1(\varphi_R)\alpha_1} \Bigg] \times \\ & \times \Bigg[b^1_{1R}(w'_R - c) + b^1_{2R} w'_R + b^1_{3R}(w'_R + a) + \\ & + b^1_{4R} \frac{2\alpha_1 b C_1(\varphi_R) \operatorname{ctg} \varphi_R - (w'_R + a)}{2\alpha_1 C_1(\varphi_R) \operatorname{ctg} \varphi_R - 6C_1(\varphi_R)\,\alpha_1} \Bigg] + \\ & + (1 - k^* - C_R) f_{R+1}\left[\frac{w'_R}{(1 - k^* - C_R)^{1/2}}, \frac{w'_R + a}{(1 - k^* - C_R)^{1/2}}, \right. \\ & \left. \frac{2\alpha_1 b C_1(\varphi_R) \operatorname{ctg} \varphi_R - (w'_R + a)}{[2\alpha_1 C_1(\varphi_R) \operatorname{ctg} \varphi_R - 6C_1(\varphi_R)\,\alpha_1]\,(1 - k^* - C_R)^{1/2}}\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Se obține în plus

$$f_{N-1}(a,b,c)=\psi_{N-1}\Big[a^1_{1,N-1}(w'_{N-1}-c)+a^1_{2,N-1}w'_{N-1}+a^1_{3,N-1}(w'_{N-1}+a)+$$

$$+a^1_{4,N-1}\frac{2\alpha_1 bC_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-(w'_{N-1}+a)}{2\alpha_1 C_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-6C_1(\varphi_{N-1})\alpha_1}\Big]\times$$

$$\times\Big[b^1_{1,N-1}(w'_{N-1}-c)+b^1_{2,N-1}w'_{N-1}+b^1_{3,N-1}(w'_{N-1}+a)+$$

$$+b^1_{4,N-1}\frac{2\alpha_1 bC_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-(w'_{N-1}+a)}{2\alpha_1 C_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-6C_1(\varphi_{N-1})\alpha_1}\Big]+$$

$$+\psi_N\Big[a^1_{1N}(\beta-w'_{N-1})+a^1_{2N}\beta+a^1_{3N}\gamma+a^1_{4N}\delta\Big]\times$$

$$\times[b^1_{1N}(\beta-w'_{N-1})+b^1_{2N}\beta+b^1_{3N}\gamma+b^1_{4N}\delta], \tag{29}$$

unde w'_{N-1} este soluția ecuației

$$\Big[a_{1,N-1}(w'_{N-1})^2+a_{2,N-1}(w'_{N-1}+a)w'_{N-1}+$$

$$+a_{3,N-1}\frac{2\alpha_1 bC_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-(w'_{N-1}+a)}{2\alpha_1 C_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-6C_1(\varphi_{N-1})\alpha_1}w'_{N-1}+$$

$$+a_{4,N-1}\frac{2\alpha_1 bC_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-(w'_{N-1}+a)}{2\alpha_1 C_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-6C_1(\varphi_{N-1})\alpha_1}\times$$

$$\times(w'_{N-1}+a)+a_{5,N-1}(w'_{N-1}+a)^2+$$

$$+a_{6,N-1}\left(\frac{2\alpha_1 bC_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-(w'_{N-1}+a)}{2\alpha_1 C_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-6C_1(\varphi_{N-1})\alpha_1}\right)^2+$$

$$+a_{7,N-1}\frac{2\alpha_1 bC_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-(w'_{N-1}+a)}{2\alpha_1 C_1(\varphi_{N-1})\operatorname{ctg}\varphi_{N-1}-6C_1(\varphi_{N-1})\alpha_1}\Big]+$$

$$+\{a_{1N}[\gamma-(a+w'_{N-1})]^2+a_{2N}\gamma[\gamma-(a+w'_{N-1})]+$$

$$+a_{3N}\delta[\gamma-(a+w'_{N-1})]+a_{4N}\delta\gamma+a_{5N}\gamma^2+a_{6N}\delta^2+a_{7N}\delta\}=1-k^*,$$

condițiile de contur fiind date prin

$$w_N = \gamma, \quad w'_N = \beta, \quad u_N = \delta.$$

În cazul cînd $\gamma = \beta = \delta = 0$ avem capăt articulat.

Algoritmul de calcul expus permite abordarea programării la un calculator electronic în scopul obținerii de variate date numerice.

Observații. Alte cazuri de rezemări se studiază în mod analog. Din motive de spațiu, nu am prezentat calcule mai detaliate. Ele pot fi puse însă oricînd la cererea cititorilor.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, V. F. Poteraşu, *Ecuațiile programării dinamice pentru determinarea încărcării critice de stabilitate a unui arc circular elastic cu secțiune variabilă*, St. cerc. mec. apl., **31**, *3* (1972).
2. D. Mangeron, *The Bellman's Equations concerning a Class of Polyvibrating Equations*, J. Math. Anal. a. Appl., **9**, *1*, 141—146 (1964).
3. D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, *Optimal Control Problems*, I, II, III. Mathematics Department of the University of Alberta Research Series, 4A, 1968.
4. C. H. Wu, *The Strongest Circular Arch-A Perturbation Solution*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, series E, **35**, *3*, 476—481 (1968).
5. J. M. T. Thompson, A. C. Walker, *A general theory for the branching analysis of discrete structural analysis*, Intern. J. Solids Structures, **5**, *4*, 281—289 (1969).
6. H. D. Conway, C. F. Lo, *Further studies on the elastic stability of curvedbeams*, Intern. J. Mech. Sci., **9**, *10*, 707—719 (1967).
7. D. H. Jacobson, D. Q. Mayne, *Differential Dynamic Programming*, New York, American Elsevier, 1970.
8. * * * *Approximations with special Emphasis on Spline Functions*, New York, Londra, Edit. by I. J. Schoenberg, Academic Press, 1969.
9. V. F. Poteraşu, *Problema de optimizare cu aplicații la studiul barelor, plăcilor și a învelișurilor subțiri*, teză de doctorat elaborată sub conducerea științifică a prof. dr. doc. D. Mangeron, Institutul politehnic Iași, 1971.
10. J. Westcott, *Metode de calcul de optimizare în sistemele automate*, Lucrările Congresului IFAC, Varșovia, 1969. Tradusă în AMC, *15*, 13—24 (1971).
11. R. Kulikovski, *Optimizarea sistemelor cu structură complexă*, Lucrările Congresului IFAC, Varșovia, 1969, tradusă în AMC, *15*, 41—54 (1971).
12. D. Mangeron, M. N. Cğuztöreli, V. F. Poteraşu, *Ecuațiile programării dinamice pentru determinarea frecvențelor și modurilor de vibrație ale unei bare elastice imersată într-un mediu continuu rezistent*. Lui Claudia Paghida, IN MEMORIAM, Bul. Inst. politehn. Iași, **17** (**21**), *3—4* (1971).

Omagiu profesorului ELIE CARAFOLI

CONTRIBUȚII PRIVIND OPTIMIZAREA TRANSPORTOARELOR INERȚIALE

de N. I. MANOLESCU, M. DRANGA și T. ARDELEANU
Institutul politehnic București

Problema propusă constă în determinarea legii de mișcare a elementului conducător la un mecanism dat pentru realizarea unei anumite legi de mișcare, respectiv a unei legi impuse de variație a forței de inerție la elementul condus, precum și invers, obținerea funcțiilor de transmitere necesare la sinteza mecanismului pe baza legilor de mișcare a elementelor conducător și condus. Ambele probleme sînt tratate pentru optimizarea proiectării unui mecanism de transportor inerțial la care se impune realizarea unei anumite legi de variație a forței de inerție la elementul antrenat.

1. INTRODUCERE

Este știut că rezultanta unică a forțelor de inerție a unui element în mișcare plan-paralelă trece prin polul de inerție. Acesta are o poziție fixă în planul mobil, poziție care este independentă de starea de mișcare a elementului.

Practic, poziția polului de inerție a unui element se obține la intersecția dreptelor-suport ale rezultatelor unice de inerție pentru două stări diferite de mișcare ale elementului inițial. Acestea sînt în general mișcarea de bază și mișcarea adițională, deoarece pentru acestea sînt deja construite planurile de accelerații (în mișcarea adițională, planul accelerațiilor coincide, abstracție făcînd de scară cu planul de viteze).

2. REPREZENTAREA MIȘCĂRII PLANE A UNUI ELEMENT

Mișcarea, în general variabilă, a elementului conducător este caracterizată de o viteză unghiulară (ω) și de o accelerație unghiulară (ε). Se propune ca o astfel de mișcare să se exprime și să se identifice cu vectorul (ω, ε).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 601–611

Cu această notație, mișcarea de bază este $(\omega, 0)$, iar mișcarea adițională $(0, \varepsilon)$.

Se poate deci scrie

$$(\omega, \varepsilon) = (\omega, 0) + (0, \varepsilon)$$

sau

$$(\omega, \varepsilon) = \omega(1, 0) + \varepsilon(0, 1),$$

în care

(1,0) este mișcarea de bază unitară, iar

(0,1) este mișcarea adițională unitară.

3. REPREZENTAREA FORȚEI DE INERȚIE A UNUI ELEMENT

Forța de inerție a unui element, în orice poziție a mecanismului în timpul ciclului cinematic, se poate scrie astfel:

$$\bar{F}_i = \bar{F}_{i\omega} + \bar{F}_{i\varepsilon}, \tag{1}$$

în care

$\bar{F}_{i\omega}$ este componenta forței de inerție în mișcarea de bază;

$\bar{F}_{i\varepsilon}$ — componenta forței de inerție în mișcarea adițională.

Pentru o altă stare de mișcare a elementului conducător (ω', ε'), forța de inerție va fi:

$$\bar{F}'_i = \bar{F}_{i\omega'} + \bar{F}_{i\varepsilon'}, \tag{1'}$$

între componentele respective, corespunzătoare celor două stări de mișcare (1) și (1'), existînd relațiile

$$\frac{F_{i\omega}}{F_{i\omega'}} = \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2, \tag{2}$$

$$\frac{F_{i\varepsilon}}{F_{i\varepsilon'}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}. \tag{3}$$

Dacă se notează

$\bar{F}^*_{i\omega}$ — forța de inerție corespunzătoare mișcării de bază unitare (1,0) și

$\bar{F}^*_{i\varepsilon}$ — forța de inerție corespunzătoare mișcării adiționale unitare (0,1).

atunci se poate scrie

$$\bar{F}_{i\omega} = \bar{F}^*_{i\omega} \cdot \omega^2, \tag{4}$$

$$\bar{F}_{i\varepsilon} = \bar{F}^*_{i\varepsilon} \cdot \varepsilon. \tag{5}$$

Se consideră acum în polul de inerție al elementului dat un sistem de axe $(\Delta_\varepsilon P_i \Delta_\omega)$ în care axele Δ_ε și Δ_ω sînt paralele cu viteza $\bar{v}_G$, respectiv accelerația a_G a centrului de greutate.

După aceste direcții, forța de inerție F_i a elementului dat se descompune în componentele $F_{i\omega}$ și $F_{i\varepsilon}$ (fig. 1).

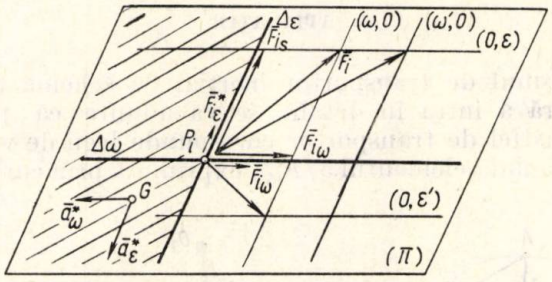


Fig. 1.

Pe baza relațiilor (4) și (5) se deduce că, oricare ar fi starea de mișcare a elementului inițial, forța de inerție F_i se află de aceeași parte a dreptei Δ_ε.

În orice mișcare de bază, forța de inerție are ca suport dreapta Δ_ε. Cu alte cuvinte, pentru o poziție determinată a mecanismului, dacă ne imaginăm că viteza unghiulară a elementului conducător ia diferite valori (accelerația unghiulară fiind nulă), forțele de inerție nu variază decît în modul și în același raport pentru toate elementele mecanismului.

Se deduce că aceeași lege de variație în raport cu mișcarea de bază o vor avea și componentele reacțiunilor în cuplele cinematice, corespunzătoare acestor forțe.

Cele de mai sus au importanță practică, deoarece permit determinarea cu ușurință a forțelor de inerție și a reacțiunilor corespunzătoare acestora în orice altă mișcare de bază dacă aceste mărimi s-au calculat pentru o anumită mișcare de bază (în particular pentru mișcarea de bază instantanee dacă s-au calculat în prealabil în mișcarea de bază medie).

4. PROBLEME CE SE POT REZOLVA LA UN MECANISM CÎND SE DĂ FORȚA DE INERȚIE INSTANTANEE A UNUI ELEMENT OARECARE A MECANISMULUI

În baza relației (1) rezultă că hodografele forței de inerție $\bar{F}_i$ ale unui element sînt drepte paralele cu $\bar{v}_G$, atunci cînd parametrul este mișcarea de bază, și drepte paralele cu $\bar{a}_G$, cînd parametrul este mișcarea adițională (fig. 1).

Pe baza celor de mai sus se pot rezolva următoarele probleme:

a) determinarea cu ușurință a forțelor de inerție corespunzătoare unei stări de mișcare oarecare, cînd s-au determinat aceste forțe într-o mișcare dată.

b) determinarea mișcării corespunzătoare la elementul inițial cînd se cunoaște forța de inerție a unui singur element, procedîndu-se după cum urmează: se descompune forța de inerție a elementului respectiv după direcțiile Δ_ε și Δ_ω obținîndu-se componentele $F_{i\omega}$ și $F_{i\varepsilon}$.

Rezultă

$$\omega^2 = \frac{F_{i\omega}}{F^*_{i\omega}} \text{ şi } \qquad \varepsilon = \frac{F_{i\varepsilon}}{F^*_{i\varepsilon}}.$$

5. APLICAŢIE

Fie mecanismul de transportor inerţial cu schema cinematică din figura 2 [2]. Fără a intra în detalii, se va admite că productivitatea maximă a unui astfel de transportor corespunde legii de variaţie a forţei de inerţie a jgheabului (elementul 5) F_{i5} , exprimată prin curba din figura 3.

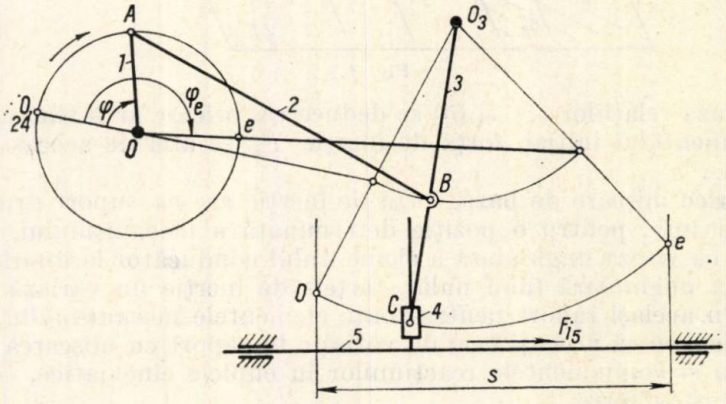


Fig 2.

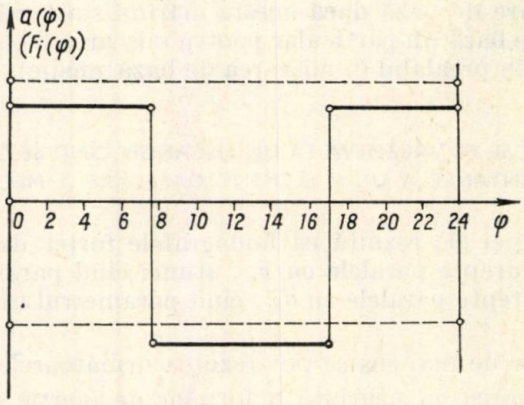


Fig. 3.

O lege similară de variaţie o va avea acceleraţia aceluiaşi element $\bar{a}_5$, pe care o vom numi legea ideală a acceleraţiei. În [2] se expune o metodă de sinteză a unui asemenea mecanism pe baza curbei ideale a acceleraţiei, dar se constată că funcţia (legea) respectivă nu poate fi realizată decît

aproximativ în condițiile mișcării uniforme a elementului *1*. În cele ce urmează, admițînd variabilitatea mișcării elementului conducător, vom încerca prin aceasta să realizăm la elementul *5* legea ideală a accelerației și implicit a forței de inerție, care intervine, așa cum s-a arătat, în funcționarea transportorului în discuție.

Deci problema care trebuie rezolvată este găsirea funcției $\omega = \omega(\varphi)$ a elementului conducător *1* pentru realizarea legii de variație a forței impuse $F_i = F_i(\varphi)$ la elementul *5*.

Deoarece acest element are o mișcare rectilinie alternativă, cele două drepte Δ_ω și Δ_ε (fig. 1) coincid.

În acest caz se poate scrie

$$F_i(\varphi) = \varepsilon \cdot F^*_{i\varepsilon}(\varphi) + \omega^2 \cdot F^*_{i\omega}(\varphi), \tag{6}$$

în care $F^*_{i\varepsilon}$ și $F^*_{i\omega}$ au semnificațiile date de formulele (4) și (5).

Funcția $\omega(\varphi)$ căutată este soluția ecuației (6), care este o ecuație diferențială de ordinul doi, neliniară, de forma

$$f(\varphi, \dot{\varphi}^2, \ddot{\varphi}) = 0. \tag{6'}$$

Pentru rezolvare se face substituția

$$\omega = \dot{\varphi} = z, \tag{7}$$

de unde rezultă

$$\ddot{\varphi} = z'z. \tag{8}$$

Înlocuind pe (7) și (8) în (6), se obține

$$F_i(\varphi) = z'z\,F^*_{i\varepsilon}(\varphi) + z^2 F^*_{i\omega}(\varphi). \tag{9}$$

Se împart ambii membri ai ecuației (9) cu m_5 (masa jgheabului și a materialului care se transportă) și se notează

$$a^*_\varepsilon(\varphi) = \frac{F^*_{i\varepsilon}(\varphi)}{m_5}, \tag{10}$$

$$a^*_\omega(\varphi) = \frac{F^*_{i\omega}(\varphi)}{m_5}. \tag{11}$$

Astfel ecuația (6) devine

$$z'z\, a_\varepsilon^*(\varphi) + z^2\, a_\omega^*(\varphi) = a(\varphi), \tag{12}$$

în care $a_\varepsilon^*(\varphi)$ și $a_\omega^*(\varphi)$ sînt funcțiile de transmitere de ordinul I și, respectiv II de la elementul *1* la elementul *5*.

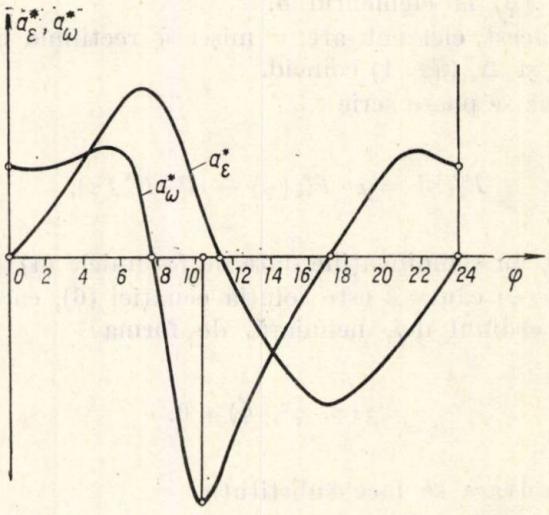


Fig. 4.

În cazul unui mecanism real, fie acesta mecanismul transportorului πK-13, [2], funcțiile $a_\varepsilon^*(\varphi)$ și $a_\omega^*(\varphi)$ coincid cu funcțiile vitezei și accelerației elementului *5* în mișcarea de bază unitară și, respectiv, în mișcarea adițională unitară (fig. 4), iar $a(\varphi)$ este funcția care trebuie realizată.

Pentru liniarizarea ecuației (12) se propune în continuare substituția

$$y = z^2 = \omega^2, \tag{13}$$

ceea ce conduce la

$$y' a_\varepsilon^*(\varphi) + 2y\, a_\omega^*(\varphi) - 2\, a(\varphi) = 0, \tag{14}$$

care este o ecuație diferențială liniară neomogenă.

Soluția generală se obține prin metoda variației constantei:

$$y(\varphi) = K e^{-2\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{a_\omega^*(s)}{a_\varepsilon^*(s)}\,ds} + 2\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{a(u)}{a_\varepsilon^*(u)} \cdot e^{-2\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{a_\omega^*(s)}{a_\varepsilon^*(s)}\,ds}\,du. \tag{15}$$

Ținînd seama că

$$a_\omega^*(\varphi) = \frac{\mathrm{d}\, a_\varepsilon^*(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{16}$$

rezultă

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{a_\omega^*(s)}{a_\varepsilon^*(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{[a_\varepsilon^*(s)]'}{a_\varepsilon^*(s)}\,\mathrm{d}s = \ln \frac{a_\varepsilon^*(\varphi)}{a_\varepsilon^*(\varphi_0)} \tag{17}$$

și deci

$$\mathrm{e}^{-2\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{a_\omega^*(s)}{a_\varepsilon^*(s)}\,\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{-2\ln \frac{a_\varepsilon^*(\varphi)}{a_\varepsilon^*(\varphi_0)}} = \left[\frac{a_\varepsilon^*(\varphi_0)}{a_\varepsilon^*(\varphi)}\right]^2. \tag{18}$$

În mod analog se calculează și cealaltă integrală de la exponent. Înlocuind aceste rezultate în (15) se obține

$$y(\varphi) = K\left[\frac{a_\varepsilon^*(\varphi_0)}{a_\varepsilon^*(\varphi)}\right]^2 + \frac{2}{[a_\varepsilon^*(\varphi)]^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} a(u)\, a_\varepsilon^*(u)\,\mathrm{d}u, \tag{19}$$

care este o altă formă a soluției generale a ecuației (14).

Constanta K se determină din condițiile inițiale date. În cazul problemei de față pentru $\varphi_0 = 0$, rezultă $a_\varepsilon^*(\varphi_0) = 0$ și soluția ecuației (14) devine

$$^*)\ y(\varphi) = \frac{2}{[a_\varepsilon^*(\varphi)]^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} a(u)\, a_\varepsilon^*(u)\,\mathrm{d}u \tag{20}$$

---

*) Prin derivare se verifică imediat că (20) este soluție a ecuației (14). Într-adevăr

$$y'(\varphi) = -\frac{4a_\omega^*(\varphi)}{[a_\varepsilon^*(\varphi)]^3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} a(u)\, a_\varepsilon^*(u)\,\mathrm{d}u + \frac{2}{[a_\varepsilon^*(\varphi)]^2}\cdot a(\varphi)\, a_\varepsilon^*(\varphi)$$

și utilizînd (20), rezultă

$$y'(\varphi) = -2\frac{a_\omega^*(\varphi)}{a_\varepsilon^*(\varphi)}\, y + \frac{2a(\varphi)}{a_\varepsilon^*(\varphi)},$$

ceea ce era de demonstrat

și deci $y\ (\varphi_0)$ nu poate fi luat arbitrar

$$*)\ y(\varphi_0) = \lim_{\varphi \to \varphi_0} y\ (\varphi) = 2 \lim_{\varphi \to \varphi_0} \frac{\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi} a\ (u)\ a_\varepsilon^*\ (u)\ du\right]'}{[(a_\varepsilon^*\ (\varphi))^2]'} =$$

$$= 2 \lim_{\varphi \to \varphi_0} \frac{a(\varphi) \cdot a_\varepsilon^*(\varphi)}{2 a_\varepsilon^*(\varphi)\ a_\omega^*(\varphi)} = \frac{a(\varphi_0)}{a_\omega^*(\varphi_0)}. \tag{21}$$

Se observă că (21) apare totodată ca o condiție necesară din (14) dacă $a_\varepsilon^*\ (\varphi_0) = 0$.

În mod analog vom avea pentru poziția extremă din dreapta:

$$y\ (\varphi_e) = \frac{a(\varphi_e)}{a_\omega^*(\varphi)}, \tag{22}$$

unde φ_e este unghiul de manivelă corespunzător acestei poziții, deoarece $a_\varepsilon^*\ (\varphi_e) = 0$.

Deci, dacă $y = y(\varphi)$ este soluția ecuației diferențiale (14) cu valorile în pozițiile extreme date de (21) și (22), rezultă din (13)

$$\omega(\varphi) = \sqrt{y(\varphi)}. \tag{23}$$

Rezultatele calculelor numerice efectuate pentru mecanismul real luat în studiu sînt date în tabela 1.

În final s-a obținut legea de variație $\omega(\varphi)$, reprezentată în figura 5.

Dacă se impune acum funcția de realizat $a(\varphi)$, precum și legea de mișcare la elementul conducător $z = \omega(\varphi)$, atunci (12) este o ecuație diferențială în care necunoscuta este funcția de transmitere $a_\varepsilon^*(\varphi)$.

Notînd

$$a_\varepsilon^*(\varphi) = \psi(\varphi), \tag{24}$$

$$z^2 = A(\varphi),$$

$$zz' = B(\varphi),$$

de unde

$$a_\omega^*(\varphi) = \psi'(\varphi)$$

$$zz' = \frac{A'(\varphi)}{2} = B(\varphi) \tag{25}$$

*) Se aplică regula lui l'Hôspital, deoarece dacă se înlocuiește direct $\varphi_0 = 0$ în (20), se obține o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

Tabela 1

Poz	$a(u)$	$a_\varepsilon^*(u)$	$\xi(u) = a(u)\, a_\varepsilon^*(u)$	$(a_\varepsilon^*(u))^2$	$\int_0^{\varphi_i} \xi(u)du$	$2\int_0^{\varphi_i} \xi(u)du$	$y(\varphi_i)$	$\omega = \sqrt{y}$
0	4	0,0000	0,00				40,6	6,3
1	4	0,0225	0,09	0,0005	0,0156	0,031	62,4	7,9
2	4	0,0476	0,1904	0,0022	0,052	0,104	47,2	6,8
3	4	0,075	0,30	0,0056	0,0114	0,228	40,8	6,4
4	4	0,104	0,0416	0,0108	0,208	0,416	38,5	6,2
5	4	0,134	0,536	0,0179	0,332	0,665	37,1	6,1
6	4	0,165	0,66	0,0272	0,478	0,956	35,1	5,9
7	4	0,1815	0,75	0,0351	0,665	1,331	37,9	6,1
7/8	4/−6,1	0,188	0,7522/−1,1468	0,0353	0,748	1,497	42,2	6,5
8	−6,1	0,175	−1,0675	0,0306	0,665	1,331	43,5	6,6
9	−6,1	0,150	−0,915	0,0225	0,405	0,811	36,0	6,0
10	−6,1	0,0875	−0,5337	0,0076	0,187	0,374	49,2	7,0
11	−6,1	0,0212	−0,1293	0,0004	0,078	0,156	390,0	19,7
12	−6,1	0,031	0,1891	0,0009	0,062	0,124	138,6	11,7
13	−6,1	0,0687	0,4190	0,0047	0,124	0,249	53,1	7,3
14	−6,1	0,0987	0,6020	0,0097	0,228	0,457	47,1	6,8
15	−6,1	0,1275	0,7777	0,0162	0,384	0,769	47,5	6,9
16	−6,1	0,145	0,8845	0,021	0,613	1,227	58,4	7,6
17	−6,1/4	−0,150	0,915/−0,6	0,0225	0,904	1,809	80,4	8,9
18	4	−0,145	−0,58	0,021	0,800	1,601	76,2	8,7
19	4	−0,1312	−0,524	0,0172	0,603	1,206	70,1	8,3
20	4	−0,1075	−0,43	0,0115	0,447	0,894	77,7	8,8
21	4	−0,0832	−0,3328	0,0069	0,291	0,582	84,4	9,2
22	4	−0,46	−0,1148	0,0031	0,166	0,332	107,3	10,3
23	4	−0,0287	0	0,0008	0,072	0,145	182	13,5

$$y_0 = y(\varphi_0) = y(0) = \frac{a(0)}{a_\omega^*(0)} = \frac{4}{0{,}985} = 40{,}60$$

şi înlocuind în (12), se obţine

$$A(\varphi)\,\psi'(\varphi) + B(\varphi)\,\psi(\varphi) = a(\varphi). \tag{26}$$

În particular, dacă $z = \omega(\varphi) = \text{const}$, atunci $B(\varphi) = 0$ şi ecuaţia (26) devine

$$A(\varphi)\,\psi'(\varphi) = a(\varphi), \tag{27}$$

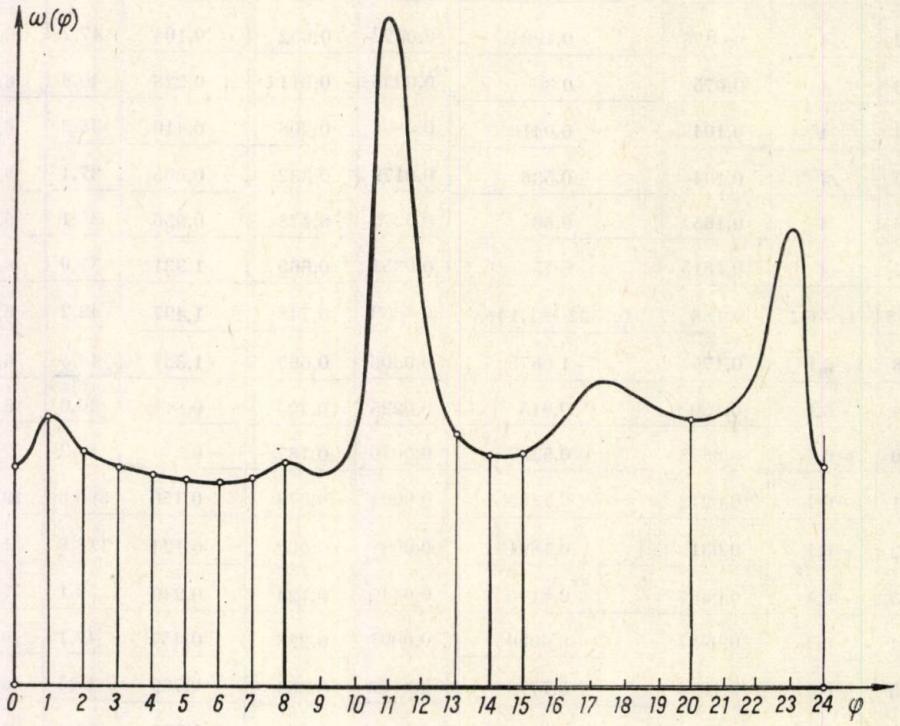


Fig. 5.

a cărei soluţie,

$$\psi(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{a(u)}{A(u)}\,du, \tag{28}$$

reprezintă, conform (24), funcţia de transmitere de ordinul întîi pe baza căreia se poate face sinteza mecanismului.

6. CONCLUZII

Problema propusă spre rezolvare constă în esenţă în determinarea legii de mişcare a elementului conducător la un mecanism dat pentru a se realiza o lege de mişcare impusă la elementul condus, respectiv deter-

minarea funcțiilor de transmitere de la elementul conducător la cel condus pe baza legilor de mișcare a acestor elemente. Această problemă se putea trata la modul general, însă s-a preferat a fi expusă pe exemplul concret al mecanismului de transportor, aplicație care pune totodată în evidență și alte aspecte.

Este de menționat că se pot face și unele considerații privind condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții ecuațiilor (14) și (26) pentru ca funcțiile care se determină să fie continue, fie singure, fie împreună cu un număr de derivate, fie periodice cu o perioadă dată, de exemplu 2π etc.

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Artobolevski, *Teoria mehanizmov*, Moskva, Izd. „Nauka", 1965.
2. C. E. Bezveselnîi, *Atlas po teorii mehanizmov i mașin*, Harkov,
3. B. Dizioglu, *Dynamik*, vol. 3, Friedrich Vieweg Sohn. Braunschweig, 1966.
4. D. V. Ionescu, *Ecuații diferențiale și integrale*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1964.
5. N. I. Manolescu, *Teoria mecanismelor și a mașinilor. Cinetostatica și dinamica*, București, Edit. tehnică, 1958.

Dedicată profesorului ELIE CARAFOLI în semn de respectuos omagiu

O SOLUȚIE EXPLICITĂ PENTRU UNDELE DE ȘOC OBLICE

de DAN MATEESCU
Institutul de mecanică a fluidelor și construcții aerospațiale

Lucrarea prezintă o soluție cvasiexplicită exactă pentru undele de șoc oblice care poate fi utilizată pentru rezolvarea analitică directă a unor probleme complexe de dinamica gazelor în care apar unde de șoc. Se indică de asemenea și o soluție explicită aproximativă care este apoi comparată cu soluția exactă dedusă și cu alte soluții.

NOTAȚII

V_1 — viteza curentului neperturbat incident,

V_2 — viteza gazului din spatele undei de șoc,

γ — raportul căldurilor specifice,

a_1, a_2 — vitezele sunetului în condițiile din fața și respectiv din spatele undei de șoc,

$M_1 = \dfrac{V_1}{a_1}$ — numărul Mach al curentului neperturbat incident,

$B = \sqrt{M_1^2 - 1},$

$M_2 = \dfrac{V_2}{a_2}$ — numărul Mach al mișcării gazului din spatele undei de șoc,

p_1, p_2 — presiunile de pe cele două fețe ale undei de șoc,

$C_p = \left(\dfrac{p_2}{p_1} - 1\right)\dfrac{2}{\gamma M_1^2}$ — coeficientul de presiune corespunzător celor două fețe ale undei de șoc,

ρ_1, ρ_2 — densitățile gazului în condițiile din fața și din spatele undei de șoc,

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 613–631

$\lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ — raportul densităților gazului din fața și din spatele undei de șoc,

β — unghiul undei de șoc față de direcția curentului incident neperturbat,

δ — unghiul de deflecție a scurgerii din spatele undei de șoc.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Problema undelor de șoc oblice a fost tratată de numeroși autori, soluțiile exacte obținute fiind date sub forma unor tabele de valori sau diagrame [1], [2].

În scopul însă de a permite rezolvarea analitică a problemelor complexe de mișcarea gazelor în jurul corpurilor în prezența unor unde de șoc oblice au fost propuse unele soluții aproximative explicite pentru aceste unde de șoc.

O soluție explicită valabilă atît pentru undele de șoc oblice cît și pentru expansiunea Prandtl-Meyer a fost stabilită de E. Carafoli [3], [4] și este în bun acord cu soluțiile numerice exacte pentru un larg domeniu de numere Mach și unghiuri de deflecție. La această soluție vom mai reveni în cele ce urmează.

În această lucrare ne propunem să prezentăm o soluție cvasi-explicită exactă pentru undele de șoc oblice care a rezultat tocmai din procesul de rezolvare analitică a unei probleme mai complexe de dinamica gazelor în prezența unor unde de șoc și care a fost sugerată de soluția explicită stabilită de E. Carafoli.

Să considerăm în acest sens o undă de șoc OS (fig. 1) considerată ca reprezentînd o suprafață plană de discontinuitate și să notăm prin V_1 și V_2 viteza gazului înainte și după șoc, prin V_{1n}, V_{2n}, și V_{1t}, V_{t2} componentele normale și respectiv tangente la unda de șoc, ale celor două viteze.

Aplicînd pentru acest caz ecuația continuității, teorema impulsului și ecuația energiei se obțin relațiile cunoscute

$$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \tag{1}$$

$$V_{1t} = V_{2t}, \tag{2}$$

$$p_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 V_{2n}^2, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} V_1^2 + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{a_2^2}{\gamma - 1}, \tag{4}$$

unde am notat prin ρ_1 și ρ_2 densitățile gazului corespunzătoare condițiilor de pe cele două fețe ale undei de șoc, prin p_1 și p_2 presiunile înainte

și după unda de șoc, iar prin a_1 și a_2 vitezele sunetului în condițiile din fața și spatele undei de șoc, definite prin relațiile

$$a_1^2 = \gamma \frac{p_1}{\rho_1} = \gamma R T_1, \tag{5}$$

$$a_2^2 = \gamma \frac{p_2}{\rho_2} = \gamma R T_2. \tag{5'}$$

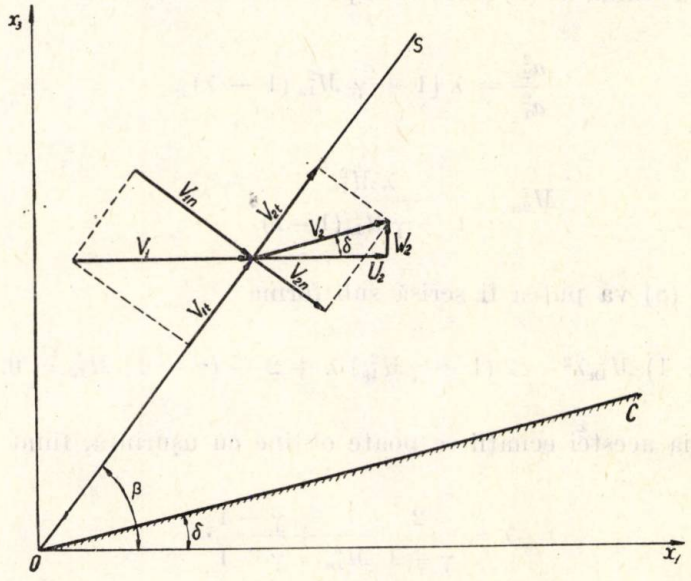


Fig. 1

Notînd prin λ raportul vitezelor normale V_{2n} și V_{1n} sau raportu invers al densităților de pe cele două fețe ale undei de șoc, ecuațiile (1) (3), (4) pot fi scrise sub forma

$$\lambda = \frac{V_{2n}}{V_{1n}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \tag{6}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma M_{1n}^2 (1 - \lambda), \tag{7}$$

$$1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_{1n}^2 = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_{2n}^2\right] \frac{a_2^2}{a_1^2}, \tag{8}$$

unde M_{1n} și M_{2n} reprezintă numerele Mach corespunzătoare vitezelor

normale de pe cele două fețe ale undei de șoc,

$$M_{1n} = \frac{V_{1n}}{a_1}, \tag{9}$$

$$M_{2n} = \frac{V_{2n}}{a_2}. \tag{9'}$$

Ținînd seama de (6) și (7) vom putea scrie succesiv

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} = \lambda\,[1 + \gamma\, M_{1n}^2\,(1 - \lambda)], \tag{10}$$

$$M_{2n}^2 = \frac{\lambda M_{1n}^2}{1 + \gamma M_{1n}^2(1-\lambda)}, \tag{11}$$

iar ecuația (8) va putea fi scrisă sub forma

$$(\gamma + 1)\, M_{1n}^2\lambda^2 - 2\,(1 + \gamma M_{1n}^2)\,\lambda + 2 + (\gamma - 1)\, M_{1n}^2 = 0. \tag{12}$$

Soluția acestei ecuații se poate obține cu ușurință, fiind

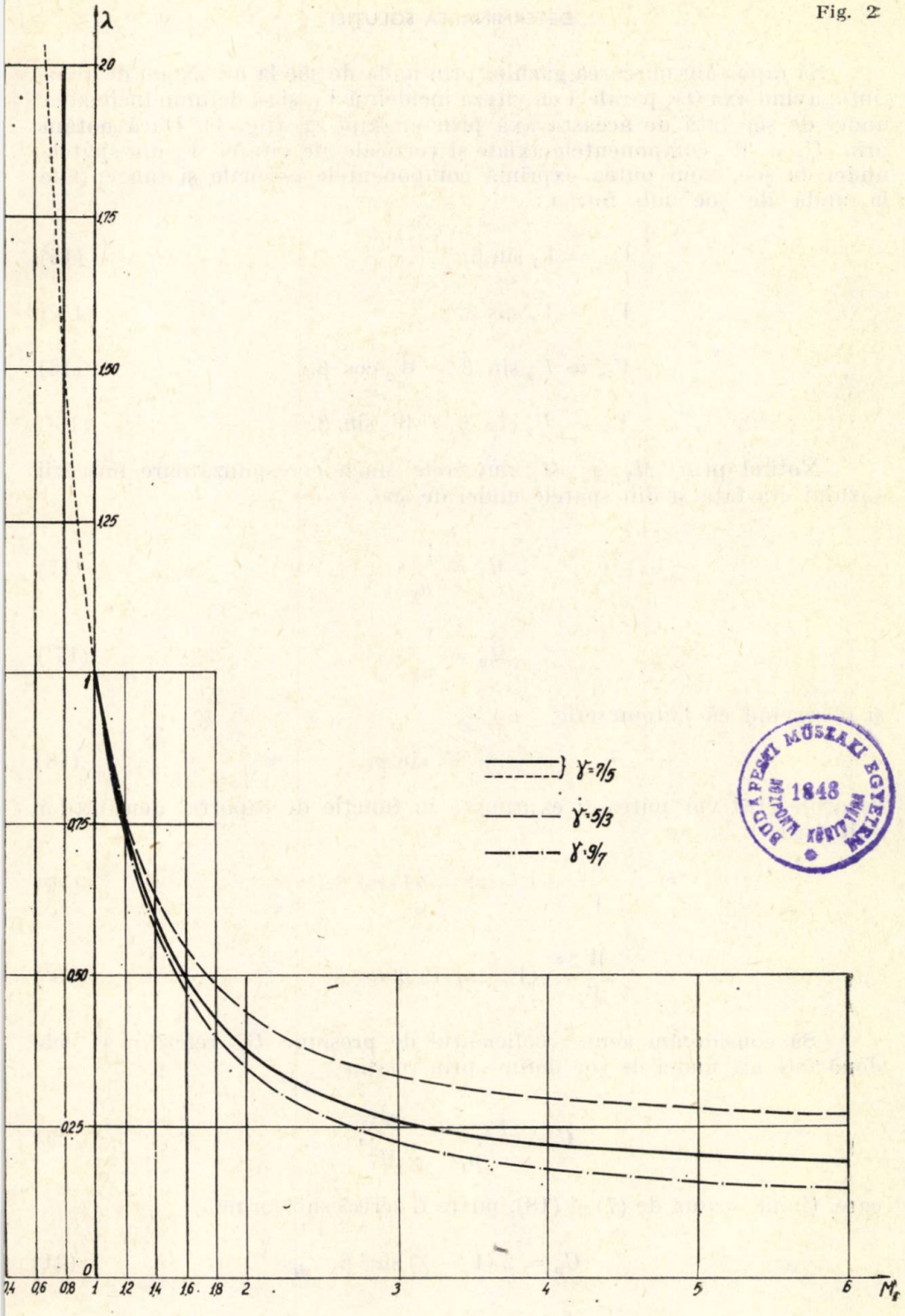
$$\lambda = \frac{2}{\gamma+1}\,\frac{1}{M_{1n}^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \tag{13}$$

În acest mod au fost obținute sub o altă formă relațiile cunoscute pentru undele de șoc. Astfel, de exemplu, eliminînd din ecuațiile (7) și (13) pe M_{1n} se poate regăsi cu ușurință cunoscuta ecuație Hugniot—Rankine pentru presiuni

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1} - \dfrac{\rho_2}{\rho_1}}. \tag{14}$$

În figura 2 este reprezentată variația raportului densităților de pe cele două fețe ale undei de șoc, λ, în funcție de numărul Mach M_1 pentru diferite valori ale lui γ. În aceeași diagramă, pentru cazul $\gamma = 1{,}4$ este figurată prin linie subțire întreruptă și curba soluțiilor corespunzătoare numărului Mach M_1 subunitar (pentru care $\lambda > 1$), care însă nu reprezintă situații plauzibile din punct de vedere fizic.

Fig. 2



BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1848

2. DETERMINAREA SOLUȚIEI

Să raportăm mișcarea gazului prin unda de șoc la un sistem de referință, avînd axa Ox_1 paralelă cu viteza incidentă V_1, și să definim înclinarea undei de șoc față de această axă prin unghiul β (fig. 1). Dacă notăm prin U_2 și W_2 componentele axiale și verticale ale vitezei V_2 din spatele undei de șoc, vom putea exprima componentele normale și tangențiale la unda de șoc sub forma:

$$V_{1n} = V_1 \sin \beta, \tag{15}$$

$$V_{1t} = V_1 \cos \beta, \tag{15'}$$

$$V_{2n} = U_2 \sin \beta - W_2 \cos \beta, \tag{16}$$

$$V_{2t} = U_2 \cos \beta + W_2 \sin \beta. \tag{16'}$$

Notînd prin M_1 și M_2 numerele Mach corespunzătoare mișcării gazului din fața și din spatele undei de șoc,

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1}, \tag{17}$$

$$M_2 = \frac{V_2}{a_2}, \tag{17'}$$

și observînd că putem scrie

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta, \tag{18}$$

ecuațiile (16) vor putea fi exprimate în funcție de raportul densităților sub forma

$$\frac{U_2}{V_1} = 1 - (1 - \lambda) \sin^2 \beta, \tag{19}$$

$$\frac{W_2}{V_1} = (1 - \lambda) \sin \beta \cos \beta. \tag{19'}$$

Să considerăm acum coeficientul de presiune C_p referitor la cele două fețe ale undei de șoc definit prin relația

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \frac{2}{\gamma M_1^2}, \tag{20}$$

care, ținînd seama de (7) și (18), poate fi scrisă sub forma

$$C_p = 2 (1 - \lambda) \sin^2 \beta. \tag{21}$$

Cu ajutorul coeficientului de presiune, parametrii care definesc mișcarea gazului după unda de șoc oblică vor putea fi exprimați sub forma

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma}{2} M_1^2 C_p, \tag{22}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{4} C_p}{1 + \frac{\gamma-1}{4} C_p}, \tag{23}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \left(1 + \frac{\gamma}{2} M_1^2 C_p\right) \frac{1 + \frac{\gamma-1}{4} M_1^2 C_p}{1 + \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p}, \tag{24}$$

$$\frac{U_2}{V_1} = 1 - \frac{1}{2} C_p, \tag{25}$$

$$\frac{W_2}{V_1} = \frac{1}{2} C_p \frac{\sqrt{B^2 - \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p}}, \tag{26}$$

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p - C_p\left(1 + \frac{\gamma}{4} M_1^2 C_p\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2} M_1^2 C_p\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{4} M_1^2 C_p\right)}, \tag{27}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{M_1^2}\left(1 + \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p\right). \tag{28}$$

În acest mod problema determinării mișcării în spatele undei de șoc oblice a fost redusă la aceea a determinării ceeficientului de presiune corespunzător undei de șoc.

Dacă notăm prin δ deviația curentului în spatele undei de șoc, determinată de unghiul δ pe care îl face peretele cu direcția curentului neperturbat, condiția la limită pentru mișcarea din spatele undei de șoc poate fi scrisă sub forma

$$\sin \delta = \frac{1}{2} C_p \frac{\sqrt{B^2 - \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p - C_p\left(1 + \frac{\gamma}{4} M_1^2 C_p\right)}}, \tag{29}$$

unde am notat

$$B = \sqrt{M_1^2 - 1}. \tag{30}$$

Să observăm acum că ecuaţia (29) poate fi exprimată sub forma unei ecuaţii de gradul trei

$$\frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p^3 - (B^2 + \gamma M_1^2 \sin^2\delta)\, C_p^2 - 4\sin^2\delta\left(1 - \frac{\gamma+1}{4} M_1^2\right) C_p + 4\sin^2\delta = 0, \tag{31}$$

din care soluţia corespunzătoare problemei tratate se poate obţine cu uşurinţă şi este

$$C_p = b - 2\sqrt{p}\cos\frac{\pi+\alpha}{3}, \tag{32}$$

în care am notat

$$\alpha = \arccos\frac{-q}{\sqrt{p^3}}, \tag{33}$$

$$q = \frac{1}{2}(d + b^3 - 3bp), \tag{34}$$

$$p = b^2 - \frac{1}{3} d\left(\frac{\gamma+1}{4} M_1^2 - 1\right), \tag{35}$$

$$b = \frac{4}{3(\gamma+1)}\left(\frac{B^2}{M_1^2} + \gamma\sin^2\delta\right), \tag{36}$$

$$d = \frac{16\sin^2\delta}{(\gamma+1) M_1^2}. \tag{37}$$

S-a obţinut astfel o soluţie cvasiexplicită exactă pentru coeficientul de presiune corespunzător undelor de şoc oblice, care poate fi utilizată pentru rezolvarea analitică a problemelor de mişcarea gazelor în jurul corpurilor aerodinamice în care apar şi unde de şoc.

Revenind acum la ecuaţia (29), să observăm că aceasta poate fi exprimată şi sub forma

$$\sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p}\,\sin\delta = \frac{B}{2\varkappa} C_p, \tag{38}$$

în care am notat

$$\varkappa^2 = \left(1 - C_p \frac{1 + \frac{\gamma}{4} M_1^2 C_p}{1 + \frac{\gamma+1}{4} M_1^2 C_p}\right) \frac{1}{1 - \frac{\gamma+1}{4}\frac{M_1^2}{B^2} C_p}. \tag{39}$$

În mod formal ecuaţia (38) se poate reduce la o ecuaţie de gradul doi a cărei soluţie este

$$C_p = \varkappa^2 K^2 \frac{1}{M_1^2}\left[\frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{\varkappa^2 K^2}}\right], \tag{40}$$

în care am notat

$$K = \frac{M_1^2}{B}\sin\delta. \tag{41}$$

Să observăm acum că dacă considerăm $\varkappa = 1$, vom regăsi cunoscuta soluţie elaborată de E. Carafoli pe care o vom nota prin C_{p0},

$$C_{p0} = K^2 \frac{1}{M_1^2}\left[\frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{K^2}}\right], \tag{42}$$

unde K reprezintă parametrul unitar de similaritate şi are expresia de mai sus.

După cum am mai arătat, această soluţie este în bun acord cu rezultatele numerice exacte într-un larg domeniu de numere Mach şi unghiuri de deflecţie.

Acest domeniu de valabilitate poate fi încă lărgit dacă considerăm soluţia explicită dată de relaţia (40) în care se introduce următoarea valoare aproximativă pentru $\varkappa$

$$\varkappa^2 = \left(1 - C_{p0}\frac{1+\frac{\gamma}{4}M_1^2 C_{p0}}{1+\frac{\gamma+1}{4}M_1^2 C_{p0}}\right)\frac{1}{1-\frac{\gamma+1}{4}M_1^2 C_{p0}}. \tag{43}$$

Pentru a putea compara soluţiile stabilite mai sus, în anexa lucrării sînt prezentate sub formă de tabel rezultatele numerice obţinute pentru diferite numere Mach şi unghiuri de deflecţie δ. Astfel, în primul tabel sînt prezentate valorile coeficientului de presiune obţinute cu soluţia cvasiexplicită exactă (32), pe care o vom nota prin C_p în anexă, cele obţinute cu soluţia cvasiexplicită aproximativă, calculată cu formulele (40), (43) şi notată în anexă prin C_{pa}, precum şi valorile obţinute cu soluţia unitară (42) stabilită de E. Carafoli şi notată în anexă prin C_{p0}.

În tabelul II din anexă, sînt prezentate pentru exemplificare valorile obţinute cu ajutorul soluţiei cvasiexplicite exacte (32) pentru unghiul de înclinare al undei de şoc β şi pentru rapoartele presiunilor $\frac{p_2}{p_1}$ densităţilor $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, temperaturilor $\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2}$ şi numerelor Mach $\frac{M_2}{M_1}$ de pe cele două feţe ale undei de şoc.

În figurile 3, 4, 5, 6 sînt prezentate curbele de variație ale coeficientului de presiune în funcție de numărul Mach incident M_1 și de deflecția δ a curentului în spatele undei de șoc.

Din aceste diagrame, ca și din tabelul I se poate constata că soluția unitară stabilită de E. Carafoli este în foarte bun acord cu rezultatele exacte pentru un domeniu larg de numere Mach și unghiuri de deflecție.

Se constată de asemenea că acest domeniu de concordanță cu rezultatele exacte poate fi lărgit, considerînd soluția explicită aproximativă (40) care amendează soluția stabilită de E. Carafoli cu coeficientul $\varkappa$ definit prin relația (43).

Desigur că pentru a obține precizia maximă pe întreg intervalul de numere Mach și unghiuri de deflecție este indicată utilizarea soluției cvasiexplicite exacte prezentate în această lucrare, care este de asemenea exprimată într-o formă explicită.

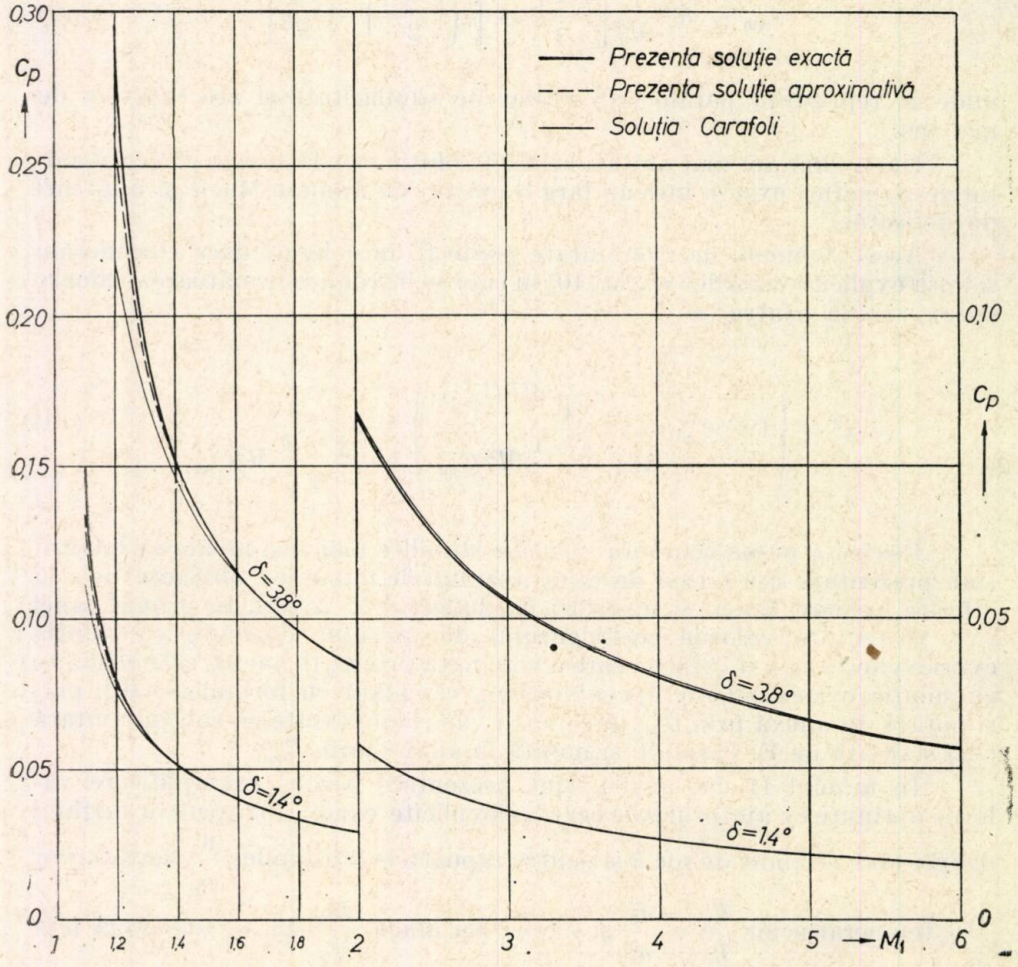


Fig. 3

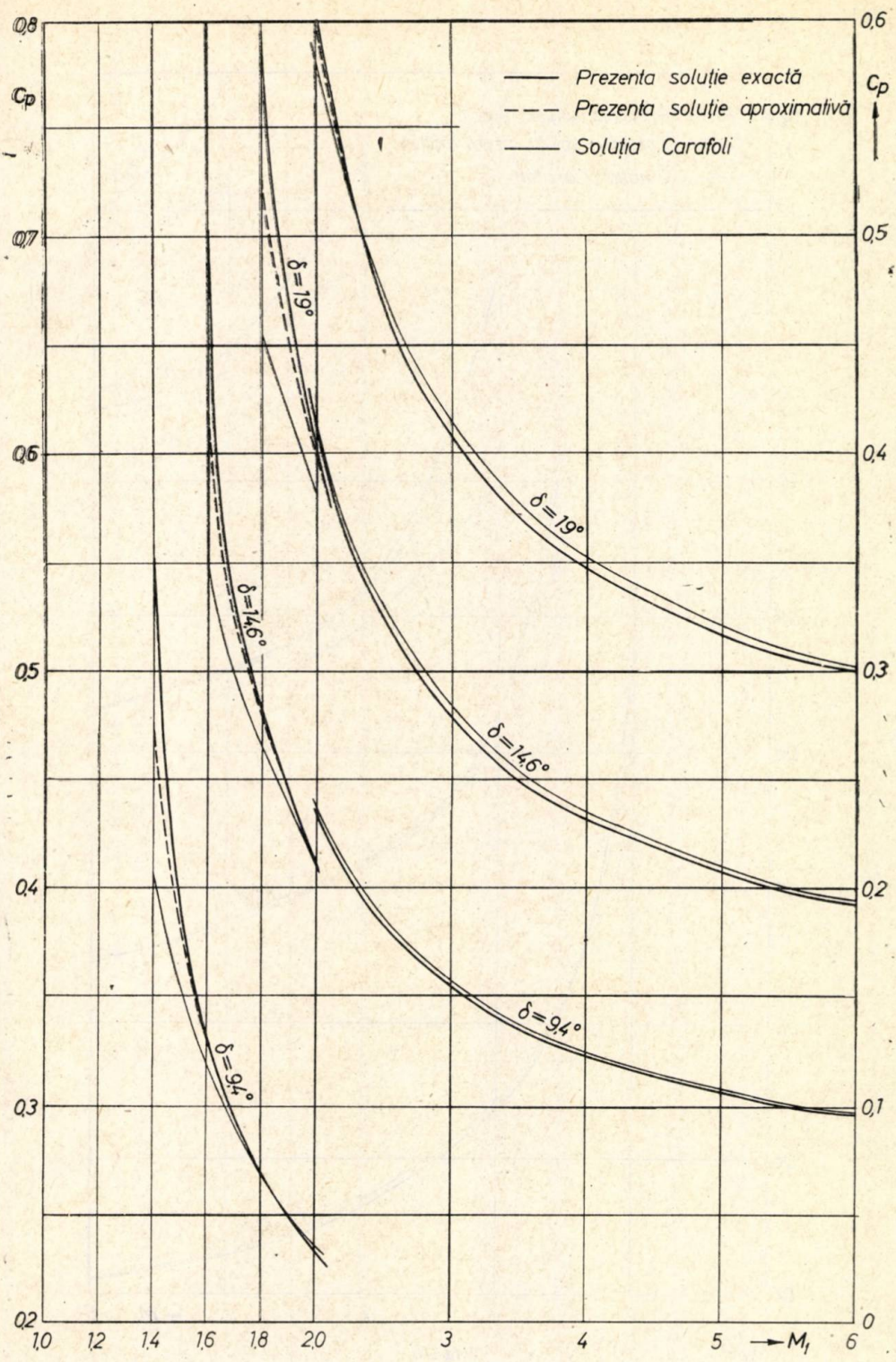

Prezenta soluție exactă
Prezenta soluție aproximativă
Soluția Carafoli
C_p
C_p
$\delta = 19°$
$\delta = 14,6°$
$\delta = 9,4°$
$\delta = 19°$
$\delta = 14,6°$
$\delta = 9,4°$
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
3
4
5
6
M_1

Fig. 4

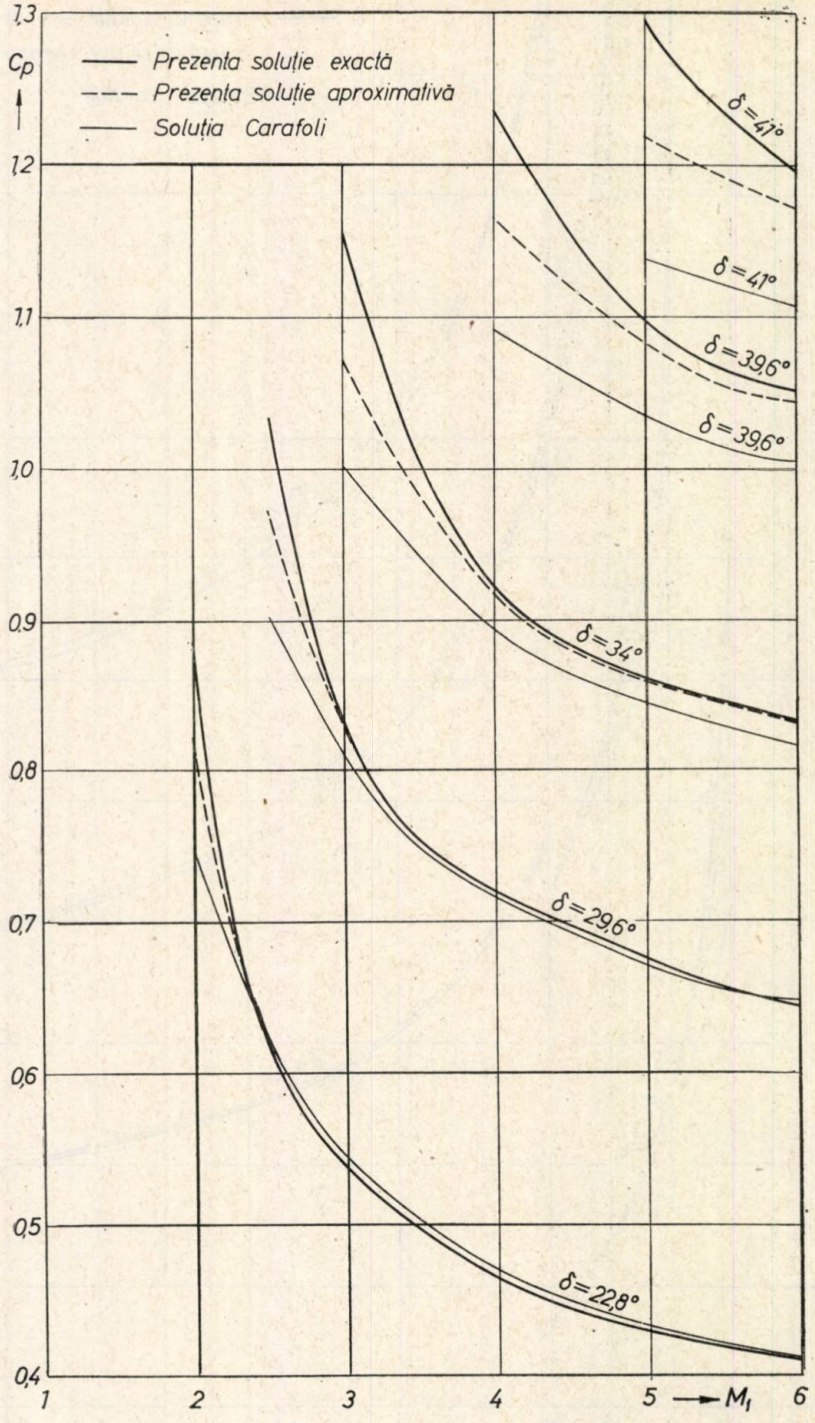

Cp
Prezenta soluție exactă
Prezenta soluție aproximativă
Soluția Carafoli
δ=41°
δ=41°
δ=39,6°
δ=39,6°
δ=34°
δ=29,6°
δ=22,8°
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
1
2
3
4
5
6
M1

Fig. 5

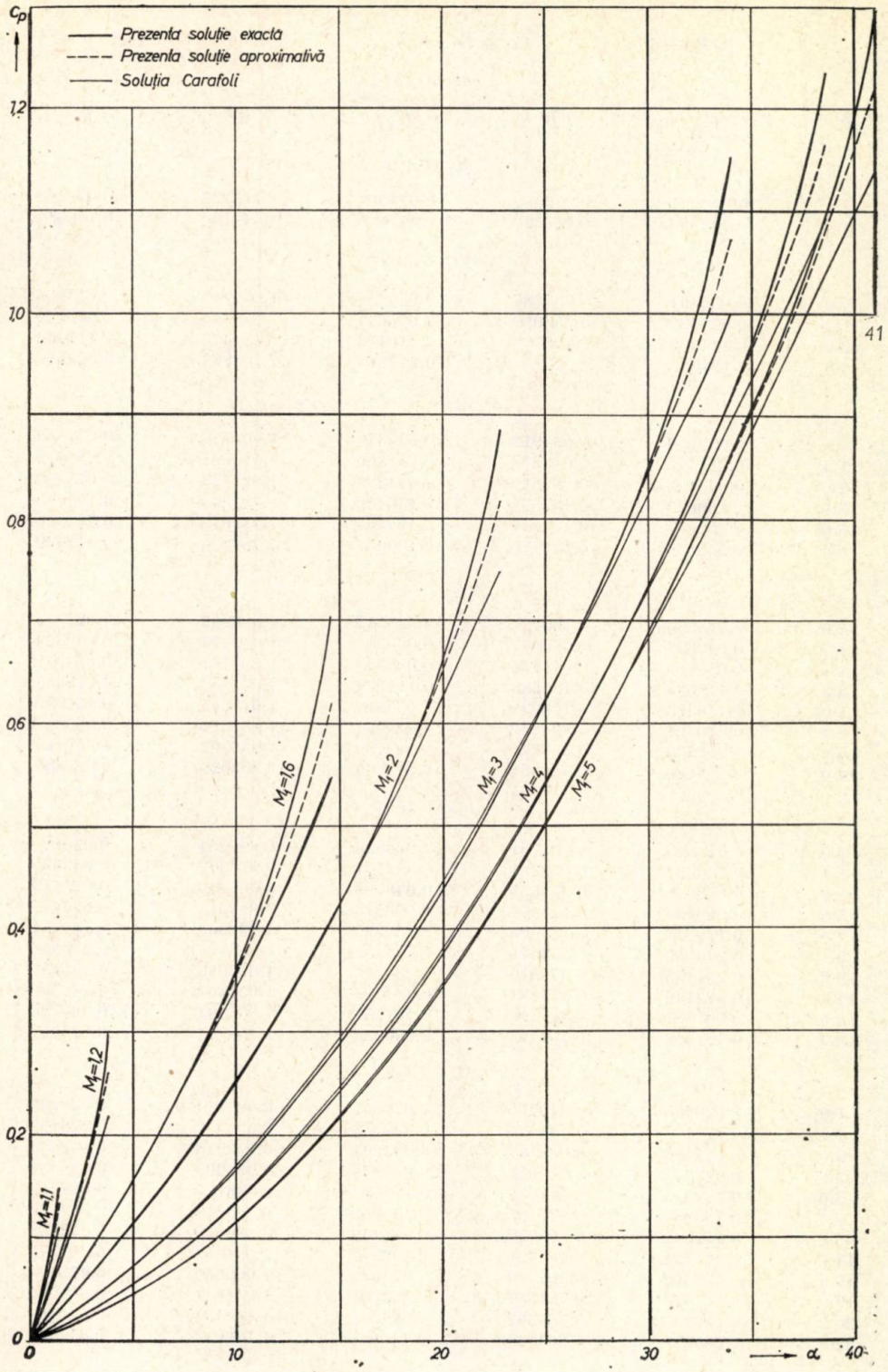

c_p
Prezenta soluție exactă
Prezenta soluție aproximativă
Soluția Carafoli
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
10
20
30
40
α
M=1,1
M=1,2
M=1,6
M=2
M=3
M=4
M=5
41

Fig. 6

ANEXĂ

Tabelul I

δ°	C_p	K	C_{p0}	$\varkappa^2$	C_{pa}
			$M_1 = 1{\cdot}1$		
1.0	0.090601	0.046082	0.078304	1.266228	0.088418
1.4	0.149473	0.064512	0.110838	1.447108	0.134384
			$M_1 = 1{\cdot}2$		
1.0	0.055491	0.037887	0.053831	1.059119	0.055436
1.4	0.079639	0.053039	0.076047	1.088443	0.079448
2.0	0.118760	0.075763	0.110118	1.140475	0.117962
3.8	0.294602	0.143873	0.217816	1.391882	0.260976
			$M_1 = 1{\cdot}4$		
1.0	0.036550	0.034912	0.036379	1.009218	0.036549
1.4	0.051718	0.048875	0.051356	1.013631	0.051715
2.0	0.075109	0.069814	0.074285	1.021123	0.075098
3.8	0.150623	0.132575	0.146469	1.051090	0.150465
5.0	0.206575	0.174348	0.197487	1.079073	0.205976
9.4	0.553036	0.326720	0.405088	1.289036	0.472020
			$M_1 = 1{\cdot}6$		
1.0	0.028553	0.035771	0.028552	1.000062	0.028553
1.4	0.040324	0.050077	0.040316	1.000374	0.040324
2.0	0.058369	0.071531	0.058334	1.001168	0.058369
3.8	0.115508	0.135838	0.115124	1.006132	0.115505
5.0	0.156353	0.178638	0.155319	1.011895	0.156339
9.4	0.330897	0.334759	0.319284	1.056682	0.330019
10.0	0.358832	0.355916	0.343709	1.066802	0.357446
14.6	0.703660	0.516651	0.547705	1.208028	0.619830
			$M_1 = 1{\cdot}8$		
1.0	0.023823	0.037781	0.023856	0.997231	0.023823
1.4	0.033637	0.052891	0.033701	0.996302	0.033637
2.0	0.048673	0.075551	0.048798	0.995106	0.048673
3.8	0.096147	0.143471	0.096513	0.993014	0.096147
5.0	0.129883	0.188676	0.130395	0.992960	0.129884
9.4	0.270059	0.353571	0.269411	1.003894	0.270044
10.0	0.291495	0.375916	0.290214	1.007038	0.291459
14.6	0.482146	0.545684	0.464722	1.051107	0.480200
15.0	0.501751	0.560296	0.481153	1.057194	0.499180
19.0	0.792303	0.704795	0.656336	1.154704	0.725943
			$M_1 = 2{\cdot}0$		
1.0	0.020605	0.040305	0.020646	0.996214	0.020605
1.4	0.029105	0.056424	0.029183	0.994839	0.029105
2.0	0.042138	0.080597	0.042294	0.992926	0.042137
3.8	0.083341	0.153053	0.083876	0.988296	0.083339
5.0	0.112645	0.201278	0.113524	0.986167	0.112642
9.4	0.233957	0.377185	0.236042	0.985649	0.233970
10.0	0.252349	0.401023	0.254480	0.986576	0.252368
14.6	0.411128	0.582129	0.409970	1.004054	0.411075
15.0	0.426662	0.597717	0.424676	1.006636	0.426559
19.0	0.604303	0.751867	0.582008	1.046641	0.601086
20.0	0.658165	0.789862	0.624201	1.062181	0.651783
22.8	0.885488	0.894929	0.748161	1.126017	0.817038

Tabelul I (continuare)

δ°	C_p	K	C_{p0}	$\varkappa^2$	C_{pa}
			$M_1 = 2{\cdot}5$		
1.0	0.015641	0.047605	0.015675	0.995837	0.015641
1.4	0.022130	0.066644	0.022196	0.994278	0.022130
2.0	0.032117	0.095196	0.032252	0.992052	0.032117
3.8	0.063970	0.180777	0.064462	0.986174	0.063967
5.0	0.086845	0.237737	0.087697	0.982916	0.086840
9.4	0.182810	0.445508	0.185676	0.975450	0.182798
10.0	0.197456	0.473664	0.200652	0.974983	0.197445
14.6	0.323291	0.687575	0.328782	0.976088	0.323340
15.0	0.335428	0.705987	0.341044	0.976607	0.335487
19.0	0.468471	0.888060	0.473424	0.986281	0.468645
20.0	0.505349	0.932936	0.509240	0.990196	0.505522
22.8	0.617855	1.057035	0.615070	1.005418	0.617628
25.0	0.718466	1.152786	0.703686	1.023269	0.716517
29.6	1.035924	1.347337	0.902949	1.091441	0.969987
			$M_1 = 3{\cdot}0$		
1.0	0.012733	0.055533	0.012759	0.996163	0.012733
1.4	0.018051	0.077743	0.018101	0.994724	0.018051
2.0	0.026274	0.111049	0.026377	0.992667	0.026273
3.8	0.052784	0.210882	0.053166	0.987203	0.052782
5.0	0.072061	0.277328	0.072731	0.984129	0.072057
9.4	0.154597	0.519700	0.156985	0.976499	0.154584
10.0	0.167376	0.552545	0.170067	0.975882	0.167363
14.6	0.278361	0.802080	0.283584	0.974420	0.278373
15.0	0.289137	0.823557	0.294569	0.974569	0.289154
19.0	0.407288	1.035951	0.414151	0.978686	0.407400
20.0	0.439882	1.088301	0.446758	0.980533	0.440025
22.8	0.538080	1.233067	0.543583	0.987798	0.538291
25.0	0.623017	1.344763	0.625099	0.996151	0.623140
29.6	0.829533	1.571713	0.809449	1.025142	0.826595
30.0	0.850140	1.590990	0.826280	1.028736	0.846336
34.0	1.153673	1.779341	1.000544	1.081960	1.071371
			$M_1 = 4{\cdot}0$		
1.0	0.009395	0.072099	0.009411	0.996918	0.009396
1.4	0.013374	0.100934	0.013404	0.995775	0.013374
2.0	0.019586	0.144176	0.019648	0.994152	0.019586
3.8	0.040069	0.273790	0.040304	0.989915	0.040068
5.0	0.055350	0.360056	0.055768	0.987583	0.055348
9.4	0.123586	0.674729	0.125135	0.981960	0.123580
10.0	0.134468	0.717372	0.136222	0.981512	0.134462
14.6	0.231267	1.041344	0.234817	0.980277	0.231270
15.0	0.240826	1.069228	0.244537	0.980344	0.240832
19.0	0.346656	1.344981	0.351711	0.982507	0.346700
20.0	0.376033	1.412947	0.381278	0.983487	0.376091
22.8	0.464522	1.600897	0.469689	0.987263	0.464624
25.0	0.540542	1.745913	0.544675	0.991450	0.540662
29.6	0.718834	2.040563	0.715514	1.004905	0.718627
30.0	0.735684	2.065591	0.731177	1.006471	0.735383
34.0	0.919605	2.310127	0.893797	1.027516	0.916061
35.0	0.971611	2.369548	0.935948	1.034866	0.965602
38.6	1.234644	2.577360	1.091509	1.073750	1.165524

Tabelul I (continuare)

$\delta°$	C_p	K	C_{p0}	$\varkappa^2$	C_{pa}
			$M_1 = 5 \cdot 0$		
1.0	0.007506	0.089061	0.007516	0.997487	0.007506
1.4	0.010728	0.124680	0.010748	0.996568	0.010729
2.0	0.015810	0.178096	0.015851	0.995278	0.015810
3.8	0.032939	0.338203	0.033098	0.991998	0.032939
5.0	0.046038	0.444765	0.046321	0.990260	0.046037
9.4	0.106834	0.833469	0.107894	0.986410	0.106832
10.0	0.116781	0.886144	0.117981	0.986146	0.116779
14.6	0.207015	1.286336	0.209416	0.985796	0.207019
15.0	0.216047	1.320780	0.218552	0.985895	0.216052
19.0	0.316843	1.661408	0.320164	0.987935	0.316868
20.0	0.344995	1.745364	0.348403	0.988751	0.345026
22.8	0.429990	1.977532	0.433196	0.991741	0.430039
25.0	0.503058	2.156664	0.505413	0.994910	0.503109
29.6	0.673546	2.520636	0.670584	1.004605	0.673416
30.0	0.689525	2.551551	0.685760	1.005700	0.689350
34.0	0.860669	2.853619	0.843525	1.019889	0.859156
35.0	0.907229	2.927019	0.884468	1.024646	0.904837
38.6	1.096117	3.183722	1.035699	1.048361	1.082923
40.0	1.189847	3.280211	1.095783	1.061792	1.159810
41.0	1.294598	3.347937	1.139014	1.073641	1.218481
			$M_1 = 6 \cdot 0$		
1.0	0.006281	0.106200	0.006288	0.997898	0.006281
1.4	0.009015	0.148672	0.009029	0.997141	0.009015
2.0	0.013367	0.212367	0.013397	0.996091	0.013367
3.8	0.028358	0.403284	0.028472	0.993503	0.028358
5.0	0.040091	0.530352	0.040296	0.992192	0.040090
9.4	0.096446	0.993856	0.097211	0.989595	0.096446
10.0	0.105863	1.056668	0.106726	0.989460	0.105862
14.6	0.192564	1.533870	0.194236	0.989763	0.192568
15.0	0.201327	1.574942	0.203064	0.989890	0.201332
19.0	0.299644	1.981118	0.301794	0.991986	0.299659
20.0	0.327214	2.081230	0.329359	0.992749	0.327232
22.8	0.410591	2.358075	0.412324	0.995436	0.410615
25.0	0.482332	2.571678	0.483150	0.998193	0.482347
29.6	0.649466	3.005690	0.645476	1.006356	0.649321
30.0	0.665086	3.042555	0.660406	1.007261	0.664906
34.0	0.831359	3.402750	0.815724	1.018779	0.830260
35.0	0.876083	3.490275	0.856056	1.022562	0.874427
38.6	1.051989	3.796376	1.005089	1.040928	1.044487
40.0	1.130979	3.911433	1.064320	1.050991	1.116415
41.0	1.195667	3.992191	1.106944	1.059678	1.170449
42.0	1.279321	4.071733	1.149772	1.070000	1.227249

Tabelul II

δ°	C_p	β°	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{M_2}{M_1}$
			$M_1 = 1{\cdot}1$			
1.0	0.090601	69,803345	1.076739	1.054219	1.021362	0.944807
1.4	0.149473	73.165813	1.126604	1.088825	1.034697	0.909889
			$M_1 = 1{\cdot}2$			
1.0	0.055491	58.547879	1.055935	1.039637	1.015677	0.964869
1.4	0.079639	59.488413	1.080276	1.056690	1.022321	0.949924
2.0	0.118760	61.050106	1.119710	1.084070	1.032877	0.926093
3.8	0.294602	68.968647	1.296959	1.203481	1.077673	0.823205
			$M_1 = 1{\cdot}4$			
1.0	0.036550	46.842434	1.050147	1.035564	1.014082	0.975033
1.4	0.051718	47.365275	1.070957	1.050175	1.019789	0.964931
2.0	0.075109	48.173207	1.103050	1.072539	1.028447	0.949620
3.8	0.150623	50.802297	1.206655	1.143378	1.055342	0.902100
5.0	0.206575	52.781533	1.283421	1.194566	1.074383	0.868419
9.4	0.553036	66.580540	1.758765	1.488973	1.181194	0.674743
			$M_1 = 1{\cdot}6$			
1.0	0.028553	39.684421	1.051167	1.036283	1.014363	0.978869
1.4	0.040324	40.095583	1.072260	1.051087	1.020144	0.970406
2.0	0.058369	40.724011	1.104598	1.073613	1.028861	0.957686
3.8	0.115508	42.701698	1.206991	1.143604	1.055427	0.919192
5.0	0.156353	44.108166	1.280185	1.192430	1.073594	0.893066
9.4	0.330897	50.136142	1.592967	1.390471	1.145631	0.790318
10.0	0.358832	51.115346	1.643026	1.420662	1.156522	0.774809
14.6	0.703660	64.364692	2.260959	1.763204	1.282302	0.591492
			$M_1 = 1{\cdot}8$			
1.0	0.023823	34.629970	1.054029	1.038297	1.015152	0.980836
1.4	0.033637	34.989900	1.076289	1.053904	1.021239	0.973194
2.0	0.048673	35.538183	1.110391	1.077627	1.030404	0.961747
3.8	0.096147	37.246998	1.218061	1.151053	1.058215	0.927411
5.0	0.129883	38.443984	1.294575	1.201914	1.077095	0.904414
9.4	0.270059	43.318985	1.612494	1.402295	1.149896	0.817604
10.0	0.291495	44.056708	1.661112	1.431472	1.160422	0.805243
14.6	0.482146	50.647484	2.093508	1.675546	1.249448	0.701610
15.0	0.501751	51.336469	2.137971	1.699174	1.258242	0.691398
19.0	0.792303	62.307121	2.796944	2.021346	1.383704	0.542920
			$M_1 = 2{\cdot}0$			
1.0	0.020605	30.811426	1.057695	1.040874	1.016161	0.981945
1.4	0.029105	31.142507	1.081494	1.057540	1.022651	0.974764
2.0	0.042138	31.646288	1.117985	1.082878	1.032420	0.964026
3.8	0.083341	33.211205	1.233355	1.161305	1.062042	0.931965
5.0	0.112645	34.301575	1.315406	1.215577	1.082125	0.910627
9.4	0.233957	38.667471	1.655080	1.427873	1.159123	0.831338
10.0	0.252349	39.313932	1.706578	1.458425	1.170151	0.820261
14.6	0.411128	44.809615	2.151159	1.706132	1.260840	0.731112
15.0	0.426662	45.343616	2.194652	1.728922	1.269376	0.722858
19.0	0.604303	51.506261	2.692049	1.973331	1.364215	0.631902
20.0	0.658165	53.422931	2.842861	2.042005	1.392191	0.605109
22.8	0.885488	62.117421	3.479367	2.307770	1.507675	0.492305

Tabelul II (continuare)

$\delta°$	C_p	$\beta°$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{M_2}{M_1}$
			$M_1 = 2{\cdot}5$			
1.0	0.015641	24.303117	1.068431	1.048406	1.019100	0.982987
1.4	0.022130	24.599112	1.096818	1.068212	1.026779	0.976245
2.0	0.032117	25.049632	1.140512	1.098391	1.038348	0.966190
3.8	0.063970	26.449002	1.279869	1.192221	1.073516	0.936340
5.0	0.086845	27.422659	1.379947	1.257419	1.097444	0.916610
9.4	0.182810	31.286201	1.799795	1.512703	1.189788	0.844319
10.0	0.197456	31.850590	1.863870	1.549265	1.203067	0.834372
14.6	0.323291	36.509629	2.414399	1.840464	1.311843	0.756383
15.0	0.335428	36.944898	2.467499	1.866548	1.321958	0.749411
19.0	0.468471	41.616444	3.049563	2.132410	1.430102	0.677238
20.0	0.505349	42.890171	3.210904	2.200156	1.459398	0.658320
22.8	0.617855	46.760849	3.703116	2.392911	1.547536	0.602610
25.0	0.718466	50.247770	4.143287	2.549442	1.625174	0.554593
29.6	1.035924	62.135536	5.532167	2.965011	1.865817	0.405863
			$M_1 = 3{\cdot}0$			
1.0	0.012733	20.157555	1.080220	1.056651	1.022306	0.982883
1.4	0.018051	20.438474	1.113719	1.079930	1.031289	0.976117
2.0	0.026274	20.866734	1.165523	1.115500	1.044844	0.966042
3.8	0.052784	22.201460	1.332538	1.226755	1.086230	0.936223
5.0	0.072061	23.133252	1.453982	1.304523	1.114570	0.916570
9.4	0.154597	26.841177	1.973960	1.610713	1.225520	0.844836
10.0	0.167376	27.382686	2.054471	1.654587	1.241682	0.835000
14.6	0.278361	31.828501	2.753677	2.001680	1.375683	0.758417
15.0	0.289137	32.240396	2.821561	2.032448	1.388257	0.751634
19.0	0.407288	36.600012	3.565917	2.341177	1.523130	0.682446
20.0	0.439882	37.763630	3.771255	2.418065	1.559617	0.664711
22.8	0.538080	41.205041	4.389902	2.631344	1.668311	0.613887
25.0	0.623017	44.135924	4.925006	2.796340	1.761233	0.572420
29.6	0.829533	51.285893	6.226060	3.137263	1.984552	0.477783
30.0	0.850140	52.013827	6.355880	3.167341	2.006693	0.468645
34.0	1.153673	63.673099	8.268137	3.546982	2.331034	0.334318
			$M_1 = 4{\cdot}0$			
1.0	0,009395	15.131255	1.105228	1.074050	1.029029	0.981313
1.4	0.013374	15.400471	1.149786	1.104748	1.040767	0.973955
2.0	0.019586	15.812570	1.219361	1.151926	1.058542	0.963023
3.8	0.040069	17.108304	1.448768	1.301237	1.113378	0.930776
5.0	0.055350	18.021283	1.619918	1.406775	1.151512	0.909563
9.4	0.123586	21.694902	2.384161	1.825462	1.306059	0.832125
10.0	0.134468	22.234139	2.506041	1.885277	1.329269	0.821514
14.6	0.231267	26.655197	3.590188	2.350437	1.527456	0.739440
15.0	0.240826	27.062871	3.697254	2.390731	1.546495	0.732252
19.0	0.346656	31.338296	4.882548	2.783841	1.753889	0.660180
20.0	0.376033	32.463891	5.211569	2.878225	1.810689	0.642154
22.8	0.464522	35.741898	6.202651	3.131771	1.980557	0.591770
25.0	0.540542	38.458864	7.054065	3.318843	2.125459	0.552280
29.6	0.718834	44.644800	9.050944	3.674565	2.463134	0.469423
30.0	0.735684	45.224063	9.239662	3.703361	2.494939	0.462131
34.0	0.919605	51.605161	11.299575	3.976829	2.841353	0.386559
35.0	0.971611	53.456911	11.882038	4.042729	2.939113	0.366146
38.6	1.234644	63.671077	14.828016	4.319571	3.432752	0.264285

Tabelul II (continuare)

δ°	C_p	β°	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{M_2}{M_1}$
			$M_1 = 5{\cdot}0$			
1.0	0.007506	12.178520	1.131349	1.092093	1.035946	0.978959
1.4	0.010728	12.444431	1.187748	1.130602	1.050544	0.970704
2.0	0.015810	12.853216	1.276669	1.190107	1.072735	0.958455
3.8	0.032939	14.150271	1.576437	1.380414	1.142003	0.922380
5.0	0.046038	15.072672	1.805666	1.516078	1.191012	0.898636
9.4	0.106834	18.823047	2.869604	2.053939	1.397122	0.811732
10.0	0.116781	19.376002	3.043669	2.129889	1.429027	0.799833
14.6	0.207015	23.905341	4.622754	2.705186	1.708849	0.708680
15.0	0.216047	24.321700	4.780822	2.753494	1.736275	0.700810
19.0	0.316843	28.665404	6.544759	3.209990	2.038872	0.623346
20.0	0.344995	29.800909	7.037404	3.315416	2.122630	0.604431
22.8	0.429990	33.085387	8.524822	3.590332	2.374383	0.552625
25.0	0.503058	35.779429	9.803513	3.785303	2.589889	0.513167
29.6	0.673546	41.792044	12.787049	4.137015	3.090888	0.433864
30.0	0.689525	42.344258	13.066681	4.164337	3.137758	0.427128
34.0	0.860669	48.238461	16.061706	4.413541	3.639188	0.360200
35.0	0.907229	49.855414	16.876515	4.470047	3.775467	0.343280
38.6	1.096117	56.643632	20.182056	4.663207	4.327935	0.277972
40.0	1.189847	60.259242	21.822316	4.742017	4.601906	0.246499
41.0	1.294598	64.655077	23.655466	4.819779	4.907998	0.210948
			$M_1 = 6{\cdot}0$			
1.0	0.006281	10.230725	1.158273	1.110553	1.042970	0.976257
1.4	0.009015	10.496315	1.227176	1.157168	1.060500	0.966969
2.0	0.013367	10.906331	1.336854	1.229563	1.087260	0.953203
3.8	0.028358	12.218647	1.714627	1.463163	1.171863	0.912674
5.0	0.040091	13.159747	2.010284	1.630617	1.232837	0.885950
9.4	0.096446	17.016842	3.430450	2.288618	1.498917	0.787984
10.0	0.105863	17.586857	3.667737	2.379711	1.541253	0.774628
14.6	0.192564	22.245213	5.852612	3.047064	1.920738	0.673837
15.0	0.201327	22.671874	6.073444	3.101076	1.958496	0.665299
19.0	0.299644	27.103044	8.551029	3.594672	2.378807	0.582989
20.0	0.327214	28.255130	9.245789	3.704284	2.495972	0.563384
22.8	0.410591	31.572482	11.346900	3.982348	2.849299	0.510705
25.0	0.482332	34.276320	13.154757	4.172778	3.152518	0.471566
29.6	0.649466	40.248908	17.366538	4.502132	3.857404	0.395422
30.0	0.665086	40.792519	17.760159	4.526946	3.923210	0.389110
34.0	0.831359	46.524411	21.950251	4.747775	4.623271	0.327795
35.0	0.876083	48.067037	23.077289	4.796311	4.811466	0.312753
38.6	1.051989	54.269282	27.510126	4.955540	5.551389	0.257420
40.0	1.130979	57.188231	29.500661	5.014103	5.883537	0.233844
41.0	1.195667	59.682006	31.130811	5.057387	6.155513	0.214780
42.0	1.279321	63.104824	33.238898	5.108028	6.507188	0.190082

BIBLIOGRAFIE

1. A. Ferri, *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows*, Macmillan Comp., 1949.
2. Elie Carafoli, *High Speeds Aerodynamics*, Edit. tehnica, 1957.
3. — *On a unitary formula for compression-expansion in supersonic-hypersonic flow*, Rev. Mec. Appl. **7**, *5* (1962).
4. Elie Carafoli, Dan Mateescu, Adriana Năstase, *Wing Theory in Supersonic Flow*, Pergamon Press, 1969.

Omagiu academicianului ELIE CARAFOLI, profesorul și îndrumătorul meu pe calea științei

DETERMINAREA VOLUMULUI DE AMESTEC LA TRANSPORTUL SUCCESIV AL PRODUSELOR PETROLIERE PRINTR-O CONDUCTĂ, ÎN CAZUL UTILIZĂRII SEPARATORILOR CILINDRICI

de T. OROVEANU
Institutul de petrol Ploiești

În cazul în care prin aceeași conductă se transportă succesiv două sau mai multe produse petroliere, apare problema contaminării lor reciproce, datorită miscibilității. Se formează astfel un volum de amestec, pentru a cărui determinare au fost efectuate numeroase cercetări teoretice și experimentale. În scopul de a se evita contaminarea produselor, se utilizează separatori de diferite forme, introduși în conductă la contactul dintre cele două produse. Deoarece nu se poate realiza o etanșare perfectă, se produce chiar și în acest caz un amestec între cele două produse transportate succesiv. În lucrare se consideră separatorul cilindric, pentru care s-a studiat anterior efectul neetanșeității și se urmărește de data aceasta determinarea volumului de amestec ce se produce datorită neetanșeității. Problema fiind destul de dificilă, se recurge la unele aproximații, atît în ecuația diferențială a concentrației cît și în condițiile la limită. Soluția obținută permite să se calculeze cu ușurință concentrația medie într-o secțiune transversală oarecare a conductei și să determine, cu o bună aproximație, volumul de amestec.

1. INTRODUCERE

Problema cea mai importantă care apare în cazul transportului succesiv a două sau mai multe produse petroliere printr-o conductă este aceea a micșorării cît mai mult cu putință a amestecului dintre aceste produse. În afară de volumul de amestec format în conductă, prin contactul dintre produse, amestecul se mai produce în pompe, în claviatura stațiilor de pompare și în rezervoare. Dacă se ține seama însă de faptul că o conductă poate avea o lungime mare, de ordinul sutelor de kilometri, contaminarea produselor datorită miscibilității reciproce conduce de obicei la efectul cel mai nefavorabil chiar în timpul transportului propriu-zis.

Problema determinării volumului de amestec care se formează în conductă a fost studiată mai demult și reluată de diferiți cercetători care au căutat să obțină rezultate cît mai utilizabile, pe cale teoretică sau experimentală.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 633–644

Printre studiile teoretice care au avut ca obiect stabilirea evoluției în timp a lungimii zonei de amestec, un loc deosebit îl ocupă acelea efectuate de G. Taylor, mai întîi pentru cazul regimului laminar [9], [10] și extinse apoi la regimul turbulent [11]. Rezultatele găsite în aceste lucrări au rămas fundamentale și cercetările ulterioare au urmărit în general fie eliminarea unor ipoteze simplificatoare introduse de G. Taylor, fie precizarea domeniului în care soluțiile sale sînt în bună concordanță cu datele experimentale. În lucrarea [6] am dat indicații bibliografice asupra celor mai importante lucrări publicate pînă în prezent în legătură cu această problemă. Pentru completare, mai menționăm și soluția publicată în [2] care se referă la regimul turbulent.

Aceste cercetări, ca și cele experimentale, au scos în evidență faptul că lungimea zonei de amestec crește în timp, ceea ce poate conduce la un volum destul de important al acestei zone, în special atunci cînd și conducta are o lungime mare. A apărut deci problema reducerii sau eliminării complete a volumului de amestec, rezolvată prin utilizarea separatorilor cilindrici, sferici sau de alte forme, introduși în conductă pentru a împiedica un contact direct între două produse transportate succesiv.

Datorită jocului existent între separator și suprafața interioară a conductei, care crește în timpul transportului, din cauza uzurii relativ rapide a separatorului, nu se realizează o etanșeitate perfectă și ca urmare nu se poate elimina complet procesul de formare a unui volum de amestec. Eficacitatea separatorului este însă cu atît mai mare cu cît contaminarea este mai redusă față de cazul în care transportul succesiv s-ar efectua fără utilizarea separatorilor.

Dacă ne referim la cazul concret al separatorului de formă cilindrică, apar deci două probleme care necesită o rezolvare atît prin studii teoretice cît și pe cale experimentală. Prima dintre probleme este aceea a scurgerii prin interstițiul dintre separator și suprafața interioară a conductei și a fost tratată cu ipoteze care o simplifică mult, de Z.F. Karimov și V. I. Cernikin [3], [4], atît în cazul în care separatorul și conducta sînt coaxiale, cît și atunci cînd există o excentricitate, situație care corespunde mai bine realității. În [7] am reluat această problemă, studiind variația concentrației în interstițiul dintre separator și suprafața interioară a conductei, aspect care fusese lăsat la o parte de autorii menționați mai sus. Complexitatea problemei a impus anumite ipoteze simplificatoare, introduse în scopul de a se ajunge la o soluție sub formă închisă și relativ ușor utilizabilă pentru calculele numerice. Pentru cazul în care separatorul și conducta sînt coaxiale, această soluție a fost găsită și cu ajutorul ei s-a calculat concentrația medie în secțiunea terminală a interstițiului, care are expresia

$$c_m = c_i \left[1 - 4e^{\frac{\beta P_0}{2}\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sin \lambda_n}{\lambda_n^2 + \beta P_0 + \frac{\beta^2 P_0^2}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{P_0}\left[\lambda_n + (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \varkappa^2\right]\tau}}{(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \varkappa} \right] \quad (1)$$

Cu c_i s-a notat concentrația în secțiunea de intrare în interstițiu, cu β o constantă și anume

$$\beta = \frac{1 - 3\alpha}{6}, \tag{2}$$

unde

$$\alpha = \frac{V}{4v_{max}}, \tag{3}$$

V fiind viteza de deplasare a separatorului și v_{max} viteza maximă a scurgerii din interstițiu în cazul $V = 0$, cu $\mathcal{P}_0$ numărul lui Péclet de difuzie

$$\mathcal{P}_0 = \frac{4v_{max}l}{D}, \tag{4}$$

l fiind lungimea separatorului și D coeficientul de difuzie moleculară, cu τ timpul adimensional

$$\tau = \frac{4v_{max}t}{l}, \tag{5}$$

și cu λ_n rădăcinile ecuației

$$\operatorname{tg}\lambda_n = \frac{\beta\mathcal{P}_0\,\lambda_n}{\lambda_n^2 - \frac{\beta^2\mathcal{P}_0^2}{4}}. \tag{6}$$

Precizăm că formula (1) se referă la concentrația produsului care este pompat prin conductă în spatele separatorului.

Calculele arată că după un timp foarte scurt concentrația medie c_m devine egală cu c_i, aceasta din urmă fiind la rîndul ei, în cazurile practice, egală cu unitatea.

Tot în lucrarea citată [7], am arătat cum rezultatul exprimat prin formula (1) poate fi utilizat pentru a se calcula, cu o aproximație destul de bună, concentrația medie în secțiunea terminală a interstițiului atunci cînd există o excentricitate relativă ε definită prin relația

$$\varepsilon = \frac{e}{\delta_0}, \tag{7}$$

e fiind excentricitatea iar δ_0 lărgimea nominală a interstițiului. Formula găsită are forma

$$c_{me} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} C_m(1 + \varepsilon\cos\theta)\,d\theta \tag{8}$$

și calculele trebuie efectuate utilizîndu-se expresia (1) a concentrației medii c_m. De data aceasta însă, nu este posibil decît un calcul numeric,

relativ anevoios, deoarece se ajunge la integrale care nu pot fi exprimate cu ajutorul funcţiilor elementare cunoscute.

În felul acesta se ajunge la a doua problemă, cea mai importantă de altfel, care constă în determinarea volumului de amestec ce se formează datorită scurgerii din interstiţiu. Într-un studiu efectuat tot de Z. F. Karimov şi V.I. Cernikin [5], a fost dată o soluţie a acestei probleme, presupunîndu-se însă că lungimea separatorului este nulă, aproximaţie justificată de faptul că această lungime este foarte mică în raport cu aceea a conductei. Mai puţin bine justificată este o a doua aproximaţie utilizată în [5] şi anume aceea că produsele transportate vin în contact pe întreaga secţiune transversală a conductei. În felul acesta, se neglijează principalul efect al prezenţei separatorului şi se ajunge la volume de amestec sensibil mai mari decît cele reale.

Reluînd această problemă, ne propunem să eliminăm aproximaţiile amintite, păstrînd însă altele, folosite de altfel şi în lucrarea menţionată mai sus.

2. ECUAŢIA APROXIMATIVĂ A PROBLEMEI. CONDIŢII INIŢIALE ŞI LA LIMITĂ

Vom studia formarea zonei de amestec în faţa separatorului, în ipoteza că acesta este coaxial cu conducta, considerarea excentricităţii ducînd în acest caz la dificultăţi de calcul destul de mari.

În raport cu un sistem de axe fixe, concentraţia este soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V\frac{\partial c}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right), \tag{9}$$

axa Ox coincizînd cu aceea a conductei. Am presupus, ca în [6], că transportul de masă se efectuează cu viteza medie V a lichidului. Această aproximaţie permite găsirea unei soluţii pe o cale relativ simplă şi în acelaşi timp dă posibilitatea aplicării acestei soluţii atît la regimul laminar, cît şi la cel turbulent dacă, pentru această ultimă situaţie, introducem în ecuaţia (9) viteza medie corespunzătoare şi coeficientul de difuzie turbulentă. Evident şi pentru concentraţie obţinem valoarea medie, în sensul cunoscut din teoria mişcării turbulente a fluidelor.

Vom considera ca moment iniţial pe acela în care concentraţia medie c_m în secţiunea terminală a separatorului a atins valoarea c_i. În conformitate cu cele arătate mai sus, timpul necesar pentru a se ajunge la această situaţie este foarte scurt şi ca urmare vom neglija amestecul ce se produce pînă în acest moment. Rezultă de aci condiţia iniţială

$$t = 0, \quad c = 0, \tag{10}$$

în timp ce condițiile la limită au forma

$$Vc - D\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (0 < r < r_s),$$

$x = Vt,$

$$v_m c - D\frac{\partial c}{\partial x} = v_m c_i, \quad (r_s < r < r_0), \tag{11}$$

respectiv

$$x \to \infty, \quad c = 0 \tag{12}$$

și

$$r = r_0, \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0, \tag{13}$$

r_0 fiind raza interioară a conductei, r_s raza separatorului și v_m o viteză medie convenabil definită a lichidului în scurgerea din interstițiul dintre separator și suprafața interioară a conductei.

Prima condiție (11) exprimă faptul că prin suprafața frontală a separatorului nu se produce transport de masă, iar a doua condiție (11) are forma uzuală pe suprafața de contact dintre două lichide miscibile. Observăm că am introdus și aci aproximația de a considera că transportul de masă se efectuează cu o viteză medie, care este de data aceasta v_m. De asemenea, condiția (13) exprimă faptul că suprafața interioară a conductei este impermeabilă. După cum se va putea constata mai departe, o a doua condiție la limită în raport cu variabila r și anume la $r = 0$, este satisfăcută automat.

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\tau = \frac{Vt}{r_0}, \quad \xi = \frac{x}{r_0}, \quad \rho = \frac{r}{r_0}, \tag{14}$$

ecuația (9) ia forma

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\mathcal{P}}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \rho}\right), \tag{15}$$

în care

$$\mathcal{P} = \frac{Vr_0}{D} \tag{16}$$

este numărul lui Péclet de difuzie.

La rîndul lor, condițiile pe care trebuie să le satisfacă soluția devin

$$\tau = 0, \quad c = 0, \tag{17}$$

respectiv

$$c - \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\partial c}{\partial \xi} = 0 \quad (0 < \rho < \rho_s),$$

$$\xi = \tau, \tag{18}$$

$$c - \frac{1}{\varphi \mathcal{P}} \frac{\partial c}{\partial \xi} = c_i \quad (\rho_s < \rho < 1)$$

şi

$$\xi \to \infty, \quad c = 0, \tag{19}$$

precum şi

$$\rho = 1, \quad \frac{\partial c}{\partial \rho} = 0, \tag{20}$$

cu notaţia

$$v_m = \varphi V. \tag{21}$$

3. SOLUŢIA APROXIMATIVĂ

Problema astfel formulată poate fi rezolvată cu destulă uşurinţă dacă se mai faze uz de o aproximaţie în condiţia la limită (18).

După ce introducem transformata finită a lui Hankel

$$c_H = \int_0^1 \rho C J_0(\mu_n \rho) \, d\rho, \tag{22}$$

unde μ_n sînt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei

$$J_1(\mu_n) = 0, \tag{23}$$

ecuaţia (15) devine

$$\frac{\partial c_H}{\partial \tau} + \frac{\partial c_H}{\partial \xi} = \frac{1}{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial^2 c_H}{\partial \xi^2} - \mu_n^2 c_H \right), \tag{24}$$

deoarece se poate arăta [8] că în acest caz avem

$$\int_0^1 \rho \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right) J_0(\mu_n \rho) \, d\rho = - \mu_n^2 c_H. \tag{25}$$

Aceeaşi transformare integrală trebuie aplicată şi condiţiilor pe care trebuie să le satisfacă soluţia. Găsim astfel imediat

$$\tau = 0, \quad c_H = 0, \tag{26}$$

în timp ce din condiția (18), după ce înmulțim cu $\rho\, J_0(\mu_n \rho)$, integrăm de la 0 la ρ_s, respectiv de la ρ_s la 1 și adunăm, obținem

$$\frac{\partial c_H}{\partial \xi} = \mathcal{P}\int_0^{\rho_s} \rho c\, J_0(\mu_n\rho)\, d\rho + \varphi^{\mathcal{P}}\int_{\rho_s}^{1} \rho c J_0(\mu_n\rho)\, d\rho + \varphi^{\mathcal{P}} c_i \rho_s \frac{J_1(\mu_n\rho_s)}{\mu_n}. \quad (27)$$

Pentru a da acestui rezultat o formă convenabilă, utilizăm aproximația amintită mai înainte, admițînd că v_m nu diferă mult de V, ceea ce ne permite să punem $\varphi = 1$, în a doua integrală din formula precedentă. Ca urmare, ajungem la condiția

$$\xi = \tau, \quad c_H - \frac{1}{\mathcal{P}}\frac{\partial c_H}{\partial \xi} = -\varphi c_i \rho_s \frac{J_1(\mu_n\rho_s)}{\mu_n}, \quad (28)$$

iar (19) devine

$$\xi \to \infty, \quad c_H = 0. \quad (29)$$

Observăm însă că transformata finită a lui Hankel utilizată prezintă o particularitate pe care am mai întîlnit-o și în unele lucrări anterioare, de exemplu [6], și care provine din legătura ce există între acest tip de transformare integrală și teoria seriilor Fourier-Bessel. Mai precis, μ_n fiind rădăcinile ecuației (23) ne găsim în fața unui caz particular de serie Fourier-Bessel de tipul al doilea (serie Dini) pentru care sistemul ortogonal cu ponderea ρ format din funcțiile $J_0(\mu_n \rho)$ trebuie completat cu funcția $\rho^0 = 1$, ortogonală cu ele cu aceeași pondere. În acest caz, este ușor de constatat că se obține pentru condiția (28) forma particulară

$$\xi = \tau, \quad c_H - \frac{1}{\mathcal{P}}\frac{\partial c_H}{\partial \xi} = \varphi c_i (1 - \rho_s^2). \quad (30)$$

Condiția la limită (28) trebuie să fie satisfăcută pe o frontieră mobilă; putem însă efectua o schimbare de variabile prin care se înlătură această situație. Astfel, dacă punem

$$\tau_1 = \tau, \quad \xi_1 = \xi - \tau, \quad (31)$$

ecuația (24) capătă forma

$$\frac{\partial c_H}{\partial \tau_1} = \frac{1}{\mathcal{P}}\left(\frac{\partial^2 c_H}{\partial \xi_1^2} - \mu_n^2 c_H\right), \quad (32)$$

iar condițiile pe care trebuie să le satisfacă soluția devin

$$\tau_1 = 0, \quad c_H = 0, \quad (33)$$

respectiv

$$\xi_1 = 0, \quad c_H - \frac{1}{\mathcal{P}}\frac{\partial c_H}{\partial \xi_1} = -\varphi\, c_i \rho_s \frac{J_1(\mu_n\rho_s)}{\mu_n} \quad (34)$$

şi

$$\xi_1 \to \infty, \quad c_H = 0, \tag{35}$$

în timp ce condiţia (30) se scrie, la rîndul ei,

$$\xi_1 = 0, \quad c_H - \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\partial c_H}{\partial \xi_1} = \varphi c_i (1 - \rho_s^2). \tag{36}$$

În continuare, aplicăm ecuaţiei (32) transformata lui Laplace în raport cu variabila τ_1

$$c_{HL} = \int_0^\infty c_H e^{-s\tau_1} d\tau_1, \tag{37}$$

şi obţinem, dacă ţinem seama de condiţia (33),

$$\frac{d^2 c_{HL}}{d\xi_1^2} - (\mathcal{P}s + \mu_n^2)\, C_{HL} = 0, \tag{38}$$

ecuaţie a cărei soluţie trebuie să satisfacă, la rîndul ei, condiţiile

$$\xi_1 = 0, \quad c_{HL} - \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{dc_{HL}}{d\xi_1} = -\varphi c_i \rho_s \frac{J_1(\mu_n \rho_s)}{\mu_n} \frac{1}{s} \tag{39}$$

şi

$$\xi_1 \to \infty, \quad c_{HL} = 0, \tag{40}$$

deduse din (34), respectiv (35).

Soluţia căutată se găseşte imediat şi are forma

$$c_{HL} = -\varphi \mathcal{P} c_i \rho_s \frac{J_1(\mu_n \rho_s)}{\mu_n} \cdot \frac{e^{-\xi_1 \sqrt{\mathcal{P}s + \mu_n^2}}}{s(\mathcal{P} + \sqrt{\mathcal{P}s + \mu_n^2})}, \tag{41}$$

iar originalul este [1]

$$c_H = -\frac{\varphi c_i \rho_s J_1(\mu_n \rho_s)}{\mu_n} \left[\frac{e^{-\mu_n \xi_1}}{2\left(1 + \frac{\mu_n}{\mathcal{P}}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} - \mu_n \sqrt{\frac{\tau_1}{\mathcal{P}}}\right) + \right.$$

$$+ \frac{e^{\mu_n \xi_1}}{2\left(1 - \frac{\mu_n}{\mathcal{P}}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} + \mu_n \sqrt{\frac{\tau_1}{\mathcal{P}}}\right) -$$

$$\left. - \frac{e^{\mathcal{P}\xi_1 + \mathcal{P}\left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mathcal{P}^2}\right)\tau_1}}{1 - \frac{\mu_n^2}{\mathcal{P}^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} + \sqrt{\mathcal{P}\tau_1}\right) \right]. \tag{42}$$

Urmează să găsim și soluția care satisface condițiile

$$\xi_1 = 0, \quad c_{HL} - \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{dc_{HL}}{d\xi_1} = \varphi c_i (1 - \rho_s^2) \frac{1}{s} \tag{43}$$

și

$$\xi_1 \to \infty, \quad c_{HL} = 0, \tag{44}$$

deduse din (36), respectiv (35). În acest scop, observăm că soluția la care ne referim corespunde la prima rădăcină a ecuației (23) care este $\mu_0 = 0$. Ecuația (38) ia deci forma particulară

$$\frac{d^2 c_{HL}}{d\xi_1^2} - \mathcal{P}_s c_{HL} = 0 \tag{45}$$

și are soluția

$$c_{HL}^{(0)} = \varphi c_i (1 - \rho_s^2) \frac{e^{-\xi_1 \sqrt{\mathcal{P}_s}}}{s\left(1 + \sqrt{\frac{s}{P}}\right)}, \tag{46}$$

care satisface condițiile (43) și (44).

Originalul are forma [1]

$$c_H^{(0)} = \varphi c_i (1 - \rho_s^2) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}}\right) - e^{\mathcal{P}(\xi_1 + \tau_1)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} + \sqrt{\mathcal{P}\tau_1}\right)\right], \tag{47}$$

și prin aplicarea teoremei de inversiune pentru tipul de transformată finită a lui Hankel utilizat, obținem

$$\begin{aligned} c = {} & \varphi c_i (1 - \rho_s^2) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}}\right) - e^{\mathcal{P}(\xi_1 + \tau_1)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} + \sqrt{\mathcal{P}\tau_1}\right)\right] - \\ & - 2\varphi c_i \rho_s \sum_n \left[\frac{e^{-\mu_n \xi_1}}{2\left(1 + \frac{\mu_n^2}{\mathcal{P}}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} - \mu_n \sqrt{\frac{\tau_1}{\mathcal{P}}}\right) + \right. \\ & + \frac{e^{\mu_n \xi_1}}{2\left(1 - \frac{\mu_n}{\mathcal{P}}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} + \mu_n \sqrt{\frac{\tau_1}{\mathcal{P}}}\right) - \\ & \left. - \frac{e^{\mathcal{P}\xi_1 + \mathcal{P}\left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mathcal{P}^2}\right)\tau_1}}{1 - \frac{\mu_n^2}{\mathcal{P}^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} + \sqrt{\mathcal{P}\tau_1}\right) \right] \frac{J_1(\mu_n \rho_s)\, J_0(\mu_n \rho)}{\mu_n J_0^2(\mu_n)}. \end{aligned} \tag{48}$$

Concentrația medie într-o secțiune transversală oarecare ξ_1, ca funcție de timp, rezultă din formula

$$c_m = 2\int_0^1 \rho c \, d\rho, \tag{49}$$

și dacă ținem seama de faptul că avem, în conformitate cu (23),

$$\int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \, d\rho = 0, \tag{50}$$

găsim imediat

$$c_m = \varphi c_i (1 - \rho_s^2)\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}}\right) - e^{\mathcal{P}(\xi_1+\tau_1)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau_1}} + \sqrt{\mathcal{P}\tau_1}\right)\right]. \tag{51}$$

Se observă că primul termen din expresia (48) a concentrației reprezintă chiar valoarea ei medie.

Revenind la variabilele (14), concentrația are expresia

$$\begin{aligned} c = \varphi c_i \Bigg\{ & (1-\rho_s^2)\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau}} - \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{P}\tau}\right) - e^{\mathcal{P}\xi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{P}\tau}\right)\right] - \\ & - \rho_s \sum_n \Bigg[\frac{e^{-\mu_n(\xi-\tau)}}{2\left(1+\frac{\mu_n}{\mathcal{P}}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau}} - \frac{1}{2}\left(1+2\frac{\mu_n}{\mathcal{P}}\right)\sqrt{\mathcal{P}\tau}\right) + \\ & + \frac{e^{\mu_n(\xi-\tau)}}{2\left(1-\frac{\mu_n}{\mathcal{P}}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau}} - \frac{1}{2}\left(1-2\frac{\mu_n}{\mathcal{P}}\right)\sqrt{\mathcal{P}\tau}\right) - \\ & - \frac{e^{\mathcal{P}\left(\xi - \frac{\mu_n^2}{\mathcal{P}^2}\tau\right)}}{1-\frac{\mu_n^2}{\mathcal{P}^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{P}\tau}\right)\Bigg] \frac{J_1(\mu_n\rho_s)\ J_0(\mu_n\rho)}{\mu_n J_0^2(\mu_n)} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{52}$$

iar valoarea medie într-o secțiune transversală oarecare este

$$c_m = \varphi c_i (1-\rho_s^2)\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau}} - \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{P}\tau}\right) - e^{\mathcal{P}\xi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{P}\tau}\right)\right]. \tag{53}$$

Remarcăm că soluția (52) satisface condiția la limită (20) datorită tipului de transformată finită a lui Hankel utilizat. De asemenea, soluția găsită are un extrem pentru $\rho = 0$ ceea ce reprezintă o a doua condiție la limită, amintită în treacăt mai înainte, în raport cu această variabilă. Necesitatea ca în axa conductei ($\rho = 0$) concentrația să aibă un extrem

rezultă din considerații de ordin fizic și anume din simetria axială a problemei.

Formula precedentă permite să se calculeze, la diferite valori ale timpului adimensional τ, concentrația medie în funcție de ξ și prin urmare volumul de amestec în fața separatorului. Observăm că pe suprafața de contact dintre acesta din urmă și produs ($\xi = \tau$), concentrația medie este funcție de timp și are valoarea

$$c_m^{(0)} = \varphi c_i(1-\rho_s^2)\left[1-\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{P}\tau}\right)\right], \tag{54}$$

tinzînd relativ repede către o constantă.

Pentru calcule este remarcabil să se utilizeze expresia (51) a concentrației medii în care termenul al doilea din paranteză devine neglijabil pentru valori destul de mici ale lui ξ_1 sau τ_1. La o valoare dată a timpului adimensional $\tau_1(\tau_1 = \tau)$, din (51) rezultă variația concentrației medii în funcție de ξ_1 și prin urmare lungimea zonei de amestec în fața separatorului. Calculele sînt ușurate de observația precedentă; într-adevăr, τ_1 fiind dat, al doilea termen din parantează din (51) tinde repede către zero atunci cînd ξ_1 crește.

4. CONCLUZII

Rezultatele precedente au fost găsite după ce au fost eliminate unele ipoteze utilizate în studiile anterioare asupra acestei probleme, menționate mai sus. Pentru a se ajunge la o soluție destul de simplă și prin urmare ușor de utilizat, a fost necesar să se păstreze aproximația referitoare la transportul concentrației cu o viteză constantă, care afectează într-o oarecare măsură precizia rezultatelor. De asemenea, fenomenul de mișcare imediat în spatele și în fața separatorului este mult mai complicat, tratarea precedentă a problemei ignorînd repartiția reală a vitezei în zonele menționate. Renunțarea la aceste aproximații ar conduce însă la complicații mari care ar face probabil imposibilă rezolvarea problemei altfel decît pe calea calculului numeric sau a unui procedeu aproximativ. În primul caz apare însă dezavantajul că fiecare situație particulară trebuie rezolvată separat, după fixarea valorilor numerice ale parametrilor problemei, iar în al doilea se introduc alte surse de erori, greu de precizat, care pot afecta precizia rezultatului în aceeași măsură ca și aproximațiile pe care le-am făcut. În fară de aceasta, rezultatele ar fi mai greu utilizabile pentru calculele numerice, observație care poate fi justificată prin comparație cu rezolvările de acest gen cunoscute pentru probleme similare.

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. Ditkin, P. I. Kuznețov, *Spravocinik po operaționnomu iscisleniiu*, G.I.T.T.L., Moskva-Leningrad, 1951, p. 155, 161.
2. V. S. Iablonski, V. F. [illegible]ovoselov, V. B. Galeev, G. Z. Zakirov, *Proektirovanie ekspluatația i re[illegible]ozit nefteproduktoprovodov*, Izdatelsvo Nedra, Moskva, 1965, p. 152–157.
3. Z. F. Kari[illegible]ov, V. I. Cernikin, *Posledovatelnaia perekacika nefteproduktov s razdelitcliami*, Neftianoe hoziaistvo, 4 (1961).

4. Z. F. KARIMOV, V. I. CERNIKIN, *Vliianie iznosa razdelitelei na obem smesi pri posledovatelnoi perekacika*, Neftianoe hoziaistvo, *3* (1962).
5. Z. F. KARIMOV, V. I. CERNIKIN, *Primenenie razdelitelei pri posledovatelnoi perekaciki svetlih nefteproduktov*, Neftianoe hoziaistvo, *12* (1962).
6. T. OROVEANU, I. SPULBER, *Asupra difuziei convective în tuburi de secțiune circulară*, St. cerc. mec. apl., **30**, *6* (1971).
7. T. OROVEANU, F. SOHEIMAT, *Sur l'efficacité des séparateurs cylindriques dans le transport des produits pétroliers par les pipe-lines*, Revue roumaine des sciences techniques. Série de mécanique appliquée, **17**, *2* (1972).
8. IAN N. SNEDDON, *Fourerr Transforms*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1951, p. 89.
9. G. TAYLOR, *Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube*, Proceedings of the Royal Society, A, Mathematical and Physical Sciences, *219*, 1136 (1953).
10. G. TAYLOR, *Conditions under which dispersion of a solute in a stream can be used to measure molecular diffusion*, Proceedings of the Royal Society, A, Mathematical and Physical Sciences, *225*, 1163 (1954).
11. G. TAYLOR, *Dispersion of matter in turbulent flow through a pipe*, Proceedings of the Royal Society, A, Mathematical and Physical Sciences, *223*, 1155 (1954).

Omagiu profesorului CARAFOLI

POLARA ŞOC-COMBUSTIE (DETENTĂ-COMBUSTIE) CU CONSIDERAREA VARIAŢIEI RAPORTULUI CĂLDURILOR SPECIFICE AL GAZULUI LA TRECEREA PRIN FRONTUL DE FLACĂRĂ

de D. PANTAZOPOL şi F. MUNTEANU
I.M.F.C.A.

Se studiază curgerea bidimensională a unui amestec reactiv în prezenţa sistemelor undă de şoc-undă de combustie sau detentă Prandtl-Meyer-undă de combustie, reprezentîndu-se pe o curbă continuă în coordonate presiune-deviaţie stările curentului după ambele sisteme de unde. Se pune în evidenţă efectul modificării raportului căldurilor specifice asupra variaţiei parametrilor curentului în urma combustiei.

1. INTRODUCERE

Reprezentarea în planul hodografic a regimurilor de curgere prin unde de şoc oblice, descrisă în *Aerodinamica vitezelor mari* de acad. Elie Carafoli sub denumirea de polară de şoc, a constituit o metodă simplă şi mult întrebuinţată în studiul curgerilor supersonice. În ultimul timp metoda se dovedeşte utilă în studiul undelor de detonaţie şi deflagraţie (combustie), fiind posibile aşa cum se va vedea în continuare şi alte extinderi.

Se consideră un amestec combustibil gazos ce curge cu viteză supersonică de-a lungul unui perete solid care îşi schimbă brusc direcţia într-un punct fix O (fig. 1). Deviaţia δ^* a peretelui va fi considerată pozitivă deasupra liniei AO şi negativă în partea opusă, după cum ea va da naştere respectiv la o undă de şoc oblică sau o expansiune Prandtl-Meyer.

Dacă în acelaşi punct O se plasează o sursă de aprindere, de exemplu o mică flacără-pilot, în curent va lua naştere un front de flacără care în ipoteza unei uniformităţi ideale a amestecului şi curgerii va fi plan şi va ocupa o poziţie staţionară în aval de unda de şoc sau fasciculul de expansiune, acestea din urmă modificîndu-şi caracteristicile faţă de situaţia dinainte (fără combustie).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 645–652

Într-o lucrare anterioară [2] a fost propusă o metodă de reprezentare hodrografică, polara şoc-combustie, care descrie dependenţa dintre variaţia totală a presiunii şi deviaţia finală a curentului la trecerea prin sistemul undă de şoc-undă de combustie.

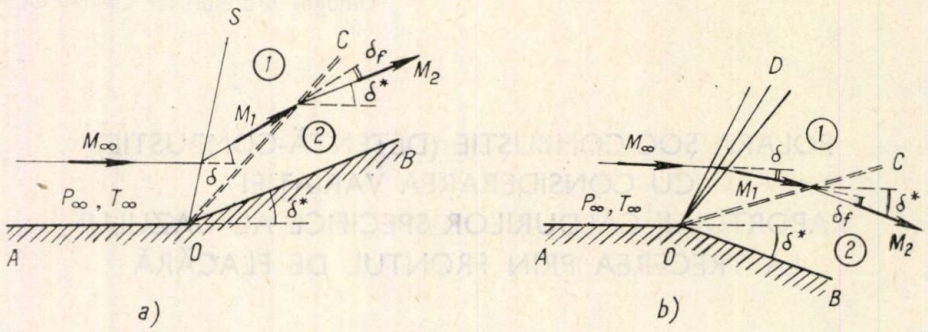


Fig. 1

În lucrarea de faţă metoda este extinsă prin studiul configuraţiilor detentă — undă de combustie şi prin renunţarea la ipoteza raportului căldurilor specifice constant înainte şi după ardere, ipoteză ce nu mai este admisibilă pentru amestecuri cu degajare mare de căldură prin reacţie.

Ca şi în alte lucrări [2]—[4], s-a considerat zona de degajare a căldurii de reacţie ca fiind foarte îngustă, astfel încît frontul de flacără a fost asimilat cu o suprafaţă de discontinuitate a parametrilor curgerii. Raportul dintre viteza normală de propagare a acestui front şi viteza sunetului în gazul nears (notată cu a_1), numărul Mach al flăcării, este presupus a depinde în principal de temperatura amestecului nears după o lege care trebuie dedusă pentru fiecare amestec combustibil.

Considerînd un anumit amestec caracterizat prin valoarea Q a degajării de căldură prin ardere pe unitatea de masă şi prin legea $m = m(T)$ de variaţie a numărului Mach al flăcării cu temperatura, şi pentru valori cunoscute ale presiunii P_∞, temperaturii T_∞ şi numărului Mach M_∞ ale curentului iniţial, pot exista teoretic două, una singură sau nici o configuraţie staţionară a curgerii în funcţie de deviaţia δ^* a peretelui.

Deoarece obţinerea pe cale analitică a unor soluţii explicite ale problemei este dificilă, trasarea polarelor şoc-combustie (detentă-combustie) poate fi utilă atunci cînd nu este necesară o precizie deosebită a rezultatelor.

2. FRONTUL DE FLACĂRĂ CA SUPRAFAŢĂ DE DISCONTINUITATE

Pentru frontul de flacără asimilat cu o suprafaţă de discontinuitate, considerînd amestecul proaspăt şi, respectiv, gazele de ardere drept gaze ideale, se pot scrie ecuaţiile de conservare a masei, impulsului şi ener-

giei [4]:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{1}$$

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2, \tag{2}$$

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}\frac{P_1}{\rho_1} + Q = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}\frac{P_2}{\rho_2}. \tag{3}$$

În ecuaţiile de mai sus indicii 1 şi 2 se referă la valorile vitezei normale u, a presiunii P, densităţii ρ şi raportului căldurilor specifice γ înainte şi, respectiv, după unda de flacără (fig. 2).

Notînd raportul densităţilor $\rho_1/\rho_2 = \lambda$, se obţine din ecuaţiile (1) şi (2) relaţia [3]

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 1 - (\lambda - 1)\gamma_1 m^2. \tag{4}$$

După unele calcule din cele trei ecuaţii de conservare se poate explicita parametrul λ:

$$\lambda = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}\left(1 + \frac{1}{\gamma_1 m^2}\right) - \sqrt{\left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1 m^2}{\gamma_1 m^2(\gamma_2 + 1)}\right]^2 - \frac{2}{m^2(\gamma_2 + 1)}\left[(\gamma_2 - 1)\frac{Q}{a_1^2} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)}\right]}, \tag{5}$$

iar variaţia presiunii la trecerea prin frontul de flacără poate fi scrisă cu ajutorul ultimelor două relaţii sub forma

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 - \gamma_1 m^2 \left\{\frac{\gamma_2 - \gamma_1 m^2}{\gamma_1 m^2(\gamma_2 + 1)} - \sqrt{\left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1 m^2}{\gamma_1 m^2(\gamma_2 + 1)}\right]^2 - \frac{2}{m^2(\gamma_2 + 1)}\left[(\gamma_2 - 1)\frac{Q}{a_1^2} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)}\right]}\right\}. \tag{6}$$

Unghiul de deviaţie δ_f a curentului la trecerea prin unda de combustie se obţine din aceleaşi legi de conservare, făcînd şi unele consideraţii geometrice [3]:

$$\operatorname{tg} \delta_f = \frac{m(\lambda - 1)\sqrt{M_1^2 - m^2}}{M_1^2 + (\lambda - 1)m^2}, \tag{7}$$

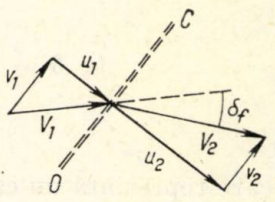


Fig. 2

unde M_1 este numărul Mach al curentului înaintea frontului de flacără. O altă formă a expresiei deviației, ținînd seama de relația (4), este

$$\operatorname{tg}\,\delta_f = \frac{\left(1-\frac{P_2}{P_1}\right)\sqrt{M_1^2-m^2}}{m\left(\gamma_1 M_1^2+1-\frac{P_2}{P_1}\right)}. \tag{8}$$

Dacă se elimină parametrul m, între relațiie (6) și (8) se obține așa-numita polară deflagrație-detonație :

$$\operatorname{tg}\,\delta_f = \frac{1-\frac{P_2}{P_1}}{\gamma_1 M_1^2+1-\frac{P_2}{P_1}}\sqrt{\frac{\frac{2\gamma_1 M_1^2}{\gamma_2+1}\left[1+\frac{\frac{\gamma_1(\gamma_2-1)Q}{a_1^2}-\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1-1}}{1-\frac{P_2}{P_1}}\right]}{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2+1}-\left(1-\frac{P_2}{P_1}\right)}-1}. \tag{9}$$

Punînd $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ în relațiile (6) și (9), se regăsesc formulele utilizate în lucrarea [2] pentru amestecuri cu degajare mică de căldură prin reacție.

Datorită valorilor mult subunitare ale parametrilor m și $(1-P_2/P_1)$, raportul presiunilor (6) poate fi scris într-o formă mai comodă prin dezvoltarea în serie a radicalului :

$$\frac{P_2}{P_1}\cong 1-\frac{\gamma_1^2 m^2}{\gamma_2-\gamma_1 m^2}\left[\frac{(\gamma_2-1)Q}{a_1^2}-\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1(\gamma_1-1)}\right]. \tag{10}$$

3. TRASAREA POLAREI

Deviația δ a curentului la trecerea printr-o undă de șoc oblică este dată funcție de raportul presiunilor după și înaintea undei $\xi = P_1/P_\infty$ și de numărul Mach inițial M_∞ prin ecuația cunoscută a polarei de șoc :

$$\operatorname{tg}\,\delta = \frac{\xi-1}{1+\gamma_1 M_\infty^2-\xi}\sqrt{\frac{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1+1}M_\infty^2-\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}-\xi}{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}+\xi}}, \tag{11}$$

care reprezintă un caz particular al ecuației (9) cînd degajarea de căldură lipsește ($Q=0$) și $\gamma_2=\gamma_1$.

Temperatura T_1 şi numărul Mach M_1 după unda de şoc pot fi scrise ca funcţii de aceeaşi variabilă ξ după cum urmează [1]:

$$\frac{T_1}{T_\infty} = \frac{\dfrac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}\xi + 1}{\dfrac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} + \xi} \cdot \xi, \tag{12}$$

$$M_1^2 = \frac{[(\gamma_1 + 1)\xi + (\gamma_1 - 1)]\, M_\infty^2 - 2(\xi^2 - 1)}{\xi[(\gamma_1 - 1)\xi + (\gamma_1 + 1)]}. \tag{13}$$

Cînd în locul undei de şoc oblice apare o expansiune Prandtl-Meyer, relaţiile (11), (12), (13) trebuie înlocuite respectiv cu [1]

$$-\delta = \sqrt{\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(\gamma_1 - 1)\, M_\infty^2 - (\gamma_1 + 1)\xi^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1}} + 2}{(\gamma_1 + 1)\xi^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1}}}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}(M_\infty^2 - 1)}\right] -$$

$$- \left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(\gamma_1 - 1)\, M_\infty^2 - (\gamma_1 + 1)\xi^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1}} + 2}{(\gamma_1 - 1)\,\xi^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1}}}} - \operatorname{arctg}\sqrt{M_\infty^2 - 1}\right], \tag{11'}$$

$$\frac{T_1}{T_\infty} = \xi^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1}}, \tag{12'}$$

$$M_1^2 = \frac{(\gamma_1 - 1)\, M_\infty^2 - 2(\xi^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1}} - 1)}{(\gamma_1 - 1)\xi^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1}}}. \tag{13'}$$

Se poate arăta uşor că relaţiile (11) şi (11') reprezintă două ramuri ale unei curbe continue $\delta = \delta(\xi)$. Panta curbei în punctul de îmbinare $\xi = 1$ este

$$\left[\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=1} = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\gamma_1 M_\infty^2}. \tag{14}$$

Valoarea $\xi = 1$ corespunde unei unde simple Mach, care reprezintă limita comună a undelor de şoc slabe şi expansiunilor slabe. Curba $M_1^2 =$

$= M_1^2(\xi)$ (relaţiile (13) şi (13')) este de asemenea o curbă continuă a cărei pantă în punctul $M_1^2 = M_\infty^2$ este

$$\left[\frac{\mathrm{d}(M_1^2)}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=1} = -\frac{M_\infty^2(\gamma_1 - 1) + 2}{\gamma_1}. \tag{15}$$

Deviaţia totală δ^* şi variaţia presiunii ξ^* la trecerea prin sistemele undă de şoc-undă de combustie sau detentă-undă de combustie sînt date de relaţiile:

$$\delta^* = \delta - \delta_f, \tag{16}$$

$$\xi^* = \xi \cdot \eta = \frac{P_1}{P_\infty} \cdot \frac{P_2}{P_1}. \tag{17}$$

Dacă se cunoaşte forma funcţiei $m = m\ (T_1)$ pentru un anumit amestec combustibil se pot reprezenta toate regimurile staţionare de curgere printr-o curbă continuă $\delta^* = \delta^*(\xi^*)$ cu ajutorul relaţiilor scrise pînă acum.

Deviaţia peretelui corespunzătoare cazului-limită $\xi = 1$, cînd unda de combustie apare fără a fi însoţită de undă de şoc sau de destindere, poate fi calculată cu formula

$$\operatorname{tg} \delta_l^* = -[\operatorname{tg} \delta_f]_{\xi=1} = -\frac{m(\lambda - 1)\sqrt{M_\infty^2 - m^2}}{M_\infty^2 + (\lambda - 1)m^2}. \tag{18}$$

O mică porţiune a curbei $\delta^* = \delta^*(\xi^*)$ în vecinătatea punctului corespunzător valorii $\xi = 1$ poate fi aproximată prin tangenta geometrică în acest punct cu scopul de a obţine soluţii simple explicite în acest domeniu de curgeri (variaţiile parametrilor m, λ şi M_1^2 în jurul valorilor corespunzătoare la $\xi = 1$ se consideră neglijabile). Ecuaţia tangentei va fi

$$\delta^* - \delta_l^* = w(\xi - \xi_l^*), \tag{19}$$

unde

$$w = \left[\frac{\mathrm{d}(\delta^*)}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=1} = \left[\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=1} - \left[\frac{\mathrm{d}(\delta_f)}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=1}, \tag{20}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}(\delta_f)}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=1} = \left[\frac{\mathrm{d}(\delta_f)}{\mathrm{d}(M_1^2)}\right]_{M_1^2 = M_\infty^2} \cdot \left[\frac{\mathrm{d}(M_1^2)}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=1} =$$

$$= \frac{m(\lambda - 1)(\gamma_1 - 1)[M_\infty^2 - (\lambda + 1)m^2][M_\infty^2(\gamma_1 - 1) + 2]}{\gamma_1 M_\infty^2 [M_\infty^2 + (\lambda - 1)m^2]\sqrt{M_\infty^2 - m^2}} \tag{21}$$

şi

$$\xi_l^* = 1 - \gamma_1(\lambda - 1)m^2. \tag{22}$$

Deviaţia maximă posibilă la trecerea curentului prin sistemul undă de şoc oblică — front de flacără este dată în mod aproximativ de deviaţia maximă posibilă prin unda de şoc oblică minus deviaţia prin flacără corespunzătoare. Valoarea lui ξ obţinută din condiţia $d\delta/d\xi = 0$ este

$$\xi_M = \frac{1}{2}\left(M_\infty^2 - 2 + \sqrt{M_\infty^4 + \frac{8(\gamma_1-1)}{\gamma_1+1} M_\infty^2 + \frac{16}{\gamma_1+1}}\right). \tag{23}$$

4. EXEMPLU DE TRASARE, CONCLUZII

S-a considerat un amestec stoechiometric hidrogen-aer şi s-au calculat valorile la echilibru ale temperaturii, raportului căldurilor specifice, degajării de căldură, precum şi compoziţia produselor de ardere pentru diferite valori ale temperaturii amestecului nears.

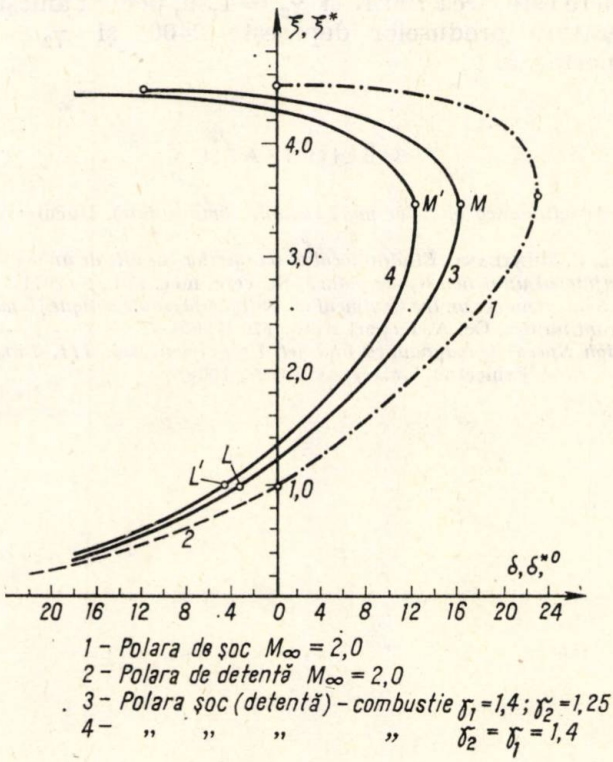


Fig. 3

Din lipsă de date mai precise privind dependenţa vitezei de propagare a flăcării de temperatură la viteze supersonice ale curentului s-a utilizat, ca şi în lucrarea anterioară [2], o lege dedusă din formula clasică a lui Passauer corelată cu unele date experimentale. Polarele trasate pentru $M_\infty =$

$= 2$ și $T_\infty = 300°$ după formulele exacte cu $\gamma_1 \neq \gamma_2$ și după cele aproximative [2], [3], deduse în ipoteza $\gamma_2 = \gamma_1$ sînt prezentate în figura 3. Se poate observa că pentru valori identice ale celorlalți parametri de calcul eroarea datorată ipotezei $\gamma_2 = \gamma_1$ în calculul deviației prin unda de combustie devine inadmisibil de mare pentru amestecurile apropiate de raportul stoechiometric. Ținînd seama că atît deviația, cît și variația relativă a presiunii $(1-P_2/P_1)$ la trecerea prin flacără sînt aproximativ proporționale cu $(\lambda-1)$, se poate spune în evidență în mare efectul modificării valorii γ_2 față de γ_1 asupra parametrului amintit. Într-adevăr, pe baza relației (5), după dezvoltarea în serie a radicalului și neglijînd termenii relativ mici, se obține orientativ :

$$\frac{(\lambda-1)_{\gamma_1\neq\gamma_2}}{(\lambda-1)_{\gamma_1=\gamma_2}} \cong \frac{\gamma_1}{\gamma_1-1} \cdot \frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}.$$

Dacă pentru un amestec sărac -5% H_2 în aer, temperatura produselor de ardere este circa 700°K și $\gamma_2 = 1{,}39$, pentru amestecul stoechiometric temperatura produselor depășește 2400° și $\gamma_2 = 1{,}25$, eroarea devenind importantă.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari* (*Fluide compresibile*), București, Edit. Academiei, 1957.
2. D. Pantazopol, F. Munteanu, *Studiul local al scurgerilor însoțite de unde de șoc și de combustie cu ajutorul unui nou tip de polară*, St. cerc. mec. apl., *2* (1971).
3. J. F. Clarke, *Some remarks on the treatment of fully-supersonic oblique flames as gasdynamical discontinuities*, Co. A. Report Aero, 179 (1965).
4. — *High Speed Aerodynamics and jet Propulsion, vol. III, Fundamentals of Gas Dynamics*, Princeton University Press, 1958.

Omagiu recunoscător profesorului CARAFOLI

STRATUL-LIMITĂ LAMINAR PE PEREȚI CURBI

de ȘT. N. SĂVULESCU și H. DUMITRESCU
Institutul de mecanică a fluidelor
și construcții aerospațiale

Autorii studiază modificarea caracteristicilor stratului-limită laminar, datorită curburii pereților. Ei utilizează pentru aceasta o formulare integrodiferențială a ecuațiilor stratului-limită, scrise într-un sistem de coordonate curbilinii. Cu ajutorul acestei formulări se obțin expresii analitice pentru frecarea la perete, grosimea stratului-limită și diferența de presiune transversală din stratul-limită. Rezultatele obținute sînt în acord foarte bun cu cele date de Schultz-Grunow într-o revedere generală a problemei [1] (1), pe baza unei teorii de ordinul al doilea pentru curgerea staționară.

INTRODUCERE

Efectele curburii pereților asupra caracteristicilor principale ale stratului-limită constituie o problemă controversată [2]— [5], care își are originea fie în modul de formulare a diverselor teorii de ordinul al doilea [2], [3], [5], fie în alegerea curgerii principale exterioare stratului-limită și a condițiilor de racordare la aceasta [1], [3] precum și în procedeele numerice de integrare utilizate (4) [4]. Din această cauză, uneori rezultatele obținute au tendințe inverse ca, de exemplu, în cazul frecării la perete, pentru care Murphy [3] a găsit că aceasta descrește pe suprafețele convexe, în timp ce rezultatele lui Yen și Toba [5] arată că suprafețele convexe măresc frecarea la perete.

O nouă confirmare a rezultatelor lui Murphy a fost dată printr-o tratare cuprinzătoare datorită lui Schultz-Grunow [1]. Aceeași tendință a influenței curburii observată de Murphy este găsită și în lucrarea de față. În cele ce urmează se va considera numai curgerea laminară, întrucît regimul turbulent datorită unor dificultăți suplimentare necesită o analiză mai amplă ce va forma obiectul unei alte lucrări.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 653—672

În realitate, lucrarea aceasta este o extindere a formulării integrodiferenţiale a ecuaţiilor Navier-Stokes [8], [11], la cazul curgerilor pe suprafeţe curbe. Într-o altă lucrare vom trata problema mai complicată a stratului-limită turbulent pe pereţi curbi, tot ca o amplicaţie a formulării integrodiferenţiale amintite şi a unei noi expresii pentru frecarea turbulentă [10], [11].

Punctele de plecare în tratarea matematică a acestei probleme pot fi rezumate după cum urmează :

— Din punct de vedere fizic un strat-limită se formează pe o suprafaţă solidă independent de curbura acesteia. În acest fel principalele caracteristici fizice ale stratului-limită trebuie să se păstreze, şi anume trebuie să se formeze şi în acest caz un strat subţire în apropierea peretelui, cu gradienţi transversali de viteză mari şi cu condiţii-limită impuse la perete şi la curgerea din exteriorul lui. Condiţia la perete este dominantă, scala mare a curgerii principale din exterior fiind mai puţin influenţată de stratul-limită. Astfel, orice model teoretic al stratului-limită pe pereţi curbi trebuie să conserve aceste caracteristici fizice ale sale, între care, de exemplu, valorile mici ale gradienţilor vitezei către curgerea exterioară ;

— Tratarea matematică a acestui tip de strat-limită nu diferă în mod esenţial de modelul uzual cartezian de ordinul întîi. Se va arăta că influenţa curburii pereţilor se manifestă numai printr-o serie de termeni noi, suplimentari în ecuaţiile stratului-limită, ca şi printr-un gradient de presiune normal la perete. Viteza exterioară este impusă de alte consideraţii şi stratul-limită trebuie să se armonizeze cu această curgere exterioară, indiferent de mecanismul lui intern. Principala justificare a acestor argumente constă în rezultatele bune obţinute pentru curgerea laminară pe pereţi curbi, utilizînd o teorie convenţională a stratului-limită, bazată pe aproximaţia că variaţia presiunii după normala la perete este suficient de mică în cazul unor asemenea straturi subţiri pentru a fi neglijată. Cu această aproximaţie, ecuaţiile stratului-limită pentru curgerea pe suprafeţe curbe se reduc la acelea pentru o curgere clasică, carteziană (pe suprafeţe plane) ;

— Dificultutatea principală care apare în cazul considerat se referă la ineficacitatea practică a unei analize a ordinului de mărire, aplicată diferiţilor termeni care apar în ecuaţiile stratului-limită, scrise în coordonate curbilinii, ca şi la modificările vitezei curgerii exterioare. În acest sens, se preferă anumiţi termeni particulari, în funcţie de autor, ceilalţi neluîndu-se în consideraţie. Astfel, se explică rezultatele diferite ce au apărut în diverse lucrări.

În lucrarea prezentă s-a folosit o formulare integrodiferenţială generală a ecuaţiilor stratului-limită scrise în coordonate curbilinii, care pune în evidenţă, pe de o parte, caracteristicile fundamentale, clasice, carteziene şi, pe de altă parte, noile contribuţii suplimentare datorită curburii peretelui. Prin urmare, tratarea noastră a ecuaţiilor stratului-limită pe pereţi curbi nu diferă de cazurile studiate mai înainte într-o serie de lucrări [8], [9], [11]. Ecuaţiile de bază sînt une'e uzuale [1], [7] şi viteza exterioară a fost considerată ca un parametru independent.

S-a acordat o mare atenţie exprimării relaţiei dintre tensiuni şi deformaţii în coordonate curbilinii, deoarece aceasta este esenţială pentru tratarea mai departe a problemei în cazul turbulent. Formularea integro-

diferențială se dovedește și în acest caz o metodă de tratare matematică foarte simplă și logică, fără să facă apel la ipoteze suplimentare. Pentru efectuarea calculelor numerice noi nu avem nevoie de un calculator electronic și, într-o primă aproximație, rezultatele noastre analitice sînt foarte apropiate de acelea date de Murphy [3] sau de Schultz-Grunow [1] pentru același caz particular de curgere exterioară.

2. MODELUL MATEMATIC

2.1. ECUAȚIILE STRATULUI-LIMITĂ PE PEREȚI CURBI

Să considerăm figura 1 în care se arată schematic configurația curgerii împreună cu sistemul de coordonate curbilinii adoptat. În acest sistem, x indică distanța de-a lungul peretelui curb, măsurată de la muchia de atac, și y, distanța normală la perete și măsurată de la acesta. Raza de curbură a peretelui și deci a coordonatei x va fi notată cu $R(x)$, iar cea a unei linii echidistante va fi deci $(R + y)$, R fiind considerat ca dependentă de x. După cum s-a indicat în figura 1 $R(x)$ se consideră pozitivă pentru suprafețe convexe și negativă în cazul suprafețelor concave la exterior.

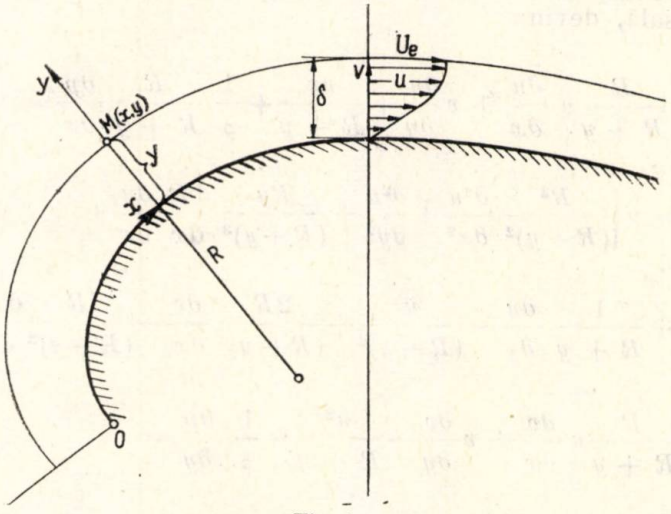


Fig. 1

Ecuațiile generale Navier-Stokes pentru o curgere incompresibilă și izotermică în formularea diferențială clasică sînt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu\nabla^2\vec{V},$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0\,, \qquad (2.1)$$

în care $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$ este vectorul-viteză, $p(x, y)$ presiunea şi ν vîscozitatea cinematică. Acum, adoptînd o reţea de coordonate curbilinii (α_x, α_y) paralele şi, respectiv, normale la un perete avînd curbura $R(x)$, lungimile tuturor liniilor de curent vor trebui reduse la lungimea arcului de la suprafaţa peretelui considerată ca abscisă, prin împărţirea lor cu raportul razelor de curbură. Astfel, pentru un perete convex cu R pozitiv, putem scrie

$$\vec{V} = \vec{\alpha}_x u + \vec{\alpha}_y v; \qquad \nabla = \vec{\alpha}_x \frac{\partial}{\partial \alpha_x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial \alpha_y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} = \frac{R}{R+y}\frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial \vec{\alpha}_x}{\partial \alpha_x} = -\vec{\alpha}_y \frac{1}{R+y}; \quad \frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial \alpha_x} = \vec{\alpha}_x \frac{1}{R+y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_y} = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{\partial \vec{\alpha}_x}{\partial \alpha_y} = 0; \quad \frac{\partial \vec{\alpha}_y}{\partial \alpha_y} = 0. \tag{2.2}$$

Prin urmare cu ajutorul relaţiilor (2.2), ecuaţia de continuitate şi ecuaţiile complete Navier-Stokes (2.1), în direcţiile circumferenţială şi transversală, devin :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R}{R+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R+y} + \frac{1}{\rho}\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \nu\left\{\frac{R^2}{(R+y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Ry}{(R+y)^3}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\frac{\partial u}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R+y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{(R+y)^2} + \frac{2R}{(R+y)^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{R}{(R+y)^3}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} v\right\},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{R}{R+y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R+y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \tag{2.3}$$

$$= \nu\left\{\frac{R^2}{(R+y)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Ry}{(R+y)^3}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R+y}\frac{\partial v}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{v}{(R+y)^2} + \frac{R}{(R+y)^3}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} u - \frac{2R}{(R+y)^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}, \tag{2.4}$$

$$\frac{R}{R+y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{R+y} = 0. \tag{2.5}$$

Deducerea acestor relații este binecunoscută [7] și poate fi efectuată fie cu ajutorul ceficienților Lamé, fie prin transformare vectorială dirctă, utilizînd operatorul $\nabla = \vec{\alpha}_x \frac{\partial}{\partial \alpha_x} + \vec{\alpha}_y \frac{\partial}{\partial \alpha_y}$ [9], așa cum s-a procedat aici.

Acum, pe baza analizei ordinului de mărime al termenilor adimensionalizați cu ajutorul unor mărimi de referință corespunzătoare [1] din ecuația (2.3) se reține numai termenii de ordin unitar și δ/R, iar în ecuația (2.4) se consideră numai termenul al treilea din partea stîngă și termenul de presiune. Astfel, ecuațiile stratului-limită pe suprafețe curbe, în ipoteza unei curgeri permanente, devin

$$\frac{R}{R+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R+y} + \frac{1}{\rho} \frac{R}{R+y} \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{R+y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{(R+y)^2} \right], \tag{2.6}$$

$$\frac{u^2}{R+y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2.7}$$

$$v = -\frac{R}{R+y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u \, dy. \tag{2.8}$$

Condițiile-limită în aceste ecuații sînt determinate de condiția de aderență la perete și de necesitatea ca să existe o trecere continuă de la mișcarea în stratul-limită la curgerea potențială exterioară. Astfel, condițiile-limită impuse sînt

$$\begin{aligned} &y = 0 \text{ (la perete)}: && u = v = 0, \\ &y = \delta(x, R) \text{ (limita exterioară)}: && u = U_e \text{ (dat)}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

În acest loc trebuie să remarcăm faptul că forma (2.9) a condițiilor-limită este una uzuală în teoria stratului-limită. Astfel, efectele de ordinul al doilea nu modifică aceste condiții-limită clasice, care sînt în legătură cu caracterul fizic al curgerii vîscoase într-un strat subțire adiacent unui perete solid.

Ecuațiile (2.6) și (2.7) conțin toți termenii de ordinul al doilea din teoria perturbațiilor a lui Van Dyke [2], și anume aceia de ordinul $1/\sqrt{R_e}$. Ultimul termen din partea dreaptă a ecuației (2.6), care este de ordin mai mare, a fost inclus de Murphy [3] pentru a lua în considerație curburi mai mari de ordinul R/δ. Aici acest termen vîscos a fost, de asemenea, reținut, ca fiind necesar în formularea integrodiferențială a ecuațiilor stratului-limită.

2.2. EXPRESIILE TENSIUNILOR DE FRECARE

În cazul considerat al unei curgeri incompresibile și izotermice, expresia tensorului tensiunilor poate fi scrisă sub forma

$$S = -pT + \mu(\nabla\vec{V} + \vec{V}\nabla), \tag{2.10}$$

în care

— $\nabla\vec{V}$, gradientul vectorului-viteză, este o diadă (un tensor de ordinul al doilea) cu nouă coeficienți;
— $(\vec{V}\nabla)$ este tensorul conjugat gradientului vitezei $\nabla\vec{V}$;
— T este tensorul unitar de ordinul al doilea.

Transformarea vectorială directă a relației (2.10) cu ajutorul operatorului $\nabla = \vec{\alpha}_x \frac{\partial}{\partial \alpha_x} + \vec{\alpha}_y \frac{\partial}{\partial \alpha_y}$ permite, după cum s-a arătat mai înainte, reprezentarea tensorului tensiunilor în sistemul de coordonate curbilinii ales, sub formă matriceală

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{R}{R+y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R+y} & \frac{R}{R+y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{R+y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{R}{R+y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R+y} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{R}{R+y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{R+y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Prin urmare, componentele tensorului tensiunilor în coordonatele curbilinii considerate sînt

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu\left(\frac{R}{R+y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R+y}\right), \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau = \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{R+y} + \frac{R}{R+y}\frac{\partial v}{\partial x}\right]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Se observă că în expresia tensiunii tangențiale de frecare, τ, se poate neglija al treilea termen, și atunci acesta se scrie sub forma

$$\tau \simeq \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{R+y}\right] = \mu(R+y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{R+y}\right), \tag{2.13}$$

care va fi utilizată, în cele ce urmează, pentru formularea integrodiferențială a ecuațiilor stratului-limită pe suprafețe curbe.

3. FORMULAREA INTEGRODIFERENȚIALĂ

3.1. TRANSFORMAREA COORDONATELOR ȘI A ECUAȚIILOR

Urmînd același procedeu [8], vom introduce noile coordonate

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{\int_0^y u\,dy}{\int_0^\delta u\,dy} = \frac{\psi(x, y)}{\psi_\delta(x)} \tag{3.1}$$

cu ajutorul cărora se obțin formulele de transformare

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{u}{\psi_\delta}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{u}{\psi_\delta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial}{\partial \eta}\right), \tag{3.2}$$

$$d\eta = \frac{u\,dy}{\psi_\delta} \rightarrow dy = \psi_\delta\frac{d\eta}{u},$$

$$y = \psi_\delta\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}, \quad \delta = \psi_\delta\int_0^1 \frac{d\eta}{u}.$$

Schimbarea de variabile (3.1) este justificată prin faptul că profile de viteză care diferă sensibil în planul fizic $(y/\delta, x)$ devin în planul transformat (ξ, η) asemenea, prezentînd o alură tipică [8].

Acum, vom aplica aceste relații (3.2) pentru a găsi expresiile transformate ale diverșilor termeni din ecuațiile stratului-limită pe pereți curbi (2.6), (2.7), (2.8), ca și ale frecării și condițiilor-limită corespunzătoare. Astfel, se obțin direct relațiile

$$\frac{R}{R+y} = \frac{1}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}}; \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial \xi} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$v = -\frac{1}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}}\frac{\partial}{\partial x}(\eta\psi_\delta); \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{\psi_\delta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{R}{R+y}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{uv}{R+y}=$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\left[u\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{u}{R}\frac{1}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\frac{\partial}{\partial x}(\eta\psi_\delta)-\frac{u}{\psi_\delta}\frac{d\psi_\delta}{dx}\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right],$$

(3.3)

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{u}{2\psi_\delta^2}\cdot\frac{\partial^2(u^2)}{\partial\eta^2},$$

$$\tau=\frac{\mu}{2\psi_\delta}\left(1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}\right)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\right)^2.$$

În final, cu ajutorul acestor relaţii se obţine grupul de ecuaţii transformate

$$\frac{\partial\tau}{\partial\eta}+\frac{2\,\dfrac{\psi_\delta}{R}\cdot\dfrac{1}{u}}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\tau=\frac{\psi_\delta}{u}\frac{\rho}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\left[u\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{u}{\psi_\delta}\frac{d\psi_\delta}{dx}\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}-\right.$$

$$\left.-\frac{u}{R}\frac{\eta}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\frac{d\psi_\delta}{dx}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta}{R}\int_1^\eta\frac{u\,d\eta}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}\right], \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\rho}(p_e-p)=\frac{\psi_\delta}{R}\int_\eta^1\frac{u\,d\eta}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}, \tag{3.5}$$

$$v=-\frac{1}{1+\dfrac{\psi_\delta}{R}\displaystyle\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\frac{\partial}{\partial x}(\eta\psi_\delta), \tag{3.6}$$

în care ultimele ecuaţii (3.5) şi (3.6) au fost utilizate pentru deducerea ecuaţiei (3.4).

Se observă că necunoscutele acestei probleme sînt

$$u(\xi,\eta),\ v(\xi,\eta),\ p(\xi,\eta),\ \psi_\delta(\xi),\ R(\xi),\ U_e(\xi),\ \tau_w(\xi),$$

pentru determinarea cărora avem la dispoziție grupul de ecuații de mai sus. De asemenea, acest sistem de ecuații trebuie să fie completat cu următoarele condiții-limită :

$$\eta = 0, \quad u = 0; \quad v = 0,$$
$$\eta = 1, \quad u = U_e; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \simeq 0, \tag{3.7}$$

care sînt impuse de caracteristicile fizice ale stratului-limită.

3.2. FORMULAREA INTEGRODIFERENȚIALĂ A ECUAȚIILOR STRATULUI-LIMITĂ PE PEREȚI CURBI

În principal, formularea integrodiferențială a sistemului de ecuații (3.4), (3.5), (3.6) constă în integrarea în raport cu η și introducerea condițiilor-limită (3.7) în expresiile finale, oferind astfel unele avantaje în determinarea calitativă și cantitativă a soluțiilor. Prin integrarea ecuației (3.4), care este o ecuație diferențială liniară în raport cu τ între limitele $\int_1^\eta$, se obține

$$\tau = \frac{\rho}{\left(1 + \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}\right)^2}\int_1^\eta \left(1 + \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}\right)\left[\psi_\delta \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{d\psi_\delta}{dx}\eta\frac{\partial u}{\partial \eta} - \right.$$
$$\left. - \frac{\psi_\delta}{R}\frac{d\psi_\delta}{dx}\frac{\eta}{1 + \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}} + \frac{\psi_\delta}{u}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\psi_\delta}{R}\int_1^\eta \frac{u\,d\eta}{1 + \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\psi_\delta}{u}\frac{dp_e}{dx}\right] d\eta, \tag{3.8}$$

care la perete ($\eta = 0$) ia valoarea

$$\tau_w = \rho\int_0^1 \left(1 + \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}\right)\left[-\psi_\delta\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{d\psi_\delta}{dx}\eta\frac{\partial u}{\partial \eta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\psi_\delta}{R}\frac{d\psi_\delta}{dx}\frac{\eta}{1 + \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}} - \frac{\psi_\delta}{u}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\psi_\delta}{R}\int_1^\eta \frac{u\,d\eta}{1 + \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\psi_\delta}{u}\frac{dp_e}{dx}\right] d\eta. \tag{3.9}$$

A doua integrare $-\int_0^\eta -$ a relației (3.8), după ce s-a înlocuit τ cu expresia transformată (3.3), dă

$$u^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta}{u}\right)^2}\left\{\int_0^\eta\left[\int_1^\eta\left(1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}\right)\left(\frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{\nu}\frac{d(\psi_\delta^2)}{dx}\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}-\right.\right.\right.$$

$$-\frac{1}{\nu}\frac{\psi_\delta}{R}\frac{d(\psi_\delta^2)}{dx}\cdot\frac{\eta}{1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}+\frac{2\psi_\delta^2}{\rho\nu}\frac{1}{u}\frac{dp_e}{dx}+$$

$$\left.\left.\left.+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta}{R}\int_1^\eta\frac{u\,d\eta}{1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\right)\right)d\eta\right]d\eta+4\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\left(1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}\right)u\,d\eta\right\}, \tag{3.10}$$

care la marginea exterioară a stratului-limită ($\eta = 1$) devine

$$U_e^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^1\frac{d\eta}{u}\right)^2}\left\{\int_0^1\left[\int_1^\eta\left(1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}\right)\left(\frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{\nu}\frac{d(\psi_\delta^2)}{dx}\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta}{R}\int_1^\eta\frac{u\,d\eta}{1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}}\right)+\frac{2\psi_\delta^2}{\rho\nu}\frac{1}{u}\frac{dp_e}{dx}\right)d\eta\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3\nu}\frac{\psi_\delta}{R}\frac{d(\psi_\delta^2)}{dx}+4\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^1\left(1+\frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}\right)u\,d\eta\right\}. \tag{3.11}$$

Introducerea unui parametru de curbură A, definit prin relația

$$2A = \delta/R, \tag{3.12}$$

permite o exprimare convenabilă a ecuațiilor precedente.

Astfel, combinînd (3.10) și (3.11), ținîndu-se seama de expresia gradientului longitudinal de presiune $\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}$, dedusă din ecuația (3.4)

scrisă de frontiera exterioară a stratului-limită, se poate scrie

$$u_a^2 = \frac{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^\eta \left[\int_1^\eta \eta \, du_a\right] d\eta} \cdot K_A}{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^1 \left[\int_1^\eta \eta \, du_a\right] d\eta} \cdot K_{A_1}} \cdot \frac{(1+2A)^2}{\left(1 + 2A \dfrac{\int_0^\eta \frac{d\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a}}\right)^2} f_B^{\oplus} +$$

$$+ \frac{2\psi_\delta^2}{\nu} \cdot \frac{1}{U_e^2} \frac{dU_e}{d\xi} \left(\int_0^1 \eta \left(\frac{1}{u_a} - u_a\right) d\eta\right) \cdot \frac{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^1 \left[\int_1^\eta \left(\frac{1}{u_a} - u_a\right) d\eta\right] d\eta} \cdot K_{B_1}}{\left(1 + 2A \dfrac{\int_0^\eta \frac{d\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a}}\right)^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^\eta \left[\int_1^\eta \left(\frac{1}{u_a} - u_a\right) d\eta\right] d\eta} K_B}{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^1 \left[\int_1^\eta \left(\frac{1}{u_a} - u_a\right) d\eta\right] d\eta} K_{B_1}} f_p^{\oplus} - \right.$$

$$\left. - \frac{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^\eta \left[\int_1^\eta \eta \, du_a\right] d\eta} K_A}{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^1 \left[\int_1^\eta \eta \, du_a\right] d\eta} K_{A_1}} f_B^{\oplus} \right\} + \frac{\dfrac{8A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a}} \cdot K_{C_1}}{\left(1 + 2A \dfrac{\int_0^\eta \frac{d\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a}}\right)^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^\eta \left[\int_1^\eta \eta \, du_a\right] d\eta} \cdot K_A}{1 + \dfrac{2A}{\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} \cdot \int_0^1 \left[\int_1^\eta \eta \, du_a\right] d\eta} \cdot K_{A_1}} f_B^{\oplus} - \frac{K_C}{K_{C_1}} \right\}, \qquad (3.13)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\psi_\delta^2)+2\frac{\int_0^1\left[\int_1^\eta\left(\frac{1}{u_a}-u_a\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta}{\int_0^1\left[\int_1^\eta \eta\,\mathrm{d}u_a\right]\mathrm{d}\eta}\times$$

$$\times\frac{1+\dfrac{2A}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}\cdot\int_0^1\left[\int_1^\eta\left(\frac{1}{u_a}-u_a\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta}\cdot K_{B_1}}{1+\dfrac{2A}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}\cdot\int_0^1\left[\int_1^\eta \eta\,\mathrm{d}u_a\right]\mathrm{d}\eta}\cdot K_{A_1}}\frac{1}{U_e}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}\xi}\psi_\delta^2+$$

$$+\frac{\nu U_e}{\int_0^1\left[\int_1^\eta \eta\,\mathrm{d}u_a\right]\mathrm{d}\eta}\cdot\frac{(1+2A)^2+\dfrac{8A}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}K_{C_1}}{1+\dfrac{2A}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}\cdot\int_0^1\left[\int_1^\eta \eta\,\mathrm{d}u_a\right]\mathrm{d}\eta}K_{A_1}}=0, \qquad (3.14)$$

în care s-au făcut notaţiile următoare:

$$2A=\frac{\delta}{R}=\frac{\psi_\delta}{RU_e}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a};\qquad u_a(\eta)=\frac{u}{U_e},$$

$$f_B^{\oplus}=\frac{\int_0^\eta\left[\int_1^\eta \eta\,\mathrm{d}u_a\right]\mathrm{d}\eta}{\int_0^1\left[\int_1^\eta \eta\,\mathrm{d}u_a\right]\mathrm{d}\eta};\qquad f_p^{\oplus}=\frac{\int_0^\eta\left[\int_1^\eta\left(\frac{1}{u_a}-u_a\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta}{\int_0^1\left[\int_1^\eta\left(\frac{1}{u_a}-u_a\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta},$$

$$K_A=\int_0^\eta\left[\int_1^\eta \eta\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}\right)\mathrm{d}u_a\right]\mathrm{d}\eta+\int_0^\eta\left[\int_1^\eta\left(\eta-\frac{1+2A\dfrac{\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}}{1+2A}\cdot\frac{1}{u_a}\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta-$$

$$-\int_0^\eta\left[\int_1^\eta\frac{1}{u_a}\left(1+2A\frac{\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}\right)\left(\int_1^\eta\frac{u_a\mathrm{d}\eta}{1+2A\dfrac{\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}}\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta_1, \qquad (3.15)$$

$$K_B=\int_0^\eta\left[\int_1^\eta\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}\right)\left(\frac{1}{u_a}-u_a\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta- \tag{3.15}$$

$$-\int_0^\eta\left[\int_1^\eta\frac{1}{u_a}\left(1+2A\,\frac{\int_0^\eta\frac{d\eta}{u_a}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}\right)\left(\int_0^\eta\frac{u_a\,\mathrm{d}\eta}{1+2A\,\frac{\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}}\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta,$$

$$K_C=\frac{A}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}\,\frac{\psi_\delta}{\nu}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\xi}\int_0^\eta\left[\int_1^\eta\frac{1}{u_a}\left(1+2A\,\frac{\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}\right)\left(\int_0^\eta\frac{u_a\,\mathrm{d}\eta}{1+2A\,\frac{\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}}\right)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta-$$

$$-\int_0^\eta u_a\left(1+2A\,\frac{\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}\right)\mathrm{d}\eta,$$

$$K_{i_1}=K_i(\eta=1),\qquad i=A,\,B,\,C.$$

Sistemul de ecuații (3.13) și (3.14) reprezintă formularea integro-diferențială a ecuațiilor stratului-limită pe suprafețe curbe, care pentru $R\to\infty$, respectiv $A=0$, se reduce la aceea pe pereți plani (coordonate carteziene).

La aceste ecuații se mai adaugă o relație care corespunde condiției-limită la perete ($\eta=0$) și care dă tensiunea de frecare la perete sub forma

$$\tau_w=\rho\psi_\delta\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}\xi}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{u_a}-u_a\right)\mathrm{d}\eta\right)\cdot\left[1+\frac{2A}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{u_a}-u_a\right)\mathrm{d}\eta}\,k_B\right]+ \tag{3.16}$$

$$+\rho\,\frac{\mathrm{d}\psi_\delta}{\mathrm{d}\xi}\,U_e\left(\int_0^1\eta\,\mathrm{d}u_a\right)\cdot\left[1+\frac{2A}{\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}\cdot\int_0^1\eta\,\mathrm{d}u_a}\,k_A\right]+\rho U_e^2\,\frac{4A^2}{\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\xi}\,k_c,$$

în care s-a notat

$$\kappa_A = \int_0^1 \left(\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a} \right) \eta \, \mathrm{d}u_a + \int_0^1 \left(\eta - \frac{1 + 2A \dfrac{\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}}{1 + 2A} \cdot \frac{1}{u_a} \right) \mathrm{d}\eta -$$

$$- \int_0^1 \frac{1}{u_a} \left(1 + 2A \frac{\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}} \right) \left(\int_1^\eta \frac{u_a \, \mathrm{d}\eta}{1 + 2A \dfrac{\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}} \right) \mathrm{d}\eta,$$

$$k_B = \int_0^1 \left(\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a} \right) \left(\frac{1}{u_a} - u_a \right) \mathrm{d}\eta - \int_0^1 \frac{1}{u_a} \left(1 + 2A \frac{\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}} \right) \times$$

$$\times \left(\int_1^\eta \frac{u_a \, \mathrm{d}\eta}{1 + 2A \dfrac{\int_1^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}} \right) \mathrm{d}\eta, \tag{3.17}$$

$$k_C = \int_0^1 \frac{1}{u_a} \left(1 + 2A \frac{\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}} \right) \left(\int_1^\eta \frac{U_a \mathrm{d}\eta}{1 + 2A \dfrac{\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}} \right) \mathrm{d}\eta.$$

Acum, dacă se foloseşte ecuaţia (3.5), care dă diferenţa de presiune transversală din stratul-limită şi ecuaţia de continuitate (3.6), se poate scrie :

$$\frac{p_e - p_w}{\frac{\rho}{2} U_e^2} = 2 \, \frac{\psi_\delta}{R U_e} \int_0^1 \frac{u_a \, \mathrm{d}\eta}{1 + 2A \dfrac{\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}}, \tag{3.18}$$

$$V = -\frac{1}{1+\dfrac{\psi_\delta}{RU_e}\displaystyle\int_0^\eta \frac{d\eta}{u_a}}\left[\eta\frac{d\psi_\delta}{d\xi} - u\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\psi_\delta\int_0^\eta\frac{d\eta}{u}\right)\right]. \qquad (3.19)$$

Sistemul de ecuații (3.13), (3.14), (3.16), (3.18) și (3.19) permite determinarea deci numai a cinci necunoscute din cele șapte, care apar: u, v, ψ_δ, τ_w, p_w, U_e, R, trebuind ca două dintre aceste funcții să fie cunoscute, de obicei U_e, R, sau U_e, τ_w, sau U_e, p_w. Prin urmare, ca și în alte cazuri de curgeri vîscoase în straturi subțiri, trebuie impuse anumite condiții curgerii potențiale exterioare, cum ar fi, de exemplu, similaritatea soluțiilor acestor ecuații.

4. SOLUȚII ÎN CAZUL CURGERII CU GRADIENT LONGITUDINAL DE PRESIUNE ZERO

Considerațiile precedente au fost aplicate pentru a verifica metoda propusă prin compararea rezultatelor noastre cu soluțiile corespunzătoare obținute de mai mulți autori [1], [3], [5], pentru o curgere cu gradient longitudinal de presiune zero, de-a lungul unei suprafețe avînd o distribuție a curburii $1/R = A(U_0/\nu x)^{1/2}$.

Pentru rezolvarea acestui caz s-au folosit ipotezele următoare:

— curgerea de-a lungul peretelui rigid este considerată staționară, incompresibilă și izotermică;

— distribuția de curbură este dedusă din condiția pentru soluții similare ale ecuațiilor, și anume

$$\frac{1}{R} = A\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}, \qquad U_0 = \text{const}; \qquad (4.1)$$

— viteza curgerii exterioare este de tipul

$$U_e = \frac{U_0}{1+\dfrac{\delta}{R}} = \frac{U_0}{1+2A}, \qquad (4.2)$$

U_0 fiind valoarea vitezei exterioare din cazul plăcii plane (Blasius);

— profilele de viteză în coordonate transformate (ξ, η), folosite pentru calculul integralelor, sînt de forma

$$u_a = \frac{u}{U_e} = \eta^m, \qquad \text{cu} \quad m = 1/3; \qquad (4.3)$$

— parametrul de curbură A este suficient de mic ($A \ll 1$), astfel că termenii care conțin pe A la puteri mai mari pot fi neglijați.

Cu aceste precizări formularea integrodiferenţială devine:

$$u_a^2 = \eta\left(\frac{2+m}{1+m} - \frac{\eta^{1+m}}{1+m}\right)\left\{1 - \left[\frac{1-m}{1+m} - \frac{(1-m)^3}{3(2-m)}\right]\cdot 8A\right\} \times$$

$$\times \frac{1+\eta^{1-m}\left[-2 + \dfrac{\dfrac{1}{2-m} - \dfrac{\eta^{1+m}}{3}}{1-\eta^{1+m}/(2+m)}\right]2A}{1+\left[-2+\dfrac{2+m}{3(2-m)}\right]2A} + 8A\eta\frac{(1-m)^3}{1+m}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\eta^2}{3}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1-m}\left(1 - \frac{\eta^{1-m}}{2-m}\right)\right] + 8A\frac{1-m}{1+m}\eta^{1+m}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\psi_\delta^2)}{\mathrm{d}x} = \nu U_0\left(1+\frac{2}{m}\right)\cdot\frac{1+\left[1+\dfrac{2(1-m)^3}{3(2-m)} - \dfrac{2(1-m)}{1+m} + A\right]\cdot 4A}{(1+2A)\left[1+\dfrac{2+m}{3(2-m)}2A\right]} \tag{4.5}$$

$$\tau_w = \rho\frac{\mathrm{d}\psi_\delta}{\mathrm{d}x}U_0\frac{m}{1+m}\cdot\frac{1-\dfrac{4A}{(1+2A)^2}\dfrac{\nu U_0}{\mathrm{d}(\psi_\delta^2)/\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{(1-m)^2\cdot(1+m)}{m}}{1+2A} \tag{4.6}$$

Expresia (4.4) a vitezei este utilizată pentru calculul profilelor de viteză, cu valoarea $m = 1/3$.

Profilele de viteză, astfel obţinute, sînt prezentate grafic în figura 2, atît în planul fizic, cît şi în cel transformat, pentru $A = 0;\ \pm 0{,}05$. Trecerea de la profilele din planul transformat $u_a(\eta)$ la cele din planul fizic $u_a(y/\delta)$ se face cu ajutorul relaţiei

$$\eta_0 = \frac{y}{\delta} = \frac{\displaystyle\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{u_a}}.$$

Se observă că influenţa parametrului de curbură A este mai importantă spre marginea exterioară a stratului-limită.

Considerînd $A << 1$ şi constant, ecuaţia (4.5) se integrează uşor şi se găseşte pentru variaţia grosimii stratului-limită cu parametru de curbură A, expresia următoare:

$$\frac{\delta/\delta_{Bl}}{1+5A\,\delta/\delta_{Bl}} = \frac{1+\left[1+\dfrac{2(1-m)^3}{3(2-m)} - \dfrac{2(1-m)}{1+m} + A\right]\cdot 2A}{1+\left[1+\dfrac{2+m}{3(2-m)} + \dfrac{2+m}{3(2-m)}\cdot 2A\right]\cdot A}, \tag{4.7}$$

în care

$\delta_{Bl} = \frac{1}{1-m}\sqrt{1+\frac{2}{m}}\cdot\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$, grosimea stratului-limită Blasius

$m = 1/3$.

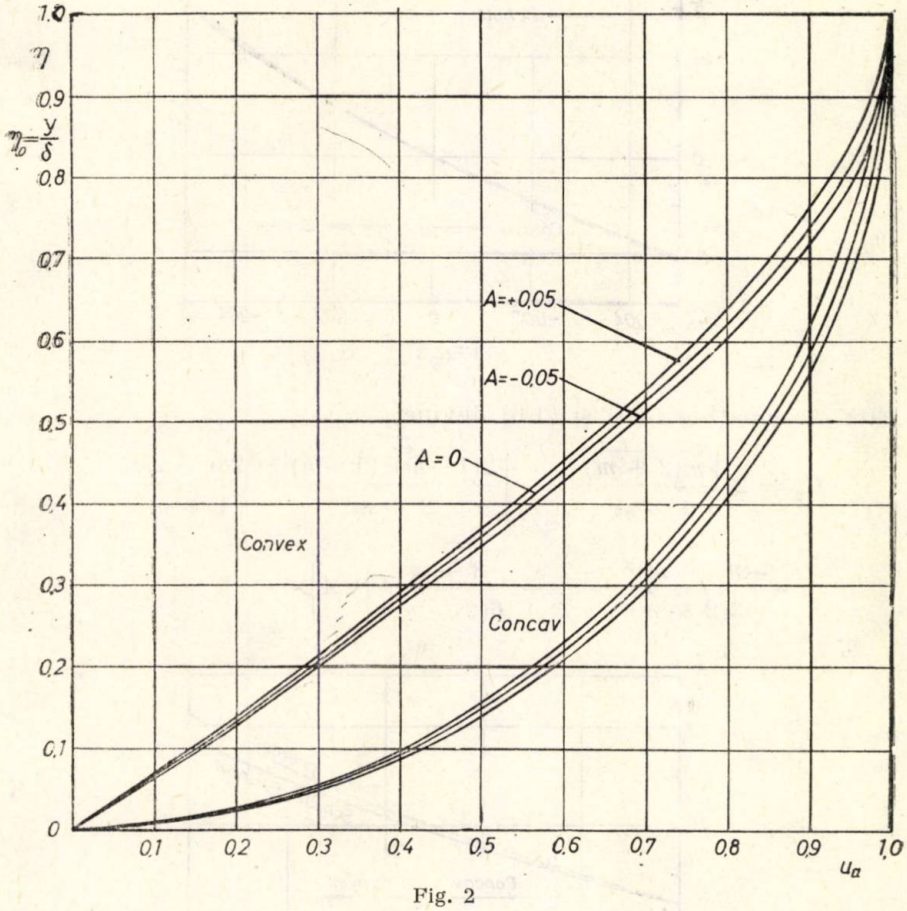


Fig. 2

Acum se calculează ușor grosimea stratului-limită raportată la raza de curbură locală R, și anume

$$\frac{\delta}{R} \simeq 5A\,\frac{\delta}{\delta_{Bl}}, \tag{4.8}$$

Mărimile δ/R și δ/δ_{Bl} sînt reprezentate în figurile 3 și 4. Aceste diagrame arată o influență apreciabilă a curburii. În continuare, pentru a vedea influența curburii peretelui asupra frecării, se introduce un coefi-

cient local de frecare C_2, a cărui expresie este

$$C_2 = \frac{\tau_w}{\mu(U_0/4)\sqrt{U_0/\nu x}} = \frac{\mu(\partial u/\partial y)|_{y=0}}{\mu(U_0/4)\sqrt{U_0/\nu x}},$$

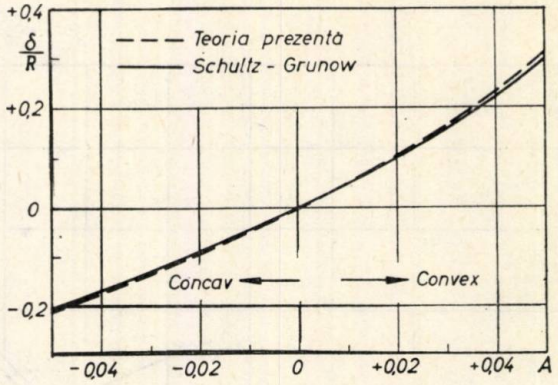


Fig. 3

şi care cu ecuaţiile (4.5) şi (4.6) devine

$$C_2 = 2\frac{\sqrt{m(2+m)}}{1+m}\left\{1-\left[\frac{2(1-m)^2(1+m)}{2+m}+\frac{2(1-m)}{1+m}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2(1-m)^3}{3(2-m)}+\frac{1}{2}+\frac{2+m}{6(2-m)}\right]2A\right\}. \qquad (4.9)$$

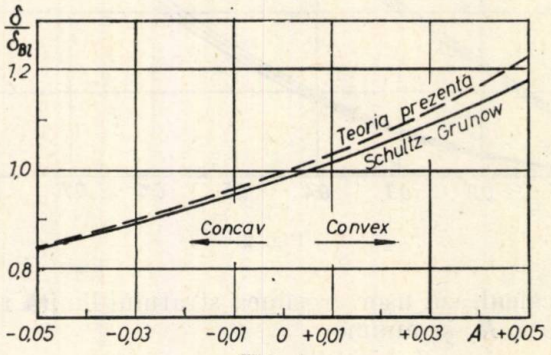


Fig. 4

Reprezentarea adimensională a frecării este arătată, comparativ cu alte rezultate, în figura 5. Se remarcă faptul că suprafaţa concavă exercită o rezistenţă considerabil mai mare decît suprafaţa convexă. Dintre rezultatele prezentate, numai cele ale lui Yen şi Toba [5] arată o tendinţă opusă, ele fiind contestate de asemenea de rezultatele obţinute de Van Dike [2] pentru curgerea din jurul unui cilindru circular.

În final, se poate calcula cu relația (3.18) diferența transversală de presiune din stratul-limită. Introducînd aici ultima relație din (3.2), se obține :

$$\frac{p_e - p_w}{\rho/2\, U_0^2} = 2\,\frac{\delta}{R}\cdot\frac{1}{(1+\delta/R)^2}\left[\frac{1-m}{1+m} - \frac{1-m}{2}\cdot 2A\right]. \tag{4.10}$$

$$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \mu\frac{U_0}{4}\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}\,C_2$$

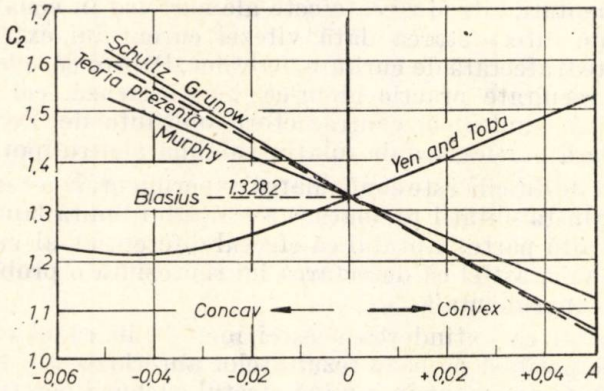


Fig. 5

Această mărime este prezentată grafic în figura 6 pentru diferite valori ale lui A. Se observă că pentru $A = 0{,}05$ diferența transversală de presiune depășește o treime din presiunea de stagnare $\rho U_0^2/2$ în cazul peretelui concav și o șesime din aceasta în cazul celui convex.

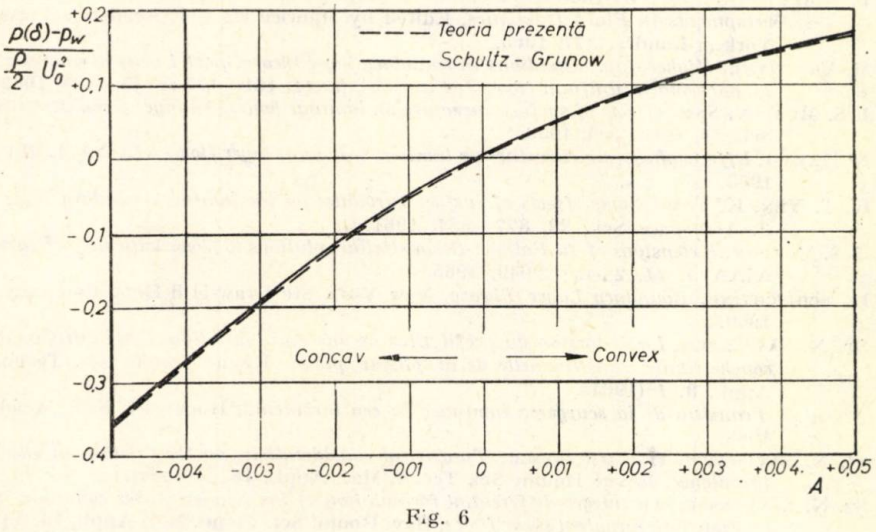


Fig. 6

CONCLUZII

Lucrarea prezentată aici poate fi considerată în esenţă ca un test de aplicare a metodei integrodiferenţiale în cazul stratului-limită pe pereţi curbi. Este interesant de remarcat că rezultatele obţinute pentru curgerea laminară prin această metodă, care în fond extinde în mod natural cazul pereţilor drepţi corespund rezultatelor găsite prin metoda lui F. Schultz-Grunow, bazată pe consideraţii de ordin de mărime ale efectelor curburii.

În esenţă, rezultatele depind de considerarea sau neglijarea unor termeni suplimentari, introduşi ca efecte ale curburii în ecuaţiile stratului-limită, ca şi de interpretarea dată vitezei curentului exterior, care, de asemenea, poate fi afectată de curbura pereţilor. Faptul că cele două metode au condus la rezultate practic identice demonstrează, cel puţin pentru curburi mici, că rezultatele contradictorii obţinute de Yen şi Toba [5] reprezintă o clasă particulară de soluţii, valabilă pentru ipotezele propuse.

Se ştie cît de dificilă este confirmarea experimentală a teoriei, datorită, pe de o parte, instabilităţii premature a stratului-limită laminar pe pereţi curbi şi, pe de altă parte, faptului că efectul diferenţiat al curburii pereţilor este foarte mic, astfel că detectarea lui reprezintă o problemă de mare performanţă experimentală.

Este posibil ca extinderea acestei metode în cazul curgerii turbulente, care este posibilă pe baza rezultatelor anterioare ale autorilor [10], [11], să pună mai pregnant în lumină efectul curburii pereţilor şi să ofere, de asemenea, condiţii de experimentare acceptabile, deasupra limitelor de erori de măsură.

BIBLIOGRAFIE

1. F. Schultz-Grunow, W. Breuer, *Laminar Boundary layers on cambered walls, Basic Developments in Fluid Dynamics*, Edited by Maurice Holt, **1**, Academic Press New York şi Londra, 377, 1965.
2. M. Van Dyke, *Higher approximations in boundary layer theory, part I general analysis; part II parabola in uniform flow, J. Fluid Mech., 14*, 161—177 şi 481—495, 1962.
3. J. S. Murphy, *Some effects of surface curvature on laminar boundary-layer flow*, J. Aeronaut. Sci., *20*, 338—344, 1953.
4. N. Hayasi, *Effects of surface curvature on laminar boundary-layer flow*, AIA AJ. *1*, 914—915, 1963.
5. K. T. Yen, K. Toba, *Some effects of surface curvature on the laminar boundary layer flow*, J. Aerospace Sci., **28**, 877—884, 1961.
6. J. S. Murphy, *Extensions of the Falkner-Skan similar solutions to flows with surface curvature*, AIAA J. *11*, 2 043—2 049, 1965.
7. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, New York, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1960.
8. Şt. N. Săvulescu, *La distorsion du profil Blasius due aux tourbillons longitudinaux dans la couche limite transitionnelle de la plaque plane*, Revue Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **9**, *1* (1964).
9. — *Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1968.
10. Şt. N. Săvulescu, H. Dumitrescu, *Theoretical considerations on the friction in shear flow turbulence*, Revue Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **15**, *5* (1970).
11. Şt. N. Săvulescu, *An integro-differential formulation of the Navier-Stokes equations and its relation with turbulent shear flows*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **16**, *3* (1971)

Academicianului ELIE CARAFOLI în semn de respectuos omagiu cu prilejul împlinirii a 70 de ani de viață

STATICA ȘI DINAMICA REȚELELOR SPAȚIALE PLANAR PĂTRATE SIMPLE PRIN APLICAREA METODEI MEDIULUI CONTINUU ECHIVALENT

de MIRCEA V. SOARE
Institutul de Construcții
București

Ținînd seama de caracterul de regularitate a conformării rețelelor spațiale, ecuațiile de echilibru, scrise în metoda deformațiilor, pot fi exprimate doar pentru nodurile curente. În cazul rețelelor planar pătrate simple, celor două noduri tipice $A_{x,y}$ și $B_{x,y}$ le corespund șase ecuații, avînd ca necunoscute componentele deplasării celor două noduri, fie u_A, v_A, w_A și u_B, v_B, w_B; ele sînt ecuații cu diferențe finite parțiale.
În cazul în care pasul rețelei este redus în raport cu deschiderile, ecuațiile cu diferențe finite se transformă, utilizînd dezvoltările în serie Taylor, în ecuații cu derivate parțiale, care caracterizează mediul continuu echivalent. Acest mediu este, în cazul considerat, o dală care lucrează la încovoiere fără torsiune și care are o rigiditate definită de relația (3.6). Pentru orice condiții de rezemare pe un contur dreptunghiular, soluția analitică este obținută cu ajutorul seriilor duble și simple de funcții fundamentale. Mai multe aplicații numerice ilustrează influența condițiilor de rezemare.

1. INTRODUCERE

Rețelele reticulate planare constituie o categorie importantă de structuri spațiale care și-au găsit o largă aplicare în ultimii ani. Comportarea lor favorabilă se explică prin faptul că rețelele planare spațiale reprezintă o sinteză între comportarea de placă și de grindă cu zăbrele.

Structura considerată are nodurile dispuse în două fețe paralele; se disting barele din fața superioară și din fața inferioară. Ochiurile astfel formate pot constitui carelaje deformabile (în cazul ochiurilor pătrate sau exagonale) sau indeformabile (ochiuri triunghiulare). Indeformabilitatea geometrică a întregii structuri este asigurată de diagonale care unesc nodurile celor două fețe.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 673–702

Caracteristica principală a acestui tip de structură îl constituie regularitatea conformării ochiurilor (distribuția discretă a nodurilor).

Studiul rețelelor poate fi făcut cel mai general, cu ajutorul metodelor statisticii construcțiilor, aplicînd metoda forțelor sau metoda deformațiilor sau cea mixtă.

Cum aceste structuri sînt multiplu static nedeterminate, această cale de soluționare revine la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare cu un număr foarte mare de necunoscute.

Regularitatea structurii face posibil studiul stării de eforturi și de deformații cu ajutorul metodei diferențelor finite [4], [7]. Acest mod de căutare a soluției prezintă același grad de dificultate ca și în cazul ecuațiilor cu derivate parțiale.

Cînd ochiurile rețelei spațiale sînt mici în comparație cu deschiderile, structura reticulată poate fi asimilată intuitiv cu un mediu continuu echivalent. Ceea ce este caracteristic pentru acest procedeu de trecere la limită este faptul că mediul continuu echivalent nu este o dală obișnuită decît în cazuri izolate; proprietățile sale elastice trebuie să fie determinate de la caz la caz, în funcție de geometria rețelei planare.

Simpla asimilare a rețelei spațiale planare cu o placă omogenă izotropă poate conduce la subestimări periculoase ale eforturilor în bare, așa cum s-a indicat într-o altă lucrare anterioară [6].

Trecerea de la o structură discretă la una continuă și deducerea riguroasă a proprietăților elastice ale mediului continuu echivalent se obține folosind dezvoltările în serie Taylor ale funcțiilor necunoscute (o altă cale a fost urmată de Trofimov și Begun [13]).

Reținînd un număr convenabil de termeni din dezvoltările în serie și apoi trecînd la limită (adică făcînd pasul rețelei să tindă către zero $l \to 0$), ecuațiile cu diferențe finite parțiale se transformă în ecuații cu derivate parțiale.

În cazul încovoierii cilindrice, unde rămîne o singură variabilă independentă, autorul a dat soluția pentru două tipuri de rețele spațiale planar pătrate (și anume simple [8] și diagonale [10]).

În studiul de față, vom trata cazul rețelei spațiale planar pătrate simple. Așa cum am definit anterior această rețea, cele două fețe sînt identice, barele fiind paralele cu laturile unui contur dreptunghiular(sau pătrat) și formînd ochiuri pătrate, avînd pasul l. Cele două fețe sînt decalate cu o jumătate de interval, astfel încît unui nod dintr-o față îi corespunde centrul unui ochi din cealaltă față (fig. 1).

În cele ce urmează se vor indica metode analitice pentru determinarea eforturilor în bare și deplasărilor nodurilor, bazate pe metoda mediului continuu echivalent. Laturile conturului dreptunghiular sînt $a \cdot b$.

Unghiul dintre diagonale și planele celor două fețe este γ. În timpul procesului de trecere la limită ($l \to 0$) se presupune că structura reticulată

îşi păstrează geometria iniţială, adică rămîn valabile următoarele relaţii între lungimi :

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{h\sqrt{2}}{l}, \qquad l_d = \frac{l}{\sqrt{2}\cos\gamma} = \frac{h}{\sin\gamma}, \tag{1.1}$$

în care l_d reprezintă lungimea diagonalelor, iar
h înălţimea structurii (distanţa dintre cele două feţe paralele).

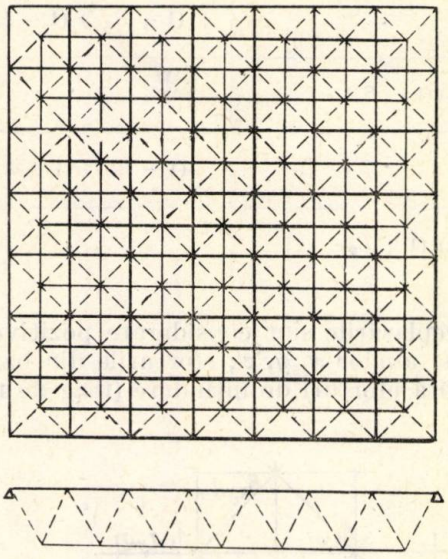


Fig. 1. — Geometria reţelei.

După trecerea la limită, h şi l păstrează valori finite.

2. ECUAŢIILE GENERALE EXPRIMATE CU AJUTORUL DIFERENŢELOR FINITE

Alegem un sistem de axe de coordonate cartesiene xyz, originea fiind într-unul din colţurile feţei superioare ; laturile reţelei spaţiale sînt paralele cu axele Ox, Oy, iar axa Oz este dirijată în jos.

Ţinînd seama de conformarea regulată a reţelei, se disting doar două tipuri de noduri şi anume, primul în faţa inferioară (A), iar al doilea în faţa superioară (B).

Sarcinile exterioare sînt presupuse concentrate la noduri, fiind descompuse în componentele F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az} şi respectiv F_{Bx}, F_{By}, F_{Bz}.

Barele din fiecare faţă sînt presupuse identice şi au rigidităţile axiale : k_i — pentru faţa inferioară, k_s — pentru faţa superioară şi k_d — pentru diagonale.

Dacă se aplică metoda deformaţiilor, sînt alese ca funcţii necunoscute deplasările nodurilor, fie u_A, v_A, w_A şi respectiv u_B, v_B, w_B. Ele satisfac un sistem de ecuaţii de echilibru (de proiecţii) a cărui matrice este redată în tabela 1.

Tabela

u_A	u_B	v_A
$\psi_i (1 - E_x)(1 - E_x^{-1}) - 4$	$(1 + E_x^{-1})(1 + E_y^{-1})$	•
$(1 + E_x)(1 + E_y)$	$-\psi_s (1 - E_x)(1 - E_x^{-1}) - 4$	$(1 - E_x)(1 - E_y)$
•	$(1 - E_x^{-1})(1 - E_y^{-1})$	$-\psi_i (1 - E_y)(1 - E_y^{-1}) - 4$
$(1 - E_x)(1 - E_y)$	•	$(1 + E_x)(1 + E_y)$
•	$(1 - E_x^{-1})(1 + E_y^{-1})$	•
$(1 - E_x)(1 + E_y)$	•	$(1 + E_x)(1 - E_y)$

Deplasările sînt considerate pozitive cînd se produc în direcţia pozitivă a axelor x, y, z; eforturile din bare sînt considerate pozitive cînd reprezintă eforturi de întindere (trag de noduri).

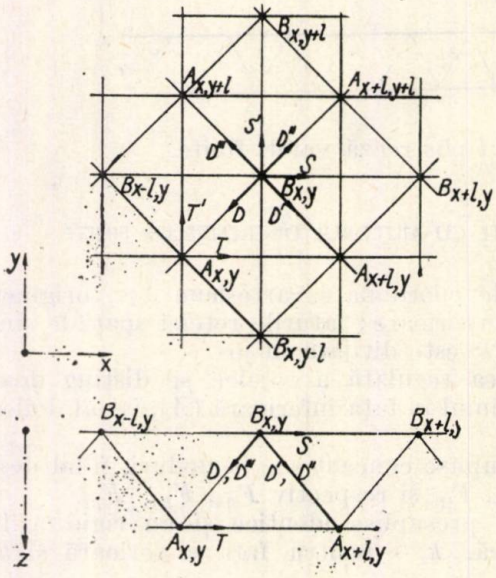


Fig. 2. — Notarea eforturilor în barele din jurul nodurilor $A_{x,y}$ şi $B_{x,y}$.

Vom nota cu (fig. 2):

T, T' — eforturile în barele din faţa inferioară care unesc nodul $A_{x,y}$ cu nodurile vecine $A_{x+i,y}$, respectiv $A_{x,y+l}$,

1

v_B	$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma \cdot w_A$	$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma \cdot w_B$	= Termen liber
$(1-E_x^{-1})(1-E_y^{-1})$	·	$(1-E_x^{-1})(1+E_y^{-1})$	$-\dfrac{2F_{Ax}}{k_d\cos^2\gamma}$
·	$-(1-E_x)(1+E_y)$	·	$-\dfrac{2F_{Bx}}{k_d\cos^2\gamma}$
$(1+E_x^{-1})(1+E_y^{-1})$	·	$-(1+E_x^{-1})(1-E_y^{-1})$	$-\dfrac{2F_{Ay}}{k\cos^2\gamma}$
$-\psi_s(1-E_y)(1-E_y^{-1})-4$	$-(1+E_x)(1-E_y)$	·	$-\dfrac{2F_{By}}{k_d\cos^2\gamma}$
$(1+E_x^{-1})(1-E_y^{-1})$	$+4$	$(1+E_x^{-1})(1+E_y^{-1})$	$\dfrac{2F_{Az}}{k_d\sin\gamma\cos\gamma}$
·	$-(1+E_x)(1+E_y)$	$+4$	$\dfrac{2F_{Bz}}{k_d\sin\gamma\cos\gamma}$

S, S' — eforturile în barele din faţa superioară care unesc nodul $B_{x,y}$ cu nodurile vecine $B_{x+l,y}$, respectiv $B_{x,y+l}$,

D, D', D'', D''' — eforturile în diagonalele care unesc nodul $B_{x,y}$ cu nodurile vecine $A_{x,y}$, $A_{x+l,y}$, $A_{x+l,y+l}$ şi $A_{x,y+}$ (vezi figura 2).

Presupunînd că deplasările au fost determinate prin integrarea sistemului din tabela 1, eforturile în bare notate precedent pot fi determinate cu ajutorul următoarelor relaţii [7]:

$$T = k_i(E_x - 1)\,u_A, \tag{2.1a}$$

$$T' = k_i(E_y - 1)\,v_A, \tag{2.1b}$$

$$S = k_s(E_x - 1)\,u_B, \tag{2.1c}$$

$$S' = k_s(E_y - 1)\,v_B, \tag{2.1d}$$

$$D = \frac{k_d\cos\gamma}{\sqrt{2}}\,[u_B - u_A + v_B - v_A - \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma\,(w_B - w_A)], \tag{2.1e}$$

$$D' = \frac{k_d\cos\gamma}{\sqrt{2}}\,[E_x u_A - u_B - E_x v_A + v_B + \sqrt{2}\mathrm{tg}\gamma(E_x w_A - w_B)], \tag{2.1f}$$

$$D'' = \frac{k_d\cos\gamma}{\sqrt{2}}\,[E_x E_y u_A - u_B + E_x E_y v_A - v_B + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma\,(E_x E_y w_A - w_B)], \tag{2.1g}$$

$$D''' = \frac{k_d\cos\gamma}{\sqrt{2}}\,[-E_y u_A + u_B + E_y v_A - v_B + \sqrt{2}\mathrm{tg}\,\gamma(E_y w_A - w_B)]. \tag{2.1h}$$

În relațiile precedente E_x, E_x^{-1}, E_y, E_y^{-1} reprezintă operatori cu diferențe finite, definind deplasările în nodurile vecine; de exemplu, se poate scrie

$$u^A_{x+l,\,y} = E_x u_A, \quad u^A_{x-l,\,y} = E_x^{-1} u_A,$$

$$u^A_{x,y+l} = E_y u_A, \quad u^A_{x+l,y+l} = E_x E_y u_A, \ldots$$

și expresii analoge pentru celelalte deplasări.

Operatorii E se bucură de proprietatea că se comportă ca niște coeficienți algebrici (cu excepția împărțirii); de exemplu, putem scrie

$$1 + E_x + E_y + E_x E_y = (1 + E_x)(1 + E_y),$$

$$E_x E_x^{-1} = 1, \quad E_x E_x = E_x^2,$$

$$(1 + E_x)(1 - E_x^{-1}) = -(1 - E_x)(1 + E_x^{-1}) \text{ etc.}$$

Pentru determinarea eforturilor în bare cu ajutorul metodei mediului continuu echivalent, vor fi utilizate dezvoltări în serie Taylor de tipul

$$u^A_{x+l,\,y} = E_x u_A = u_A\,(x+l, y) = u_A + l\frac{\partial u_A}{\partial x} + \frac{l^2}{2!}\frac{\partial^2 u_A}{\partial x^2} + \frac{l^3}{3!}\frac{\partial^3 u_A}{\partial x^3} + \ldots \tag{2.2}$$

3. MEDIUL CONTINUU ECHIVALENT

Sistemul de ecuații cu diferențe finite parțiale din tabela 1 poate fi redus la o singură ecuație cu diferențe de ordinul opt; ordinul ecuației este explicabil prin faptul că definește o stare de eforturi și de deformații spațială.

Utilizînd dezvoltări în serie de tipul (2.2) și reținînd un număr convenabil de termeni, ecuația cu diferențe parțiale se transformă într-o ecuație cu derivate parțiale. În cazul general, se ajunge la următoarea ecuație de ordinul opt care determină săgețile w_B:

$$\left[\frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{\partial^8}{\partial y^8} + \frac{k_i^2 + k_s^2}{k_i\,k_s}\frac{\partial^8}{\partial x^4\,\partial y^4} + (\psi_i + \psi_s)\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\right] w_B =$$

$$= \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (\psi_i + \psi_s)\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\right]\left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_s}\right)\frac{p}{h^2}. \tag{3.1}$$

În relația precedentă s-au introdus notațiile

$$\psi_i = \frac{2k_i}{k_d \cos^2\gamma}, \quad \psi_s = \frac{2k_s}{k_d \cos^2\gamma}. \tag{3.2}$$

Relaţia (3.1) a fost stabilită de J. D. Renton, cu alte notaţii, sub o formă mai generală în care au fost păstraţi, în membrul întîi, termeni adiţionali care includ şi pe l^2; în acest caz, ecuaţia cu derivate parţiale este de ordinul zece [5].

Dacă barele din cele două feţe sînt identice, adică

$$k_i = k_s = k, \quad \psi_i = \psi_s = \psi, \tag{3.3}$$

ecuaţia (3.1) se scrie

$$\left[\frac{\partial^8}{\partial x^8} + 2\frac{\partial^8}{\partial x^4\,\partial y^4} + \frac{\partial^8}{\partial y^8} + 2\psi\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\right] w_B =$$

$$= \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\psi\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)\frac{2p}{kh^2}$$

sau încă

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\psi\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\right) w_B =$$

$$= \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\psi\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)\frac{2p}{kh^2}.$$

Operatorul diferenţial de ordinul patru

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\psi\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)(\ldots)$$

poate fi simplificat şi problema se reduce la găsirea soluţiei ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul patru *)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{2p}{kh^2}. \tag{3.4}$$

Comparînd cu ecuaţia plăcilor izotrope

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{K} \tag{3.5}$$

se remarcă, în primul rînd, absenţa termenului median care caracterizează efectul torsiunii.

*) O situaţie similară se întîmplă în cazul plăcilor ortotrope (vezi de exemplu [2]).

Termenul de încărcare, de dimensiunea unei sarcini distribuită pe elementul de suprafață, rezultă din expresia

$$p = \frac{P}{l^2}.$$

Din compararea membrilor secunzi ai ecuațiilor (3.4) și (3.5) rezultă că rigiditatea la încovoiere a rețelei planar pătrate simple, considerată ca o dală, este

$$K = \frac{kh^2}{2}. \tag{3.6}$$

Absența rigidității diagonalelor (k_d) în expresia (3.6) denotă că aceasta joacă doar un rol secundar.

Săgețile celor două fețe au expresii identice ($w_A = w_B = w$), ele diferind doar ca valori numerice, după coordonatele nodurilor.

Deplasările în planul fiecărei fețe se determină, ca și în cazul dalelor, cu ajutorul expresiilor

$$u_A = -\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad u_B = +\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{3.7a}$$

$$v_A = -\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad v_B = +\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.7b}$$

Săgețile w, definite de ecuația (3.4), joacă rolul funcției necunoscute de bază, din care derivă apoi deplasările și eforturile.

Plecînd de la relațiile (2.1), în care se consideră $k_i = k_s = k$, introducînd în acestea dezvoltările în serie Taylor de tipul (2.3) și apoi trecînd la limită, se obține

$$T = kl\frac{\partial u_A}{\partial x} = -\frac{1}{2}khl\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{3.8a}$$

$$T' = -\frac{1}{2}khl\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{3.8b}$$

$$S = +\frac{1}{2}khl\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{3.9a}$$

$$S' = +\frac{1}{2}khl\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{3.9b}$$

Determinarea expresiilor eforturilor în diagonale este o problemă mai delicată, aceasta comportînd derivatele de ordinul trei ale săgeţilor w şi nu o vom trata în studiul de faţă. Este preferabil ca, o dată determinate deplasările u_A, u_B, v_A, v_B, w_A, w_B, să fie folosite relaţiile generale (2.1e)—(2.1h).

La determinarea eforturilor în barele din cele două feţe, este recomandabil ca, pentru obţinerea unei valori mai exacte, să se ia în calcul coordonatele mijlocului barei (aceasta corespunde cu aplicarea diferenţelor finite în metoda parabolei).

Relaţiile (3.8) şi (3.9) sînt susceptibile de o observaţie interesantă, legată de analogia dintre reţeaua spaţială şi o dală.

Neglijînd efectul contracţiei transversale, care la o structură reticulată nu apare, momentul încovoietor în dala echivalentă se scrie

$$M_x = -K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}kh^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{3.10}$$

Ţinînd seama de relaţia precedentă, (3.8a) se scrie

$$T = +\frac{M_x l}{h}. \tag{3.11}$$

Interpretarea relaţiei (3.11) este simplă, ea constituind o extindere a metodei secţiunilor de la calculul grinzilor cu zăbrele plane la cele spaţiale; efortul într-o bară din cele două feţe ale unei reţele spaţiale planar pătrate simple se obţine împărţind momentul încovoietor (în kgfm/m) însumat pe lăţimea aferentă l (pasul reţelei), la braţul de pîrghie h (înălţimea reţelei). Momentul se evaluează pentru secţiunea trecînd prin mijlocul barei considerate.

Aspectul calitativ nou îl constituie tipul de placă pentru care se evaluează momentul încovoietor, anume dala lucrînd fără torsiune, caracterizată prin ecuaţia (3.4).

4. REŢEAUA PE CONTUR DREPTUNGHIULAR. SOLUŢII PRIN FUNCŢII FUNDAMENTALE

Pentru obţinerea unei soluţii a ecuaţiei cu derivate parţiale (3.4), vom urma calea utilizată de P. Lardy [3], pentru integrarea ecuaţiei (3.5) în cazul conturului dreptunghiular.

Soluţia se bazează pe utilizarea seriilor duble sau simple de funcţii fundamentale (sau funcţii caracteristice) întîlnite în problema vibraţiilor libere ale grinzilor, ţinînd seama de masa proprie distribuită.

Aşa cum va reieşi la § 4.2, soluţia adoptată este riguroasă din punct de vedere analitic, în timp ce soluţia adoptată de P. Lardy are un caracter variaţional.

În cele ce urmează se vor da cîteva indicaţii sumare asupra funcţiilor fundamentale.

4.1. FUNCȚIILE FUNDAMENTALE

Este cunoscut că deformata dinamică X a unei grinzi cu masa uniform distribuită satisface ecuația diferențială (vezi de exemplu [2], [14])

$$\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4} - \frac{\alpha^4}{a^4} X = 0, \tag{4.1}$$

în care a reprezintă deschiderea grinzii,

α o valoare proprie ce se determină dintr-o condiție de compatibilitate.

Soluția generală a ecuației (4.1) se scrie :

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch} \alpha \frac{x}{a} + C_2 \cos \alpha \frac{x}{a} + C_3 \operatorname{sh} \alpha \frac{x}{a} + C_4 \sin \alpha \frac{x}{a},$$

în care C_1, C_2, C_3, C_4 reprezintă constante de integrare.

Pentru diferite condiții de rezemare ale grinzii, impunerea condițiilor marginale conduce la un sistem de patru ecuații liniare omogene; din exprimarea condiției că determinantul principal al sistemului este nul, rezultă condiția de compatibilitate menționată anterior, care este o ecuație transcendentă în α. Se constată că, în fiecare caz, această ecuație are o infinitate de rădăcini α_n ($n = 1,2,3,\ldots$), deci există o infinitate de funcții $X_n(x)$. De aceea, soluția generală a ecuației (4.1) poate fi considerată ca o dezvoltare în serie de funcții fundamentale $X_n(x)$, la care fiecare termen satisface condițiile limită.

Seriile trigonometrice în sinus și cosinus reprezintă cazuri particulare de funcții fundamentale, corespunzătoare grinzii simplu rezemate la cele două capete.

Avantajul esențial al acestor funcții îl constituie proprietatea de *ortogonalitate*, adică subsistă relația

$$\int_0^a X_m X_n \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pentru } m \neq n. \tag{4.2}$$

Dacă se notează

$$\frac{\mathrm{d}X_m}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha_m}{a} X'_m, \qquad \frac{\mathrm{d}^2X_m}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\alpha_m^2}{a^2} X''_m, \ldots \tag{4.3}$$

rezultă relația importantă

$$X_m^{\mathrm{IV}} = X_m,$$

adică, prin derivări de patru ori, se regăsește funcția inițială.

Funcțiile fundamentale au fost tabulate pentru diferite condiții omogene de rezemare (capăt simplu rezemat, încastrat perfect sau liber);

vom semnala în special tabelele lui D. Young şi R.P. Felgar jr. [14] în care forma particulară a expresiilor funcţiilor fundamentale este astfel încît să fie satisfăcută relaţia *)

$$\int_0^a X_m^2 \, dx = a.$$

În cele ce urmează vom presupune că o funcţie oarecare $p(x)$ poate fi exprimată în intervalul $0 - a$ sub forma unei serii de funcţii fundamentale

$$p(x) = \sum_m p_m X_m(x) \quad (m = 1,2,3, \ldots), \tag{4.4a}$$

în care funcţiile $X_m(x)$ satisfac condiţiile marginale impuse, iar

$$p_m = \frac{1}{a} \int_0^a p(x) X_m(x) \, dx. \tag{4.4b}$$

Pentru probleme bidimensionale, funcţiile fundamentale pot fi combinate corespunzător condiţiilor marginale impuse; de exemplu, o sarcină oarecare $p(x, y)$ distribuită pe suprafaţă va putea fi exprimată în domeniul dreptunghiular $a.b$ sub forma

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} X_m(x) Y_n(y), \tag{4.4c}$$

în care

$$X_m(x) = C_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m \frac{x}{a} + C_{2m} \cos \alpha_m \frac{x}{a} + C_{3m} \operatorname{sh} \alpha_m \frac{x}{a} + C_{4m} \sin \alpha_m \frac{x}{a}, \tag{4.5a}$$

$$Y_n(y) = D_{1n} \operatorname{ch} \beta_n \frac{y}{b} + D_{2n} \cos \beta_n \frac{y}{b} + D_{3n} \operatorname{sh} \beta_n \frac{y}{b} + D_{4n} \sin \beta_n \frac{y}{b}, \tag{4.5b}$$

iar

$$p_{mn} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) X_m(x) Y_n(y) \, dx \, dy. \tag{4.5c}$$

Analog relaţiilor (4.3), se va nota

$$\frac{dY_n}{dy} = \frac{\beta_n}{b} Y_n', \qquad \frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{\beta_n^2}{b^2} Y_n'', \ldots \tag{4.6}$$

*) Face excepţie cazul liniilor trigonometrice, pentru care în membrul secund rezultă $a/2$.

4.2. UTILIZAREA SERIILOR DUBLE DE FUNCȚII FUNDAMENTALE

Pentru integrarea ecuației (3.4), vom presupune că încărcarea exterioară se poate pune sub forma (4.4c); vom avea în acest caz

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{2}{kh^2}\sum_m\sum_n p_{mn}X_m Y_n. \tag{4.7}$$

Forma membrului secund ne sugerează să căutăm o soluție similară:

$$w=\sum_m\sum_n w_{mn}X_m Y_n, \tag{4.8}$$

în care coeficienții dimensionali w_{mn} urmează să fie determinați mai departe.

Introducînd expresia (4.8) în (4.7), se obține

$$\sum_m\sum_n w_{mn}\left(\frac{\alpha_m^4}{a^4}X_m''''Y_n+\frac{\beta_n^4}{b^4}X_m Y_n''''\right)=\frac{2}{kh^2}\sum_m\sum_n p_{mn}X_m Y_n.$$

Ținînd seama că $X_m''''=X_m$ și $Y_n''''=Y_n$, relația precedentă devine

$$\sum_m\sum_n\left[w_{mn}\left(\frac{\alpha_m^4}{a^4}+\frac{\beta_n^4}{b^4}\right)-\frac{2p_{mn}}{kh^2}\right]X_m Y_n=0.$$

Ea este satisfăcută, pentru fiecare termen m, n al seriei duble, dacă va ubsista relația

$$w_{mn}=\frac{\dfrac{2\,p_{mn}}{kh^2}}{\dfrac{\alpha_m^4}{a^4}+\dfrac{\beta_n^4}{b^4}}\qquad (m,n=1,2,3,\ldots). \tag{4.9}$$

În felul acesta, relațiile (4.8), (4.9) determină complet expresia săgeților.

Deplasările nodurilor în planele celor două fețe rezultă din relațiile (3.7), sub forma:

$$\begin{aligned}
u_A&=-\frac{h}{2a}\sum_m\sum_n w_{mn}\alpha_m X_m' Y_n,\\
u_B&=+\frac{h}{2a}\sum_m\sum_n w_{mn}\alpha_m X_m' Y_n,\\
v_A&=-\frac{h}{2b}\sum_m\sum_n w_{mn}\beta_n X_m Y_n',\\
v_B&=+\frac{h}{2b}\sum_m\sum_n w_{mn}\beta_n X_m Y_n'.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Expresiile eforturilor în barele celor două feţe se deduc din relaţiile (3.8) şi (3.9):

$$T = -\frac{khl}{2a^2}\sum_m\sum_n w_{mn}\,\alpha_m^2\,X_m''\,Y_n,$$

$$T' = -\frac{khl}{2b^2}\sum_m\sum_n w_{mn}\,\beta_n^2\,X_m\,Y_n'', \tag{4.11}$$

$$S = +\frac{khl}{2a^2}\sum_m\sum_n w_{mn}\,\alpha_m^2\,X_m''\,Y_n,$$

$$S' = +\frac{khl}{2b^2}\sum_m\sum_n w_{mn}\,\beta_n^2\,X_m\,Y_n''.$$

★

Vom particulariza formulele precedente pentru cazul reţelei simplu rezemate pe contur, încărcată cu o sarcină uniformă p.

Alegînd originea într-unul din colţurile feţei superioare ale reţelei, funcţiile fundamentale se reduc la liniile trigonometrice

$$X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a}; \qquad Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b},$$

în care

$$\alpha_m = m\pi, \quad \beta_n = n\pi.$$

Coeficienţii p_{mn} din dezvoltarea în serie a încărcării au expresia

$$p_{mn} = \frac{16\,p}{\pi^2}\,\frac{1}{mn} \qquad (m,\ n = 1,\ 3,\ 5,\ldots).$$

Notînd încă raportul laturilor

$$\lambda = \frac{a}{b}, \tag{4.12}$$

expresiile deplasărilor şi ale eforturilor, deduse din (4.10) şi (4.11), se scriu

$$w = \frac{32\,pa^4}{\pi^6\,kh^2}\sum_m\sum_n \frac{1}{mn\,(m^4 + \lambda^4\,n^4)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$u_B = -\,u_A = \frac{16\,pa^3}{\pi^5\,kh}\sum_m\sum_n \frac{1}{n\,(m^4 + \lambda^4\,n^4)}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{4.13}$$

$$v_B = -v_A = \frac{16\,pa^3\lambda}{\pi^5 kh} \sum_m \sum_n \frac{1}{m(m^4 + \lambda^4 n^4)} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b};$$

$$T = -S = \frac{16\,pa^2 l}{\pi^4 h} \sum_m \sum_n \frac{m}{n(m^4 + \lambda^4 n^4)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{4.14}$$

$$T' = -S' = \frac{16\,pa^2 l\lambda^2}{\pi^4 h} \sum_m \sum_n \frac{n}{m(m^4 + \lambda^4 n^4)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

★

Metoda seriilor duble de funcţii fundamentale este aplicabilă fără dificultăţi în cazul cînd condiţiile marginale privesc direct funcţiile X_m, Y_n sau derivatele lor; acesta este cazul combinaţiilor de laturi simplu rezemate şi încastrate perfect.

Dacă însă condiţiile marginale implică combinaţii ale derivatelor funcţiilor fundamentale (de exemplu în cazul marginilor libere), rădăcinile uneia din ecuaţiile caracteristice va depinde atît de m, cît şi de n, astfel încît soluţia (4.8) devine

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} X_m Y_{nm}. \tag{4.15}$$

Mai este de observat că, în general, convergenţa seriilor duble de funcţii fundamentale este destul de redusă, astfel încît calculele numerice trebuie să fie efectuate pe un calculator electronic.

4.3. UTILIZAREA SERIILOR SIMPLE DE FUNCŢII FUNDAMENTALE

Metoda Lévy aplicată în teoria elasticităţii plane şi a plăcilor plane, în cazul conturului dreptunghiular şi a două laturi opuse articulate, poate fi generalizată şi în cazul de faţă. Ea reprezintă o accelerare serioasă a convergenţei seriilor, însă conduce la expresii analitice mai complicate decît cele obţinute la punctul precedent.

Pornind de la seriile duble de funcţii fundamentale se poate încerca sumarea după un indice; de exemplu, expresia (4.8) pentru săgeţi poate fi scrisă formal

$$w = \sum_m \left(\sum_n w_{mn} Y_n\right) X_m.$$

Expresia din paranteză este sumabilă şi poate fi notată $W_m(y)$. Este însă mai interesant să căutăm direct soluţia sub forma unei serii simple de funcţii fundamentale, pornind de la ecuaţia cu derivate parţiale de bază (3.4).

Vom presupune, în prealabil, că încărcarea exterioară poate fi exprimată printr-o relație de tipul (4.4a), în care p_n este funcție de y. Ecuația (3.4) capătă atunci forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{2}{kh^2} \sum_m p_m X_m. \tag{4.16}$$

În acest caz, sîntem conduși să căutăm soluția sub o formă similară, fie

$$w = \sum_m W_m X_m, \tag{4.17}$$

în care W_m reprezintă funcții numai de y, pe care urmează să le determinăm.

Introducînd (4.17) în (4.16), se obține

$$\sum_m \left(\frac{\alpha_m^4}{a^4} W_m X_m'''' + W_m^{IV} X_m \right) = \frac{2}{kh^2} \sum_m p_m X_m.$$

Ținînd seama că $X_m'''' = X_m$, din relația precedentă se deduce ecuația diferențială pe care o satisface funcția W_m și anume:

$$W_m^{IV} + \frac{\alpha_m^4}{a^4} W_m = \frac{2p_m}{kh^2}. \tag{4.18}$$

Am regăsit astfel o ecuație care intervine la studiul grinzilor pe mediu elastic, în teoria încovoierii rezervoarelor cilindrice circulare solicitate simetric în raport cu axa de rotație etc.

Soluția ecuației (4.18) rezultă ca o sumă

$$W_m = W_m^0 + \overline{W}_m,$$

în care W_m^0 reprezintă o soluție particulară, iar $\overline{W}_m$ este o soluție a ecuației omogene

$$\overline{W}_m^{IV} + \frac{\alpha_m^4}{a^4} \overline{W}_m = 0. \tag{4.19}$$

Vom începe cu această din urmă ecuație. Soluția se caută de forma

$$\overline{W}_m = e^{ry},$$

în care parametrul dimensional r satisface ecuaţia caracteristică

$$r^4 + \frac{\alpha_m^4}{a^4} = 0$$

şi are rădăcinile

$$r_{1,2,3,4} = (\pm 1 \pm \mathrm{i}) \frac{\alpha_m}{\sqrt{2}a}.$$

Alegînd ca nouă variabilă

$$\xi_m = \frac{\alpha_m y}{\sqrt{2}a}, \tag{4.20}$$

soluţia finală a ecuaţiei omogene (4.19) va putea fi scrisă sub una din formele echivalente:

$$\overline{W}_m = C_{1m} \operatorname{ch} \xi_m \cos \xi_m + C_{2m} \operatorname{sh} \xi_m \sin \xi_m + C_{3m} \operatorname{ch} \xi_m \sin \xi_m + C_{4m} \operatorname{sh} \xi_m \cos \xi_m, \tag{4.21a}$$

$$\overline{W}_m = \mathrm{e}^{-\xi_m}(D_{1m} \cos \xi_m + D_{2m} \sin \xi_m) + \mathrm{e}^{\xi_m}(D_{3m} \cos \xi_m + D_{4m} \sin \xi_m). \tag{4.21b}$$

Forma (4.21a) este preferabilă întrucît, pentru rapoarte uzuale ale laturilor conturului $0{,}5 < a/b < 2{,}0$), soluţia pentru săgeţi şi eforturi nu prezintă un caracter oscilator amortizat.

Soluţia particulară poate fi obţinută prin metoda variaţiei constantelor sau, în cazuri mai simple, prin încercări. De exemplu, dacă $p_m =$ = const., rezultă

$$W_m^0 = \frac{2a^4}{kh^2} \frac{p_m}{\alpha_m^4}. \tag{4.22}$$

Revenind la soluţia generală (4.17), aceasta poate fi scrisă sub forma

$$w = \sum_m (W_m^0 + C_{1m} \operatorname{ch} \xi_m \cos \xi_m + C_{2m} \operatorname{sh} \xi_m \sin \xi_m + C_{3m} \operatorname{ch} \xi_m \sin \xi_m + C_{4m} \operatorname{sh} \xi_m \cos \xi_m) X_m. \tag{4.23}$$

În unele cazuri, soluţia particulară poate fi pusă şi sub formă finită; de exemplu, în cazul $p_m = \text{const.}$, avem

$$w^0 = \sum_m W_m^0 X_m = \frac{2a^4}{kh^2} \sum_m \frac{p_m}{\alpha_m^4} X_m = \frac{2}{kh^2} \int dx \int dx \int dx \int p(x)\, dx. \quad (4.24)$$

Derivatele succesive ale săgeţii determină rotirile, eforturile în barele celor două feţe şi forţele tăietoare ale plăcii echivalente; aceste mărimi se scriu:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_m \frac{\alpha_m}{a} (W_m^0 + C_{1m} \operatorname{ch} \xi_m \cos \xi_m + C_{2m} \operatorname{sh} \xi_m \sin \xi_m +$$

$$+ C_{3m} \operatorname{ch} \xi_m \sin \xi_m + C_{4m} \operatorname{sh} \xi_m \cos \xi_m) X_m', \quad (4.25a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_m \left\{ \frac{dW_m^0}{dy} + \frac{\alpha_m}{\sqrt{2}\, a} [(C_{3m} + C_{4m}) \operatorname{ch} \xi_m \cos \xi_m + \right.$$

$$+ (C_{3m} - C_{4m}) \operatorname{sh} \xi_m \sin \xi_m + (C_{1m} + C_{2m}) \operatorname{sh} \xi_m \cos \xi_m +$$

$$\left. + (C_{2m} - C_{1m}) \operatorname{ch} \xi_m \sin \xi_m] \right\} X_m, \quad (4.25b)$$

$$T = -\frac{khl}{2a^2} \sum_m \alpha_m^2 (W_m^0 + C_{1m} \operatorname{ch} \xi_m \cos \xi_m + C_{2m} \operatorname{sh} \xi_m \sin \xi_m +$$

$$+ C_{3m} \operatorname{ch} \xi_m \sin \xi_m + C_{4m} \operatorname{sh} \xi_m \cos \xi_m) X_m'', \quad (4.25c)$$

$$S = -T,$$

$$T' = -\frac{khl}{2a^2} \sum_m \left[a^2 \frac{d^2 W_m^0}{dy^2} + \alpha_m^2 (C_{2m} \operatorname{ch} \xi_m \cos \xi_m - C_{1m} \operatorname{sh} \xi_m \sin \xi_m - \right.$$

$$\left. - C_{4m} \operatorname{ch} \xi_m \sin \xi_m + C_{3m} \operatorname{sh} \xi_m \cos \xi_m) \right] X_m, \quad (4.25d)$$

$$S' = -T',$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \sum_m \left\{ \frac{d^3 W_m^0}{dy^3} + \frac{\alpha_m^3}{\sqrt{2}\, a^3} [(C_{3m} - C_{4m}) \operatorname{ch} \xi_m \cos \xi_m - \right.$$

$$(C_{3m} + C_{4m}) \operatorname{sh} \xi_m \sin \xi_m - (C_{1m} + C_{2m}) \operatorname{ch} \xi_m \sin \xi_m -$$

$$\left. - (C_{1m} - C_{2m}) \operatorname{sh} \xi_m \cos \xi_m] \right\} X_m. \quad (4.25e)$$

Determinarea celor patru familii de constante de integrare C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m} ($m = 1, 2, 3, \ldots$) se face impunînd cîte două condiţii la fiecare din marginile paralele cu axa Ox.

Cîteva exemple numerice vor fi date la paragraful următor.

5. EXEMPLE NUMERICE

În paragraful de faţă ne propunem să determinăm săgeţile şi eforturile în secţiunile caracteristice ale unei reţele cu diferite rezemări pe contur.

Pentru a avea un criteriu de comparaţie privind condiţiile de încărcare şi de rezumare, a fost considerată o reţea pe contur pătrat ($a = b$, $\lambda = 1$), pasul reţelei fiind $l = a/15$.

5.1. REŢEAUA SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

În vederea obţinerii unor expresii cît mai simple, vom căuta, pentru început, să aproximăm încărcarea uniform distribuită prin diferite încărcări sinusoidale.

Încărcarea dublu sinusoidală. Vom admite că încărcarea variază după legea

$$p(x, y) = \frac{16p}{\pi^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

(ea reprezintă primul termen din seria dublă trigonometrică care aproximează încărcarea uniform distribuită).

Încărcarea totală a reţelei este

$$P = \int_0^a \int_0^b p(x, y)\, dx dy = \frac{64}{\pi^4} pa^2 \approx 0{,}6572\, pa^2,$$

adică circa 65,72 % din încărcarea cu sarcină uniform distribuită pe toată suprafaţa.

Soluţia pentru săgeţi şi eforturi se deduce direct din relaţiile (4.13) şi (4.14), considerînd $m = n = 1$ şi $l = a/15$:

$$w = \frac{16pa^4}{\pi^6 kh^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b},$$

$$T = -S = \frac{8pa^3}{15\pi^4 h} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}.$$

Săgeţile w_A şi eforturile S în secţiunea centrală se stabilesc pentru abscisa $x = a/2$, iar săgeţile w_B şi eforturile T se stabilesc pentru $x = (a \pm l)/2 = 7a/15$ sau $8a/15$.

Aplicarea seriilor simple trigonometrice (de la § 4.3) conduce la aceleaşi soluţii. Ea concordă cu soluţia particulară care, satisfăcînd toate condiţiile marginale, reprezintă soluţia completă ($C_{1m} = C_{2m} = C_{3m} = C_{4m}$).

Încărcarea cilindrică sinusoidală. Se admite că încărcarea este constantă în direcţia y şi variază sinusoidal în direcţia x:

$$p(x, y) = \frac{4p}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Încărcarea totală a reţelei

$$P = \frac{8}{\pi^2} pa^2 \approx 0{,}8106\ pa^2,$$

reprezintă 81,06 % din încărcarea cu sarcină uniform distribuită pe toată suprafaţa.

Soluţia generală pentru săgeţile w are forma

$$w = \frac{8pa^4}{\pi^5 kh^2} (1 + C_1 \operatorname{ch} \xi \cos \xi + C_2 \operatorname{sh} \xi \sin \xi + C_3 \operatorname{ch} \xi \sin \xi + C_4 \operatorname{sh} \xi \cos \xi) \sin \frac{\pi x}{a},$$

n care

$$\xi = \frac{\pi y}{\sqrt{2}\, a}.$$

Alegînd originea axelor la mijlocul unei laturi, putem folosi simetria reţelei şi a încărcării. Din condiţii de simetrie rezultă $C_3 = C_4 = 0$. Rămîn de determinat constantele de integrare C_1 şi C_2 astfel încît să fie satisfăcute condiţiile

$$w_B = 0 \text{ şi } S' = 0 \text{ pe laturile } y = \pm \frac{a}{2}.$$

Ţinînd seama de relaţiile (4.25), se obţine

$$w = \frac{8pa^4}{\pi^5 kh^2}(1 + C_1 \operatorname{ch}\xi\cos\xi + C_2 \operatorname{sh}\xi\sin\xi)\sin\frac{\pi x}{a},$$

$$(-S'),\ T' = \frac{4pa^3}{15\pi^3 h}(-C_2 \operatorname{ch}\xi\cos\xi + C_1 \operatorname{sh}\xi\sin\xi)\sin\frac{\pi x}{a},$$

$$(-S),\ T = \frac{4pa^3}{15\pi^3 h}(1 + C_1 \operatorname{ch}\xi\cos\xi + C_2 \operatorname{sh}\xi\sin\xi)\sin\frac{\pi x}{a}.$$

Din condiţiile marginale rezultă următorul sistem de ecuaţii în raport cu C_1 şi C_2:

$$C_1 \operatorname{ch}\xi_0\cos\xi_0 + C_2 \operatorname{sh}\xi_0\sin\xi_0 = -1,$$

$$C_1 \operatorname{sh}\xi_0\sin\xi_0 - C_2 \operatorname{ch}\xi_0\cos\xi_0 = 0,$$

unde

$$\xi_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

rădăcinile sistemului precedent sînt

$$C_1 = -\frac{\operatorname{ch}\xi_0\cos\xi_0}{\operatorname{ch}^2\xi_0\cos^2\xi_0 + \operatorname{sh}^2\xi_0\sin^2\xi_0} = -0{,}368214,$$

$$C_2 = -\frac{\operatorname{sh}\xi_0\sin\xi_0}{\operatorname{ch}^2\xi_0\cos^2\xi_0 + \operatorname{sh}^2\xi_0\sin^2\xi_0} = -0{,}597643.$$

Săgeţile w şi eforturile S şi T sînt determinate în aceleaşi secţiuni x ca precedent, în timp ce în direcţie perpendiculară se ia

— pentru w_A şi T $\quad y/a = 0,\ 2/30,\ 4/30, \ldots$

— pentru w_B şi S $\quad y/a = 1/30,\ 3/30,\ 5/30, \ldots$

Valorile lui y, S şi T au fost trecute în coloana a treia a tabelelor 2,3 şi 4 (pentru uniformitatea notaţiilor, rapoartele y/a corespund celor considerate în cazul precedent).

★

Întrucît legea de variaţie a încărcării considerată nu prezintă decît un singur plan de simetrie, vom mai considera şi încărcarea

$$p(x, y) = \frac{4p}{\pi}\sin\frac{\pi y}{a}.$$

Printr-o schimbare convenabilă a axelor de coordonate, necunoscutele se determină din formule similare. Valorile lor numerice, în aceleaşi direcţii ale reţelei spaţiale, sînt trecute în coloana a patra a tabelelor 2, 3 şi 4.

Tabela 2

$$w_A = \frac{\text{(coeficient)}}{1000}\,\frac{pa^4}{kh^2}$$

$\frac{y}{b}$	$\frac{16p}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$	$\frac{4p}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}$	$\frac{4p}{\pi}\sin\frac{\pi y}{a}$	$\frac{2p}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\sin\frac{\pi y}{a}\right)$	p
1/30	1,740	1,789	1,726	1,758	1,767
3/30	5,143	5,264	5,104	5,184	5,206
5/30	8,321	8,460	8,258	8,359	8,377
7/30	11,136	11,239	11,052	11,145	11,142
9/30	13,464	13,496	13,362	13,429	13,390
11/30	15,204	15,158	15,088	15,123	15,050
13/30	16,279	16,174	16,155	16,165	16,068
15/30	16,643	16,516	16,516	16,516	16,411

Tabela 3

$$S = -\frac{\text{(coeficient)}}{1000}\,\frac{pa^3}{h}$$

$\frac{y}{b}$	$\frac{16p}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$	$\frac{4p}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}$	$\frac{4p}{\pi}\sin\frac{\pi y}{a}$	$\frac{2p}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\sin\frac{\pi y}{a}\right)$	p
0	0	0	0	0	0
1/15	1,138	1,168	1,130	1,149	1,065
2/15	2,227	2,272	2,210	2,241	2,087
3/15	3,218	3,260	3,194	3,227	3,016
4/15	4,069	4,092	4,038	4,065	3,817
5/15	4,742	4,739	4,706	4,722	4,453
6/15	5,207	5,181	5,168	5,175	4,892
7/15	5,445	5,405	5,404	5,405	5,117

Tabela 4

$$T = \frac{\text{(coeficient)}}{1000}\,\frac{pa^3}{h}$$

$\frac{y}{b}$	$\frac{16p}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$	$\frac{4p}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}$	$\frac{4p}{\pi}\sin\frac{\pi y}{a}$	$\frac{2p}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\sin\frac{\pi y}{a}\right)$	p
1/30	0,569	0.585	0,565	0,575	0,534
3/30	1,683	1,722	1,670	1,696	1,580
5/30	2,723	2,768	2,703	2,735	2,559
7/30	3,644	3,677	3,617	3,647	3,425
9/30	4,405	4,416	4,373	4,394	4,143
11/30	4,974	4,959	4,938	4,949	4,680
13/30	5,326	5,292	5,287	5,290	5,012
15/30	5,445	5,404	5,405	5,405	5,105

Încărcare cilindrică sinusoidală pe două direcții perpendiculare. Pentru a putea lua în considerare cele două plane de simetrie geometrică ale rețelei, vom considera o combinație a celor două încărcări studiate precedent, de forma

$$p(x, y) = \frac{2p}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a} + \sin\frac{\pi y}{a}\right).$$

Încărcarea totală a rețelei rămîne aceeași, iar săgețile și eforturile în bare pot fi determinate aplicînd principiul suprapunerii efectelor.

Valorile numerice ale lui w_A, S și T în aceleași direcții ca și precedent, sînt trecute în coloana a 5-a a tabelelor 2, 3 și 4.

Încărcare uniform distribuită. Expresiile lui w, S și T se deduc din (4.13), (4.14), în care se consideră $\lambda = 1$ și $l = a/15$.

Calculele numerice au fost efectuate pe un computer IBM-360/40, iar valorile lui w_A, S și T au fost trecute în coloana a 6-a a tabelelor 2, 3 și 4. Ele au fost calculate luînd în considerare 34 termeni pentru săgeți și cîte 91 termeni pentru eforturile în bare. Variația lui S și T este reprezentată în figura 3 *b*, *c*.

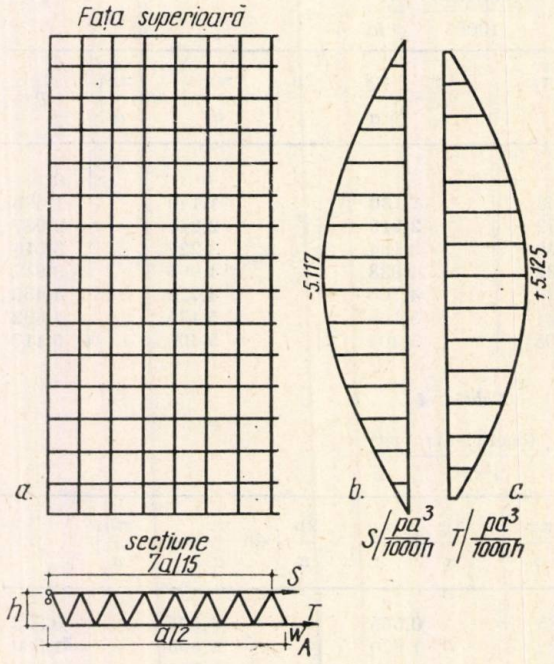


Fig. 3. — Rețeaua planar pătrată simplă pe contur pătrat, simplu rezemată pe contur: *a*) geometria rețelei; *b*) variația eforturilor S în secțiunea $x = a/2$; *c*) variația eforturilor T în secțiunea $x = (a \pm l)/2$.

O comparație a valorilor înscrise în tabelele 2, 3 și 4 arată că încărcarea uniform distribuită poate fi aproximată în mod satisfăcător prin oricare din cazurile de încărcare considerate precedent.

5.2. REŢEAUA CU O MARGINE LIBERĂ

Acest caz de rezemare prezintă un interes constructiv, în situaţii intermediare de montaj, cînd reţeaua se montează pe fişii de lăţimea pasului reţelei. În această situaţie, reţeaua este rezemată pe una din laturi (fie $y = 0$), de asemenea simplu rezemată, pe o lungime $kl < b$, pe laturile $x = 0$ şi $x = a$ şi, în sfîrşit, liberă pe latura $y = kl$.

Vom căuta soluţia sub forma unei serii simple trigonometrice, plecînd de la relaţiile (4.23), (4.25).

Pentru încărcarea uniform distribuită pe toată suprafaţa $p = \text{const}$, soluţia particulară se scrie

$$W_m^0 = \frac{2a^4}{kh^2} \frac{4p}{\pi m(\pi m)^4} = \frac{8pa^4}{\pi^5 kh^2} \frac{1}{m^5}, \tag{5.1}$$

$$w^0 = \frac{8pa^4}{\pi^5 kh^2} \sum_m \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots) \tag{5.2a}$$

sau, sub formă finită,

$$w^0 = \frac{pa^4}{12kh^2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{x}{a} \right]. \tag{5.2b}$$

Soluţia (5.2a) sub formă de serie este necesară pentru determinarea constantelor de integrare din (4.23), (4.25).

Alegînd originea axelor într-un colţ unde se întîlnesc două laturi simplu rezemate $a \cdot b$, condiţiile la limită se scriu:

$$\text{pentru } y = 0 \rightarrow w = 0 \quad \text{şi} \quad T' = 0,$$

$$\text{pentru } y = b \rightarrow T' = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0.$$

La scrierea efectivă a acestor condiţii, se ţine seama că $W_m^0 = \text{const.}$; de asemenea se vor considera noile constante de integrare $\overline{C}_i$ adimensionale

$$C_i = \frac{8pa^4}{\pi^5 kh^2 m^5} \overline{C}_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Cele patru condiții se scriu

$$1 + \overline{C}_{1m} = 0\,,$$

$$0 + \overline{C}_{2m} = 0\,,$$

$$0 + \overline{C}_{2m}\,\mathrm{ch}\,\xi_{mb}\cos\xi_{mb} - \overline{C}_{1m}\,\mathrm{sh}\,\xi_{mb}\sin\xi_{mb} - \overline{C}_{4m}\,\mathrm{ch}\,\xi_{mb}\sin\xi_{mb} +$$
$$+ \overline{C}_{3m}\,\mathrm{sh}\,\xi_{mb}\cos\xi_{mb} = 0\,,$$

$$0 + (\overline{C}_{3m} - \overline{C}_{4m})\,\mathrm{ch}\,\xi_{mb}\cos\xi_{mb} - (\overline{C}_{3m} + \overline{C}_{4m})\,\mathrm{sh}\,\xi_{mb}\sin\xi_{mb} -$$
$$- (\overline{C}_{1m} + \overline{C}_{2m})\,\mathrm{ch}\,\xi_{mb}\sin\xi_{mb} - (\overline{C}_{1m} - \overline{C}_{2m})\,\mathrm{sh}\,\xi_{mb}\cos\xi_{mb} = 0\,,$$

cu rădăcinile

$$\overline{C}_{1m} = -1\,;\quad \overline{C}_{2m} = 0,$$

$$\overline{C}_{3m} = \frac{\sin^2\xi_{mb}}{\mathrm{sh}\,\xi_{mb}\,\mathrm{ch}\,\xi_{mb} - \sin\xi_{mb}\cos\xi_{mb}}, \tag{5.3}$$

$$\overline{C}_{4m} = \frac{\mathrm{sh}^2\xi_{mb}}{\mathrm{sh}\,\xi_{mb}\,\mathrm{ch}\,\xi_{mb} - \sin\xi_{mb}\cos\xi_{mb}},$$

mai sus ξ_{mb} reprezintă valoarea lui ξ_m pentru $y = b$, adică

$$\xi_{mb} = \frac{\alpha_m b}{\sqrt{2}a} = \frac{m\pi b}{\sqrt{2}a}. \tag{5.4}$$

Cu aceste valori ale constantelor de integrare și ținînd seama că soluția particulară este scrisă sub formă finită, expresiile săgeților și ale eforturilor se scriu:

$$w = \frac{pa^4}{12kh^2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{x}{a} + \frac{96}{\pi^5}\sum_m \frac{1}{m^5}(-\,\mathrm{ch}\,\xi_m\cos\xi_m +\right.$$
$$\left. + \overline{C}_{3m}\,\mathrm{ch}\,\xi_m\sin\xi_m + \overline{C}_{4m}\,\mathrm{sh}\,\xi_m\cos\xi_m)\sin\frac{m\pi x}{a}\right],$$

$$T = \frac{pa^2l}{2h}\left[\frac{x}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \frac{8}{\pi^3}\sum_m \frac{1}{m^3}(-\,\mathrm{ch}\,\xi_m\cos\xi_m +\right.$$
$$\left. + \overline{C}_{3m}\,\mathrm{ch}\,\xi_m\sin\xi_m + \overline{C}_{4m}\,\mathrm{sh}\,\xi_m\cos\xi_m)\sin\frac{m\pi x}{a}\right], \tag{5.5}$$

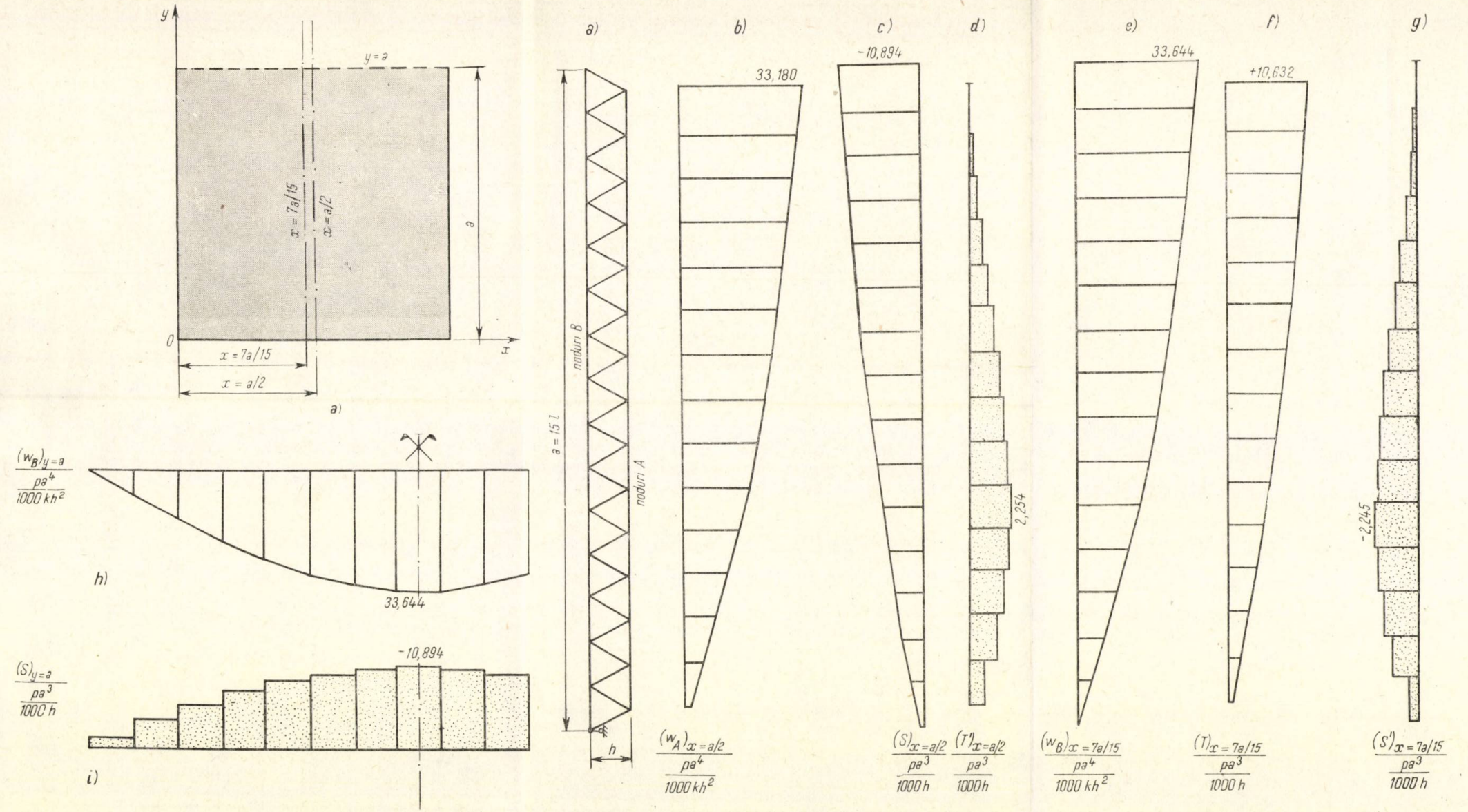


Fig. 4. — Rețeauą planar pătrată simplă pe contur pătrat, cu o margine liberă: *a*) geometria rețelei; *b*) variația săgeților w_A în secțiunea $x = a/2$; *c*) variația eforturilor în secțiunea $x = a/2$; *d*) variația eforturilor T' în secțiunea $x = a/2$; *e*) variația săgeților w_B în secțiunea $x = (a \pm l)/2$; *f*) variația efortu i or T în secțiunea $x = (a \pm l)/2$; *g*) variația eforturilor S' în secțiunea $x = (a \pm l)/2$; *h*) variația săgeților w_B în lungul marginei libere ($y = 0$); *i*) variația eforturilor S în lungul marginei libere ($y = 0$).

$$S = -T,$$

$$T' = \frac{4pa^2l}{\pi^3 h} \sum_m \frac{1}{m^3} (-\operatorname{sh}\xi_m \sin\xi_m + \overline{C}_{4m} \operatorname{ch}\xi_m \sin\xi_m -$$

$$- \overline{C}_{3m} \operatorname{sh}\xi_m \cos\xi_m) \sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$S' = -T'.$$

Vom considera o reţea pe contur pătrat cu pasul $l = a/15$, încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată suprafaţa.

Variaţia săgeţilor w_A şi a eforturilor S, T' pentru $x = a/2$ şi a săgeţilor w_B şi a eforturilor T, S' în secţiunile $x = (a \pm l)/2$ este redată în figurile 4*b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*.

Variaţia săgeţilor w_B şi a eforturilor S în lungul marginii libere este redată în figura 4*h*, *i*.

Pentru a avea o imagine a influenţei raportului laturilor b/a asupra mărimii săgeţilor şi eforturilor, în figura 5 a fost reprezentată variaţia săgeţilor w_B în nodul $x = a/2$, $y = b$ şi a efortului S de la mijlocul laturii libere, în funcţie de $b/a = 0{,}2 - 2{,}0$.

Ţinînd seama de expresiile constantelor de integrare, mărimile precedente iau forma mai simplă:

$$(w_B)_{x=a/2,\, y=a} = \frac{pa^4}{kh^2}\left(\frac{5}{192} + \frac{8}{\pi^5}\sum_m \frac{A_m}{m^5}\right),$$

$$(S)_{x=a/2,\, y=a} = -\frac{pa^3}{h}\left(\frac{1}{120} + \frac{4}{15\pi^3}\sum_m \frac{A_m}{m^3}\right),$$

în care

$$A_m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\operatorname{ch}\xi_{mb} \sin\xi_{mb} - \operatorname{sh}\xi_{mb} \cos\xi_{mb}}{\operatorname{sh}\xi_{mb} \operatorname{ch}\xi_{mb} - \sin\xi_{mb} \cos\xi_{mb}}$$

$$(m = 1, 3, 5, \ldots)$$

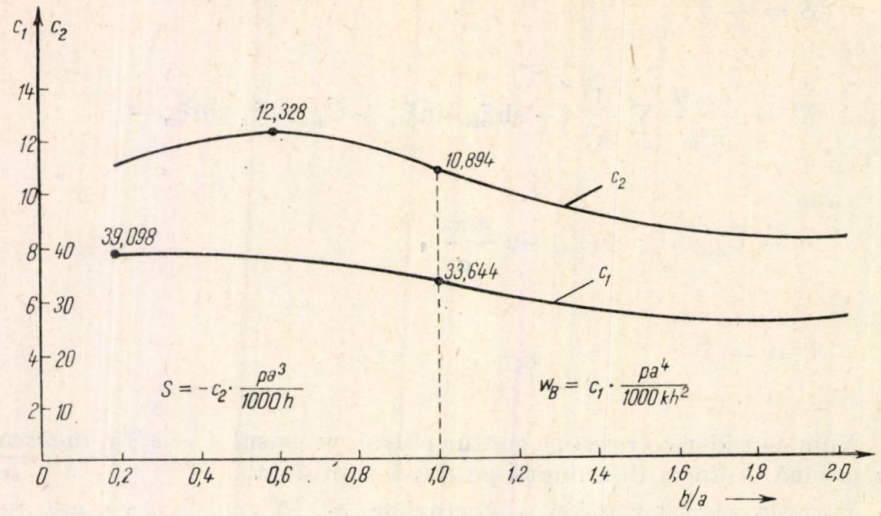


Fig. 5. — Variația săgeților w_B și a efortului S la mijlocul laturii libere, pentru diferite rapoarte de laturi.

5.3. REȚEAUA CONTINUĂ PE DOUĂ DESCHIDERI

Datorită faptului că cele două fețe au configurație identică, rețeaua planar pătrată simplă se pretează foarte bine la realizarea continuității peste reazeme.

Ne vom limita să exemplificăm cazul rețelei continue pe două cîmpuri identice, încărcată cu sarcină uniform distribuită.

Pentru obținerea soluției, vom aplica metoda seriilor simple trigonometrice, ca și la § 5.2, utilizînd relațiile (4.23), (4.25).

Soluția particulară rămîne aceeași ca și în cazul unei margini libere (vezi relațiile (5.1) și (5.2)).

Din motive de simetrie, fiecare cîmp este echivalent cu o rețea cu trei laturi simplu rezemate și a patra încastrată perfect.

Alegînd originea axelor într-un colț unde se întîlnesc două laturi simplu rezemate $a \cdot b$, condițiile la limită se scriu :

$$\text{pentru} \quad y = 0 \rightarrow w = 0 \quad \text{și} \quad T' = 0,$$

$$\text{pentru} \quad y = b \rightarrow w = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

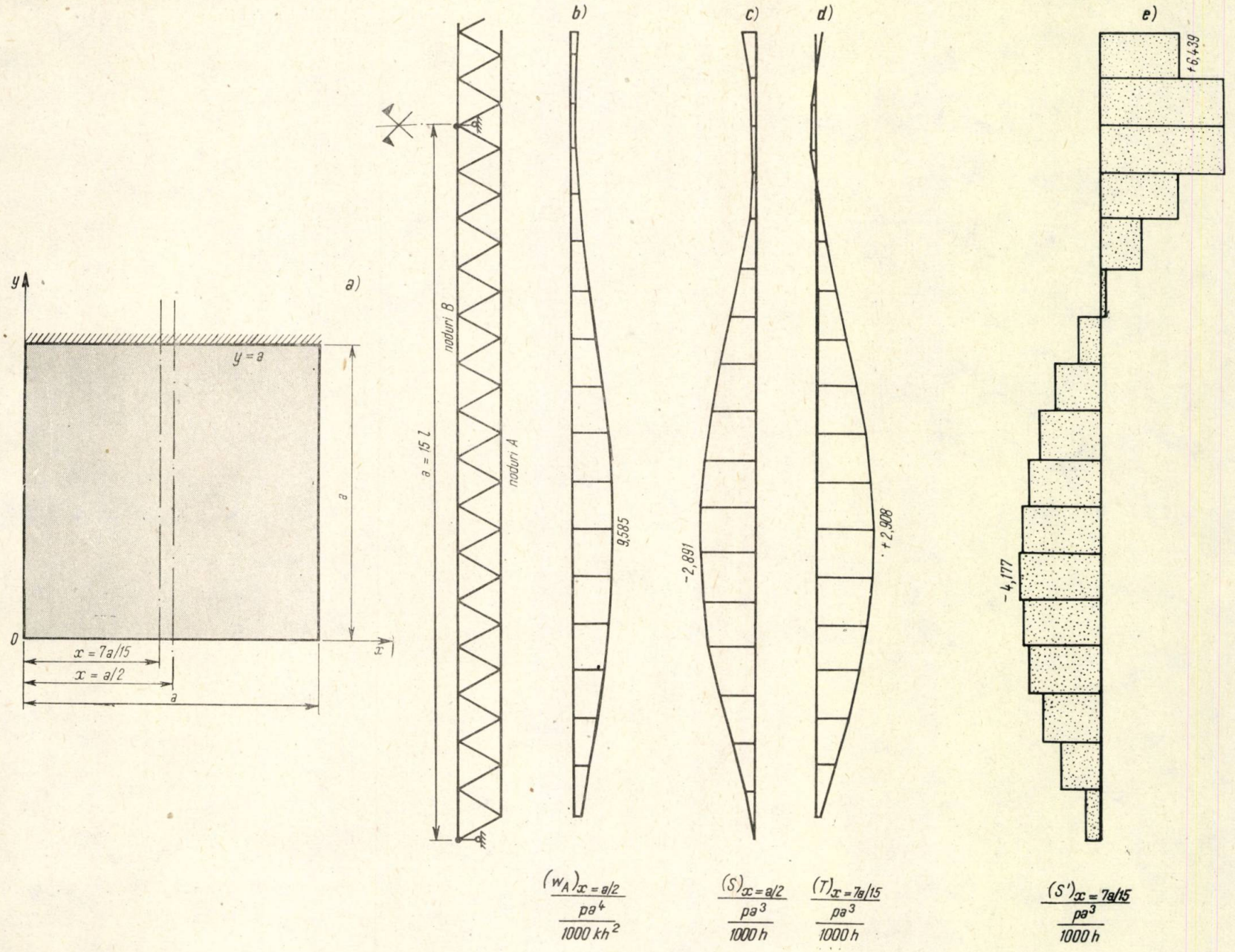
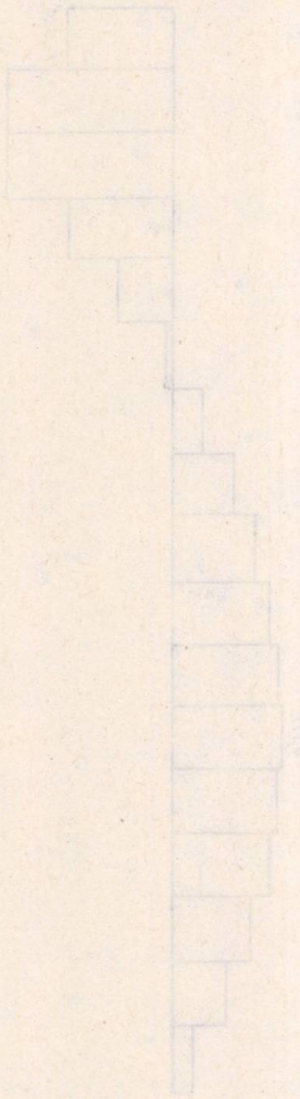


Fig. 6. — Rețeaua planar pătrată simplă, continuă pe două deschideri, încărcată cu sarcină uniform distribuită: *a*) geometria rețelei; *b*) variația săgeților w_A în secțiunea $x = a/2$; *c*) variația eforturilor S în secțiunea $x = a/2$; *d*) variația eforturilor T' în secțiunea $x = 7a/15$; *e*) variația eforturilor S' în secțiunea $x = 7a/15$.



Trecînd peste calculele intermediare, pentru constantele de integrare (adimensionale) $\overline{C}_i$, rezultă expresiile:

$$\overline{C}_{1m} = -1; \quad \overline{C}_{2m} = 0,$$

$$\overline{C}_{3m} = \frac{\operatorname{ch}\xi_{mb}\cos\xi_{mb} - \operatorname{sh}\xi_{mb}\sin\xi_{mb} - \cos^2\xi_{mb}}{\operatorname{sh}\xi_{mb}\operatorname{ch}\xi_{mb} - \sin\xi_{mb}\cos\xi_{mb}}, \tag{5.6}$$

$$\overline{C}_{4m} = -\frac{\operatorname{ch}\xi_{mb}\cos\xi_{mb} + \operatorname{sh}\xi_{mb}\sin\xi_{mb} - \operatorname{ch}^2\xi_{mb}}{\operatorname{sh}\xi_{mb}\operatorname{ch}\xi_{mb} - \sin\xi_{mb}\cos\xi_{mb}}.$$

Expresiile eforturilor şi ale săgeţilor sînt date de relaţiile (5.5), diferind doar constantele $\overline{C}_{3m}$ şi $\overline{C}_{4m}$.

Pentru cazul conturului pătrat cu pasul $l = a/15$, variaţia săgeţilor w_B şi a eforturilor S, S' pentru $x = a/2$ şi a săgeţilor w_A şi a eforturilor T, T' pentru $x = (a \pm l)/2$, sînt reprezentate în figura 6*b*—*g*.

Cazul interesant al unui cîmp încărcat (cu sarcina uniformă p), iar celălalt cîmp descărcat poate fi studiat direct, aplicînd principiul suprapunerii efectelor.

În primul caz de încărcare, se consideră încărcate amîndouă cîmpurile cu sarcina $p/2$. În al doilea caz de încărcare, se consideră încărcarea antisimetrică a celor două cîmpuri şi anume $+p/2$ în primul cîmp şi $-p/2$ în al doilea (cele două cîmpuri se comportă ca şi cum ar fi simplu rezemate).

Se constată în acest caz unele schimbări de semne ale eforturilor, datorită continuităţii şi încărcării diferite a celor două cîmpuri, fapt de care trebuie să se ţină seama la dimensionare.

6. VIBRAŢIILE PROPRII ALE REŢELEI SIMPLE

Vibraţiile proprii pot fi studiate uşor, plecînd de la ecuaţia (3.4) şi înlocuind încărcarea exterioară p prin forţele de inerţie $\left(-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$, în care ρ reprezintă masa proprie a reţelei pe unitatea de suprafaţă. Se obţine astfel ecuaţia

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2\rho}{kh^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{6.1}$$

Admiţînd că vibraţiile variază în timp după o lege sinusoidală, se poate scrie

$$w(x, y, t) = W(x, y)\sin\omega t, \tag{6.2}$$

în care ω reprezintă frecvenţa proprie a vibraţiilor.

Exprimînd că (6.2) satisface ecuaţia (6.1) şi simplificînd cu sin ωt, rezultă ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-\frac{2\rho\omega^2}{kh^2}W=0. \tag{6.3}$$

Ecuaţia (6.3) este liniară şi cuprinde doar funcţia necunoscută W şi derivatele sale normale de ordinul patru. Fiind omogenă, ea permite determinarea unor valori proprii.

Soluţiile pot fi obţinute aplicînd fie metoda seriilor duble, fie metoda seriilor simple de funcţii fundamentale.

În cele ce urmează, ne vom ocupa doar de metoda seriilor duble care duce mai direct la rezultat.

Analog relaţiei (4.8), vom considera că soluţia ecuaţiei (6.3) poate fi scrisă sub forma

$$W(x, y)=\sum_m\sum_n w_{mn}X_mY_n, \tag{6.4}$$

în care X_m, Y_n au fost definiţi la § 4, iar w_{mn} reprezintă coeficienţi dimensionali.

Introducînd expresia (6.4) în (6.3), se obţine

$$\sum_m\sum_n w_{mn}\left(\frac{\alpha_m^4}{a^4}X_m''''Y_n+\frac{\beta}{b^4}X_mY_n''\cdots-\frac{2\rho\omega^2}{kh^2}X_mY_n\right)=0,$$

sau încă

$$\sum_m\sum_n w_{mn}X_mY_n\left(\frac{\alpha_m^4}{a^4}+\frac{\beta_n^4}{b^4}-\frac{2\rho\omega^2}{kh^2}\right)=0.$$

Ultima relaţie este satisfăcută, pentru fiecare termen m, n al seriei duble, dacă va subsista relaţia

$$\omega_{mn}^2=\frac{kh^2}{2\rho}\left(\frac{\alpha_m^4}{a^4}+\frac{\beta_n^4}{b^4}\right), \tag{6.5}$$

care determină frecvenţa proprie ω_{mn} corespunzătoare modului m, n de vibraţie.

Introducînd raportul laturilor $\lambda=a/b$, din formula (6.5) rezultă

$$\omega_{mn}=\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{k}{2\rho}(\alpha_m^4+\lambda^4\beta_n^4)}, \tag{6.6a}$$

care arată că frecvenţele proprii de diferite ordine depind de un coeficient c_{mn} funcţie de α_m, β_n şi λ şi de factorul dimensional, fie

$$\omega_{mn} = c_{mn} \cdot \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{k}{\rho}}. \tag{6.6b}$$

În tabela 2 sînt trecute valorile primei frecvenţe proprii ale reţelei planar pătrate simple, pentru cele trei cazuri de rezemare studiate (se observă că pentru ultimele două cazuri corespund aceleaşi valori β_n).

Tabela 5

Rezemare	α_1	β_1	c_{11} pentru contur	
			dreptunghiular	pătrat
Contur simplu rezemat	π	π	$\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\lambda^4}$	$\pi^2 = 9{,}8696$
Trei margini simplu rezemate şi a patra *liberă* sau *încastrată* perfect	π	3,9266	$\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2{,}4404\lambda^4}$	12,9408

7. OBSERVAŢII FINALE

În studiul de faţă a fost dezvoltată o metodă de calcul a reţelelor spaţiale planare, bazată pe înlocuirea structurii discrete printr-un mediu continuu echivalent. În cazul reţelelor planar pătrate simple, acest mediu este o *dală* care lucrează *fără torsiune*, ecuaţia săgeţilor w fiind dată de relaţia (3.4).

Forma particulară a ecuaţiei permite construirea soluţiilor cu ajutorul seriilor duble şi simple de funcţii fundamentale.

Trei cazuri de rezemare pe contur, mai importante din punct de vedere al aplicării practice, au fost examinate; expresiile săgeţilor şi ale eforturilor în barele din cele două feţe au fost stabilite prin determinarea directă a constantelor de integrare.

O metodă mai generală de studiu, bazată pe introducerea parametrilor iniţiali, precum şi alte cazuri de rezemare importante, cum ar fi reţeaua cu margini libere, rezemată pe stîlpi izolaţi, vor face obiectul unui studiu viitor.

În încheiere, vibraţiile proprii ale reţelei sînt studiate direct, înlocuind încărcarea exterioară cu forţele de inerţie.

Aplicarea metodei mediului continuu echivalent pentru studierea staticii şi dinamicii reţelelor spaţiale planare se dovedeşte astfel a fi deosebit de fructuoasă, datorită utilizării unui aparat matematic binecunoscut în mecanica construcţiilor.

Datele numerice de la punctul 5.2 au fost obținute pe un ordinator IRIS 50, în baza unui program de calcul elaborat de ing. A. Pârvu și ing. M. Dinculescu-Crainicescu cărora autorul le exprimă, și pe această cale, mulțumirile sale.

BIBLIOGRAFIE

1. Felgar jr., R. P., *Formulas for Integrals Containing Characteristic Functions of a Vibrating Beam*, Bureau of Engineering Research, Circular No. 14, The University of Texas, 1950.
2. Giencke, E., *Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen*, Der Stahlbau, **24**, *6*, 128—129 (1955).
3. Lardy, P., *Sur une méthode de résolution du problème des dalles rectangulaires encastrées*, Association Internationale des Ponts et Charpentes, Mémoires, vol. 13, Zürich, 1953, p. 197—220.
4. Renton, J. D., *The related behaviour of plane grids, space grids and plates*, Space Structures (R. N. Davies ed.), Oxford-Edinburgh, Blackwell Scientific Publications, 1967, p. 19—32.
5. Renton, J. D., *General properties of space grids*, Int. J. mech. Sci., Pergamon Press, *12*, 801—810 (1970).
6. Soare, M., *Probleme moderne în construcții: structurile spațiale*, Rev. Construcțiilor și a Materialelor de Construcții, **22**, *11*, 561—568 (1968).
7. — *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul rețelelor spațiale planar pătrate*, St. cerc. mec. apl., **28**, *3*, 631—664 (1969).
8. — *Contribution à l'étude des réseaux spatiaux planaires simples par la méthode des différences finies*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **14**, *5*, 949—984 (1969).
9. — *Application of the equivalent continuum method to the analysis of double-layer parallel square mesh grids*, Bul. științific al Inst. Construcții București, **XIV**, *1—2*, 250—269 (1971).
10. — *Încovoierea cilindrică a rețelelor spațiale planar pătrate diagonale*, St. cerc. mec. apl., **30**, *2*, 275—306 (1971).
11. Theron, W. F. D., *Regular Structures*, B. Sc. Thesis, Oxford, 1968.
12. Timoshenko, St., Young, D. H., *Vibration Problems in Engineering*, 3rd ed., D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1964.
13. Trofimov, V. I., Begun, T. B., *Analiza comportării acoperișurilor spațiale din bare cu structură regulată* (în l. rusă). Metalliceskii konstrukții (sub redacția dr. șt. tehn. prof. V. A. Baldin), TNIISK B. A. Kucerenko, Izdatel'stvo literaturî po stroitel'stvu, Moskva, 1968, 143—170.
14. Young, D., Felgar jr., R. P., *Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*, Engineering Research Bulletin No. 4913, Bureau of Engineering Research, The University of Texas, July 1949.

Omagiu academicianului profesor ELIE CARAFOLI

SUPRAACCELERAȚIA ÎN MIȘCAREA TRIDIMENSIONALĂ A SOLIDULUI RIGID

de CHRISTIAN PELECUDI

Pornind de la distribuția elicoidală a vitezelor unui solid, lucrarea analizează mișcările, absolută și relativă, ale barei, plăcii și cubului atașate axei de înșurubare instantanee *ASI*.
Mișcarea solidului apare ca mișcare de transport, unic determinată, iar distribuția supraaccelerațiilor sale se calculează din vitezele și accelerațiile barei *ASI*. Sînt cuprinse proprietățile diverselor mișcări, care sînt foarte importante pentru stabilirea distribuțiilor parametrilor cinematici.

Dintre accelerațiile de diferite ordine [1]—[3], supraaccelerația, definită ca derivata în raport cu timpul a accelerației propriu-zise, are din ce în ce mai multe întrebuințări în problemele de tehnica mecanismelor. Valorile sale mari marchează variații bruște ale forțelor de inerție care solicită dinamic elementele, chiar puțin elastice, ale diverselor mecanisme și are represiuni neplăcute în funcționarea mecanismelor și mașinilor. De asemenea s-a demonstrat [4] că uzura suprafețelor de contact ale cuplelor crește odată cu supraaccelerația. În afară de aceste influențe negative, supraaccelerația intervine ca orice derivată pentru realizarea unor precizări superioare în diverse probleme de sinteză poziționlă a mecanismelor.

În mișcarea curbilinie a particulei materiale supraaccelerația instantanee se obține direct prin derivarea vectorului de accelerație în raport cu timpul, adică

$$\bar{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\bar{a}}{\mathrm{d}t} = \left(\ddot{v} - \frac{v^3}{R^2}\right)\bar{\tau} + \left(\frac{3\,v\,\dot{v}}{R} - \frac{v^3}{R^2}\,\frac{S}{T}\right)\bar{\nu} + \frac{v^3}{RT}\,\bar{\beta} = \frac{\mathrm{d}^3\bar{r}}{\mathrm{d}t^3}, \qquad (1)$$

în care v este scalarul vitezei, R raza de curbură a traiectoriei, T raza de torsiune a traiectoriei și S cota centrului sferei osculatoare deasupra planului osculator al traiectoriei. Supraaccelerația are componente pe toate cele trei axe ale triedului Frennet.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 3, 1972, P. 703—725

La traiectorii rectilinii, supraaccelerația este, desigur, numai tangențială, $\bar{\alpha} = \ddot{v}\,\bar{\tau}$, și există numai pentru mișcările variate neuniform. Pentru traiectoriile plane, supraaccelerația este tangențială și normală

$$\bar{\alpha} = \left(\ddot{v} - \frac{v^3}{R^2}\right)\bar{\tau} + \left(\frac{3\,v\,\dot{v}}{R} - \frac{v^3}{R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)\bar{\nu}, \tag{2}$$

rămînînd numai tangențială dacă mișcarea este uniformă ($\dot{v} = 0$). La traiectoria circulară R, utilizînd parametrii unghiulari ω, $\dot{\omega} = \varepsilon$ și $\ddot{\omega} = e$, supraaccelerația are forma

$$\bar{\alpha} = [(e - \omega^3)\,\bar{\tau} + 3\,\omega\,\varepsilon\,\bar{\nu}]\,R. \tag{3}$$

În cazul traiectoriilor sferice, deoarece $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{\mathcal{R}}$ ($\bar{\mathcal{R}}$ constant în mărime), prin derivare repetată, supraaccelerația capătă forma

$$\bar{\alpha} = \bar{e} \times \bar{\mathcal{R}} + 2\bar{\varepsilon} \times (\bar{\omega} \times \bar{\mathcal{R}}) + \bar{\omega} \times (\bar{\varepsilon} \times \bar{\mathcal{R}}) - \omega^2\,(\bar{\omega} \times \bar{\mathcal{R}}), \tag{4}$$

în care $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ și $\bar{e} = \dot{\bar{\varepsilon}}$ (supraaccelerația unghiulară) și se reduce la formula anterioară (3) dacă parametrii $\bar{\omega} \parallel \bar{\varepsilon} \parallel \bar{e}$ sînt paraleli, perpendiculari pe planul traiectoriei circulare.

La mișcarea tridimensională a solidului rigid de forma cea mai generală, compusă din rotație și translație, se admite asimilarea acesteia, din punctul de vedere al distribuției vitezelor, cu o mișcare momentană elicoidală. Se demonstrează că există puncte ale căror viteze liniare sînt paralele cu viteza unghiulară a solidului. Punctele solidului, care se bucură de această proprietate, sînt situate pe dreapta denumită axa de înșurubare instantanee ASI [3], [5] și care, fiind mobilă, generează față de reperele mobil și fix două suprafețe riglate numite axoide. Axoida mobilă se rostogolește față de axoida fixă în jurul generatoarei comune și lunecă în lungul acesteia (Poncelet). Dreapta ASI se poate concepe ca fiind materializată sub forma unei bare rigide, care, la rîndul său, are o mișcare spațială sub formele de mișcare absolută față de reperul fix și de mișcarea relativă față de solidul mobil.

Din punctul de vedere al distribuției accelerațiilor mișcarea de rototranslație a solidului trebuie asimilată cu o mișcare instantanee sferică de rotație, deoarece se demonstrează că există în general un punct de accelerație nulă. Se exclud cazurile particulare de mișcare plană sau mișcare elicoidală care sînt excepții. Dar atît distribuția accelerațiilor, cît și a supraaccelerațiilor pot fi determinate din mișcarea tridimensională a barei ASI, respectiv din vitezele și pe accelerațiile acesteia.

Distribuția vitezelor. Din condiția $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = p\,\bar{\omega}$ se determină vectorii de poziție

$$\bar{r}\,(\varphi, \lambda) = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} + \lambda\frac{\bar{\omega}}{\omega} = \bar{\rho}\,(\varphi) + \lambda\,\bar{\delta}\,(\varphi), \tag{5}$$

ceea ce reprezintă totodată, sub formă parametrică, axoida mobilă SA_n.

Adăugînd vectorul de poziție al punctului O din solidul mobil, avem

$$\begin{aligned} \bar{R}\,(\varphi, \lambda) &= \bar{\mathcal{R}}\,(\varphi) + \lambda\,\bar{\delta}\,(\varphi), \\ \bar{\mathcal{R}}\,(\varphi) &= \bar{R}_0\,(\varphi) + \bar{\rho}\,(\varphi), \end{aligned} \tag{6}$$

adică reprezentarea parametrică a axoidei fixe SA_f. Dacă $\lambda = \text{const}$, se obțin curbele directoare ale suprafețelor mobilă și fixă, iar dacă $\varphi = \text{const}$ se găsesc pozițiile dreptei ASI. În locul parametrului φ se poate întrebuința parametrul t timp, iar dacă φ este considerat un unghi variabil în timp avem, eventual, $\dot{\varphi} = \omega$.

Versorul $\bar{\delta}(\varphi) = \bar{\omega}/\omega$ al dreptei ASI este variabil numai cu parametrul φ, fiind desigur constant (independent de λ) de-a lungul dreptei. Împreună cu $\bar{\delta}'(\varphi)$ sau $\dot{\bar{\delta}}(t)$, care are direcția fixă în spațiu indiferent că derivata este absolută sau relativă (deoarece $\bar{\omega} \times \bar{\delta} = 0$), este posibilă definirea *triedrului central* invariabil legat de dreapta ASI. Se admite astfel:

$$\bar{k} = \bar{\delta}; \qquad \psi = |\dot{\bar{\delta}}|, \qquad \psi \bar{i} = \dot{\bar{\delta}}, \qquad \psi \bar{j} = \bar{\delta} \times \dot{\bar{\delta}}. \tag{7}$$

Pentru $\lambda = 0$, vectorul relativ,

$$\overline{OI} = \bar{r}(\varphi, 0) = \bar{\rho}(\varphi) = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} = \bar{\delta} \times \bar{p}_0, \tag{8}$$

este perpendiculara comună între $\bar{\omega}$ și $\bar{v}_0$ (fig. 1). Punctul I de pe bara ASI descrie pe axoida mobilă traiectoria relativă, iar pe axoida fixă înscrie traiectoria absolută. Aceste traiectorii reprezintă curbele directoare

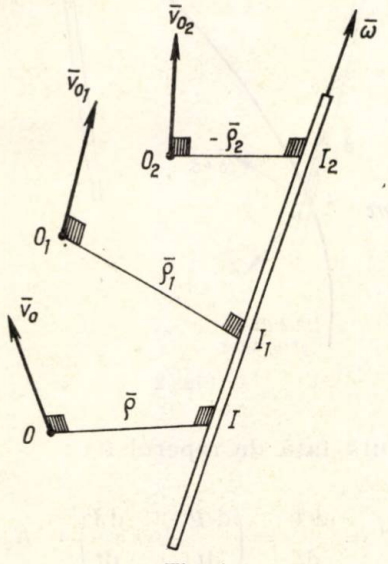


Fig. 1

principale ale suprafețelor axoide respective (fig. 2). Dar poziția punctului I pe dreapta ASI depinde de alegerea punctului O, pentru care se cunoaște viteza $\bar{v}_0$ și se poate deci confunda cu poziția oricărui punct $S(\lambda)$ (fig. 1).

Mai general, pentru traiectoriile relativă și absolută ale punctului $S(\lambda)$ avem :

— viteza relativă față de solidul mobil :

$$\bar{v}^r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial t} \right) = \bar{r}_\varphi \, \dot{\varphi}, \tag{9}$$

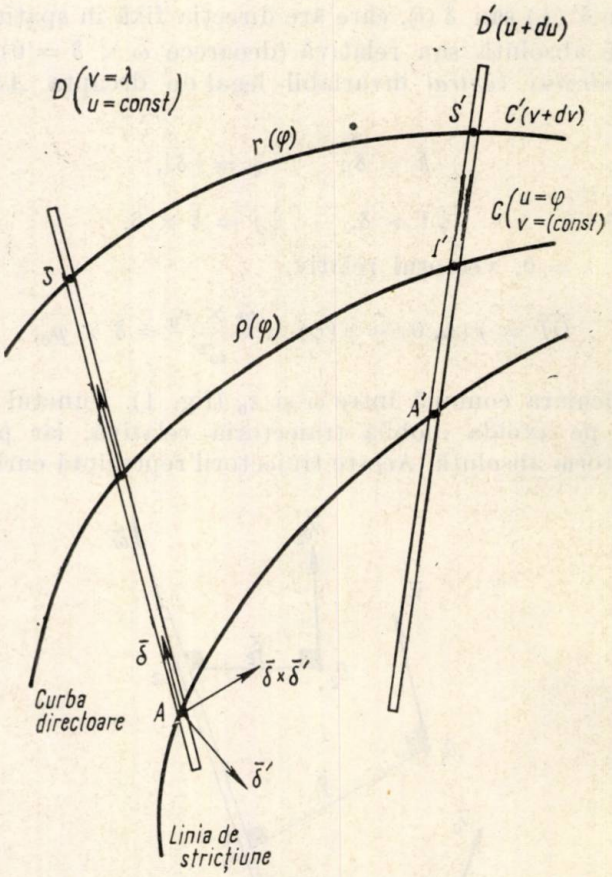


Fig. 2

— viteza absolută față de reperul fix :

$$v^a = \frac{\mathrm{d}\bar{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} + \lambda \frac{\mathrm{d}\bar{\delta}}{\mathrm{d}t} \right) = \bar{R}_\varphi \, \dot{\varphi} \tag{10}$$

sau

$$\bar{v}^a = \frac{\mathrm{d}\bar{R}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \lambda \frac{\mathrm{d}\bar{\delta}}{\mathrm{d}t} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}. \tag{11}$$

Diferența acestor viteze este viteza de transport, adică viteza punctelor aparținînd solidului mobil, care, prin poziția lor momentană pe ASI, au viteză minimă și îndreptată de-a lungul axei,

$$\bar{v}^t = \bar{v}^a - \bar{v}^r = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho} = p\,\bar{\omega} = \bar{v}. \tag{12}$$

Pasul mișcării elicoidale este

$$p = \frac{\bar{v}}{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega} \cdot \bar{v}_0}{\omega^2} = \bar{\delta} \cdot \bar{p}_0, \tag{13}$$

fiind desigur constant pentru toate punctele solidului, corespunzătoare dreptei *ASI*.

Deoarece vitezele $\bar{v}^r$ și $\bar{v}^a$ sînt tangente traiectoriilor, relativă și absolută, ale aceluiași punct S, iar $\bar{v}^t$ este îndreptat în lungul dreptei *ASI*, planul de compunere a vitezelor $\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^t$ este planul tangent comun celor două axoide.

Mișcările barei *ASI*, relativă și absolută, pot fi interpretate ca mișcări elicoidale în lungul și în jurul perpendicularei comune între două poziții infinit vecine ale acesteia (fig. 3). Direcția perpendicularei comune se obține din produsul vectorial,

$$\bar{\delta} \times (\bar{\delta} + \mathrm{d}\bar{\delta}) = \bar{\delta} \times \mathrm{d}\bar{\delta} = \mathrm{d}\alpha\, j, \tag{13}$$

al vectorilor celor două direcții *ASI*. Unghiul dintre $\bar{\delta}$ și $\bar{\delta} + \mathrm{d}\bar{\delta}$ este $\mathrm{d}\alpha$, iar între $\bar{\delta}$ și $\mathrm{d}\bar{\delta}$ este de 90°, deoarece $\bar{\delta} \cdot \mathrm{d}\bar{\delta} = 0$. Reiese deci $|\mathrm{d}\bar{\delta}| = \mathrm{d}\alpha$. Cu aceasta se poate defini *viteza de schimbare a rotației* prin

$$\dot{\psi} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = |\dot{\bar{\delta}}|\,; \qquad \bar{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\,\bar{j}, \tag{14}$$

$$\bar{\dot{\psi}} = \bar{\delta} \times \dot{\bar{\delta}} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}}{\omega^2}, \tag{15}$$

deoarece

$$\dot{\bar{\delta}} = \bar{\dot{\psi}} \times \bar{\delta} = \frac{\bar{\varepsilon}\,\omega - \dot{\omega}\,\bar{\omega}}{\omega^2}. \tag{16}$$

Această viteză $\bar{\dot{\psi}}$ este totodată viteza unghiulară a barei *ASI*, unică pentru cele două mișcări, relativă și absolută. S-a acceptat notația barei *ASI* în jurul perpendicularei sale, deoarece o componentă de rotație în direcția barei *ASI* nu ar modifica cu nimic distribuția de viteze ale punctelor sale. De asemenea, translația minimă a barei este considerată în direcția aceleiași perpendiculare, deoarece o componentă de translație în direcția dreptei *ASI* nu modifică deloc perpendiculara minimă între

două poziţii infinit vecine ale barei ASI. Dar această perpendiculară minimă, cît şi poziţia ei, se determină din condiţiile

$$\partial\bar{r}\cdot\bar{\delta}=0\,;\qquad \partial\bar{r}\cdot(\bar{\delta}+\mathrm{d}\bar{\delta})=0, \tag{17}$$

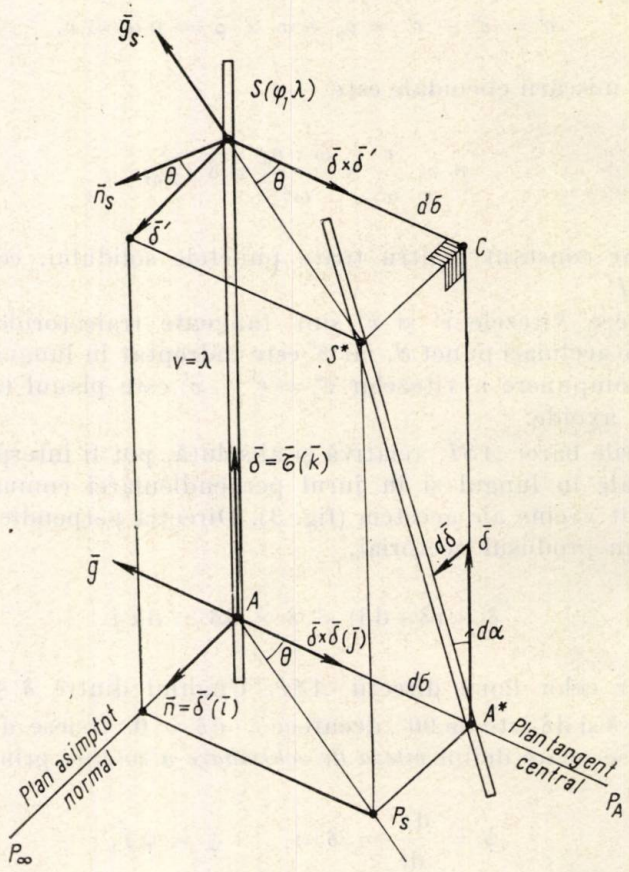


Fig. 3

puse asupra distanţei elementare între două puncte ale generatoarelor ASI infinit vecine:

$$\partial\bar{r}=\partial\bar{\rho}+\lambda\,\mathrm{d}\bar{\delta}+\mathrm{d}\lambda\,\bar{\delta}. \tag{18}$$

Rezultă deci

$$\partial\bar{\rho}\cdot\mathrm{d}\bar{\delta}+\lambda(\mathrm{d}\bar{\delta})^2=0\,;\qquad \partial\bar{\rho}\cdot\bar{\delta}+\mathrm{d}\lambda=0, \tag{19}$$

ceea ce determină piciorul A al perpendicularei comune prin

$$\lambda_A=IA=-\frac{\dot{\bar{\rho}}\cdot\dot{\bar{\lambda}}}{\psi^2}=-\frac{\bar{v}_I^r\cdot\bar{i}}{\psi}=-\frac{u_r}{\psi},$$
$$\dot{\lambda}_A=-\dot{\bar{\rho}}\cdot\bar{\delta}=-\bar{v}_I^r\cdot\bar{k}=-\mu_I^r \tag{20}$$

și care, introduse în (18), ne dă vectorul acestei perpendiculare,

$$\partial \bar{r}_{\min} = [\dot{\bar{\rho}} - (\dot{\bar{\rho}}\,\bar{i})\,\bar{i} - (\dot{\bar{\rho}}\cdot\bar{k})\,\bar{k}]\,\mathrm{d}t = \bar{w}\,\mathrm{d}t, \tag{21}$$

ceea ce confirmă că este îndreptată numai în direcția $\bar{j}$. Se definește *viteza de schimbare a translației* prin

$$w = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}; \quad \bar{w} = w\,\bar{j} = \frac{\partial \bar{r}_{\min}}{\partial t}, \tag{22}$$

unde $$|\,\partial \bar{r}_{\min}\,| = \mathrm{d}\sigma,$$

și reprezintă viteza minimă de translație a barei ASI. Pasul mișcării elicoidale a barei ASI este $s = \dfrac{\bar{w}}{\bar{\psi}} = \dfrac{w}{\psi}$. Se observă că versorul $\bar{i} \perp \bar{j}, \bar{k}$ reprezintă normala comună suprafețelor axoide în *punctul central* A.

Se poate avea o imagine mai clară a mișcării barei ASI, dacă se consideră mișcarea paralelă a plăcii ASI, asociată barei, dar care are planul de bază format cu versorul $\bar{\delta}\,(\bar{k})$ al axei și de vectorul derivat $\dot{\bar{\delta}}\,(\bar{i})$, adică planul normal suprafețelor axoide în punctul central A (plan asimptot). Placa ASI are o rotație în planul său, adică în jurul normalei și o translație în lungul acesteia, astfel că planul plăcii rămîne paralel cu el însuși în tot timpul mișcării, relative sau absolute. Rotația plăcii se face cu viteza unghiulară $\bar{\psi}$ iar translația sa se face cu viteza minimă $\bar{w} = s\,\bar{\psi}$, unde

$$s = \frac{\bar{\psi}\cdot\bar{v}^a}{\psi^2} = \frac{\bar{\psi}\cdot\bar{v}^r}{\psi^2}, \tag{23}$$

indiferent că mișcarea este relativă sau absolută, deoarece $\bar{\psi}\cdot\bar{v}^t = 0$. Pozițiile axelor instantanee elicoidale ale mișcărilor, relativă și absolută, sînt însă diferite (fig. 4). Vectorii care poziționează aceste axe sînt,

$$\overline{SP} = \frac{\bar{\psi}\times\bar{v}^r}{\psi^2}; \quad \overline{SQ} = \frac{\bar{\psi}\times\bar{v}^a}{\psi^2}, \tag{24}$$

conținuți în planul plăcii $(\bar{i}, \bar{k})$. Ambii vectori au aceeași componentă $\overline{SA}$ în direcția axei $\bar{\delta} = \bar{k}$ cu valoarea

$$SA = \overline{SP}\cdot\bar{\delta} = \overline{SQ}\cdot\bar{\delta} = -\frac{\dot{\bar{\delta}}\cdot\bar{v}^r}{\psi^2} = -\frac{\dot{\bar{\delta}}\cdot\bar{v}^a}{\psi^2}, \tag{25}$$

deoarece $\dot{\bar{\delta}}\cdot\bar{v}^t = 0$. În cazul punctului $S \equiv I$ devine

$$\lambda_A = IA = -\frac{\dot{\bar{\rho}}\cdot\dot{\bar{\delta}}}{\psi^2} = -\frac{\dot{\bar{\mathcal{R}}}\cdot\dot{\bar{\delta}}}{\psi^2}, \tag{26}$$

calculată anterior (20), iar $\dot{\bar{\rho}} = \bar{v}_I^r$ sau $\dot{\bar{\mathcal{R}}} = \bar{v}_I^a$, după cum derivata este relativă sau absolută. Celelalte componente, $\overline{AP}$ sau $\overline{AQ}$, sînt îndreptate de pe axa $\bar{i}$, diferența lor fiind

$$\overline{PQ} = \overline{SQ} - \overline{SP} = \frac{\bar{\psi} \times \bar{v}^t}{\psi^2} = \frac{v}{\psi}\,\bar{i}. \tag{27}$$

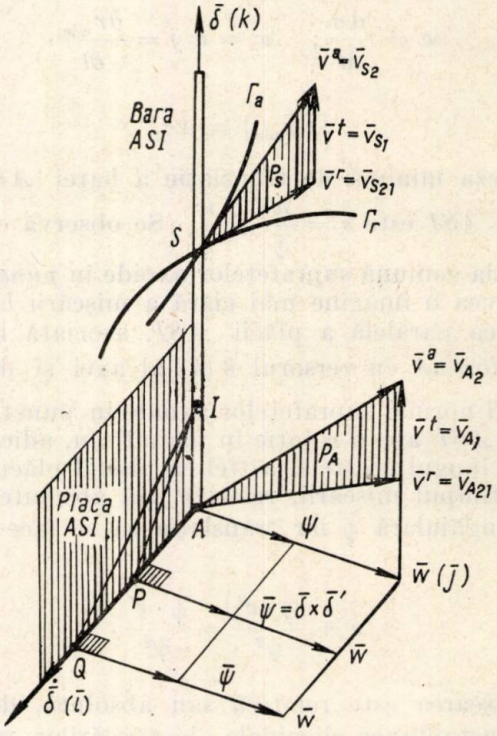


Fig. 4

Conform formulelor generale (24) aceste componente pot fi exprimate prin

$$\overline{AP} = \frac{\bar{\psi} \times \bar{v}_A^r}{\psi^2}; \quad \overline{AQ} = \frac{\bar{\psi} + \bar{v}_A^a}{\psi^2}, \tag{28}$$

ceea ce atestă că planul tangent axoidelor în punctul A, care cuprinde vectorii $\bar{v}_A^r$ și $\bar{v}_A^a$, are drept normală versorul $\bar{i}$ ($\dot{\bar{\delta}}$). Rezultă că vitezele $\bar{v}_A^r$ și $\bar{v}_A^a$ au aceeași componentă pe axa $\bar{j}$, întrucît diferența lor $\bar{v}^t$ este îndreptată în întregime de pe axa $\bar{k}$. Deci se poate scrie:

$$\bar{v}_A^r = \bar{w} + \mu^r\,\bar{k}; \quad \bar{v}_A^a = \bar{w} + \mu^a\,\bar{k}, \tag{29}$$

și viteza de transport este

$$\bar{v}_A^t = \bar{v}_A^a - \bar{v}_A^r = (\mu^a - \mu^r)\,\bar{k} = \bar{v}, \tag{30}$$

$$v = \mu^a - \mu^r. \tag{31}$$

Pentru un alt punct $S(I)$ al barei ASI vitezele, relativă și absolută, sînt :

$$\bar{v}_s^r = \bar{v}_A^r + \bar{\psi} \times \overline{AS} = u_s \bar{i} + w \bar{j} + \mu^r \bar{k},$$
$$\bar{v}_s^a = \bar{v}_A^a + \bar{\psi} \times \overline{AS} = u_s \bar{i} + w \bar{j} + \mu^a \bar{k}, \tag{32}$$

$$u_s = \psi \, AS = \lambda \psi. \tag{33}$$

Componentele μ^r și μ^a în direcția ASI, ale vitezelor, relativă și absolută, ale oricărui punct de pe bara ASI rămîn aceleași. Componenta w în direcția $\bar{j}$ este, de asemenea, aceeași pentru vitezele oricăror puncte ale barei ASI, avînd valoare unică atît pentru mișcarea relativă, cît și pentru mișcarea absolută. Componenta u_s în direcția $\bar{i}$ este de asemenea unică pentru mișcările relativă și absolută, dar variază de-a lungul barei ASI

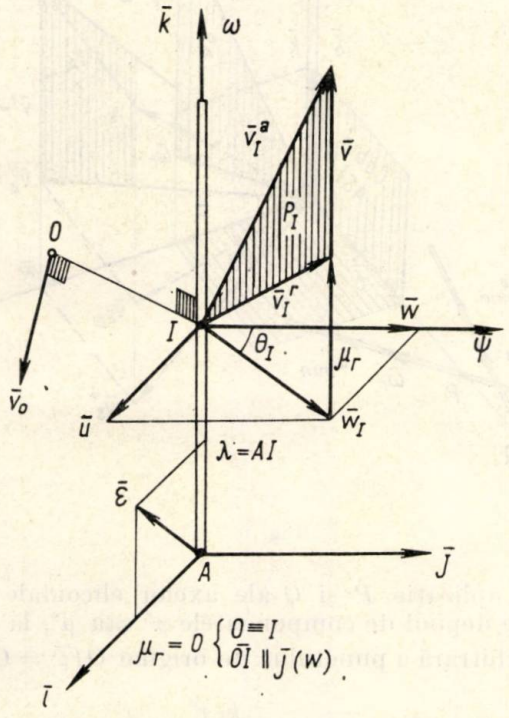


Fig. 5

(λ). Din această cauză planul tangențial în punctul S la axoide este rotit cu unghiul θ față de planul tangențial la axoide în punctul central A (fig. 5, 6), valoarea sa fiind

$$\operatorname{tg} \theta_s = \frac{u_s}{w} = \frac{\lambda \psi}{s \psi} = \frac{\lambda}{s}. \tag{34}$$

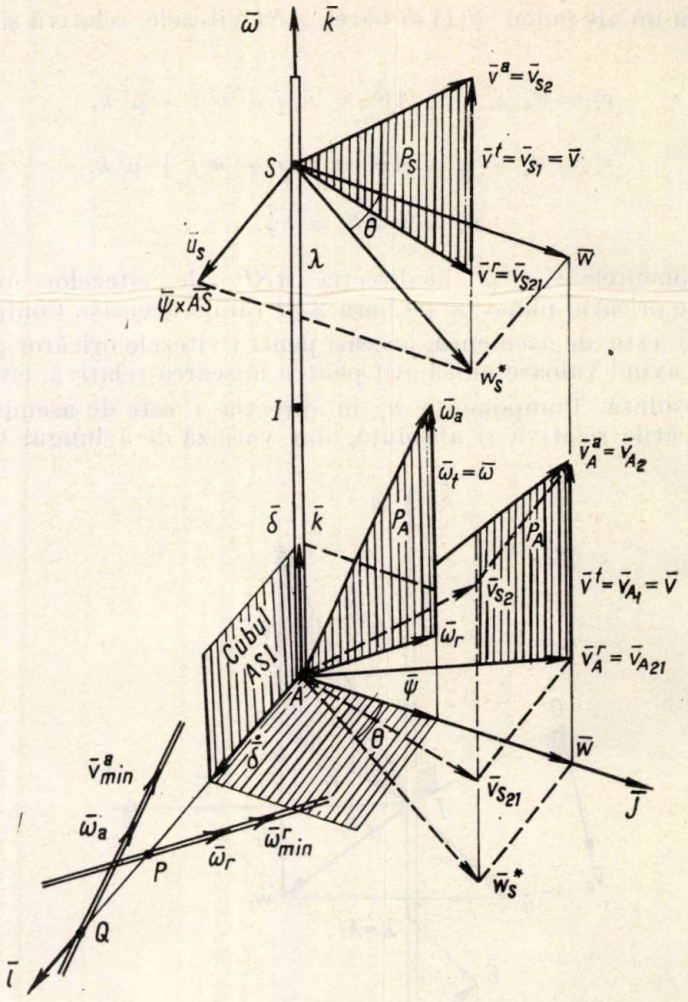


Fig. 6

Punctele de aplicaţie P şi Q ale axelor elicoidale nu sînt poziţionate unic, deoarece depind de componentele μ^r sau μ^a, la rîndul lor funcţiuni de alegerea arbitrară a punctului de origine $O\,(\bar{\rho} = \overline{OI})$. Într-adevăr,

$$AP = \overline{SP}.\,\bar{i} = \frac{\bar{k}.\,\bar{v}^r}{\psi} = \frac{\mu^r}{\psi},$$
$$AQ = \overline{SQ}.\,\bar{i} = \frac{\bar{k}.\,\bar{v}^a}{\psi} = \frac{\mu^a}{\psi}. \tag{35}$$

Axele elicoidale ale mişcării plăcii ASI, relativă şi absolută, sînt paralele (în direcţia $\bar{j}$) şi admit împreună cu axa elicoidală a mişcării solidului (în direcţia $\bar{k}$) normala comună în direcţia $\bar{i}$ (fig. 4).

O generalitate mai mare a mișcării barei *ASI* se obține considerînd-o împreună cu placa *ASI* ca făcînd parte din cubul *ASI*, care este triedrul central $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (fig. 6). Într-adevăr, planurile acestui triedru nu rămîn paralele între ele în timpul mișcărilor, relativă sau absolută. În situația reală trebuie să admitem :

— viteza unghiulară a mișcării absolute a triedrului central *ASI*,

$$\bar{\omega}_a = \psi \bar{j} + \nu_a \bar{k}, \tag{36}$$

— viteza unghiulară a mișcării relative a triedrului central *ASI*,

$$\bar{\omega}_r = \psi \bar{j} + \nu_r \bar{k}, \tag{37}$$

astfel că mișcarea de transport are viteza unghiulară

$$\bar{\omega}_t = \bar{\omega}_a - \bar{\omega}_r = (\nu_a - \nu_r)\bar{k} = \bar{\omega}, \qquad \omega = \nu_a - \nu_r, \tag{38}$$

egală desigur cu viteza solidului mobil.

Planul de compunere a vitezelor unghiulare ale cubului *ASI* este planul central $\bar{j}, \bar{k}$. Componentele ν_r sau ν_a se obțin prin derivările corespunzătoare, relativă sau absolută, adică

$$\nu_{a,r} = \dot{\bar{i}}^{a,r} \cdot \bar{j}\,; \quad \bar{i}^{a,r} = \frac{\ddot{\bar{\delta}}^{a,r}\psi - \dot{\psi}\dot{\bar{\delta}}}{\psi^2} = \frac{\ddot{\bar{\delta}}^{a,r} - \dot{\psi}\bar{i}}{\psi}, \tag{39}$$

sau

$$\nu_{a,r} = \frac{\ddot{\bar{\delta}}^{a,r} \cdot (\bar{\delta} \times \dot{\bar{\delta}})}{\psi^2} = \frac{\psi}{R^{a,r}_{gs}}, \tag{40}$$

unde R_{gs} este raza de curbură geodezică a indicatoarei sferice a versorului $\bar{\delta}$ (absolută sau relativă, ν_a, $\dot{\bar{i}}^a$, $\ddot{\bar{\delta}}^a$, R^a_{gs} și ν_r, $\dot{\bar{i}}^r$, $\ddot{\bar{\delta}}^r$, R^r_{gs}).

Vitezele minime de translație ale cubului central *ASI* sînt :

$$\begin{aligned}
\bar{v}^r_{\min} &= p_r \bar{\omega}_r\,; \quad p_r = \frac{\bar{\omega}_r \cdot \bar{v}^r_s}{\omega_r^2} = \frac{\psi w + \mu^r \nu_r}{\psi^2 + \nu_r^2}, \\
\bar{v}^a_{\min} &= p_a \bar{\omega}_a\,; \quad p_a = \frac{\bar{\omega}_a \cdot \bar{v}^a_s}{\omega_a^2} = \frac{\psi w + \mu^a \nu_a}{\psi^2 + \nu_a^2}, \\
\bar{v}^t_{\min} &= p_t \bar{\omega}_t\,; \quad p_t = \frac{\bar{\omega}_t \cdot \bar{v}^t_s}{\omega_t^2} = p.
\end{aligned} \tag{41}$$

Axele elicoidale instantanee ale mişcărilor cubului central ASI trec prin punctele APQ (fig. 6) definite prin vectorii de poziţie :

$$\overline{AP} = \frac{\bar{\omega}_r \times \bar{v}_A^r}{\omega_r^2} = \frac{\psi(\mu^r - s\nu_r)\,\bar{i}}{\psi^2 + \nu_r^2},$$
$$\overline{AQ} = \frac{\bar{\omega}_a \times \bar{v}_A^a}{\omega_a^2} = \frac{\psi(\mu^a - s\nu_a)}{\psi^2 + \nu_a^2}\,\bar{i}, \tag{42}$$

atestînd că normala $\bar{i}$ este perpendiculara lor comună.

Distribuţiile acceleraţiilor şi supraacceleraţiilor. Pornind de la distribuţia elicoidală a vitezelor

$$\bar{\omega} = \omega\,\bar{k}, \qquad \bar{v} = v\,\bar{k}, \qquad v = p\omega, \tag{43}$$

şi avînd în vedere mişcarea elicoidală a barei, a plăcii sau a cubului ASI,

$$\bar{\psi} = \psi\,\bar{j}, \qquad \bar{w} = w\,\bar{j}, \qquad w = s\dot{\psi}, \tag{44}$$

se determină *acceleraţia unghiulară de rotaţie* $\bar{\varepsilon}$ şi *acceleraţia liniară de translaţie* $\bar{a}$ prin

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}\,\bar{k} + \psi\omega\,\bar{i},$$
$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} = \dot{\bar{v}} = \dot{v}\,\bar{k} + \psi v\,\bar{i}, \tag{45}$$

deoarece $\bar{\omega} \times \bar{\omega} = 0$ au $\bar{\omega} \times \bar{v} = 0$. De asemenea, derivările, absolută sau relativă, se pot realiza prin intermediul derivării în timp $\delta(\ )/\delta t$ faţă de triedrul central, adică

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\bar{\omega}}{\delta t} + \bar{\omega}_a \times \bar{\omega} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} = \frac{\delta\bar{\omega}}{\delta t} + \bar{\omega}_r \times \bar{\omega},$$
$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\bar{v}}{\delta t} + \bar{\omega}_a \times \bar{v} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} = \frac{\delta\bar{v}}{\delta t} + \bar{\omega}_a \times \bar{v}. \tag{46}$$

Aceste acceleraţii au componente numai în planul asimptot $(\bar{i}, \bar{k})$ (fig. 7).

Ca derivate ale acceleraţiilor $\bar{\varepsilon}$ şi $\bar{a}$ supraacceleraţiile unghiulare de rotaţie $\bar{e} = \dot{\bar{\varepsilon}}$ şi liniară de translaţie $\bar{\alpha} = \dot{\bar{a}}$ au componente pe toate cele trei axe ale triedrului central. Dar, spre deosebire de acceleraţiile $\bar{\varepsilon}$ şi $\bar{a}$,

care sînt identice atît în reperul fix, cît și în cel mobil, supraaccelerațiile $\bar{e}$ și $\bar{\alpha}$ sînt diferite față de cele două repere. Astfel, supraaccelerațiile unghiulare de rotație $\bar{e}_a$ și $\bar{e}_r$ sub formele absolută și relativă, reprezintă două

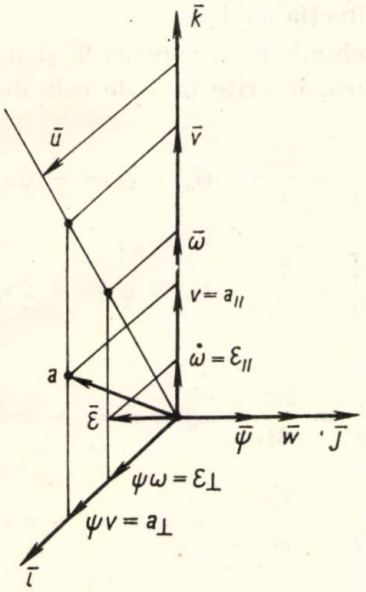


Fig. 7

variații diferite în timp ale aceleiași accelerații unghiulare $\bar{\varepsilon}$ față de reperele fix și mobil :

$$\bar{e}_a = \frac{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\delta t} + \bar{\omega}_a \times \bar{\varepsilon} = (\dot{\psi}\,\omega + 2\,\psi\dot{\omega})\,\bar{i} + \psi\,\omega\nu_a\,\bar{j} + (\ddot{\omega} - \psi^2\omega)\,\bar{k},$$

$$\bar{e}_r = \frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\delta t} + \bar{\omega}_r \times \bar{\varepsilon} = (\dot{\psi}\,\omega + 2\,\psi\dot{\omega})\,\bar{i} + \psi\,\omega\nu_r\,\bar{j} + (\ddot{\omega} - \psi^2\omega)\,\bar{k}. \tag{47}$$

Între cele două forme ale supraaccelerațiilor unghiulare există relația

$$\bar{e}_a - \bar{e}_r = \bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} = \omega^2\bar{\psi} = \psi\,\omega^2\,\bar{j}, \tag{48}$$

care arată că diferă între ele numai prin componenta în direcția axei $\bar{j}$.

Aceleași diferențe se mențin pentru formele supraaccelerațiilor liniare de translație, adică avem

$$\bar{\alpha}^a = \frac{\mathrm{d}\bar{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\bar{a}}{\delta t} + \bar{\omega}_a \times \bar{a} = (\dot{\psi}v + 2\,\psi\dot{v})\,\bar{i} + \psi\,v\nu_a\,\bar{j} + (\ddot{v} - \psi^2 v)\,\bar{k},$$

$$\bar{\alpha}^r = \frac{\partial\bar{a}}{\partial t} = \frac{\delta\bar{a}}{\delta t} + \bar{\omega}_r \times \bar{a} = (\dot{\psi}v + 2\,\psi\dot{v})\,\bar{i} + \psi\,v\nu_r\,\bar{j} + (\ddot{v} - \psi^2 v)\,\bar{k}, \tag{49}$$

iar diferența lor este

$$\overline{\alpha}^a - \overline{\alpha}^r = \overline{\omega} \times \overline{a} = p\,\psi\omega^2\,\overline{j}, \tag{50}$$

îndreptată numai pe direcția axei $\overline{j}$.

Accelerațiile de schimbare a rotației $\overline{\Psi}$ și de schimbare a translației $\overline{W}$ sînt, de asemenea, diferite față de cele două repere:

$$\overline{\Psi}_a = \frac{\mathrm{d}\overline{\psi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\overline{\psi}}{\delta t} + \overline{\omega}_a \times \overline{\psi} = -\psi\nu_a\,\overline{i} + \dot{\psi}\,\overline{j},$$

$$\overline{\Psi}_r = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t} = \frac{\delta\overline{\psi}}{\delta t} + \overline{\omega}_r \times \overline{\psi} = -\psi\nu_r\,\overline{i} + \dot{\psi}\,\overline{j} \tag{51}$$

și

$$\overline{W}^a = \frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\overline{w}}{\delta t} + \overline{\omega}_a \times \overline{w} = -w\nu_a\,\overline{i} + \dot{w}\,\overline{j},$$

$$\overline{W}^r = \frac{\partial\overline{w}}{\partial t} = \frac{\delta\overline{w}}{\delta t} + \overline{\omega}_r \times \overline{w} = -w\nu_r\,\overline{i} + \dot{w}\,\overline{j}, \tag{52}$$

avînd componente numai în planul central $\overline{i}$, $\overline{j}$.

Diferențele lor,

$$\overline{\Psi}_a - \overline{\Psi}_r = \overline{\omega} \times \overline{\psi} = -\psi\,\omega\,\overline{i},$$

$$\overline{W}^a - \overline{W}^r = \overline{\omega} \times \overline{w} = -\omega\,w\,\overline{i}, \tag{53}$$

sînt îndreptate numai în direcția axei $\overline{i}$.

Cu acești parametri definiți se pot calcula diverse derivate. Astfel, pentru versorul dreptei *ASI* (40) avem:

$$\overline{\delta} = \overline{k}; \qquad \dot{\overline{\delta}} = \psi\,\overline{i},$$

$$\ddot{\overline{\delta}}^{a,r} = \dot{\psi}\,\overline{i} + \psi\nu_{a,r}\,\overline{j} - \psi^2\,\overline{k},$$

$$\ddot{\overline{\delta}}^a - \ddot{\overline{\delta}}^r = \overline{\omega} \times \dot{\overline{\delta}} = \psi\,\omega\,\overline{j}. \tag{54}$$

De asemenea există relațiile:

$$\omega\,\overline{\delta} = \overline{\omega}; \qquad \dot{\omega}\,\overline{\delta} + \omega\,\dot{\overline{\delta}} = \overline{\varepsilon},$$

$$\ddot{\omega}\,\overline{\delta} + 2\,\dot{\omega}\,\dot{\overline{\delta}} + \omega\,\ddot{\overline{\delta}}^{a,r} = \overline{e}_{a,r}, \tag{55}$$

și se află

$$\nu_{a,r} = \frac{\bar{e}_{a,r}(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})}{\omega^3 \psi^2} = \frac{\bar{e}_{a,r} \times \bar{\psi}}{\omega \psi^2}; \tag{56}$$

Se obțin apoi:

$$\begin{aligned} &\bar{\omega} \times \bar{v} = 0, \\ &\bar{\varepsilon} \times \bar{v} + \bar{\omega} \times \bar{a} = 0, \\ &\bar{e}_{a,r} \times \bar{v} + 2\bar{\varepsilon} \times \bar{a} + \bar{\omega} \times \bar{\alpha}^{a,r} = 0, \end{aligned} \tag{57}$$

în care

$$\begin{aligned} &\bar{\varepsilon} \times \bar{v} = -p\, \psi\, \omega^2 \bar{j}, \\ &\bar{\omega} \times \bar{a} = \quad p\, \psi\, \omega^2 \bar{j} \end{aligned} \tag{58}$$

și

$$\begin{aligned} &\bar{e}_{a,r} \times \bar{v} = \psi\, \omega\, v\, \nu_{a,r} \bar{i} - (\dot{\psi}\, \omega + 2\, \psi \dot{\omega})\, v\, \bar{j}, \\ &\bar{\omega} \times \bar{\alpha}^{a,r} = -\psi\, \omega\, v \nu_{a,r} \bar{i} + (\dot{\psi}\, v + 2\, \psi\, \dot{v})\, \omega \bar{j}, \\ &2\, \bar{\varepsilon} \times \bar{a} = 2\, \psi (v\, \dot{\omega} - \omega\, \dot{v})\, \bar{j}. \end{aligned} \tag{59}$$

Din expresia de definire a vectorului relativ $\bar{\rho}$, adică

$$\omega^2 \bar{\rho} = \bar{\omega} \times \bar{v}_0, \tag{60}$$

prin derivare absolută se găsește

$$2\omega\dot{\omega}\, \bar{\rho} + \omega^2 (\bar{v}_I^r + \bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \bar{\varepsilon} \times \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{a}_0, \tag{61}$$

în care, dacă se acceptă $\bar{\rho} = 0$, ceea ce echivalează cu alegerea punctului de origine O identic cu I de pe dreapta ASI, se află

$$\omega^2 \bar{v}^r_{\equiv 0} = \bar{\varepsilon} \times \bar{v}_I + \bar{\omega} \times \bar{a}_I. \tag{62}$$

Deoarece viteza, accelerația și supraaccelerația punctului I sînt parametrii cinematici ai mișcării de transport pentru bara ASI, adică

$$\bar{v}_I = \bar{v}_I^t = \bar{v}; \quad \bar{a}_I = \bar{a}_I^t; \quad \bar{\alpha}_I = \bar{\alpha}_I^t, \tag{63}$$

se verifică mai întîi perpendicularitatea între $\bar{\omega}$ și $\bar{v}^r_{I\equiv 0}$, deci $\mu^r_{I\equiv 0} = 0$ (29), și $\bar{v}^r_{I\equiv 0} = \bar{w}_I$, obținîndu-se

$$\omega^2 \bar{w}_I = \bar{\varepsilon} \times \bar{v}_I + \bar{\omega} \times \bar{a}_I \tag{64}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MŰSZAKI 1848

sau, cu ajutorul relației (57), avem

$$\omega^2 \overline{w}_I = \overline{\omega} \times (\overline{a}_I - \overline{a}). \tag{65}$$

Prin înmulțire scalară cu versorii $\overline{i}$ sau $\overline{j}$ se găsesc următoarele:

$$\overline{w}_I \overline{i} = u_I = \lambda\psi; \qquad \overline{w}_I \overline{j} = \overline{w}, \tag{66}$$

$$\overline{a}_I \overline{i} = \psi v + \omega w, \qquad \overline{a}_I \overline{j} = -\omega u_I. \tag{67}$$

Adăugînd

$$\overline{a}_I \overline{k} = \overline{a} \cdot \overline{k} = \dot{v}, \tag{68}$$

se obține accelerația oricărui punct al solidului mobil situat pe dreapta $A8I$, adică

$$\begin{aligned} \overline{a}_I &= (\psi v + \omega w)\,\overline{i} - \omega u_I \overline{j} + \dot{v}\overline{k}, \\ \overline{a}_A &= (\psi v + \omega w)\,\overline{i} + \dot{v}\overline{k}, \quad \lambda = 0. \end{aligned} \tag{69}$$

Aceste accelerații (de transport) se pot verifica direct, derivînd vectorul viteză al punctului I, considerat ca viteză de transport, dar în componența căruia intră vectorul $\overline{\rho}$ cu variație relativă, adică

$$\overline{v} = \overline{v}_I^t = \overline{v}_0^t + \overline{\omega} \times \overline{\rho} = p\overline{\omega}, \tag{70}$$

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{a}_0^t + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times (\overline{v}_I^r + \overline{\omega} \times \overline{\rho}) \tag{71}$$

sau

$$\overline{a} = \overline{a}_I^t + \overline{\omega} \times \overline{v}_I^r, \tag{72}$$

fie că se însumează accelerația punctului I din accelerația punctului O, adică $\overline{a}_I = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{\rho})$, fie că se identifică punctele $O \equiv I$. În ultimul caz avem $\overline{v}_{I\equiv 0}^r = \overline{w}_I$; dar și într-un caz și în celălalt există relația $\overline{\omega} \times \overline{v}_I^r = \overline{\omega} \times \overline{w}_I$, astfel că se mai poate scrie

$$\overline{a} = \overline{a}_I + \overline{\omega} \times \overline{w}_I, \tag{73}$$

ceea ce determină accelerația punctului I din accelerația liniară de translație și vitezele punctului I (relativă sau absolută).

Între accelerațiile, absolută și relativă, ale punctului I (sau A) există legăturile

$$\bar{a}_I^a - \bar{a}_I^r = \bar{a} + \bar{\omega} \times \bar{w}_I = (\psi v - \omega w)\,\bar{i} + \omega u_I \bar{j} + \dot{v}\bar{k} \tag{74}$$

și

$$\bar{a}_A^a - \bar{a}_A^r = \bar{a} + \bar{\omega} \times \bar{w} = (\psi v - \omega w)\,\bar{i} + \dot{v}\bar{k},$$

diferența lor pentru punctul central A fiind cuprinsă în planul normal $\bar{i}, \bar{k}$.

Pentru determinarea supraacceleraței unui punct I de pe dreapta ASI, se continuă derivarea accelerației liniare de translație (71), adică

$$\bar{\alpha}^a = \frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{\alpha}_0^t + \bar{e}_a \times \bar{\rho} + 2\bar{\varepsilon} \times (\bar{v}_I^r + \bar{\omega} \times \bar{\rho}) +$$

$$+ \bar{\omega} \times [\bar{a}_I^r + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_I^r + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})]. \tag{75}$$

Dacă se însumează supraaccelerația punctului I din supraaccelerația punctului O, adică

$$\bar{\alpha}_I = \bar{\alpha}_0 + \bar{e}_a \times \bar{\rho} + 2\bar{\varepsilon} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{\omega} \times (\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}) +$$

$$+ \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})), \tag{76}$$

se găsește

$$\bar{\alpha}^a = \bar{\alpha}_I^t + 2\bar{\varepsilon} \times \bar{v}_I^r + \bar{\omega} \times \bar{a}_I^r + 2\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_I). \tag{77}$$

Dacă însă se identifică punctele $O \equiv I$, $\bar{\rho} = 0$, avem

$$\bar{\alpha}_I^a = \bar{\alpha}_I^t + 2\bar{\varepsilon} \times \bar{w}_I + \bar{\omega} \times \bar{a}_{I\equiv 0}^r + 2\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{w}_I) \tag{78}$$

și prin diferență se găsește

$$2\bar{\varepsilon} \times (\bar{v}_I^r - \bar{w}_I) + \bar{\omega} \times (\bar{a}_I^r - \bar{a}_{I\equiv 0}^r) = 0. \tag{79}$$

Ori dacă avem $\bar{v}_I^r - \bar{w}_I = \mu^r \bar{k}$, rezultă

$$\bar{\omega} \times (\bar{a}_I^r - \bar{a}_{I\equiv 0}^r) = 2\psi\omega\mu^r \bar{j}, \tag{80}$$

ceea ce marchează că, la fel ca și vitezele relative, accelerațiile relative depind, desigur, de traiectoria relativă a punctului I, care poate fi orice curbă înscrisă pe axoida mobilă și care trece prin I.

Într-adevăr, valoarea componentei μ^r este arbitrară. Prin înmulțire scalară cu $\bar{\omega}$, în relația vitezei relative (61) se obține

$$\omega^3\mu^r = \bar{\omega}(\bar{\varepsilon}\times\bar{v}_0) = (\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})\,\bar{v}_0 = \omega^2\bar{\psi}\cdot\bar{v}_0 \tag{81}$$

sau

$$\begin{aligned}\omega\mu^r &= \bar{\psi}\cdot\bar{v}_0,\\ \mu^a &= \mu^r + v,\end{aligned} \tag{82}$$

ceea ce arată că μ^r și μ^a depind de punctul de origine O, putînd avea astfel o infinitate de valori. Componenta $\mu^r = 0$ se poate anula dacă originea O este aleasă pe direcția $\bar{\psi}$. Deci pentru toate punctele O ale planului central $\bar{j}, \bar{k}$ traiectoriile relative ale punctelor corespunzătoare I sînt normale pe dreapta ASI. În particular $\mu^r_{I\equiv 0} = 0$. Prin derivarea relației (82) care definește pe μ^r avem

$$\dot{\omega}\mu^r + \omega\dot{\mu}^r = \bar{\Psi}_a\cdot\bar{v}_0 + \bar{\psi}\cdot\bar{a}_0, \tag{83}$$

care, pentru $O \equiv I$, devine

$$\dot{\mu}^r_{I\equiv 0} = -\psi u_I = -\lambda\psi^2. \tag{84}$$

De altfel componenta μ^r_I a vitezei relative din punctul I se mai poate scrie:

$$\mu^r_I = -\psi\bar{\rho}\cdot\bar{i} = \psi x, \tag{85}$$

unde

$$\bar{\rho} = -(x\bar{i} + y\bar{j}),$$

și deci

$$\begin{aligned}\dot{\mu}^r_I &= \dot{\psi}x - \psi(u_I - \nu_r y),\\ \dot{\mu}^r_{I\equiv 0} &= -\psi u_I \qquad (x = y = 0),\end{aligned} \tag{86}$$

astfel că

$$\dot{\mu}^r_I - \dot{\mu}^r_{I\equiv 0} = \dot{\psi}x + \psi\nu_r y. \tag{87}$$

O altă derivată necesară este $\dot{u}_I$, care se află din

$$\begin{aligned}u_I &= \lambda_I\psi\,;\ \lambda_I = AI = -\lambda_A,\\ \dot{u}_I &= \dot{\psi}\lambda_I + \psi\dot{\lambda}_I,\end{aligned} \tag{88}$$

dar din (20) avem

$$\dot{\lambda}_I = -\dot{\lambda}_A = \dot{\overline{\rho}} \cdot \overline{\delta} = \overline{v}_I^r \cdot \overline{k} = \mu_I^r, \tag{89}$$

și deci

$$\begin{aligned} \dot{u}_I &= \dot{\psi}\lambda_I + \psi\mu_I^r, \\ \dot{u}_{I\equiv 0} &= \dot{\psi}\lambda_I, \\ \dot{u}_I - \dot{u}_{I\equiv 0} &= \psi\mu_I^r. \end{aligned} \tag{90}$$

Cu aceste derivate se pot calcula acceleraţiile relative ale punctului I, adică, din

$$\overline{v}_I^r = u_I\overline{i} + w\overline{j} + \mu_I^r\overline{k}, \tag{91}$$

avem

$$\begin{aligned} \overline{a}_I^r = \frac{\partial \overline{v}_I^r}{\partial t} = \frac{\delta \overline{v}_I^r}{\delta t} + \overline{\omega}_r \times \overline{v}_I^r = (\dot{u}_I + \psi\mu_I^r - \nu_r w)\,\overline{i} + (\dot{w} + \nu_r u_I)\,\overline{j} + \\ + (\dot{\mu}_I^r - \psi u_I)\,\overline{k} = (\lambda_I\dot{\psi} + 2\psi\mu_I^r - \nu_r w)\,\overline{i} + (\dot{w} + \nu_r u_I)\,\overline{j} + \\ + (-2\psi u_I + \dot{\psi}x + \psi\nu_r y)\,\overline{k}. \end{aligned} \tag{92}$$

Deci se află

$$\overline{a}_r^r - \overline{a}_{I\equiv 0}^r = 2\psi\mu_I^r\overline{i} + (\dot{\psi}x + \psi\nu_r y)\,\overline{k}, \tag{93}$$

care, înmulțită vectorial la stînga cu $\overline{\omega}$, verifică relaţia (80). Pentru determinarea $\overline{a}_{I\equiv 0}^r$ se poate continua derivarea în expresia vitezei relative (61), adică

$$\begin{aligned} 2(\dot{\omega}^2 + \omega\ddot{\omega})\,\overline{\rho} + 4\omega\dot{\omega}(\overline{v}_I^r + \overline{\omega} \times \overline{\rho}) + \\ \omega^2[\overline{a}_I^r + 2\overline{a} \times \overline{v}_I^r + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{\rho})] = \\ = \overline{e} \times \overline{v}_0 + 2\overline{\varepsilon} \times \overline{a}_0 + \overline{\omega} \times \overline{\alpha}_0, \end{aligned} \tag{94}$$

care, pentru $\overline{\rho} = 0$, devine

$$\begin{aligned} 4\omega\dot{\omega}\overline{w}_I + \omega^2\overline{a}_{I\equiv 0}^r + 2\omega^2\overline{\omega} \times \overline{w}_I = \\ = \overline{e} \times \overline{v}_I + 2\overline{\varepsilon} \times \overline{a}_I + \overline{\omega} \times \overline{\alpha}_I. \end{aligned} \tag{95}$$

Ţinînd seama de relaţia (57), prin diferenţă avem

$$4\omega\dot{\omega}\overline{w}_1 + \omega^2\overline{a}^r_{I\equiv 0} + 2\omega^2\overline{\omega} \times \overline{w}_I =$$

$$= 2\overline{\varepsilon} \times (\overline{a}_I - \overline{a}) + \overline{\omega} \times (\overline{\alpha}_I - \overline{\alpha}^a), \tag{96}$$

care, împreună cu (73), devine

$$\omega^2\overline{a}^r_{I\equiv)} + 4\omega\dot{\omega}\overline{w}_I + 2\omega^2\overline{\omega} \times \overline{w}_I + 2\overline{\varepsilon} \times (\overline{\omega} \times \overline{w}_I) =$$

$$= \overline{\omega} \times (\overline{\alpha}_I - \overline{\alpha}^a). \tag{97}$$

Fiecare din formulele anterioare (95)—(97) arată că acceleraţia relativă $\overline{a}^r_{I\equiv 0}$ nu depinde de μ^r, ceea ce este evident şi pentru viteza relativă $\overline{v}^r_{I\equiv 0} = \overline{w}_I$, traiectoria relativă fiind normală dreptei ASI. Se mai poate scrie

$$\omega^2\overline{a}^r_{I\equiv 0} + 2\omega(\dot{\omega}u_I - \omega^2 w)\,\overline{i} + 2\omega(\dot{\omega}w + \omega^2 u_I)\,\overline{j} +$$

$$+ 2\psi\omega^2 u_I\overline{k} = \overline{\omega} \times (\overline{\alpha}^t_I - \overline{\alpha}^a), \tag{98}$$

astfel că pentru punctul central $A \equiv 0$, acceleraţia relativă

$$\omega^2\overline{a}^r_{A\equiv)} - 2\omega^3 w\overline{i} + 2\omega\dot{\omega}w\overline{j} = \overline{\omega} \times (\overline{\alpha}^t_A - \overline{\alpha}^a) \tag{99}$$

nu are componentă pe axa $\overline{k}$ (dreapta ASI).

Se pot calcula acum componentele supraacceleraţiei (de transport) punctului I pe axele triedrului central din formula (78) astfel:

$$2\overline{\varepsilon} \times \overline{w}_I = -2\dot{\omega}w\overline{i} + 2\dot{\omega}u_I\overline{j} + 2\psi\omega w\overline{k},$$

$$2\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{w}_I) = -2\omega^2\overline{w}_I = -2\omega^2(u_I\overline{i} + w\overline{j}), \tag{100}$$

$$\overline{\omega} \times \overline{a}^r_{I\equiv 0} = \omega[-(\dot{w} + \nu_r u_I)\,\overline{i} + (\dot{u}_{I\equiv 0} - \nu_r w)\,\overline{j}]$$

şi avînd în vedere expresia supraacceleraţiei liniare de translaţie (49), se găseşte

$$\overline{\alpha}_I = \overline{i}[\dot{\psi}v + 2\psi\dot{v} + \omega\dot{w} + 2\dot{\omega}w + \psi\omega\lambda_r(\omega + \nu_a)] +$$

$$+ \overline{j}[(\psi v + \omega w)\,\nu_a + \omega^2 w - (\omega\dot{\psi} + 2\dot{\omega}\psi)\,\lambda_I] + \tag{101}$$

$$+ \overline{k}[\ddot{v} - 2\psi\omega w - \psi^2 v]$$

sau

$$\overline{\alpha}_A = \overline{i}\,[\ddot{\psi}v + 2\dot{\psi}\dot{v} + \omega\dot{w} + 2\dot{\omega}w] +$$

$$+ \overline{j}\,[(\dot{\psi}v + \omega w)\nu_a + \omega^2 w] +$$

$$+ \overline{k}\,[\ddot{v} - 2\,\dot{\psi}\omega w - \dot{\psi}^2 v]. \tag{102}$$

Cu aceasta se confirmă că supraaccelerația unui punct al solidului mobil situat la un moment dat pe dreapta ASI se poate calcula din vitezele și accelerațiile mișcării barei ASI. Apoi distribuția supraaccelerațiilor în solidul mobil este ușor de obținut, avînd în vedere formulele care leagă valorile supraaccelerațiilor ale diferitelor puncte (76).

Particularizări la mișcările plană și sferică. Una din particularizările importante ale mișcării spațiale este mișcarea plană. Viteza $\overline{\omega}$, accelerația $\overline{\varepsilon}$ și supraaccelerația $\overline{e}$ sînt paralele, perpendiculare pe planul mișcării. Vitezele de schimbare a rotației $\overline{\dot{\psi}} = 0$ și de schimbare a translației $\overline{\dot{w}} = 0$ sînt nule. Viteza de alunecare în lungul dreptei ASI (transport) $\overline{v} = 0$ este, de asemenea, nulă. Din această cauză vitezele, absolută și relativă, ale oricărui punct I de pe bara ASI sînt egale între ele și au forma $\overline{v}_I^r = \overline{v}_I^a = u_I\,\overline{i} = u\,\overline{i}$, deoarece din nou $\mu_I^r = 0$. Viteza u poartă numele de viteza de schimbare (mutare) a centrului I. Acest centru instantaneu al vitezelor CIR este intersecția dreptei ASI cu planul mișcării. Traiectoriile punctului CIR, absolută și relativă, sînt baza și rostogolitoarea mișcării plane și sînt ortogonale dreptei ASI. Deoarece accelerația liniară de translație $\overline{a} = 0$ este nulă (45), rezultă din (73) accelerația CIR-ului :

$$\overline{a}_I = -\,\overline{\omega} \times \overline{u} = -\,\omega\,u\,\overline{j}. \tag{103}$$

În continuare, supraaccelerația liniară a translației elicoidale este nulă, $\overline{\alpha}^a = \overline{\alpha}^r = 0$, iar supraaccelerația unghiulară, $\overline{e}_a = \overline{e}_r = \ddot{\omega}\,\overline{k}$, are aceeași direcție paralelă cu $\overline{\omega}$ și $\overline{\varepsilon}$. Accelerațiile de schimbare a rotației $\overline{\Psi}_a = \overline{\Psi}_r = 0$ și accelerațiile de schimbare a translației $\overline{W}^a = \overline{W}^r = 0$ sînt nule.

Vitezele unghiulare ale triedrului central sînt :

$$\omega_a = \nu_a = \frac{u}{R_f} \quad ; \quad \omega_r = \nu_r = \frac{u}{R_m}, \tag{104}$$

unde R_f și R_m sînt razele de curbură ale bazei și rostogolitoarei. Se găsește supraaccelerația punctului CIR prin

$$\overline{\alpha}_I = \omega u\,(\omega + \nu_a)\,\overline{i} - (\omega\,\dot{u} + 2\,\dot{\omega}\,u)\,\overline{j}. \tag{105}$$

O altă particularizare a mişcării spaţiale este mişcarea sferică ataşată mişcării unui solid cu punct fix. Prin asemănare cu mişcarea plan paralelă, al cărui model fizic este alunecarea unui plan peste un plan fix, mişcarea sferică poate fi concepută ca alunecarea unei sfere peste o sferă fixă concentrică. Viteza şi acceleraţia unghiulare $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$, îndreptate după raze polare perpendiculare suprafeţelor sferice, au suporturi diferite, dar sînt concurente. Suprafeţele axoidale sînt conurile mobil şi fix. Intersecţiile acestor conuri cu orice sferă, avînd centrul în vîrful comun A (punct central), sînt două curbe directoare, reprezentînd baza şi rostogolitoarea sferică. Aceste curbe sînt traiectoriile absolută şi relativă, ale centrului instantaneu sferic I, poziţionat la intersecţia dreptei ASI cu suprafaţa sferică de rază $\mathcal{R}$ (= 1).

Viteza de schimbare a translaţiei în punctul central A este nulă, $\bar{w} = 0$. Viteza de alunecare în lungul generatorei ASI este de asemenea nulă, $\bar{v} = 0$, şi, întrebuinţînd numai situaţiile în care componentele $\mu_I^r = \mu_I^a = 0$ sînt nule, rezultă, ca şi pentru mişcarea plană, $\bar{v}_I^r = \bar{v}_I^a = u_I \bar{i}$, în care însă $u_I = \lambda_I \dot{\psi} = \mathcal{R}\,\dot{\psi}$. Viteza de schimbare a rotaţiei nu mai este nulă, $\dot{\psi} = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = u/\mathcal{R}$, şi se obţine din viteza de schimbare a CIR-ului.

Acceleraţia liniară a translaţiei, $\bar{a} = 0$, este de asemenea nulă, astfel că rezultă acceleraţia CIR-ului prin

$$\bar{a}_I = -\bar{\omega} \times \bar{u}_I = -\omega\, u_I \bar{j} = -\dot{\psi}\,\omega\,\mathcal{R}\,\bar{j} \tag{106}$$

şi desigur $\bar{a}_A = 0$, centrul A fiind fix. Supraacceleraţia liniară a translaţiei, $\bar{\alpha}^a = \bar{\alpha}^r = 0$, este de asemenea nulă.

Supraacceleraţia unghiulară, $\bar{e}_{a,r}$ de rotaţie are în general suport diferit de $\bar{\omega}$ sau $\bar{\varepsilon}$. În formulele (47), care determină pe $\bar{e}_{a,r}$, se are în vedere $\mathcal{R}\ddot{\psi} = \dot{u}_I$. Acceleraţiile de schimbare a rotaţiei, $\bar{\Psi}_a$ şi $\bar{\Psi}_r$, se calculează din (51), iar acceleraţiile de schimbare a translaţiei, $\bar{W}^a$ şi $\bar{W}^r$, (52) sînt nule. În aceste formule se întrebuinţează componentele ν_a şi ν_r (40) redate prin

$$\nu_{a,r} = \frac{\dot{\psi}}{R_{f,m}}, \tag{107}$$

unde R_f şi R_m sînt razele de curbură ale traiectoriilor sferice — fixă şi mobilă — pe sfera unitară ($\mathcal{R} = 1$).

Supraacceleraţia punctului central A este nulă $\bar{\alpha}_A = 0$, iar supraacceleraţia oricărui punct de pe dreapta ASI se poate calcula conform cu (76) sau din (101), adică

$$\bar{\alpha}_I = [\dot{\psi}\omega(\omega + \nu_a)\,\bar{i} - (\ddot{\psi}\,\omega + 2\dot{\psi}\dot{\omega})\bar{j}]\,\mathcal{R},$$
$$\bar{\alpha}_A = 0 \quad , \quad \mathcal{R} = 0. \tag{108}$$

Este desigur o mare asemănare între parametrii cinematici ai mişcării sferice şi cei ai mişcării plane, ceea ce se confirmă prin formulele anterioare.

BIBLIOGRAFIE

1. D. MANGERON, *Generalizarea formulei lui Somov pentru acceleraţii de diferite ordine*, D.A.N., **102**, *4* (1955).
2. D. MANGERON, *Acceleraţii reduse de orice ordin şi cîteva din proprietăţile lor extreme*, D.A.N., **112**, *1* (1957).
3. CHR. PELECUDI, *Bazele analizei mecanismelor*, Bucureşti, Edit. Acad. R.S. România, 1967.
4. D. P. ADAMS şi CHR. PELECUDI, *Influenţa supraacceleraţiilor în funcţionarea mecanismelor cu came*, St. cerc. mec. apl., **29**, *2* (1970).
5. V. VĂLCOVICI, ŞT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848

F 2557
R
4-6.
Hr: 6/no.
S

4
TOMUL 31
1972

1972 OKT 26

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

1976

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*,
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct*,
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție*.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuța poștală 2001, București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

Editura Academiei Republicii Socialiste România, str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, București.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 31, nr. 4 1972

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA F 2537 FOLYÓIRAT OSZTÁLY

SUMAR

Pag.

STUDII

VLADIMIR CILINGHIR, Consideraţii variaţionale asupra pierderilor de energie în mişcarea Hartmann 729
I. SETEANU, Curgerea turbulentă într-o conductă circulară netedă 741
FLORENTIN MORARU, Asupra ecuaţiilor mişcării generale a rachetei în mediu rezistent 753
S. LARIONESCU, Evaluarea pericolului de avarie a sistemelor mecanice supuse la vibraţii aleatorii 781
MIRCEA GRIGORIU, Studiul vibraţiilor grinzilor cu zăbrele cu configuraţie oarecare la acţiunea unor forţe variabile în timp în domeniul elastoplastic 809
MAGDALENA POSEA, Calculul îmbinărilor prin flanşe la încărcări nesimetrice prin utilizarea elementelor finite 823
N. UNGUREANU, Calculul unor plăci rezemate pe piloţi 851
N. I. MANOLESCU şi GH. C. POPA, Sinteza analitică tripoziţională pe baza curbelor r_c 865
MARIUS MUNTEANU, Un model matematic al separării granulometrice pe sitele vibratoare 887
I. SIMIONESCU, C. DUCA, O. MUNTEANU şi C. DRĂGAN, Studiul parametrilor cinematici ai mecanismelor plane cu ajutorul unui traductor mecanoelectric ortogonal 917
D. RAŞEEV şi D. CONSTANTINESCU, Unele aspecte privind uzura sapelor cu inserţii din aliaje dure sinterizate 927
GH. ZGURĂ, Consideraţii teoretice privind ambutisarea adîncă a pieselor cilindrice 955
V. TABĂRĂ, H. VERTAN, Consideraţii asupra unor funcţii original care permit utilizarea calculatoarelor în controlul automat al filetelor 961

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

ŞTEFAN ISPAS, Perspective şi preocupări în construcţia de avioane moderne 969
DAN COŞA, Utilizarea arborelui elastic în calculul structurilor din bare 989
C. MITOŞERIU, Studiu asupra curgerii lichidelor viscoase prin fante mici 1001

RECENZII 1019

Budapesti Műszaki Egyetem Központi Könyvtára Folyóiratosztály 513/1973

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 727—1022

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

CONSIDERAȚII VARIAȚIONALE ASUPRA PIERDERILOR DE ENERGIE ÎN MIȘCAREA HARTMANN

de VLADIMIR CILINGHIR
Institutul politehnic Brașov

Se studiază mișcarea plană, permanentă, a unui fluid electroconductor în prezența unui cîmp magnetic transversal.
Pe o cale variațională se arată că repartiția vitezei după un cosinus hiperbolic corespunde unui minimum al pierderilor totale de energie.
Pierderile de energie, care prin efect electrocaloric datorită curentului electric de conducție și prin frecare datorită viscozității, se transformă în căldură, însumate sînt mai mari decît pierderile corespunzătoare mișcării fără cîmp magnetic.
Raportul acestor pierderi de energie variază funcție numai de numărul lui Hartmann între limitele 0 și 1.

În lucrarea de față se fac considerații asupra mișcării fluidelor electroconductoare, incompresibile, lipsite de cîmpuri electrice imprimate liniare din punct de vedere al proprietăților electrice și magnetice, cu neglijarea densității de volum a sarcinii electrice adevărate și a densității de curent herțian.

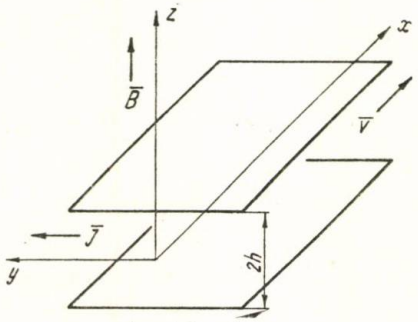


Fig. 1

Se consideră mișcarea permanentă a unui fluid între două plane paralele, situate la distanța $2h$, plasate într-un cîmp magnetic transversal, constant. Mișcarea are loc datorită unui gradient de presiune, alegerea axelor de coordonate făcîndu-se ca în figura 1.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 729–739

Studiul mişcării se face cu ajutorul ecuaţiilor magnetodinamicii fluidelor: ecuaţia de continuitate, ecuaţia Navier-Stokes, legea fluxului magnetic şi ecuaţia inducţiei magnetice, ecuaţii care, în ipotezele de mai sus, pot fi puse sub forma:

$$\nabla \bar{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\,\bar{v}\right] = \rho\bar{g} - \nabla p + \rho\nu\nabla^2\bar{v} - \frac{1}{\mu}\bar{B} \times (\nabla \times \bar{B}), \tag{2}$$

$$\nabla \bar{B} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{v} \times \bar{B}) + \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\bar{B}. \tag{4}$$

Din condiţiile geometrice şi staţionaritatea problemei rezultă pentru $\bar{B}$ şi $\bar{v}$

$$\bar{v} = v\bar{i}\,; \quad \bar{B} = B_x\bar{i} + B_y\bar{j} + B_z\bar{k}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

condiţiile la limită fiind

$$z = \pm h\,; \; v = 0\,; \; B_x = 0\,; \; B_y = 0\,; \; B_z = B_0 = \text{const.} \tag{7}$$

Pentru presiune în schimb avem

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -P = \text{const.} \tag{8}$$

Din (3), (5), (6) şi (7) se deduce

$$v = v(z), \; B_z = B_0. \tag{9}$$

Cu observaţiile de mai sus ecuaţiile magnetodinamicii fluidelor devin:

$$0 = \rho\bar{g} - \nabla p + \rho\nu\nabla^2\bar{v} - \frac{1}{\mu}\bar{B} \times (\nabla \times \bar{B}), \tag{10}$$

$$0 = \nabla \times (\bar{v} \times \bar{B}) + \frac{1}{\sigma\mu}\nabla^2\bar{B} \tag{11}$$

şi care, proiectate pe axele de coordonate, dau următoarele cinci ecuaţii scalare:

$$0 = P + \rho\nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{B_0}{\mu}\cdot\frac{\partial B_x}{\partial z}, \tag{12}$$

$$0 = \frac{B_0}{\mu}\cdot\frac{\partial B_y}{\partial z}, \tag{13}$$

$$0 = \rho g + \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2\mu}\cdot\frac{\partial B_x}{\partial z}. \tag{14}$$

$$0 = \frac{1}{\sigma\mu} \cdot \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} + B_0 \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{15}$$

$$0 = \frac{1}{\sigma\mu} \cdot \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}. \tag{16}$$

Din (6), (7) și (13) rezultă

$$B_y = 0, \tag{17}$$

iar din (12), (15) și din condițiile la limită (7) avem

$$v = C\left(\operatorname{ch} \mathcal{H}_a \frac{z}{h} - \operatorname{ch} \mathcal{H}_a\right), \tag{18}$$

relație în care am notat cu $\mathcal{H}_a$ numărul lui Hartmann:

$$\mathcal{H}_a = B_0 h \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}. \tag{19}$$

Constanta C se determină din expresia debitului unitar, considerat cunoscut:

$$q = \int_{-h}^{h} v\mathrm{d}z, \tag{20}$$

avînd în final

$$v(z) = \frac{q}{2h} \cdot \frac{\operatorname{ch} \mathcal{H}_a - \operatorname{ch} \mathcal{H}_a \frac{z}{h}}{\operatorname{ch} \mathcal{H}_a - \frac{\operatorname{sh} \mathcal{H}_a}{\mathcal{H}_a}}, \tag{21}$$

relație din care se vede că în mișcarea Hartmann, repartiția vitezei se face după cosinusul hiperbolic.

Din (18), (21) și condițiile la limită (7) se deduce expresia inducției magnetice B_x

$$B_x(z) = \frac{q\sigma\mu B_0}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \mathcal{H}_a \frac{z}{h} - \frac{z}{h} \operatorname{sh} \mathcal{H}_a}{\mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a - \operatorname{sh} \mathcal{H}_a}. \tag{22}$$

Avînd inducția magnetică, densitatea de curent se calculează cu relația

$$\bar{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{B}, \tag{23}$$

rezultînd pentru componenta după direcția axei Oy

$$J_y = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{q\sigma B_0}{2h} \cdot \frac{\mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a \frac{z}{h} - \operatorname{sh} \mathcal{H}_a}{\mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a - \operatorname{sh} \mathcal{H}_a}, \tag{24}$$

celelalte componente fiind nule.

Forţa electromagnetică unitară se calculează cu relaţia

$$\bar{f} = \bar{J} \times \bar{B} = B_0 J_y \bar{i} - B_x J_y \bar{k}, \tag{25}$$

cele două componente ale ei, după direcţia mişcării şi transversala mişcării, fiind

$$f_x = \frac{q\sigma B_0^2}{2h} \cdot \frac{\mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a \frac{z}{h} - \operatorname{sh} \mathcal{H}_a}{\mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a - \operatorname{sh} \mathcal{H}_a}, \tag{26}$$

$$f_z = -\frac{q^2 \mu \sigma^2 B_0^2}{4h} \cdot \frac{\left(\mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a \frac{z}{h} - \operatorname{sh} \mathcal{H}_a\right)\left(\operatorname{sh} \mathcal{H}_a \frac{z}{h} - \frac{z}{h} \operatorname{sh} \alpha_a\right)}{(\mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a - \operatorname{sh} \mathcal{H}_a)^2}. \tag{27}$$

Efortul unitar tangenţial se calculează cu ajutorul legii lui Newton:

$$\tau = \rho \nu \frac{\partial v}{\partial z} \tag{28}$$

şi are expresia

$$\tau = -\frac{q\rho\nu}{2h^2} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^2 \operatorname{sh} \mathcal{H}_a \frac{z}{h}}{\mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a - \operatorname{sh} \mathcal{H}_a}. \tag{29}$$

Din (8) şi (14) se deduce expresia presiunii

$$p = p_0 - Px - \rho g z - \frac{1}{2\mu} B_x^2, \tag{30}$$

unde am notat cu p_0 presiunea în originea axelor de coordonate.

Debitul unitar şi gradientul de presiune nu sînt independenţi, ci între ei există relaţia dedusă din (12)

$$P = \frac{q\rho\nu}{2h^3} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^2}{\mathcal{H}_a \operatorname{cth} \mathcal{H}_a - 1}. \tag{31}$$

Să considerăm acum o mişcare ce are loc între aceleaşi plane, avînd tot acelaşi debit, însă fără prezenţa cîmpului magnetic inductor. O astfel de mişcare este evident o mişcare Hagen-Poiseuille.

Gradientul de presiune pentru mişcarea considerată va avea expresia

$$P_0 = \frac{3q\rho\nu}{2h^3}. \tag{32}$$

Raportul gradienţilor de presiune din mişcarea Hartmann respectiv Hagen-Poiseuille, pentru acelaşi debit va fi

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^2}{\mathcal{H}_a \operatorname{cth} \mathcal{H}_a - 1}. \tag{33}$$

Se observă uşor că

$$\lim_{\mathcal{H}_a \to 0} \frac{P}{P_0} = 1, \tag{34}$$

adică cu scăderea numărului lui Hartmann, respectiv scăderea mărimii cîmpului magnetic, mişcarea Hartmann trece în mişcare Hagen-Poiseuille.

Dacă luăm în considerare formula lui Darcy

$$j = \frac{\lambda}{D_H} \cdot \frac{v_{\text{med}}^2}{2g}, \tag{35}$$

în care diametrul hidraulic este

$$D_H = 4 \frac{\Omega}{\chi} = 4h, \tag{36}$$

coeficientul de pierdere de sarcină din mişcarea Hagen-Poiseuille va fi

$$\lambda_0 = \frac{24}{\mathcal{R}_e}, \tag{37}$$

unde am notat cu $\mathcal{R}_e$ numărul lui Reynolds

$$\mathcal{R}_e = \frac{h\, v_{\text{med}}}{\nu}. \tag{38}$$

Din (33) rezultă raportul coeficienţilor pierderilor de sarcină în mişcarea Hartmann, respectiv Hagen-Poiseuille,

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^2}{\mathcal{H}_a \operatorname{cth} \mathcal{H}_a - 1}, \tag{39}$$

relaţie din care, ţinînd cont şi de (37), rezultă coeficientul pierderilor de sarcină hidraulice

$$\lambda = \frac{8}{\mathcal{R}_e} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^2}{\mathcal{H}_a \operatorname{cth} \mathcal{H}_a - 1}. \tag{40}$$

Formula (40) permite calcularea pierderilor de sarcină într-o mişcare Hartmann, cu condiţia ca mişcarea să se menţină în regim laminar.

Variaţiile vitezei v (21), a inducţiei magnetice B_x(22), a densităţii de curent J_y (24), a forţei electromagnetice f_x (26) şi a efortului unitar tangenţial τ(29) sînt redate în graficele din figurile : 2—5.

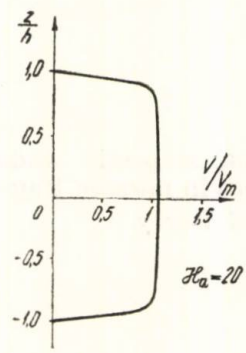


Fig. 2

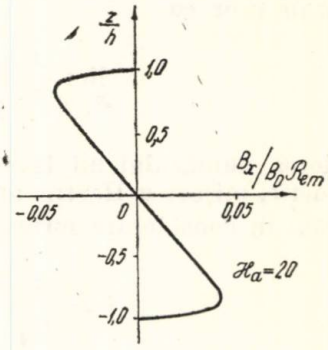


Fig. 3

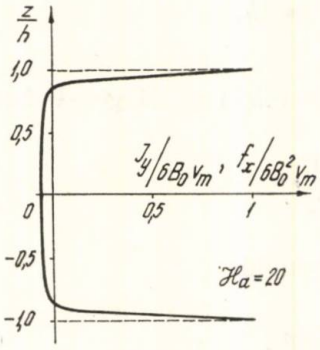


Fig. 4

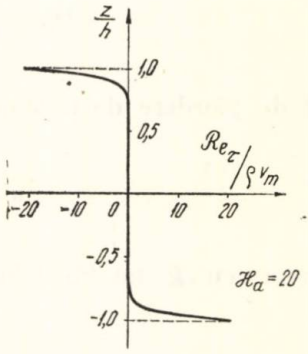


Fig. 5

Uniformizarea vitezei fluidului electroconductor în prezenţa unui cîmp magnetic transversal se datoreşte apariţiei forţei electromagnetice f_x, care în apropierea pereţilor este dirijată în sensul mişcării şi deci accelerează mişcarea, în schimb în centru este dirijată în sens contrar, frînînd mişcarea.

Modificarea repartiţiei vitezei mişcării fluidelor electroconductoare în prezenţa cîmpului magnetic se face pe seama unei pierderi suplimentare de energie faţă de mişcarea Hagen-Poiseuille. Pentru numere Hartmann mari, diagrama de viteze se apropie mult de diagrama de viteze a unui fluid ideal, însă cu deosebirea esenţială că pentru fluidul real viteza la perete rămîne nulă, pe cînd la fluidul ideal ea nu este nulă.

În ipoteza că mişcarea se face în regim laminar, adică în straturi, viteza relativă a unui strat de fluid faţă de precedentul va fi

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial z}\,\mathrm{d}z = v'\,\mathrm{d}z. \tag{41}$$

Puterea elementară pe unitatea de lungime, care datorită existenţei eforturilor unitare tangenţiale de viscozitate prin frecare se transformă în căldură pe unitate de timp, va fi [3], [4]

$$\mathrm{d}P_\tau = \tau \mathrm{d}v = \tau v'\,\mathrm{d}z, \tag{42}$$

iar puterea va avea expresia :

$$P_\tau = \int_{-h}^{h} \tau v'\,\mathrm{d}z. \tag{43}$$

În fluid mai au loc pierderi prin efect electrocaloric, datorită prezenţei curentului electric de conducţie.

$$P_j = \int_{-h}^{h} \frac{1}{\sigma} J_y^2\,\mathrm{d}z. \tag{44}$$

Puterea totală pe unitatea de lungime care se transformă în căldură pe unitatea de timp va fi

$$P_t = P_\tau + P_j = \int_{-h}^{h} \left(\tau v' + \frac{1}{\sigma} J_y^2\right) \mathrm{d}z. \tag{45}$$

Ţinînd cont de (24) şi (28), expresia pierderilor totale devine

$$P_t = \int_{-h}^{h} \left[\rho \nu v'^2 + \frac{1}{\sigma\mu^2}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)^2\right] \mathrm{d}z. \tag{46}$$

Integrînd odată ecuaţia inducţiei (15) avem

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \sigma\mu(K - B_0 v), \tag{47}$$

în care K este o constantă arbitrară.

Înlocuind (47) în (46), va rezulta o funcţională $P_t[v]$, a cărei argument este funcţia $v(z)$

$$P_t[v] = \int_{-h}^{h} [\rho \nu v'^2 + \sigma(K - B_0 v)^2]\,\mathrm{d}z. \tag{48}$$

Să căutăm funcţia $v(z)$ de clasă C^2 $[-h, h]$, care extremează funcţionala (48), îndeplineşte condiţia suplimentară (20) şi condiţiile la limită (7). Or, aceasta este o problemă clasică de calcul variaţional cu condiţii suplimentare.

Funcţia $v(z)$ va trebui să fie o extremală a funcţionalei

$$I[v] = \int_{-h}^{h} [F(v) + l\,G(v)]\,\mathrm{d}z, \tag{49}$$

în care $F(v)$ este funcţia de integrat din (48), l o constantă arbitrară, iar $G(v)$ funcţia de integrat din (20).

Ecuaţia lui Euler, corespunzătoare funcţionalei (49), după transformările de rigoare este

$$v'' - \left(\frac{\mathcal{H}_a}{h}\right)^2 v = L, \tag{50}$$

în care L este o constantă.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (50) şi care îndeplineşte condiţiile la limită (7) este

$$v(z) = \frac{q}{2h} \cdot \frac{\operatorname{ch}\mathcal{H}_a - \operatorname{ch}\mathcal{H}_a \dfrac{z}{h}}{\operatorname{ch}\mathcal{H}_a - \dfrac{\operatorname{sh}\mathcal{H}_a}{\mathcal{H}_a}}, \tag{51}$$

adică tocmai relaţia (21).

Natura extremumului se determină cu ajutorul funcţiei lui Weierstrass

$$E(z, v, v', p) = F(z, v, v') - F(z, v, p) - (v' - p)\,F_p(z, v, p), \tag{52}$$

care pentru cazul de faţă este

$$E(z, v, v', p) = \rho\nu(v' - p)^2. \tag{53}$$

Cum

$$E(z, v, v'\,p) \geqslant 0 \tag{54}$$

pentru orice p, rezultă că extremumul este un minimum relativ tare.

Pierderile pe unitatea de lungime datorită viscozităţii se calculează cu relaţia (43) în care se ţine cont de (21) şi (25), rezultînd expresia

$$P_\tau = \frac{\rho\nu q^2}{4h^3} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^3(\operatorname{sh}\mathcal{H}_a \operatorname{ch}\mathcal{H}_a - \mathcal{H}_a)}{(\mathcal{H}_a \operatorname{ch}\mathcal{H}_a - \operatorname{sh}\mathcal{H}_a)^2}. \tag{55}$$

Pierderile prin efect electrocaloric pe unitatea de lungime, datorită densităţii curentului electric de conducţie, se calculează cu relaţia (44) şi luînd în considerare (19) şi (24), rezultă

$$P_j = \frac{\rho\nu q^2}{4h^3} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^2(\mathcal{H}_a^2 + \mathcal{H}_a \operatorname{sh}\mathcal{H}_a \operatorname{ch}\mathcal{H}_a - 2\operatorname{sh}^2\mathcal{H}_a)}{(\mathcal{H}_a \operatorname{ch}\mathcal{H}_a - \operatorname{sh}\mathcal{H}_a)^2}. \tag{56}$$

Adunînd cele două categorii de pierderi vor rezulta pierderile totale pe unitatea de lungime

$$P_t = P_\tau + P_j = \frac{\rho \nu q^2}{2h^3} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^2}{\mathcal{H}_a \operatorname{cth} \mathcal{H}_a - 1}. \tag{57}$$

Dacă ţinem cont că pierderile totale de energie pe unitatea de lungime se pot exprima şi cu relaţia

$$P_t = \rho g q j, \tag{58}$$

din egalarea expresiilor (57) şi (58) şi luînd în considerare şi relaţiile (35), (36) şi (38) rezultă expresia coeficientului de pierderi hidraulice

$$\lambda = \frac{8}{\mathcal{R}_e} \cdot \frac{\mathcal{H}_a^2}{\mathcal{H}_a \operatorname{cth} \mathcal{H}_a - 1}, \tag{59}$$

relaţie identică cu (40), însă obţinută pe altă cale.

Pentru a afla ponderea pierderilor de diverse naturi facem raportul

$$\frac{P_j}{P_\tau} = \frac{\mathcal{H}_a^2 + \mathcal{H}_a \operatorname{sh} \mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a - 2\operatorname{sh}^2 \mathcal{H}_a}{\mathcal{H}_a \operatorname{sh} \mathcal{H}_a \operatorname{ch} \mathcal{H}_a - \mathcal{H}_a^2} = 1 - 2 \frac{\left(\frac{\operatorname{sh} \mathcal{H}_a}{\mathcal{H}_a}\right) - 1}{\frac{\operatorname{sh} 2\mathcal{H}_a}{2\mathcal{H}_a} - 1}, \tag{60}$$

care vedem că depinde numai de numărul lui Hartmann.

Pentru valorile extreme ale numărului Hartmann, raportul devine

$$\lim_{\mathcal{H}_a \to 0} \frac{P_j}{P_\tau} = 0, \qquad \lim_{\mathcal{H}_a \to \infty} \frac{P_j}{P_\tau} = 1. \tag{61}$$

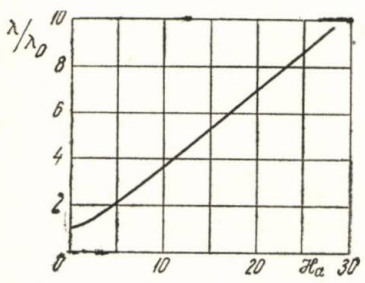


Fig. 6

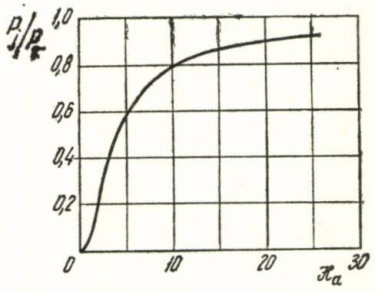


Fig. 7

Variaţia raportului coeficienţilor de pierderi hidraulice în mişcarea Hartmann şi Hagen-Poiseuille (39) şi a raportului pierderilor hidraulice prin efect electrocaloric şi prin frecare (60) sînt redate în graficele din figurile 6 şi 7.

NOTAȚII UTILIZATE

v — viteza,
t — timpul,
ρ — densitatea,
g — accelerația gravitațională,
p — presiunea,
ν — viscozitatea cinematică,
μ — permeabilitatea magnetică absolută,
B — inducția magnetică,
σ — conductivitatea electrică,
h — semidistanța dintre planele între care are loc mișcarea,
P — gradientul presiunii,
$\mathcal{H}_a$ — numărul lui Hartmann,
q — debitul unitar,
J — densitatea curentului de conducție,
f — forța electromagnetică ce acționează asupra fluidului din unitatea de volum,
j — pierderea de sarcină hidraulică pe unitatea de lungime,
λ — coeficientul de pierdere de sarcină hidraulică,
D_H — diametrul hidraulic,
Ω — secțiunea udată,
χ — perimetrul udat,
v_{med} — viteza medie,
$\mathcal{R}_e$ — numărul lui Reynolds,
τ — efortul unitar tangențial de viscozitate,
P_τ — puterea pe unitatea de lungime ce se transformă în căldură pe unitate de timp, datorită viscozității,
P_j — puterea electromagnetică ce se transformă în căltură pe unitatea de timp, prin efect electrocaloric,
P_t — puterea totală pe unitatea de lungime ce se transformă în căldură pe unitate de timp.

CONCLUZII

Așa cum în [4] s-a arătat că repartiția parabolică a vitezei în mișcarea Hagen-Poiseuille corespunde unui minimum al pierderilor de energie, tot așa și în mișcarea Hartmann repartiția după cosinusul hiperbolic realizează și ea un minimum. Evident că la același debit, pierderile de energie în mișcarea Hartmann sînt mai mari.

Raportul pierderilor în cele două mișcări menționate crește mai rapid decît liniar funcție de numărul $\mathcal{H}_a$.

În mișcarea Hartmann pierderile de energie prin efect electrocaloric și datorită viscozității sînt cam de același ordin de mărime cu excepția numerelor $\mathcal{H}_a$ foarte mici.

Pe baza observațiilor de mai sus, se poate pune întrebarea dacă nu cumva repartiția vitezelor medii temporale după curba logaritmică în mișcarea turbulentă nu realizează și ea un minimum al pierderilor de energie prin frecare vîscoasă și prin frecare turbulentă.

Primită la redacție la 18 noiembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor vîscoase*, București, Edit. Academiei, 1967.
2. L. Dragoș, *Magnetodinamica fluidelor*, București, Edit. Academiei, 1969.
3. F. Iorgulescu, *Metodă de calcul a pierderilor de sarcină în mișcarea laminară*, Hidrotehnica, *1* (1953).
4. M. Arsenie și D. Arsenie, *Considerații variaționale asupra pierderilor de energie în curgerea laminară a lichidelor newtoniene în conducte rectilinii de secțiune circulară*, St. cerc. mec. apl., **27**, *4*, 829—833 (1968).

CURGEREA TURBULENTĂ ÎNTR-O CONDUCTĂ CIRCULARĂ NETEDĂ

de I. SETEANU
Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se prezintă un procedeu de determinare a pulsaţiilor vitezei lichidului în curgere turbulentă într-o conductă circulară netedă cu gradient de presiune, admiţînd pulsaţii aleatorii de mică amplitudine ale densităţii lichidului considerat în medie incompresibil. Se obţin expresiile pulsaţiilor vitezei şi media statistică a vitezei.

1. INTRODUCERE

După cum arată cercetările experimentale [1], turbulenţa este repartizată neuniform în secţiunea transversală a conductei circulare în care se produce curgerea unui lichid. Se constată că intensităţile pulsaţiilor diferitelor componente ale vitezei prezintă maxime în vecinătatea pereţilor scăzînd către axul conductei şi anulîndu-se pe pereţii solizi. Disipaţia de energie datorită viscozităţii are loc îndeosebi în substratul laminar.

Studiul teoretic al curgerii turbulente bazat pe ecuaţiile lui Reynolds conţine în mod tacit presupunerea că mişcarea fluidului turbulent are, pe mici intervale de timp, un caracter laminar. Ca urmare, procesul de curgere este descris de către ecuaţiile lui Navier-Stokes în care însă componentele vitezei si presiunii prezintă pulsaţii aleatorii de mică intensitate, corelate statistic şi de valoare medie nulă.

Într-o lucrare anterioară [2] s-a admis că o cauză posibilă de apariţie a pulsaţiilor vitezei şi presiunii o constituie existenţa unor pulsaţii aleatorii de mică amplitudine ale densităţii şi s-au obţinut concluzii apropiate de rezultatele experimentale admiţînd, pentru simplificare, coeficientul de corelaţie constant şi pulsaţiile densităţii independente de variabilele spaţiale.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 741–751

2. ECUAȚIA DE CONTINUITATE

Într-un sistem de coordonate cilindrice cu axa z, dirijată după axa cilindrului, ecuația de continuitate pentru un fluid compresibil se scrie

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + r\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \tag{1}$$

Această ecuație este verificată atît de către fluidul perfect, cît și de către fluidul vîscos sau turbulent, deoarece are un caracter cinematic, independent de modelul de fluid admis.

Datorită simetriei procesului putem admite următoarele relații:

$$\begin{aligned} v_r &= v_r(r,\ t), \\ v_\theta &= 0, \\ v_z &= v_z(r,\ t). \\ \rho &= \rho(r,\ t). \end{aligned} \tag{2}$$

Cu aceste condiții, ecuația de continuitate devine

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) = 0 \tag{3}$$

sau, dacă intregăm în raport cu r,

$$\rho r v_r + \int_0^r r\frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}r = f(t).$$

Admițînd că pe axul conductei rămîne finită mărimea componentei v_r a vitezei, obținem făcînd pe r să tindă spre zero că $f(t)$ este identic nulă; putem scrie deci

$$\rho r v_r + \int_0^r r\frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}r = 0. \tag{4}$$

Deoarece experiența arată că, în cazul curgerii turbulente în conducta circulară netedă, pulsațiile componentelor vitezei nu sînt nule, urmează că integrala din formula (4) nu poate fi identic nulă. Dacă am admite că fluidul este riguros incompresibil, am obține

$$v_r \equiv 0, \tag{5}$$

adică o concluzie incompatibilă cu observaţiile experimentale. Este natural deci să presupunem existenţa unor pulsaţii aleatorii ale densităţii fluidului considerat în medie incompresibil.

Pe peretele solid, datorită condiţiei de aderenţă, componentele vitezei instantanee trebuie să se anuleze. Din relaţia (4) se obţine

$$\int_0^R r \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dr = 0. \tag{6}$$

Formula (6) arată că ipoteza conform căreia ρ, deci şi $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, ar depinde doar de timp, admisă în lucrarea [2], nu mai poate fi considerată acceptabilă. Putem interpreta formula (6) ca o condiţie restrictivă impusă dependenţei pulsaţiilor densităţii ρ de variabila r.

Întrucît nu cunoaştem modul în care depind pulsaţiile densităţii de r, vom admite cea mai simplă dependenţă posibilă, anume

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 2a(t) + 3b(t)r, \tag{7}$$

unde coeficienţii $a(t)$ şi $b(t)$ sînt mărimi aleatorii de valoare medie nulă şi de mică amplitudine.

Pentru generalitate, vom considera şi expresia mai complexă

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 2a(t) + n\, b(t)\, r^{n-2}, \tag{8}$$

care conţine formula (7) ca un caz particular ($n = 3$).

Condiţia (6) se poate exprima astfel

$$\int_0^R r \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dr = aR^2 + bR^n = 0,$$

adică se obţine

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -2bR^{n-2} + nbr^{n-2}. \tag{9}$$

Introducînd în formula (4) expresia (9) se obţin pulsaţiile v_r

$$v_r = \frac{b}{\rho_0}(rR^{n-2} - r^{n-1}), \tag{10}$$

unde am neglijat la numitor pulsaţiile densităţii, datorită ordinului de mărime al amplitudinii funcţiei $b(t)$.

Observăm că maximul în raport cu r al pulsației v_r se produce pentru

$$r = \frac{R}{\sqrt[n-2]{n-1}}, \tag{11}$$

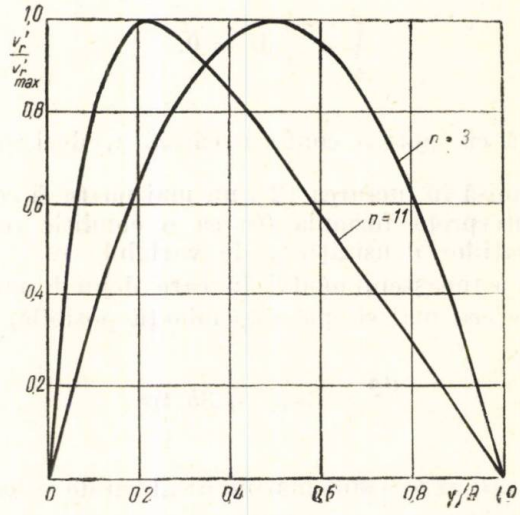


Fig. 1

adică este cu atît mai apropiat de perete ($r = R$), cu cît n este mai mare. În particular, pentru $n = 3$, adică în condițiile validității formulei (7), maximul apare la $R/2$. În figura 1 se indică modul de variație al lui v_r, exprimat de formula (10) pentru $n = 3$ și $n = 11$ s-a folosit notația

$$y = R - r. \tag{12}$$

3. ECUAȚIA DINAMICĂ

Formula (10) indică anularea pulsației v_r pe axul conductei ($r = 0$), pe cînd experiența arată că, deși aceasta scade odată cu r, totuși pe ax are o valoare finită. Acest fapt arată că dependența lui $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ de r este în realitate mai complexă decît cea admisă în formula (8).

Pentru determinarea componentei v_z a vitezei vom admite că, așa cum indică și rezultatele experimentale, disipația de energie datorită viscozității este limitată la un spațiu restrîns în vecinătatea peretelui conductei (în substratul-limită laminar). Este posibil deci, în primă aproximație, să neglijăm efectul viscozității în zona centrală a secțiunii transversale a conductei, adică să folosim modelul fluidului perfect turbulent în care componentele vitezei instantanee sînt corelate statistic [3]. Coefi-

cientul de corelaţie statistică a două mărimi aleatorii φ şi ψ de medie statistică nulă este, prin definiţie [4],

$$R = \frac{\sqrt{(\overline{\varphi\psi})^2}}{\sqrt{\overline{\varphi^2}}\sqrt{\overline{\psi^2}}}. \tag{13}$$

Ca şi în lucrarea [2], vom admite, pentru determinarea analitică a pulsaţiei v_z' şi a efortului de frecare turbulentă

$$\tau = \rho_0 \overline{(v_r' v_z')}, \tag{14}$$

că pulsaţiile vitezei au amplitudinile de acelaşi ordin de mărime cu amplitudinile pulsaţiilor vitezei în mişcarea fluidului perfect neturbulent în care apar pulsaţii ale densităţii date de formula (8) şi că, pentru simplificarea calculelor, coeficientul de corelaţie statistică R este aproximativ constant în raport cu variabilele spaţiale. Observăm că în formula (14) v_r' coincide cu v_r dat de formula (10), deoarece media statistică a funcţiei v_r este nulă. În această accepţie, deosebirea dintre fluidul perfect neturbulent şi cel turbulent se manifestă doar în existenţa unui coeficient de corelaţie statistică nenul la cel din urmă.

Ecuaţiile lui Euler ale fluidului perfect compresibil devin, dacă ţinem seamă de condiţiile (2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{15}$$

A doua ecuaţie arată că $\dfrac{\partial p}{\partial z}$ depinde doar de r şi t, adică

$$p = z\,A(r,\ t) + B(r,\ t),$$

iar prima ecuaţie arată că $A(r,\ t)$ depinde doar de t. Deoarece variaţia liniară a presiunii în raport cu z este de obicei legată de existenţa unei pierderi de sarcină tipică fluidului vîscos sau turbulent, în aproximaţia fluidului perfect neturbulent pe care am adoptat-o vom admite că $A(r, t)$ este egală cu zero. Atunci ecuaţia a doua se poate scrie

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \tag{16}$$

iar prima ecuaţie nu prezintă interes pentru noi, servind doar la determinarea modului de variaţie a presiunii în funcţie de r în fluid perfect neturbulent. În formula (16), v_r este dată de expresia (10).

Formula (16) constituie o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul I care se poate integra prin metoda caracteristicelor. Sistemul lui Cauchy asociat acestei ecuaţii se scrie

$$dt = \frac{dr}{v_r} \tag{17}$$

sau, ţinînd seamă de expresia (10) a vitezei, devine

$$\frac{\rho_0 dr}{rR^{n-2} - r^{n-1}} = b(t)\, dt. \tag{18}$$

Vom introduce funcţia $\varphi(r)$, primitiva funcţiei din membrul stîng a ecuaţiei (18)

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho_0 dr}{rR^{n-2} - r^{n-1}} \tag{19}$$

şi vom nota prin $b_1(t)$ funcţia

$$b_1(t) = \int b(t)\, dt, \tag{20}$$

observăm că $b_1(t)$ este, de asemenea, o mărime pulsatorie cu aceleaşi proprietăţi ca şi $b(t)$.

În aceste condiţii, integrala primă a sistemului lui Cauchy (17) se scrie

$$\varphi(r) - b_1(t) = \text{const}, \tag{21}$$

adică soluţia v_z a ecuaţiei cu derivate parţiale (16) are forma

$$v_z = f(\varphi - b_1(t)), \tag{22}$$

unde f este o funcţie arbitrară.

Întrucît $b_1(t)$ este un parametru mic, vom putea dezvolta în serie expresia (22) după puterile lui $b_1(t)$ şi ne vom limita doar la primii termeni

$$v_z = f(\varphi) - b_1(t) f'(\varphi). \tag{23}$$

Formula (23) poate fi interpretată ca o relaţie de dependenţă între viteza instantanee v_z, viteza medie $\overline{v}_z$ şi pulsaţia vitezei v'_z:

$$v_z = \overline{v}_z + v'_z, \tag{24}$$

unde am notat

$$\overline{v}_z = f(\varphi),$$

$$v'_z = -b_1(t) f'(\varphi). \tag{25}$$

Relaţiile (25) care conţin funcţia arbitrară f sînt specifice fluidului perfect neturbulent cu pulsaţii ale densităţii date de către formula (8). Conform ipotezelor admise, vom presupune că dependenţa dintre v'_z şi $\overline{v}_z$ exprimată prin formulele

$$v'_z = -b_1(t) \frac{\mathrm{d}\overline{v}_z}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{26}$$

rămîne valabilă şi pentru fluidul perfect turbulent şi, în plus, va apare corelaţia statistică între v'_r dată de formula (10) şi v'_z. Din acest motiv, coeficienţii dependenţi de timp ce apar în formulele (10) şi (26) vor fi consideraţi complet independenţi; vom menţiona aceasta scriind

$$v'_r \sim rR^{n-2} - r^{n-1},$$

$$v'_z \sim \frac{\mathrm{d}\overline{v}_z}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{27}$$

unde coeficienţii de proporţionalitate nefiguraţi sînt funcţii aleatorii de timp de mică amplitudine şi de valoare medie nulă.

Observăm că putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}\overline{v}_z}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}\overline{v}_z}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi},$$

iar, datorită formulei (19),

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{\varrho_0}{rR^{n-2} - r^{n-1}},$$

adică expresiile (27) capătă forma finală

$$v'_r \sim rR^{n-2} - r^{n-1},$$

$$v'_z \sim v'_r \frac{\mathrm{d}\overline{v}_z}{\mathrm{d}r}. \tag{28}$$

Întrucît în apropierea peretelui plan putem scrie

$$v'_r \sim (n-1)\, y,$$

a doua din formulele (28) devine

$$v'_z \sim y \frac{d\overline{v}_z}{dr}, \tag{29}$$

adică se regăsește aproximația lungimii de amestec a lui Prandtl.

Ca urmare a formulelor (28), efortul tangențial de frecare turbulentă τ, dat de formula (14), se scrie

$$\tau = \varkappa \rho_0 \left\{ \frac{r}{R} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{n-2} \right] \right\}^2 \frac{d\overline{v}_z}{dr}, \tag{30}$$

unde $\varkappa$ este un coeficient de proporționalitate.

4. STUDIUL CURGERII TURBULENTE

Pentru procesul de curgere considerat, ecuațiile lui Reynolds au forma [5]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{v'_r v'_z}) + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial r} \right), \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{v'^2_r}) + \frac{\overline{v'^2_0}}{r}, \\ \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

După cum se știe, a doua ecuație din (31) arată că $\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial r \partial z}$ se anulează, deci $\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}$ nu depinde de r. Prima ecuație se poate deci integra în raport cu r:

$$\frac{r^2}{2\rho_0} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = -r \overline{v'_r v'_z} + \nu r \frac{d\overline{v}_z}{dr}. \tag{32}$$

Introducem pe τ dat de formula (30) și obținem

$$\nu \frac{d\overline{v}_z}{dr} + \varkappa \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{n-2} \right]^2 \frac{d\overline{v}_z}{dr} = \frac{1}{\rho_0} \frac{r}{2} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z}, \tag{33}$$

din care se deduce expresia

$$\frac{d\overline{v}_z}{dr} \sim \frac{\dfrac{r}{R}}{1 + K \left(\dfrac{r}{R} \right)^2 \left[1 - \left(\dfrac{r}{R} \right)^{n-2} \right]^2}, \tag{34}$$

în formula (34) s-a folosit notația

$$K = \frac{\varkappa}{\nu}. \tag{35}$$

Pentru cazul particular $n = 3$, ecuația diferențială ordinară (34) se poate integra exact. Pentru aceasta vom face schimbarea de variabilă

$$\eta = \frac{r}{R} - \frac{1}{2}, \tag{36}$$

ecuația diferențială (34) devine astfel

$$\frac{d\overline{v}_z}{d\eta} \sim \frac{\eta}{R_2} + \frac{1}{2}\frac{1}{R_2}, \tag{37}$$

am folosit notația

$$R_2 = \left(1 + \frac{K}{16}\right) - \frac{K}{2}\eta^2 + K\eta^4.$$

Soluția ecuației diferențiale (37) se poate exprima cu ajutorul funcțiilor elementare [6]

$$\overline{v}_z \sim \frac{1}{2Kq^2 \sin\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\eta^2 - q^2 \cos\alpha}{q^2 \sin\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{8Kq^3 \sin\alpha} \left\{ \sin\frac{\alpha}{2} \ln \frac{\eta^2 + 2q\eta \cos\frac{\alpha}{2} + q^2}{\eta^2 - 2q\eta \cos\frac{\alpha}{2} + q^2} + \right.$$

$$\left. + 2\cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{arctg} \frac{\eta^2 - q^2}{2q\eta \sin\frac{\alpha}{2}} \right\} + \text{const}, \tag{38}$$

în formula (38) s-a notat

$$q = \sqrt[4]{\frac{1}{K} + \frac{1}{16}}, \tag{39}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{K}{K+16}}.$$

Constanta din formula (38) se precizează prin condiţia de aderenţă pe peretele conductei

$$\overline{v}_z|_{r=R} = 0. \tag{40}$$

Am efectuat calculele pentru următoarele valori ale constantelor

$$n = 3,$$
$$K = 100,$$
$$q = 0{,}52,$$
$$\cos\alpha = 0{,}93.$$

Rezultatele sînt grupate în tabela următoare:

y/R	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\overline{v}_z/\overline{v}_{z\,max}$	0	0,235	0,403	0,644	0,752	0,823	0,871	0,912	0,940	0,968	0,987	1,0
$v'_r/v'_{r\,max}$	0	0,192	0,36	0,64	0,84	0,96	1	0,96	0,84	0,64	0,36	0
$v'_z/v'_{z\,max}$	0	0,827	1	0,805	0,607	0,478	0,386	0,319	0,261	0,201	0,111	0

Curbele obţinute sînt reprezentate în figura 2.

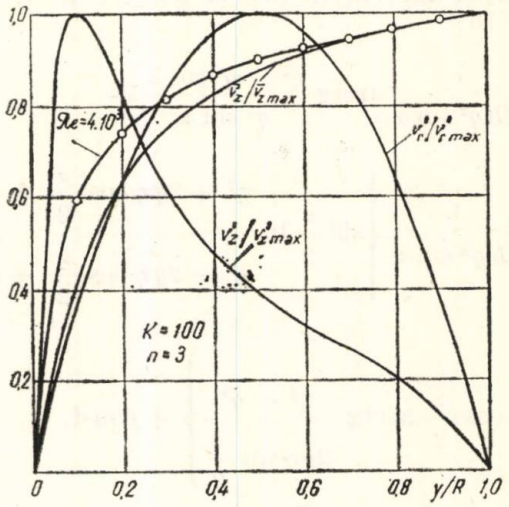


Fig. 2

Se constată că, deşi ipoteza (9) asupra variaţiei lui $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ este întrucîtva arbitrară, legea de variaţie a vitezei medii statistice $\overline{v}_z$ este destul de apropiată de rezultatele experimentale. Pentru comparaţie, se indică curba experimentală pentru numărul lui Reynolds $\mathcal{R}e = 4.10^3$ obţinută în experienţele lui Nikuradse [7].

Divergențele sînt mai importante în vecinătatea peretelui și se pot explica prin abaterea sensibilă a pulsației v'_r de la rezultatele experimentale. După cum am menționat anterior, experiența arată că maximul pulsațiilor vitezei se produce în vecinătatea peretelui. Pulsațiile v'_z ale vitezei obținute teoretic satisfac însă această condiție.

Primită la redacție la 3 martie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. J. Laufer, *The structure of turbulence in fully developed pipe flow*, Nat. Advisory Comm. Aeron., Rept. 1174 (1954); Daily J., Harleman D., Fluid Dynamics, Addison-Wesley Publ. Company, Inc., Don Mills, Ontario, 1966.
2. D. Dumitrescu, I. Seteanu, *Contribuții la studiul curgerii turbulente în vecinătatea unui perete plan*, St. cerc. mec. apl., **XXXI**, *3* (1972).
3. L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Éditions Mir, Moscou, 1971.
4. J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-Londra, 1959.
4. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor vîscoase*, București, Edit. Academiei, 1967.
5. I. S. Gradstein, I. M. Rîjik, *Tabliți integralov, summ, riadov i proizvedenii*, Izd. Nauka, GRFML, Moskva, 1971.
7. H. Reichardt, *Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen*, ZAMM, Bd. *31*, 208 (1951).

ASUPRA ECUAȚIILOR MIȘCĂRII GENERALE A RACHETEI ÎN MEDIU REZISTENT

de FLORENTIN MORARU
Academia militară

În lucrare se elaborează un sistem complet de ecuații, pentru determinarea mișcării generale a rachetei, cu șase grade de libertate, pe traiectorii oarecare, în atmosfera neperturbată, fără a mai face apel la ipotezele și simplificările adoptate în mod curent. Este tratat cazul rachetei balistice, simetrică în principiu în raport cu axa longitudinală, putînd avea o rotație proprie în jurul acestei axe. Se ține cont de întregul ansamblu al forțelor și cuplurilor ce acționează asupra rachetei, de fenomenul de basculare și de deviațiile laterale de la părăsirea lansatorului. De asemenea, se iau în considerație disimetriile aerodinamice și gazodinamice ale rachetei. Sistemul ecuațiilor astfel obținute este redus la forma canonică de ordinul I în vederea integrării cu ajutorul calculatoarelor electronice. În cazul zborului cu incidențe mici, ecuațiile sînt simplificate și aduse la o formă convenabilă integrării pe arce scurte de traiectorie.

1. INTRODUCERE

Necesitatea cunoașterii intime a comportării rachetei în timpul zborului, precum și necesitatea determinării cît mai riguroase a performanțelor de zbor au impus abordarea problemelor dinamicii rachetei în toată complexitatea lor, în cadrul cercetărilor actuale relevîndu-se preocupări deosebite pentru alegerea unor modele fizice cît mai apropiate de realitatea fenomenelor analizate.

În cadrul acestor preocupări, una dintre problemele cele mai complexe, abordate în cadrul dinamicii rachetelor, este determinarea mișcării generale a rachetei la suprafața Pămîntului, considerînd întregul sistem de forțe și de cupluri care acționează asupra rachetei.

Datorită importanței sale deosebite, problema mișcării generale a rachetei a fost abordată în ultimul timp într-o serie de lucrări [12], [9], [2], [5], [7], [3], [1], [13], [6] în care se tratează unele părți foarte importante ale ei cum ar fi stabilitatea și comanda mișcării, determinarea traiectoriei, influența rotației Pămîntului, studiul dispersiei traiectoriilor etc.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 753–779

La atacarea frontală a problemei mişcării generale a rachetei în condiţii reale de zbor se întîmpină însă serioase dificultăţi, legate de precizarea şi de formularea acestor condiţii, fiind dificilă însăşi întocmirea ecuaţiilor diferenţiale de mişcare într-o formă cît mai completă.

Din această cauză, după cum este cunoscut, analiza mişcării rachetelor se face adoptîndu-se în mod curent o serie de ipoteze menite să simplifice modelul fizic al fenomenului în funcţie de scopul urmărit, în vederea reducerii gradului de complexitate al ecuaţiilor care descriu fenomenul respectiv. Astfel, în cazul incidenţelor mici, se admite ipoteza independenţei dintre mişcarea longitudinală (sau mişcarea din planul de lansare) şi mişcarea laterală. Mişcarea spaţială în jurul centrului de greutate se analizează în mod curent pe arce scurte de traiectorie, fără a se lua în consideraţie variaţia în ansamblu a vectorului vitezei centrului de greutate. Calculul traiectoriei se face considerînd pentru unghiul de incidenţă şi unghiul de derivă variaţiile corespunzătoare ale acestora, obţinute prin studierea separată a mişcării longitudinale şi a mişcării laterale; de cele mai multe ori însă, pentru determinarea traiectoriei se admite cunoscuta ipoteză a mişcării balistice, fără incidenţă, făcîndu-se abstracţie în felul acesta de efectul portanţei, a cărei variaţie este condiţionată, prin intermediul incidenţei, de mişcarea în jurul centrului de greutate. În sfîrşit, calculul dispersiei traiectoriilor se reduce, de obicei, la determinarea independentă a deviaţiilor traiectoriilor în mişcări plane particulare (în planul de lansare şi în planul lateral) sau în mişcări spaţiale particulare (pe traiectorii orizontale sau aproape rectilinii, pentru rachete fără asimetrii), neglijînd unele efecte aerodinamice sau considerînd că disimetriile rachetei şi forţele aerodinamice sînt liniar independente.

În această lucrare se urmăreşte elaborarea unui sistem de ecuaţii cît mai complet pentru determinarea mişcării generale a rachetei cu şase grade de libertate, pe traiectorii oarecare, în atmosfera neperturbată, fără a mai face apel la ipotezele şi simplificările menţionate, adoptate în mod curent. Este tratat cazul rachetei balistice, simetrică în principiu în raport cu axa longitudinală, putînd avea o rotaţie proprie în jurul acestei axe. Se ţine cont de sistemul complet de forţe şi cupluri ce acţionează asupra rachetei, de fenomenul de basculare şi de deviaţiile laterale de la părăsirea lansatorului. În fine, racheta pe care o considerăm este caracterizată de mici abateri sau „imperfecţiuni" faţă de simertia longitudinală absolută (perfectă) care îşi găsesc expresia în aşa-numitele „asimetrii aerodinamice" şi „excentricităţi gazodinamice" ale rachetei; aceste disimetrii sînt datorite în special toleranţelor de fabricaţie ale corpului, ale motorului, precum şi neuniformităţii scurgerii gazelor prin ajutaj. În literatura de specialitate, o astfel de rachetă este denumită „rachetă reală", iar mişcarea ei în condiţiile menţionate este denumită „mişcare reală".

2. SISTEME DE AXE ŞI VARIABILE DE POZIŢIE

Sistemele de axe de coordonate, precum şi parametrii ce definesc mişcarea rachetei, se aleg astfel încît să nu limiteze generalitatea problemei şi să conducă la ecuaţii care, în urma unor transformări şi simplificări adecvate, să poată fi integrate prin metode cunoscute.

Mişcarea se raportează la un sistem de referinţă $O_p x_l y_l z_l$ (fig. 1) solidar cu Pămîntul, direcţia de lansare fiind una din axele alese, definit în cele ce urmează.

În punctul de lansare (O_p) se consideră sistemul „legat de Pămînt", $O_p x_p y_p z_p$, avînd axa $O_p y_p$ după verticala locului poziţiei de lansare, axa

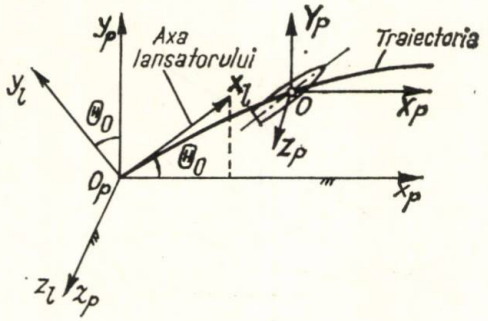


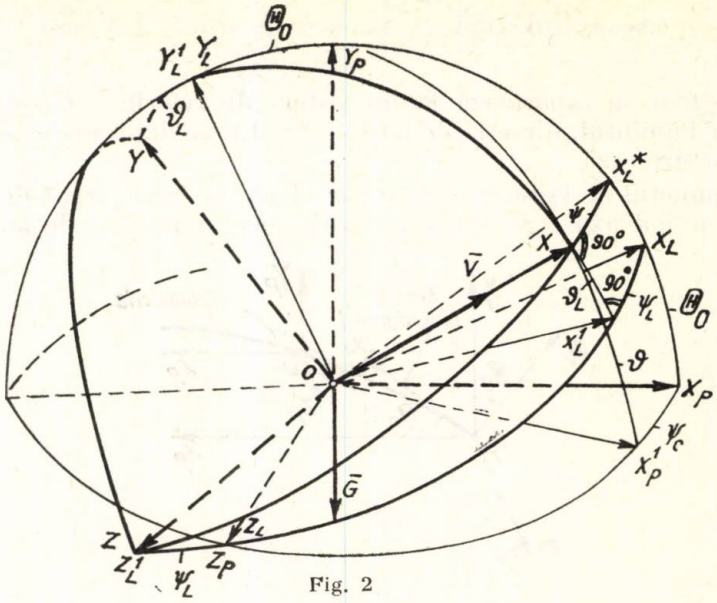
Fig. 1

$O_p x_p$ — orizontala din planul de lansare (planul vertical ce conţine axa lansatorului) în sensul mişcării, iar axa $O_p z_p$ — axă laterală orizontală, orientată în dreapta planului de lansare, astfel încît sistemul să fie cartezian drept. Rotind sistemul $O_p x_p y_p z_p$ cu unghiul de lansare Θ_0 (înclinarea axei lansatorului faţă de planul orizontal din poziţia de lansare) în jurul axei orizontale $O_p z_p$, se obţine sistemul $O_p x_l y_l z_l$, menţionat mai înainte, a cărui axă $O_p x_l$ coincide cu axa lansatorului în sensul mişcării (fig. 1). Vom numi sistemul $O_p x_l y_l z_l$ — sistemul „legat de direcţia de lansare".

În centrul de greutate al rachetei se consideră două sisteme, $OX_p Y_p Z_p$ şi $OX_L X_L Z_L$, cu axele de direcţii invariabile în raport cu Pămîntul; astfel, axele sistemului $OX_p Y_p Z_p$ (fig. 1) sînt în permanenţă paralele cu axele sistemului $O_p x_p y_p z_p$, „legat de Pămînt", iar axele sistemului $OX_L Y_L Z_L$ sînt în permanenţă paralele cu axele sistemului $O_p x_l y_l z_l$. Rezultă că sistemele $OX_p Y_p Z_p$ şi $OX_L Y_L Z_L$ execută în raport cu Pămîntul o mişcare de translaţie cu viteza $\overline{V}$ a centrului de greutate al rachetei. Se observă (fig. 2) că sistemul $OX_L Y_L Z_L$ se obţine rotind sistemul $OX_p Y_p Z_p$ cu unghiul Θ_0 în jurul axei OZ_p, care coincide cu OZ_L, iar planele $OX_p Y_p$ şi $OX_L Y_L$ coincid şi sînt paralele cu planul de lansare.

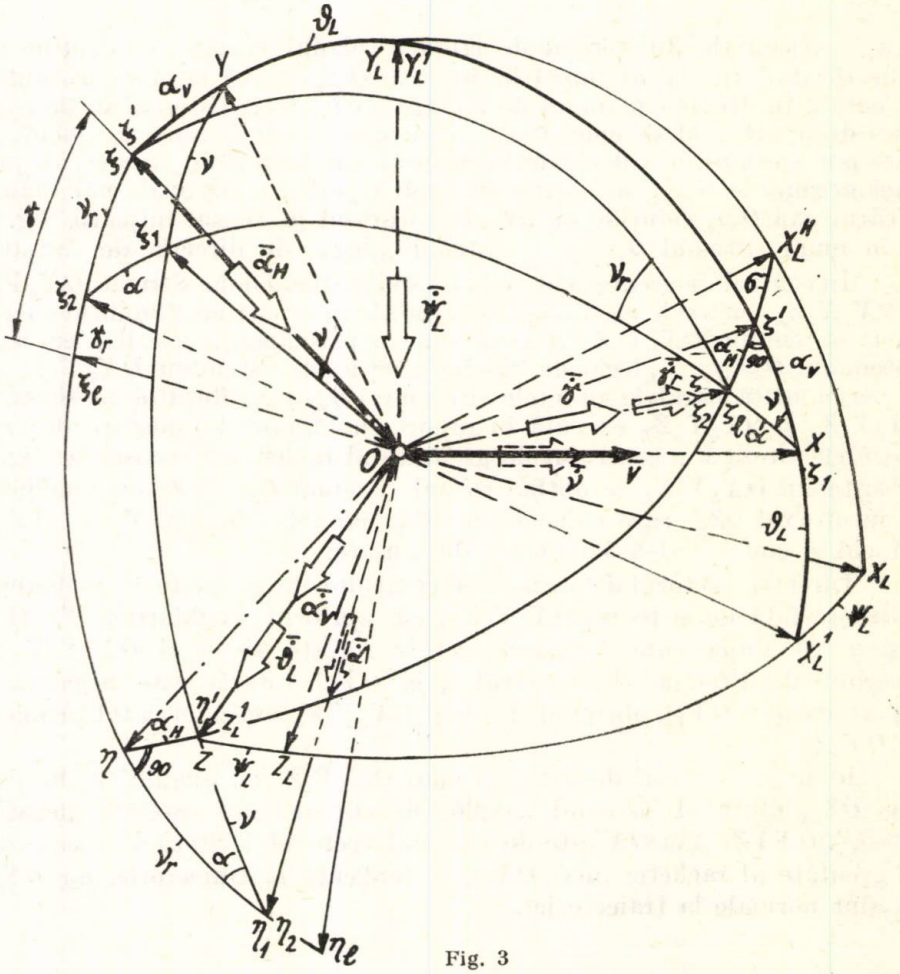
Direcţia vectorului viteză $\overline{V}$ a centrului de greutate al rachetei se defineşte faţă de sistemul $OX_L Y_L Z_L$, cu ajutorul unghiurilor Ψ_L şi ϑ_L (fig. 2, 3) după cum urmează: a) se roteşte sistemul $OX_L Y_L Z_L$ cu „unghiul de direcţie" Ψ_L în jurul axei OY_L (rotaţia este negativă în raport cu axa OY_L), obţinînd sistemul $OX_L^1 Y_L^1 Z_L^1$ a cărui axă OY_L^1 coincide cu OY_L;

b) se roteşte mai departe sistemul $OX_L^1 Y_L^1 Z_L^1$ cu unghiul ϑ_L în jurul axei OZ_L^1, obţinînd sistemul „axelor de curent" sau sistemul „legat de viteză", $OXYZ$. Axa OX este de-a lungul vectorului viteză $\overline{V}$ a centrului de greutate al rachetei (deci OX este tangentă la traiectorie, iar OY şi OZ sînt normale la traiectorie).



Θ_0
Y_L^1
Y_L
Y_P
ϑ_L
Y
X_L^*
ψ
X
$90°$
X_L
$\bar{V}$
$90°$
ϑ_L
ψ_L
Θ_0
X_L^1
ϑ
O
X_P
ψ_c
X_P^1
$\bar{G}$
Z_L
Z
Z_L^1
Z_P
ψ_L

Fig. 2



ϑ_L
Y_L
Y_L^1
Y
α_V
ζ'
ζ
ν
γ
ν_r
ζ_1
$\bar{\dot{\alpha}}_H$
ζ_2
α
γ_r
ζ_ℓ
$\bar{\dot{\psi}}_L$
ν_r
X_L^H
σ
ζ'
α_H
90
α_V
$\bar{\dot{\gamma}}$
$\bar{\dot{\gamma}}_r$
ζ
ζ_2
ζ_ℓ
α'
X
O
$\bar{V}$
$\bar{\dot{\nu}}$
ζ_1
ϑ_L
X_L
ψ_L
X_L^1
$\bar{\dot{\alpha}}_V$
$\bar{\dot{\vartheta}}_L$
$\bar{\dot{\alpha}}$
η'
Z_L^1
α_H
η
90
Z
ψ_L
Z_L
ν
ν_r
α
η_1
η_2
η_ℓ

Fig. 3

Poziţia corpului rachetei se defineşte faţă de sistemul $OXYZ$, cu ajutorul unghiurilor α_V, α_H şi γ (fig. 3), după cum rezultă în continuare. Se roteşte sistemul $OXYZ$ cu unghiul α_V în jurul axei OZ, obţinînd sistemul $O\xi'\eta'\zeta'$, a cărui axă $O\eta'$ coincide cu OZ, iar $\sphericalangle(\overline{O\xi'}, \overline{OY}) = \sphericalangle(\overline{O\zeta'}, \overline{OX}) = \alpha_V$. Rotind apoi sistemul $O\xi'\eta'\zeta'$ cu unghiul α_H în jurul axei $O\xi'$ (rotaţia este negativă în raport cu $O\xi'$), se obţine sistemul $O\xi\eta\zeta$ a cărui axă $O\xi$ coincide cu $O\xi'$, iar $\sphericalangle(\overline{O\eta}, \overline{O\eta'}) = \sphericalangle(\overline{O\zeta}, \overline{O\zeta'}) = \alpha_H$. Axa longitudinală a rachetei este după axa $O\zeta$, iar $O\xi$ şi $O\eta$ sînt axe transversale ale rachetei. Sistemul $O\xi\eta\zeta$ este un sistem „semilegat" de rachetă în sensul că el execută toate mişcările axei longitudinale a rachetei, dar nu şi rotaţia proprie a corpului în jurul acestei axe. În sfîrşit, dînd sistemului $O\xi\eta\zeta$ rotaţia proprie γ în jurul axei $O\zeta$, se obţine sistemul $O\xi_l\eta_l\zeta_l$, legat de corpul rachetei, a cărui axă $O\zeta_l$ coincide cu $O\zeta$, iar $\sphericalangle(\overline{O\xi}, \overline{O\xi_l}) = \sphericalangle(\overline{O\eta}, \overline{O\eta_l}) = \gamma$.

Se observă că unghiul α, format de axa longitudinală $O\zeta$ a rachetei şi axa OX (direcţia vitezei), reprezintă unghiul de incidenţă, iar planul format de cele două axe reprezintă planul de incidenţă.

Poziţia rachetei faţă de sistemul $OXYZ$ se poate defini şi cu ajutorul unghiurilor α, ν şi γ_r (fig. 3) astfel : se roteşte sistemul $OXYZ$ cu unghiul ν (unghiul de precesie) în jurul axei OX, obţinînd sistemul $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, a cărui axă $O\zeta_1$ coincide cu OX, iar $\sphericalangle(\overline{O\xi_1}, \overline{OY}) = \sphericalangle(\overline{O\eta_{l1}}, \overline{OZ}) = \nu$; se roteşte în continuare sistemul $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ cu unghiul de incidenţă α (care are şi semnificaţia de unghi de nutaţie în sens Euler) în jurul axei $O\eta_{l1}$, obţinînd sistemul $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, a cărui axă $O\eta_2$ coincide cu $O\eta_{l1}$, iar $O\zeta_2$ coincide cu axa longitudinală $O\zeta$ a rachetei ; în sfîrşit, rotind sistemul $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ cu unghiul γ_r în jurul axei $O\zeta_2$ obţinem sistemul legat de rachetă $O\xi_l\eta_l\zeta_l$. Se observă că planele $O\xi_1\zeta_1$ şi $O\xi_2\zeta_2$ coincid cu planul de incidenţă, iar sistemele semilegate $O\xi\eta\zeta$ şi $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ diferă între ele printr-o rotaţie ν_r (fig. 3) în jurul axei $O\zeta$, avînd relaţia $\gamma = \gamma_r + \nu_r$.

3. RELAŢII CINEMATICE ŞI ECUAŢII DINAMICE GENERALE

Ţinînd cont de posibilităţile ulterioare de simplificare a ecuaţiilor de mişcare în vederea integrării, pentru întocmirea ecuaţiilor mişcării centrului de greutate vom utiliza sistemul de axe $OXYZ$ (legat de vectorul viteză), iar la întocmirea ecuaţiilor mişcării în jurul centrului de greutate vom utiliza sistemul de axe semilegate $O\xi\eta\zeta$ [8].

Vom determina mişcarea rachetei cu ajutorul următorilor parametri : V (modulul vitezei centrului de greutate), Ψ_L, ϑ_L, α_V, α_H şi γ, ordinea celor cinci rotaţii fiind cea indicată. Primii trei parametri (V, Ψ_L, ϑ_L) definesc vectorul viteză $\overline{V}$ a centrului de greutate şi deci mişcarea sistemului $OXYZ$ („legat de viteză") faţă de sistemul $O_p x_l y_l z_l$ — solidar cu Pămîntul. Ultimii trei parametri (α_V, α_H, γ) definesc mişcarea rachetei (a sistemului legat de rachetă) în raport cu sistemul $OXYZ$.

Viteza unghiulară $\overline{\Omega}$ a sistemului $OXYZ$ faţă de sistemul $O_p x_l y_l z_l$ sau faţă de $OX_L Y_L Z_L$ va fi deci

$$\overline{\Omega} = \dot{\overline{\Psi}}_L + \dot{\overline{\vartheta}}_L, \tag{1}$$

iar viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a rachetei față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$ (sau $OX_LY_LZ_L$) va fi

$$\bar{\omega} = \dot{\bar{\Psi}}_L + \dot{\bar{\vartheta}}_L + \dot{\bar{\alpha}}_V + \dot{\bar{\alpha}}_H + \dot{\bar{\gamma}}. \tag{2}$$

Definind vectorii $\bar{V}$, $\bar{\Omega}$ și $\bar{F}$ (rezultanta forțelor exterioare și reactive ce acționează asupra rachetei) prin componentele pe axele sistemului mobil $OXYZ$, ecuația vectorială a mișcării centrului de greutate al rachetei va fi

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}t} = m\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + \bar{\Omega}\times\bar{V}\right) = \bar{F}, \tag{3}$$

unde m este masa rachetei, iar $\dfrac{\partial\bar{V}}{\partial t}$ — derivata relativă a vitezei calculată față de axele mobile respective.

Proiectînd ecuația vectorială (3) pe axele sistemului mobil $OXYZ$, rezultă următoarele ecuații scalare pentru mișcarea centrului de greutate:

$$\begin{aligned} m(\dot{V}_X + \Omega_Y V_Z - \Omega_Z V_Y) &= F_X, \\ m(\dot{V}_Y + \Omega_Z V_X - \Omega_X V_Z) &= F_Y, \\ m(\dot{V}_Z + \Omega_X V_Y - \Omega_Y V_X) &= F_Z. \end{aligned} \tag{4}$$

Admițînd ipoteza că racheta este un corp de revoluție simetric (din punct de vedere geometric și al distribuției maselor) în raport cu axa longitudinală $O\zeta$, rezultă că axele $O\xi$, $O\eta$ și $O\zeta$ sînt axe principale de inerție, iar momentul cinetic al rachetei față de centrul de greutate O se va scrie

$$\bar{K}_0 = J_\xi\omega_\xi\bar{i}_\xi + J_\eta\omega_\eta\bar{i}_\eta + J_\zeta\omega_\zeta\bar{i}_\zeta, \tag{5}$$

unde $\bar{i}_\xi$, $\bar{i}_\eta$, $\bar{i}_\zeta$ sînt respectiv, versorii axelor $O\xi$, $O\eta$ și $O\zeta$.

Viteza unghiulară a sistemului semilegat $O\xi\eta\zeta$ va fi

$$\bar{\omega}^* = \dot{\bar{\Psi}}_L + \dot{\bar{\vartheta}}_L + \dot{\bar{\alpha}}_V + \dot{\bar{\alpha}}_H = \bar{\omega} - \dot{\bar{\gamma}}. \tag{6}$$

Definind vectorii $\bar{K}_0$, $\bar{\omega}^*$ și $\bar{\mathcal{M}}_0$ (momentul rezultant, în raport cu centrul de greutate, al tuturor forțelor exterioare și reactive, inclusiv momentul cuplului de amortizare al jetului de gaze) prin componentele pe axele sistemului semilegat $O\xi\eta\zeta$, ecuația vectorială a mișcării rachetei în jurul centrului de greutate se va scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}\bar{K}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\bar{K}_0}{\partial t} + \bar{\omega}^*\times\bar{K}_0 = \bar{\mathcal{M}}_0, \tag{7}$$

unde $\frac{\partial \overline{K}_0}{\partial t}$ reprezintă derivata relativă a momentului cinetic calculată în raport cu sistemul mobil $O\xi\eta\zeta$.

Ținînd cont de (6), precum și de faptul că viteza unghiulară $\dot{\gamma}$ este de-a lungul axei $O\zeta$ (fig. 3), rezultă că între componentele vitezelor unghiulare $\overline{\omega}^*$ și $\overline{\omega}$ există relațiile

$$\omega_\xi^* = \omega_\xi, \quad \omega_\eta^* = \omega_\eta, \quad \omega_\zeta^* = \omega_\zeta - \dot{\gamma}. \tag{8}$$

Datorită simetriei longitudinale a rachetei, momentele de inerție în raport cu axele transversale vor fi egale, încît vom nota

$$J_\xi = J_\eta = J. \tag{9}$$

Proiectînd ecuația vectorială (7) pe axele sistemului semilegat $O\xi\eta\zeta$, ținînd cont de (5), (6), (8) și (9), rezultă următoarele ecuații scalare pentru mișcarea rachetei în jurul centrului de greutate:

$$\begin{aligned} &J\dot{\omega}_\xi + (J_\zeta - J)\,\omega_\zeta\omega_\eta + J\omega_\eta\dot{\gamma} = \mathcal{M}_\xi, \\ &J\dot{\omega}_\eta + (J - J_\zeta)\,\omega_\xi\omega_\zeta - J\omega_\xi\dot{\gamma} = \mathcal{M}_\eta, \\ &J_\zeta\dot{\omega}_\zeta = \mathcal{M}_\zeta. \end{aligned} \tag{10}$$

Observație. Termenii conținînd derivatele momentelor de inerție J și J_ζ (care sînt variabile în timpul funcționării motorului) au fost incluși în componentele momentului de amortizare al jetului de gaze definit ca în [10].

Din considerente geometrice, ținînd cont de figurile 2 și 3, se stabilesc componentele vitezei centrului de greutate $\overline{V}$ și ale vitezei unghiulare $\overline{\Omega}$ pe axele sistemului $OXYZ$,

$$V_X = V, \quad V_Y = V_Z = 0,$$

$$\Omega_X = -\dot{\Psi}_L \sin\vartheta_L, \quad \Omega_Y = -\dot{\Psi}_L \cos\vartheta_L, \quad \Omega_Z = \dot{\vartheta}_L, \tag{11}$$

precum și componentele vitezei de rotație $\overline{\omega}$ a rachetei pe axele sistemului $O\xi\eta\zeta$,

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -\dot{\alpha}_H - \dot{\Psi}'_L \cos(\vartheta_L + \alpha_V), \\ \omega_\eta &= \dot{\alpha}_V \cos\alpha_H + \dot{\vartheta}_L \cos\alpha_H + \dot{\Psi}'_L \sin(\vartheta_L + \alpha_V)\sin\alpha_H, \\ \omega_\zeta &= \dot{\gamma} + \dot{\alpha}_V \sin\alpha_H + \dot{\vartheta}_L \sin\alpha_H - \dot{\Psi}'_L \sin(\vartheta_L + \alpha_V)\cos\alpha_H. \end{aligned} \tag{12}$$

4. CONSIDERAȚII PRIVIND SISTEMUL DE FORȚE ȘI MOMENTE. INTRODUCEREA EFECTULUI DISIMETRIILOR RACHETEI

La întocmirea ecuațiilor de mișcare ale rachetei se consideră următoarele forțe și următoarele momente în raport cu centrul de greutate (fig. 2, 4) : forța de tracțiune ($\overline{\mathcal{F}}$), forța de greutate ($\overline{G}$), forța de rezistență

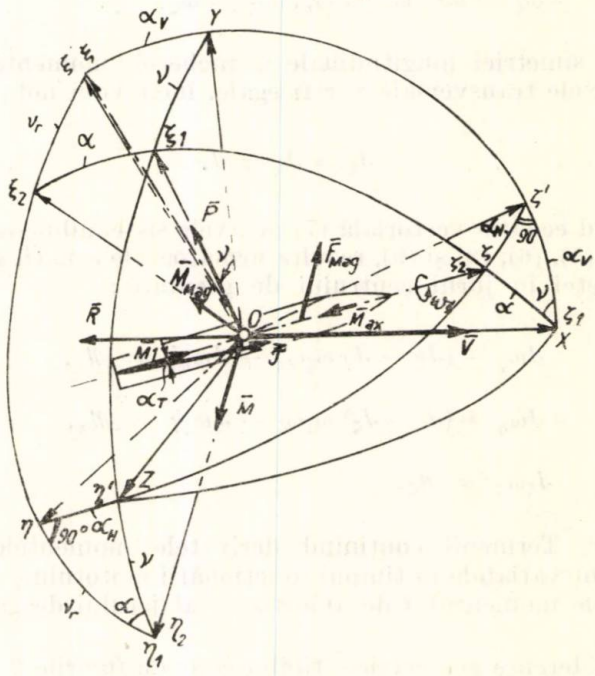


Fig. 4

la înaintare ($\overline{R}$), forța de portanță ($\overline{P}$), forța Magnus ($\overline{F}_{\text{Mag.}}$), momentul tracțiunii ($\overline{M}_{\mathcal{F}}$), momentul aerodinamic „principal" (de picaj-cabraj, $\overline{M}$), momentul Magnus ($\overline{M}_{\text{Mag.}}$), momentul cuplului aerodinamic axial de amortizare ($\overline{M}_{ax}$), momentul cuplului de amortizare al jetului de gaze ($\overline{M}_{am}$).

Vom face abstracție inițial de rotația Pământului și de variația accelerației gravitaționale, a căror influență în perioada activă este neglijabilă în cazul rachetelor la care segmentul activ al traiectoriei este de ordinul kilometrilor, iar durata perioadei active — de ordinul secundelor.

Considerînd cazul mai general al rachetei cu ajutaje înclinate (cu rotație reactivă), vectorul tracțiunii totale, $\overline{\mathcal{F}}$, reprezintă rezultanta tracțiunilor $\overline{\mathcal{F}}_i$, create de fiecare ajutaj înclinat (fig. 5), încît vom avea

$$\overline{\mathcal{F}} = \sum \overline{\mathcal{F}}_i \,. \tag{13}$$

Tracțiunea $\overline{\mathcal{T}_i}$ creată de un ajutaj înclinat are o componentă $\mathcal{T}_i^{\zeta}$, paralelă cu axa longitudinală $O\zeta$ a rachetei (fig. 5) și o componentă $\mathcal{T}_i^{t}$, tangentă la cercul de rază r pe care sînt dispuse ajutajele-înclinate față de axa longitudinală a rachetei cu unghiul τ.

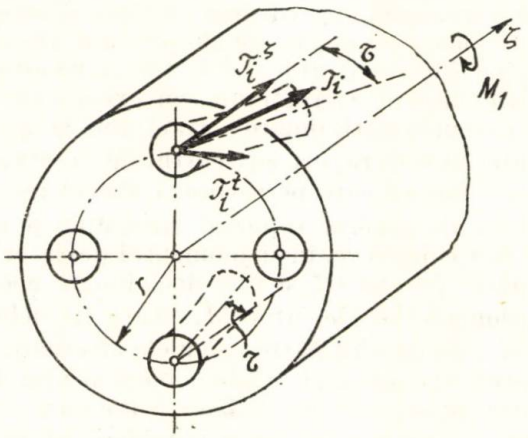


Fig. 5

În caz ideal, ajutajele fiind identice și în număr par, forțele $\mathcal{T}_i^{t}$ au rezultanta nulă, efectul lor fiind un cuplu rezultant de moment $\overline{M}_1$, orientat de-a lungul axei longitudinale.

Forța de tracțiune totală $\overline{\mathcal{T}}$ ce acționează asupra rachetei, definită de (13), în acest caz va fi riguros orientată după axa longitudinală a rachetei. Valoarea tracțiunii va fi suma componentelor $\mathcal{T}_i^{\zeta}$ paralele cu axa longitudinală, ale tracțiunilor $\overline{\mathcal{T}_i}$ create de fiecare ajutaj înclinat. Deci

$$\mathcal{T} = \sum \mathcal{T}_i^{\zeta} = Q_e V_{ef} \cos \tau, \tag{14}$$

unde Q_e este debitul total de scurgere a gazelor din ajutaje, iar V_{ef} — viteza „efectivă" de scurgere a gazelor.

Momentul cuplului reactiv are expresia cunoscută, $M_1 = \mu_1 \mathcal{T}$, unde μ_1 reprezintă „brațul cuplului reactiv", dat de relația

$$\mu_1 = r \operatorname{tg} \tau \tag{15}$$

în cazul rachetei cu ajutaje „montate" și

$$\mu_1 = \frac{V_e}{V_{ef}} \cdot r \cdot \operatorname{tg} \tau \tag{15'}$$

în cazul rachetei cu ajutaje „tăiate", în care V_e este viteza reală de scurgere a gazelor în secțiunea de ieșire din ajutaj.

Observăm însă că în cazul real, datorită toleranţelor de fabricaţie şi neuniformităţii scurgerii prin ajutaje, componentele $\mathcal{T}_\zeta^i$ şi $\mathcal{T}_\eta^i$ nu vor fi aceleaşi pentru toate ajutajele. Ca urmare, suportul vectorului tracţiune totală $\overline{\mathcal{T}}$ definit de (13) (sau linia de acţiune a tracţiunii) nu este riguros de-a lungul axei longitudinale $O\zeta$ a rachetei, ci formează cu aceasta unghiul α_T, reprezentînd excentricitatea (disimetria) gazodinamică unghiulară a tracţiunii, a cărui valoare nu depăşeşte 20—30 min. Distanţa de la centrul de greutate al rachetei la suportul forţei de tracţiune este denumită excentricitate (disimetrie) liniară a tracţiunii sau excentricitate gazodinamică liniară. Datorită excentricităţii liniare a tracţiunii ia naştere un moment deviator $\overline{M}_2$ al tracţiunii în raport cu centrul de greutate, care constituie unul din principalii factori care perturbează zborul rachetei.

Menţionăm că în general suportul tracţiunii şi axa longitudinală $O\zeta$ a rachetei nu sînt coplanare, încît momentul deviator $\overline{M}_2$ are o componentă perpendiculară pe axa $O\zeta$ şi una de-a lungul acestei axe. Componenta axială a momentului deviator $\overline{M}_2$ poate fi inclusă în momentul cuplului reactiv $\overline{M}_1$; pe de altă parte calculele efectuate de diverşi autori au arătat că efectul componentei axiale a momentului deviator $\overline{M}_2$ (care este de cîteva sute de ori mai mică decît componenta transversală [5]) poate fi neglijat. Ca urmare, se poate considera că momentul deviator $\overline{M}_2$ este perpendicular pe axa longitudinală a rachetei, iar suportul tracţiunii intersectează această axă într-un punct O_T (fig. 6). De regulă, în

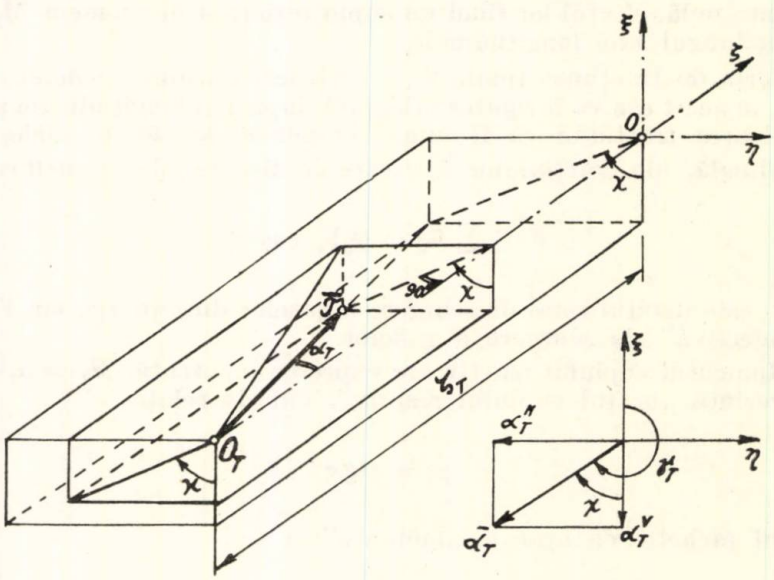


Fig. 6

vederea executării unor calcule acoperitoare din punct de vedere al stabilităţii rachetei, acest punct se consideră în planul ce conţine centrele secţiunilor de ieşire ale ajutajelor. Distanţa ζ_T de la punctul O_T la centrul de greutate O al rachetei (fig. 6) este denumită uneori „braţul ajutajului".

Vom admite că suportul tracţiunii ($\overline{\mathcal{T}}$) este invariabil în raport cu corpul rachetei, încît planul în care se măsoară excentricitatea gazodinamică se roteşte (împreună cu racheta cu viteza unghiulară de rotaţie proprie $\dot{\gamma}$ (măsurată faţă de sistemul semilegat $O\xi\eta\zeta$) în jurul axei longitudinale $O\zeta$.

Notăm cu χ (ca în fig. 6) unghiul format de planul excentricităţii gazodinamice cu planul $\xi O\zeta$ al sistemului semilegat. Dacă γ_T este un unghi de rotaţie proprie, în sensul definit la început, rezultă (fig. 6) $\chi = \gamma_T - 180^\circ$, încît $\dot{\chi} = \dot{\gamma}_T = \dot{\gamma}$ (vitezele unghiulare fiind faţă de sistemul $O\xi\eta\zeta$). Deci rezultă

$$\chi = \chi_1 + \int_{t_1}^{t} \dot{\chi}\, dt = \chi_1 + \int_{t_1}^{t} \dot{\gamma}\, dt, \tag{16}$$

unde χ_1 este valoarea lui χ la momentul iniţial $t = t_1$.

Ţinînd cont că α_T este un unghi foarte mic, componentele tracţiunii pe axele semilegate vor fi (fig. 6) :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\xi &= -\mathcal{T} \sin \alpha_T \cos \chi \cong -\mathcal{T}\alpha_T \cos \chi, \\ \mathcal{T}_\eta &= -\mathcal{T} \sin \alpha_T \sin \chi \cong -\mathcal{T}\alpha_T \sin \chi, \\ \mathcal{T}_\zeta &= \mathcal{T} \cos \alpha_T \cong \mathcal{T}\,; \end{aligned} \tag{17}$$

mai departe se stabilesc fără dificultate (ţinînd cont de fig. 3) componentele tracţiunii pe axele de curent, în funcţie de componentele pe axele semilegate, obţinînd

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_X &= -\mathcal{T}_\xi \sin \alpha_V - \mathcal{T}_\eta \sin \alpha_H \cos \alpha_V + \mathcal{T}_\zeta \cos \alpha_H \cos \alpha_V, \\ \mathcal{T}_Y &= \mathcal{T}_\xi \cos \alpha_V - \mathcal{T}_\eta \sin \alpha_H \sin \alpha_V + \mathcal{T}_\zeta \cos \alpha_H \sin \alpha_V, \\ \mathcal{T}_Z &= \mathcal{T}_\eta \cos \alpha_H + \mathcal{T}_\zeta \sin \alpha_H. \end{aligned} \tag{18}$$

Momentul tracţiunii, $\overline{M}_{\mathcal{T}}$ (obţinut prin reducerea în centrul de greutate a tracţiunilor $\overline{\mathcal{T}}_i$ create de fiecare ajutaj înclinat), are componente după cele trei axe ale sistemului $O\xi\eta\zeta$. Componenta după axa longitudinală este momentul cuplului reactiv $\overline{M}_1$. Componentele după axele $O\xi$ şi $O\eta$ se datoresc excentricităţii gazodinamice şi se determină imediat ţinînd cont de figura 6. Rezultanta acestor două componente constituie momentul deviator $M_2 = \mathcal{T}\, e_T$, unde e_T reprezintă excentricitatea gazodinamică liniară a tracţiunii. Astfel, pentru componentele momentului $\overline{M}_{\mathcal{T}}$ rezultă expresiile

$$M_{\mathcal{T}}^{\xi} = -\mathcal{T}\, e_T \sin \chi, \quad M_{\mathcal{T}}^{\eta} = \mathcal{T}\, e_T \cos \chi, \quad M_{\mathcal{T}}^{\zeta} = \mu_1 \mathcal{T}, \tag{19}$$

unde

$$e_T = |\zeta_T| \sin \alpha_T \cong |\zeta_T| \cdot \alpha_T. \tag{20}$$

Dacă în particular suportul tracţiunii este paralel cu axa longitudinală a rachetei, relaţiile (19) rămîn, evident, valabile, mărimea e_T avînd

semnificaţia distanţei dintre suportul tracţiunii şi axa longitudinală $O\zeta$ a rachetei.

Datorită toleranţelor de fabricaţie şi prelucrării neuniforme a suprafeţei corpului rachetei, a unor deformaţii accidentale, mici proeminenţe exterioare etc., racheta este caracterizată de asimetrii aerodinamice. Acestea se introduc prin intermediul incidenţei la portanţă nulă (α_P) şi incidenţei la moment nul (α_M), corespunzătoare mişcării de translaţie a rachetei. Valorile acestora (de regulă sub o jumătate de grad) se determină în tunelul aerodinamic.

Incidenţa „reală" a rachetei, α_r^0, în mişcarea de translaţie a acesteia se determină din considerente aerodinamice şi geometrice, ţinînd cont că deviaţiile α_P şi α_M—foarte mici în raport cu incidenţa geometrică—se măsoară în plane în general distincte, invariabile în raport cu corpul rachetei, a căror poziţie se defineşte în raport cu planul $\xi O\zeta$ cu ajutorul unghiurilor χ_P şi χ_M.

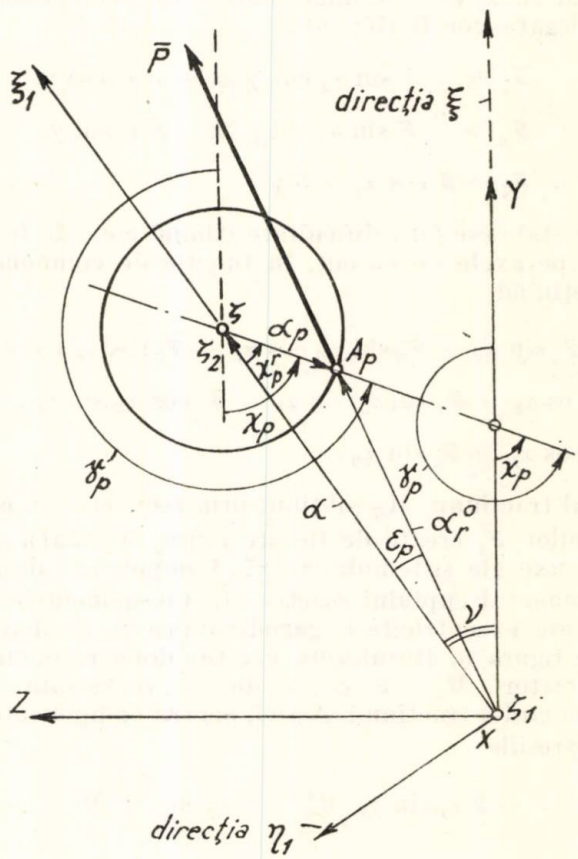


Fig. 7

În figura 7 am reprezentat o porţiune mică de pe sfera de rază unitară cu centrul în centrul de greutate al rachetei, văzută din vîrful axei

OX. Am notat cu ζ_1 (sau X), ζ (sau ζ_2) şi A_P, punctele în care este intersectată sfera de axele $O\zeta_1$ (care coincide cu OX, fig. 3), $O\zeta$ (care coincide cu $O\zeta_2$) şi, respectiv, de direcţia axei de portanţă nulă. Dacă racheta are mişcare de rotaţie proprie, atunci punctul A_P se roteşte în jurul axei longitudinale $O\zeta$ pe un cerc de rază α_P, cu viteza unghiulară $\dot{\gamma}$ (viteza de rotaţie proprie).

Observăm că triunghiul sferic $\zeta_1\zeta A_P$ este format de arce de cercuri mari de sferă, încît arc $\widehat{\zeta_1\zeta} \equiv$ arc $\widehat{\zeta_1\zeta_2} = \alpha$, arc $\widehat{\zeta A_P} = \alpha_P$, iar arc $\widehat{\zeta_1 A_P} = \alpha_r^0$ (incidenţa reală a rachetei ţinînd cont de α_P). Deoarece laturile triunghiului sferic considerat sînt mici (în cazul rachetei stabile unghiul α este şi el suficient de mic), putem opera cu triunghiul respectiv ca şi cu un triunghi plan (conţinut în planul tangent la sferă, perpendicular pe axa OX).

Notăm cu χ_P^r unghiul format de planul în care se măsoară α_P cu planul $\xi_2 O\zeta_2$ (sau $\xi_1 O\zeta_1$). Din triunghiul $\zeta_1\zeta A_P$ (fig. 7) rezultă relaţiile;

$$\alpha_r^0 = (\alpha^2 + \alpha_P^2 - 2\alpha\alpha_P \cos \chi_P^r)^{\frac{1}{2}}; \quad \alpha_r^0 \sin \varepsilon_P = \alpha_P \sin \chi_P^r. \tag{21}$$

Din prima relaţie (21), neglijînd termenii ce conţin α_P^2 şi dezvoltînd în serie, rezultă

$$\alpha_r^0 \cong \alpha - \alpha_P \cos \chi_P^r. \tag{22}$$

Remarcînd că ε_P este un unghi foarte mic, care reprezintă deviaţia portanţei faţă de planul $\xi_1 O\zeta_1$ în care se măsoară incidenţa geometrică α (fig. 7), şi ţinînd cont de a doua relaţie (21), vom avea:

$$\cos \varepsilon_P \cong 1; \quad \varepsilon_P \cong \sin \varepsilon_P = \frac{\alpha_P}{\alpha_r^0} \sin \chi_P^r. \tag{23}$$

Astfel, ţinînd cont de (23) şi exprimînd apoi pe α_r^0 conform cu (22), se obţin (fig. 7) pentru componentele portanţei relaţiile:

$$\begin{aligned} P_Y &= \frac{\rho V^2}{2} S \frac{dC_Z}{d\alpha} \alpha_r^0 \cos(\nu - \varepsilon_P) = \\ &= \frac{\rho V^2}{2} S \frac{dC_Z}{d\alpha} [\alpha \cos \nu - \alpha_P \cos(\nu + \chi_P^r)]; \\ P_Z &= \frac{\rho V^2}{2} \cdot S \frac{dC_Z}{d\alpha} \alpha_r^0 \sin(\nu - \varepsilon_P) = \\ &= \frac{\rho V^2}{2} S \frac{dC_Z}{d\alpha} [\alpha \sin \nu - \alpha_P \sin(\nu + \chi_P^r)]. \end{aligned} \tag{24}$$

Ţinînd cont de figura 7 şi admiţînd că α este suficient de mic, încît să putem lua $\nu_r \cong \nu$ (fig. 3), rezultă

$$\chi_P = \nu + \chi_P^r \cong \nu_r + \chi_P^r, \tag{25}$$

unde χ_P este unghiul format de planul în care se măsoară α_P cu planul $\xi O\zeta$. Dacă γ_P este unghiul de rotaţie proprie (corespunzător punctului A_P) în sensul definit iniţial, rezultă (fig. 7) $\chi_P = \gamma_P - 180°$, încît $\dot{\chi}_P = \dot{\gamma}_P = \dot{\gamma}$, iar

$$\chi_P = (\chi_P)_1 + \int_{t_1}^{t} \dot{\chi}_P \, dt = (\chi_P)_1 + \int_{t_1}^{t} \dot{\gamma} \, dt, \tag{26}$$

în care $(\chi_P)_1$ este valoarea iniţială a lui χ_P, pentru $t = t_1$.

La calculul incidenţei reale în mişcarea generală a rachetei este necesar să se ţină cont de influenţa rotaţiilor transversale. În timpul zborului axa rachetei execută o mişcare în planul de incidenţă cu viteza unghiulară ω_{η_2}, în jurul axei transversale $O\eta_2$ (normală la planul de incidenţă). Vom ţine cont de influenţa rotaţiei ω_{η_2} considerînd schema simplificată de calcul adoptată şi în alte lucrări [1], [11], [10], [8], în conformitate cu care „incidenţa reală" la calculul portanţei şi momentului aerodinamic „principal" (de picaj-cabraj) în mişcarea generală a rachetei va fi $\alpha_r = \alpha + \Delta\alpha$, unde $\Delta\alpha$ este unghiul suplimentar de incidenţă care apare în centrul de presiune al rachetei datorită rotaţiei ω_{η_2}, dat de relaţia

$$\Delta\alpha = \pm \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V}, \tag{27}$$

în care l_c este distanţa de la centrul de greutate la centrul de presiune al rachetei. În relaţia anterioară se ia semnul plus dacă centrul de presiune este în spatele centrului de greutate şi semnul minus dacă centrul de presiune este în faţa centrului de greutate (aceeaşi schemă simplificată se adoptă şi în cazul forţei şi momentului Magnus, cu deosebirea că în loc de l_c se va introduce l_c', reprezentînd distanţa de la punctul de aplicaţie al forţei Magnus la centrul de greutate al rachetei).

Astfel, dacă ţinem seama şi de mişcarea din planul de incidenţă, cu viteza unghiulară ω_{η_2}, în conformitate cu cele arătate anterior, avînd în vedere relaţiile (24), (25), (27) şi considerînd centrul de presiune în faţa centrului de greutate, se obţin următoarele componente ale portanţei pe axele sistemului $OXYZ$, legat de viteză:

$$P_X = 0;$$

$$P_Y = \frac{\rho V^2}{2} S \frac{dC_Z}{d\alpha}\left(\alpha \cos \nu - \alpha_P \cos \chi_P - \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V} \cdot \cos \nu\right); \tag{28}$$

$$P_Z = \frac{\rho V^2}{2} S \frac{dC_Z}{d\alpha}\left(\alpha \sin \nu - \alpha_P \sin \chi_P - \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V} \cdot \sin \nu\right).$$

În mod analog se procedează pentru punerea în evidență a influenței lui α_M și ω_{η_2} în cazul momentului aerodinamic „principal" (de picaj-cabraj), al cărui vector $\bar{M}$ este perpendicular pe planul de incidență, utilizînd schema din figura 8, unde s-a reprezentat o porțiune mică de pe sfera

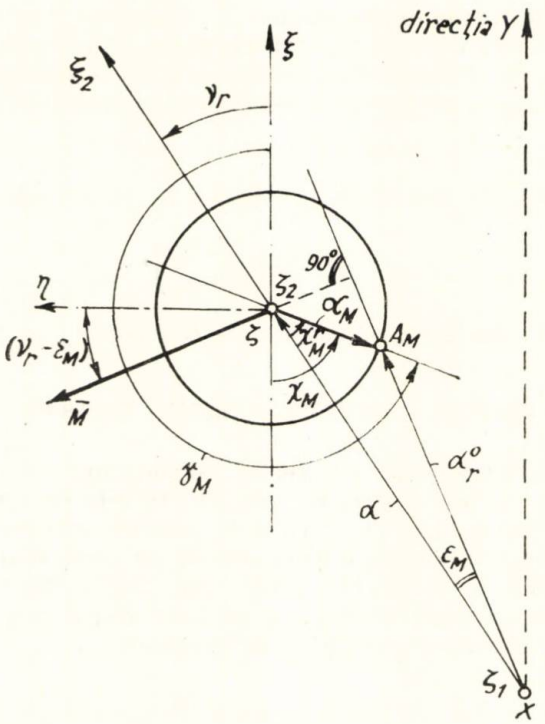


Fig. 8

de rază unitară cu centrul în centrul de greutate al rachetei, privită din vîrful axei longitudinale $O\zeta$. Considerînd că centrul de presiune este în fața centrului de greutate, încît momentul aerodinamic respectiv este un moment „de răsturnare", se obțin următoarele componente ale acestuia pe axele sistemului semilegat $O\xi\eta\zeta$:

$$M_\xi = -\frac{\rho V^2}{2} Sl \frac{dC_m}{d\alpha}\left(\alpha \sin \nu_r - \alpha_M \sin \chi_M - \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V} \cdot \sin \nu_r\right),$$

$$M_\eta = \frac{\rho V^2}{2} \cdot Sl \frac{dC_m}{d\alpha}\left(\alpha \cos \nu_r - \alpha_M \cos \chi_M - \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V} \cdot \cos \nu_r\right), \qquad (29)$$

$$M_\zeta = 0,$$

în care χ_M este unghiul format de planul în care se măsoară α_M cu planul $\xi O\zeta$ (fig. 8) dat de relația

$$\chi_M = (\chi_M)_1 + \int_{t_1}^{t} \dot{\gamma}\, dt, \qquad (30)$$

iar $(\chi_M)_1$ este valoarea inițială a lui χ_M la momentul $t = t_1$.

Pentru viteza unghiulară ω_{η_2}, ţinînd cont de (2) şi de figura 3, rezultă relaţia

$$\omega_{\eta_2} = \dot{\Psi}_L \cos \vartheta_L \sin \nu + \dot{\vartheta}_L \cos \nu + \dot{\alpha}_V \cos \nu + \dot{\alpha}_H \cos \alpha_V \sin \nu. \quad (31)$$

Considerînd triunghiurile sferice $X\zeta'\zeta$ şi $\eta'\eta\eta_2$, formate de arce de cercuri mari pe sfera de rază unitară cu centrul în centrul de greutate al rachetei (fig. 3), în virtutea unor relaţii cunoscute din trigonometria sferică, rezultă pentru incidenţa geometrică expresia

$$\alpha = \arccos (\cos \alpha_V \cdot \cos \alpha_H), \quad (32)$$

iar pentru unghiul de precesie ν şi unghiul ν_r, expresiile

$$\nu = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_H}{\sin \alpha_V}\right), \quad (33)$$

$$\nu_r = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} \nu \cdot \cos \alpha) = \operatorname{arc\,tg} (\sin \alpha_H \cdot \operatorname{ctg} \alpha_V). \quad (34)$$

5. SISTEMUL COMPLET AL ECUAŢIILOR MIŞCĂRII GENERALE A RACHETEI

În baza celor menţionate anterior, considerînd o rachetă cu mişcare de rotaţie proprie avînd centrul de presiune în faţa centrului de greutate, pornind de la relaţiile (4), (10), (11), (12), proiectînd forţele pe axele sistemului $OXYZ$, legat de viteză, iar momentele pe axele sistemului semilegat $O\xi\eta\zeta$, ţinînd cont de (17), (18), (19), (28), (29) şi dezvoltînd calculele, obţinem ecuaţiile mişcării generale a rachetei după cum urmează:

— pentru mişcarea centrului de greutate:

$$m\dot{V} = \mathcal{T}[\alpha_T \cos \chi \sin \alpha_V + \alpha_T \sin \chi \sin \alpha_H \cos \alpha_V + \cos \alpha_H \cos \alpha_V] -$$
$$- mg(\sin \Theta_0 \cos \Psi_L \cos \vartheta_L + \cos \Theta_0 \sin \vartheta_L) - \frac{\rho V^2}{2} S \cdot C_X,$$

$$mV\dot{\vartheta}_L = \mathcal{T}[-\alpha_T \cos \chi \cos \alpha_V + \alpha_T \sin \chi \sin \alpha_H \sin \alpha_V + \cos \alpha_H \sin \alpha_V] -$$
$$- mg (\cos \Theta_0 \cos \vartheta_L - \sin \Theta_0 \cos \Psi_L \sin \vartheta_L) +$$
$$+ \frac{\rho V^2}{2} S \frac{dC_Z}{d\alpha}\left(\alpha \cos \nu - \alpha_P \cos \chi_P - \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V} \cdot \cos \nu\right) + \quad (35)$$
$$+ \frac{\rho V}{2} S l \omega_\zeta \cdot \frac{dC_{Mag}}{d\alpha}\left(\alpha - \frac{l'_c \cdot \omega_{\eta_2}}{V}\right) \sin \nu,$$

$$mV\dot{\Psi}_L \cos \vartheta_L = \mathcal{T}[-\alpha_T \sin \chi \cos \alpha_H + \sin \alpha_H] + mg \sin \Theta_0 \sin \Psi_L +$$
$$+ \frac{\rho V^2}{2} S \frac{dC_Z}{d\alpha}\left(\alpha \sin \nu - \alpha_P \sin \chi_P - \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V} \cdot \sin \nu\right) -$$
$$- \frac{\rho V}{2} S l \omega_\zeta \frac{dC_{Mag}}{d\alpha}\left(\alpha - \frac{l'_c \omega_{\eta_2}}{V}\right) \cos \nu;$$

—pentru mişcarea în jurul centrului de greutate :

$$J\dot{\omega}_\xi + (J_\zeta - J)\,\omega_\zeta\omega_\eta + J\omega_\eta\dot{\gamma} = -\mathcal{T}e_T \sin\chi -$$

$$-\frac{\rho V^2}{2}\cdot Sl\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\alpha}\left(\alpha\sin\nu_r - \alpha_M\sin\chi_M - \frac{l_c\omega_{\eta_2}}{V}\cdot\sin\nu_r\right)+$$

$$+\frac{\rho V}{2}Sl^2\omega_\zeta\cdot\frac{\mathrm{d}C_{mM}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\alpha - \frac{l'_c\omega_{\eta_2}}{V}\right)\cos\nu_r - C_jQ_e\omega_\xi\,,$$

$$J\dot{\omega}_\eta + (J - J_\zeta)\,\omega_\xi\omega_\zeta - J\omega_\xi\dot{\gamma} = \mathcal{T}e_T\cos\chi + \tag{36}$$

$$+\frac{\rho V^2}{2}Sl\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\alpha}\left(\alpha\cos\nu_r - \alpha_M\cos\chi_M - \frac{l_c\omega_{\eta_2}}{V}\cdot\cos\nu_r\right)+$$

$$+\frac{\rho V}{2}Sl^2\omega_\zeta\cdot\frac{\mathrm{d}C_{mM}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\alpha - \frac{l'_c\omega_{\eta_2}}{V}\right)\sin\nu_r - C_jQ_e\omega_\eta\,,$$

$$J_\zeta\,\dot{\omega}_\zeta = \mu_1\mathcal{T} - \frac{\rho V}{2}Sl^2\omega_\zeta C_{ax} - C'_jQ_e\omega_\zeta\,;$$

— ecuaţiile cinematice care dau legătura între vitezele unghiulare $\dot{\alpha}_V$, $\dot{\alpha}_H$, $\dot{\gamma}$ şi componentele ω_ξ, ω_η, ω_ζ ale vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ a rachetei pe axele sistemului $O\xi\eta\zeta$:

$$\dot{\alpha}_V = \frac{\omega_\eta}{\cos\alpha_H} - \dot{\vartheta}_L - \dot{\Psi}_L\sin(\vartheta_L + \alpha_V)\cdot\operatorname{tg}\alpha_H\,,$$

$$\dot{\alpha}_H = -\omega_\xi - \dot{\Psi}_L\cos(\vartheta_L + \alpha_V), \tag{37}$$

$$\dot{\gamma} = \omega_\zeta - \omega_\eta\cdot\operatorname{tg}\alpha_H + \dot{\Psi}_L\frac{\sin(\vartheta_L + \alpha_V)}{\cos\alpha_H}.$$

În ecuaţiile (35), (36), (37), C_X reprezintă coeficientul rezistenţei la înaintare, C_Z — coeficientul de portanţă, C_{Mag} — coeficientul forţei Magnus, C_m — coeficientul momentului aerodinamic principal (de picaj-cabraj), C_{mM} — coeficientul momentului Magnus, C_{ax} — coeficientul momentului aerodinamic axial de amortizare, S — secţiunea de referinţă (din expresiile forţelor şi momentelor aerodinamice, l — lungimea de referinţă (din expresiile forţelor şi momentelor aerodinamice), C_j — coeficientul momentului transversal de amortizare datorită jetului de gaze, C'_j — coeficientul momentului axial de amortizare datorită jetului de gaze, ρ — densitatea aerului, g — acceleraţia greutăţii.

Pentru calculul traiectoriei față de sistemul $O_p x_p y_p z_p$, legat de Pămînt, proiectînd viteza $\overline{V}$ pe axele sistemului respectiv (ținînd cont de fig. 2, fig. 1), se obțin expresiile coordonatelor centrului de greutate:

$$x_p = (x_p)_1 + \int_{t_1}^{t} V(\cos\vartheta_L \cos\Psi_L \cos\Theta_0 - \sin\vartheta_L \sin\Theta_0)\, dt,$$

$$y_p = (y_p)_1 + \int_{t_1}^{t} V(\cos\vartheta_L \cos\Psi_L \sin\Theta_0 + \sin\vartheta_L \cos\Theta_0)\, dt, \qquad (38)$$

$$z_p = (z_p)_1 + \int_{t_1}^{t} V \cos\vartheta_L \sin\Psi_L\, dt,$$

unde $(x_p)_1$, $(y_p)_1$, $(z_p)_1$ sînt coordonatele inițiale.

Ecuațiile (35), (36), (37) formează un sistem de ecuații diferențiale de ordinul I, reprezentînd *„sistemul complet" al ecuațiilor mișcării generale a rachetei*, prin a cărui integrare se obține variația în timp a parametrilor (funcțiilor necunoscute) V, ϑ_L, Ψ_L, ω_ξ, ω_η, ω_ζ, α_V, α_H și γ ce determină complet mișcarea generală a rachetei (atît mișcarea centrului de greutate, cît și mișcarea în jurul centrului de greutate).

Condițiile inițiale pentru integrarea sistemului complet al ecuațiilor mișcării generale sînt elementele mișcării de la părăsirea lansatorului: $t = t_1$, $V = V_1$, $\vartheta_L = (\vartheta_L)_1$, $\Psi_L = (\Psi_L)_1$, $\omega_\xi = (\omega_\xi)_1$ $\omega_\eta = (\omega_\eta)_1$, $\omega_\zeta = (\omega_\zeta)_1$, $\alpha_V = (\alpha_V)_1$, $\alpha_H = (\alpha_H)_1$, $\gamma = \gamma_1$ (se ia arbitrar). Observăm că $(\vartheta_L)_1$ și $(\Psi_L)_1$ reprezintă erorile de ochire „în înălțime" (din planul de lansare) și, respectiv, „în direcție" (în planul $OX_L Z_L$), iar $(\alpha_V)_1$ și $(\alpha_H)_1$ reprezintă unghiul de basculare și, respectiv, unghiul de deviație laterală de la părăsirea lansatorului. Valorile inițiale $(\omega_\xi)_1$, $(\omega_\eta)_1$, $(\omega_\zeta)_1$ ale componentelor vitezei unghiulare se exprimă cu ajutorul relațiilor (12) scrise la momentul inițial; ele depind de viteza unghiulară de basculare $(\dot{\alpha}_V)_1$, de viteza unghiulară de deviație laterală $(\dot{\alpha}_H)_1$ și viteza de rotație proprie $\dot{\gamma}_1$ de la părăsirea lansatorului, precum și de valorile inițiale $(\dot{\Psi}_L)_1$ și $(\dot{\vartheta}_L)_1$ ale derivatelor funcțiilor Ψ_L și ϑ_L ce se pot determina din ultimele două ecuații (35) scrise la momentul inițial. Lăsînd la o parte termenii cu valori nesemnificative, în limitele unei precizii corespunzătoare, rezultă $(\omega_\xi)_1 \cong -(\dot{\alpha}_H)_1$, $(\omega_\eta)_1 = (\dot{\alpha}_V)_1$, $(\omega_\zeta)_1 \cong \dot{\gamma}_1$.

La integrarea sistemului complet al ecuațiilor de mișcare se va ține cont de relațiile (16), (20), (26), (30)... (34), care definesc mărimile χ, e_T, χ_P, χ_M, ω_{η_2}, α, ν și ν_r.

Observăm că dacă introducem în (35) și (36) componentele ω_ξ, ω_η, ω_ζ date de (12), sistemul complet al ecuațiilor de mișcare se reduce la un sistem de ordinul II de șase ecuații cu șase necunoscute, V, ϑ_L, Ψ_L, α_V, α_H și γ. Sub o formă sau alta, ținînd cont de variația coeficienților aerodinamici cu numerele Mach și Reynolds, de variația densității aerului și a vitezei sunetului cu altitudinea, de variația masei rachetei, momentelor de inerție, tracțiunii etc., integrarea sistemului se poate face numai folosind calculatoarele electronice.

Sistemul ecuațiilor (35) — (37) corespunde rachetei cu rotație proprie la care centrul de presiune este în fața centrului de greutate, încît

momentul aerodinamic de picaj-cabraj este moment „de răsturnare" (cazul rachetei stabilizate prin rotație proprie).

În situația în care centrul de presiune trece în spatele centrului de greutate, momentul aerodinamic de picaj-cabraj devenind moment „de stabilizare" (cazul rachetei cu ampenaj stabilizator), ecuațiile mișcării generale se obțin imediat din cele deduse anterior, punînd $\frac{dC_m}{d\alpha} = -\left|\frac{dC_m}{d\alpha}\right|$, $l_c = -|l_c|$ și anulînd forța și momentul Magnus care au un rol secundar chiar în cazul rachetei cu rotație „lentă". Dacă racheta cu ampenaj nu are nici mișcare lentă de rotație proprie, se face $\mu_1 = 0$. Neglijînd în acest caz (într-o primă aproximație) mișcarea de ruliu (care de data asta este neînsemnată), vom putea lua în ecuațiile de mișcare $\omega_\zeta \cong 0$ și $\dot{\omega}_\zeta \cong 0$, încît ultima ecuație (36) va fi verificată identic.

În unele probleme, direcția vitezei se determină față de sistemul $OX_pY_pZ_p$ cu ajutorul unghiului de cursă Ψ_c din planul orizontal și a înclinării ϑ față de acest plan (fig. 2). Astfel, pentru a obține direcția lui $\overline{V}$, definită față de OX_p (paralelă cu orizontala O_px_p din planul de lansare, fig. 1), se rotește sistemul $O_pX_pY_pZ_p$ cu unghiul Ψ_c în jurul axei OY_p (rotația este negativă în raport cu OY_p), obținînd sistemul $OX_P^1Y_P^1Z_P^1$; dînd acestuia rotația ϑ în raport cu axa OZ_P^1 se obține sistemul $OXYZ$ legat de viteză, vectorul $\overline{V}$ fiind de-a lungul axei OX. În acest caz, sistemul ecuațiilor mișcării generale se obține din sistemul (35)—(37) cu înlocuirile $\vartheta_L \Rightarrow \vartheta$, $\Psi_L \Rightarrow \Psi_c$, $\Theta_0 = 0$, iar coordonatele centrului de greutate față de sistemul legat de Pământ vor fi date de relațiile:

$$x_p = (x_p)_1 + \int_{t_1}^{t} V \cos\vartheta \cos\Psi_c \, dt; \quad y_p = (y_p)_1 + \int_{t_1}^{t} V \sin\vartheta \, dt; \quad z_p = (z_p)_1 + \int_{t_1}^{t} V \cos\vartheta \sin\Psi_c \, dt. \tag{39}$$

Determinîndu-se în mod corespunzător condițiile inițiale, sistemul astfel obținut poate fi utilizat atît pentru perioada activă, cît și pentru perioada pasivă a traiectoriei.

6. CONSIDERAREA ROTAȚIEI PĂMÎNTULUI ȘI A VARIAȚIEI ACCELERAȚIEI GREUTĂȚII

În cazul rachetelor ale căror distanțe de zbor depășesc 20—25 km este necesar să se țină cont de rotația Pământului și de variația accelerației greutății.

Datorită rotației Pământului, cu viteza unghiulară $\overline{\Omega}_p$, asupra rachetei (avînd viteza $\overline{V}$ în raport cu Pământul) va acționa forța inerțială Coriolis

$$\overline{F}_c = -2m\overline{\Omega}_p \times \overline{V}. \tag{40}$$

Considerînd că lansarea se face în emisfera nordică la latitudinea λ și cu unghiul de azimut β (fig. 9), rezultă pentru componentele vitezei de rotație a Pământului pe axele sistemului legat de Pământ ($O_px_py_pz_p$) următoarele expresii:

$$\Omega_{p_{x_p}} = \Omega_p \cos\lambda \cos\beta; \quad \Omega_{p_{y_p}} = \Omega_p \sin\lambda; \quad \Omega_{p_{z_p}} = -\Omega_p \cos\lambda \sin\beta. \tag{41}$$

Dezvoltînd produsul vectorial din (40), ţinînd cont de (41) şi făcînd proiecţia pe axele sistemului $OXYZ$ (fig. 3) la care s-au raportat ecuaţiile mişcării centrului de greutate, obţinem următoarele componente ale forţei Coriolis pe axele respective :

$$
\begin{aligned}
(F_c)_X &= 0, \\
(F_c)_Y &= 2mV\Omega_p[\cos\lambda \sin\beta \cos\Psi_L + \sin\lambda \sin\Theta_0 \sin\Psi_L + \\
&\quad + \cos\lambda \cos\beta \cos\Theta_0 \sin\Psi_L], \qquad (42) \\
(F_c)_Z &= 2mV\Omega_p[\cos\lambda \sin\beta \sin\vartheta_L \sin\Psi_L + \sin\lambda(\cos\vartheta_L \cos\Theta_0 - \\
&\quad - \sin\vartheta_L \cos\Psi_L \sin\Theta_0) - \cos\lambda \cos\beta (\cos\vartheta_L \sin\Theta_0 + \\
&\quad + \cos\Theta_0 \cos\Psi_L \sin\vartheta_L)].
\end{aligned}
$$

Notă. Viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a rachetei, ale cărei componente intră în expresia momentului cinetic, trebuie să fie determinată faţă de un sistem inerţial. Drept sistem inerţial se consideră sistemul fix în spaţiu $O_p^0 x_l^0 y_l^0 z_l^0$ cu

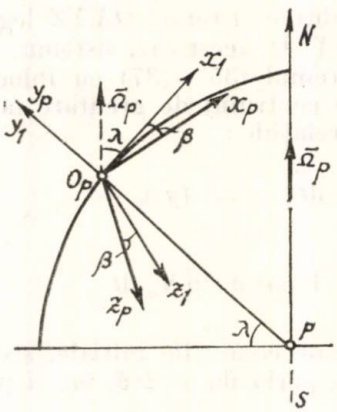


Fig. 9

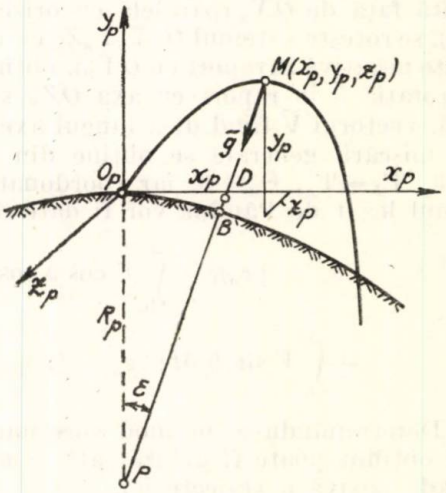


Fig. 10

care coincide în momentul lansării sistemului $O_p x_l y_l z_l$ ce este solidar cu Pămîntul, fiind „legat" de direcţia de lansare. Rezultă că unghiurile Ψ_L, ϑ_L, α_V, α_H şi γ se corectează ţinînd cont de rotaţia sistemului $O_p x_l y_l z_l$ faţă de poziţia sa iniţială ($O_p x_l^0 y_l^0 z_l^0$). Dacă durata de zbor nu depăşeşte cîteva minute, corecţia respectivă este neglijabilă. Menţionăm, de asemenea, că dacă se urmăreşte numai problema determinării traiectoriei în ipoteza zborului balistic, fără incidenţă, ecuaţiile mişcării în jurul centrului de greutate nu mai prezintă importanţă, iar corecţia respectivă nu mai are sens.

Considerînd Pămîntul sferic şi omogen şi neglijînd abaterea verticalei locului faţă de verticala geocentrică, vectorul acceleraţiei greutăţii $\bar{g}$ va fi (fig. 10)

$$\bar{g} = -g\frac{\vec{PM}}{PM},$$

unde $\vec{PM}$ este vectorul de poziție al rachetei față de centrul Pământului; rezultă imediat componentele vectorului $\bar{g}$ pe axele sistemului $O_p x_p y_p z_p$

$$g_{x_p} = -g\frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + (R_p + y_p)^2 + z_p^2}},$$

$$g_{y_p} = -g\frac{R_p + y_p}{\sqrt{x_p^2 + (R_p + y_p)^2 + z_p^2}}, \tag{43}$$

$$g_{z_p} = -g\frac{z_p}{\sqrt{x_p^2 + (R_p + y_p)^2 + z_p^2}},$$

unde R_p este raza Pământului; componentele lui $\bar{g}$ pe axele sistemului $OXYZ$ vor fi

$$\begin{aligned} g_X &= g_{y_p}(\sin\Theta_0\cos\Psi_L\cos\vartheta_L + \cos\Theta_0\sin\vartheta_L) + \\ &+ g_{x_p}(\cos\Theta_0\cos\Psi_L\cos\vartheta_L - \sin\Theta_0\sin\vartheta_L) + g_{z_p}\sin\Psi_L\cos\vartheta_L, \\ g_Y &= g_{y_p}(\cos\Theta_0\cos\vartheta_L - \sin\Theta_0\cos\Psi_L\sin\vartheta_L) - \\ &- g_{x_p}(\cos\Theta_0\cos\Psi_L\sin\vartheta_L + \sin\Theta_0\cos\vartheta_L) - g_{z_p}\sin\Psi_L\sin\vartheta_L, \\ g_Z &= -g_{y_p}\sin\Theta_0\sin\Psi_L - g_{x_p}\cos\Theta_0\sin\Psi_L + g_{z_p}\cos\Psi_L. \end{aligned} \tag{44}$$

Valoarea accelerației greutății la înălțimea H se determină cu relația $g = g_0 \cdot \left(1 + \frac{H}{R_p}\right)^{-2}$, unde g_0 este accelerația greutății la sol, iar H, pentru rachete cu bătăi sub 1 000 km se poate determina după relația

$$H = y_p + \frac{x_p^2}{2R_p}\left(1 + \frac{y_p}{R_p}\right)^{-2},$$

ce se poate obține fără dificultate [8], ținînd cont de figura 10 și permițînd determinarea lui g cu o eroare sub 0,5%.

În baza observațiilor anterioare, introducînd în ecuațiile (35) termenii corespunzători forței Coriolis și accelerației greutății conform relațiilor (42) și (44), se obține sistemul complet al ecuațiilor mișcării generale a rachetei considerînd rotația Pământului și variația în mărime și direcție a accelerației greutății.

Observăm că în ecuațiile mișcării generale întocmite anterior nu intră γ, ci numai derivata acestuia. Din această cauză vom înlocui în ecuațiile respective pe $\dot{\gamma}$ din ultima relație (37), reducînd astfel numărul de ecuații la opt, necunoscutele fiind V, ϑ_L, Ψ_L, ω_ξ, ω_η, ω_ζ, α_V, α_H. În măsura în care interesează în mod deosebit, unghiul de rotație proprie γ se poate

determina integrînd separat ultima ecuație (37), după ce în prealabil a fost integrat sistemul de opt ecuații menționat mai sus.

Punînd $y_1 = t$, $y_2 = V$, $y_3 = \vartheta_L$, $y_4 = \Psi_L$, $y_5 = \omega_\xi$, $y_6 = \omega_{\eta_2}$, $y_7 = \omega_\zeta$, $y_8 = \alpha_V$, $y_9 = \alpha_H$, sistemul respectiv de ordinul I se poate aduce la forma canonică (forma normalizată a lui Cauchy)

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(y_1, y_2, \ldots, y_9), \qquad (i = 2, 3, \ldots, 9), \qquad (45)$$

în care funcțiile F_i au expresiile

$$F_2 = \frac{\mathcal{T}}{m}[\alpha_T \cos\chi \sin\alpha_V + \alpha_T \sin\chi \sin\alpha_H \cos\alpha_V + \cos\alpha_H \cos\alpha_V] -$$

$$- \frac{\rho S}{2m} C_X V^2 + g_{y_p}(\sin\Theta_0 \cos\Psi_L \cos\vartheta_L + \cos\Theta_0 \sin\vartheta_L) +$$

$$+ g_{x_p}(\cos\Theta_0 \cos\Psi_L \cos\vartheta_L - \sin\Theta_0 \sin\vartheta_L) + g_{z_p} \sin\Psi_L \cos\vartheta_L ,$$

$$F_3 = \frac{1}{V}\left\{\frac{\mathcal{T}}{m}[-\alpha_T \cos\chi \cos\alpha_V + \alpha_T \sin\chi \sin\alpha_H \sin\alpha_V + \cos\alpha_H \sin\alpha_V] + \right.$$

$$+ \frac{\rho S}{2m} \frac{dC_Z}{d\alpha} V^2 \left(\alpha \cos\nu - \alpha_P \cos\chi_P - \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V} \cos\nu\right) +$$

$$+ \frac{\rho S l}{2m} \cdot \frac{dC_{Mag.}}{d\alpha} V \omega_\zeta \left(\alpha - \frac{l'_c \omega_{\eta_2}}{V}\right) \sin\nu + g_{y_p}(\cos\Theta_0 \cos\vartheta_L -$$

$$- \sin\Theta_0 \cos\Psi_L \sin\vartheta_L) - g_{x_p}(\cos\Theta_0 \cos\Psi_L \sin\vartheta_L + \sin\Theta_0 \cos\vartheta_L) -$$

$$\left. - g_{z_p} \sin\Psi_L \sin\vartheta_L\right\} + 2\Omega_p[\cos\lambda \sin\beta \cos\Psi_L + \sin\lambda \sin\Theta_0 \sin\Psi_L +$$

$$+ \cos\lambda \cos\beta \cos\Theta_0 \sin\Psi_L],$$

$$F_4 = \frac{1}{V\cos\vartheta_L}\left\{\frac{\mathcal{T}}{m}[-\alpha_T \sin\chi \cos\alpha_H + \sin\alpha_H] + \frac{\rho S}{2m} \cdot \frac{dC_Z}{d\alpha} \cdot V^2 \left(\alpha \sin\nu - \right.\right.$$

$$- \alpha_P \sin\chi_P - \frac{l_c \omega_{\eta_2}}{V} \cdot \sin\nu\Big) - \frac{\rho S l}{2m} \cdot \frac{dC_{Mag.}}{d\alpha} V \omega_\zeta \left(\alpha - \frac{l'_c \omega_{\eta_2}}{V}\right) \cos\nu -$$

$$\left. - g_{y_p} \sin\Theta_0 \sin\Psi_L - g_{x_p} \cos\Theta_0 \sin\Psi_L + g_{z_p} \cos\Psi_L\right\} +$$

$$+ 2\frac{\Omega_p}{\cos\vartheta_L}[\cos\lambda \sin\beta \sin\vartheta_L \sin\Psi_L + \sin\lambda(\cos\vartheta_L \cos\Theta_0 -$$

$$- \sin\vartheta_L \cos\Psi_L \sin\Theta_0) - \cos\lambda \cos\beta (\cos\vartheta_L \sin\Theta_0 + \cos\Theta_0 \cos\Psi_L \sin\vartheta_L)],$$

$$F_5 = \left(1 - \frac{J_\zeta}{J}\right)\omega_\zeta\omega_\eta - \omega_\eta\left[\omega_\zeta - \omega_\eta \operatorname{tg}\alpha_H + F_4 \cdot \frac{\sin(\vartheta_L + \alpha_V)}{\cos\alpha_H}\right] -$$

$$-\frac{\mathcal{T}}{J} e_T \sin\chi - \frac{\rho S l}{2J} \cdot \frac{dC_m}{d\alpha} \cdot V^2\left(\alpha \sin\nu_r - \alpha_M \sin\chi_M - \frac{l_c\omega_{\eta_2}}{V} \cdot \sin\nu_r\right) +$$

$$+\frac{\rho S l^2}{2J} \cdot \frac{dC_{mM}}{d\alpha} V\omega_\xi\left(\alpha - \frac{l'_c\omega_{\eta_2}}{V}\right)\cos\nu_r - \frac{C_j Q_e}{J}\omega_\xi ,$$

$$F_6 = -\left(1 - \frac{J_\zeta}{J}\right)\omega_\xi\omega_\zeta + \omega_\xi\left[\omega_\zeta - \omega_\eta \operatorname{tg}\alpha_H + F_4 \cdot \frac{\sin(\vartheta_L + \alpha_V)}{\cos\alpha_H}\right] +$$

$$+\frac{\mathcal{T}}{J} e_T \cos\chi + \frac{\rho S l}{2J} \cdot \frac{dC_m}{d\alpha} V^2\left(\alpha \cos\nu_r - \alpha_M \cos\chi_M - \frac{l_c\omega_{\eta_2}}{V} \cdot \cos\nu_r\right) +$$

$$+\frac{\rho S l^2}{2J} \cdot \frac{dC_{mM}}{d\alpha} \cdot V\omega_\zeta\left(\alpha - \frac{l'_c\omega_{\eta_2}}{V}\right)\sin\nu_r - \frac{C_j Q_e}{J}\omega_\eta ,$$

$$F_7 = \frac{\mu_1\mathcal{T}}{J_\zeta} - \frac{\rho S l^2}{2J_\zeta} C_{ax} V\omega_\zeta - \frac{C'_j Q_e}{J_\zeta}\omega_\zeta ,$$

$$F_8 = \frac{\omega_\eta}{\cos\alpha_H} - F_3 - F_4 \sin(\vartheta_L + \alpha_V) \operatorname{tg}\alpha_H ,$$

$$F_9 = -\omega_\xi - F_4 \cos(\vartheta_L + \alpha_V).$$

Integrarea sistemului se poate face numai prin metode numerice la computer.

7. ECUAȚIILE MIȘCĂRII GENERALE A RACHETEI STABILIZATE PRIN ROTAȚIE PROPRIE ÎN CAZUL INCIDENTELOR MICI

Un caz foarte important și frecvent întîlnit în practică este acela al mișcării cu incidențe mici (α nedepășind cîteva grade), caracteristic în general rachetelor stabile. În această situație vom putea considera:

$$\sin\alpha_V \cong \alpha_V , \quad \cos\alpha_V \cong 1, \quad \sin\alpha_H \cong \alpha_H , \quad \cos\alpha_H \cong 1. \tag{46}$$

În cazul incidențelor mici, ținînd cont de figura 3 și de expresiile (33) și (34), se obțin relațiile

$$\alpha_H \cong \alpha \sin\nu ; \quad \alpha_V \cong \alpha\cos\nu ; \quad \nu \cong \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha_H}{\alpha_V} \cong \nu_r . \tag{47}$$

Vom nota cu Ψ (fig. 2) unghiul format de tangenta la traiectorie cu intersecţia dintre planele OXZ şi OX_LY_L (paralel cu planul de lansare). În baza unor relaţii din trigonometria sferică, între unghiurile Ψ, Ψ_L, ϑ_L (fig. 2) se poate stabili legătura $\operatorname{tg}\Psi = \operatorname{tg}\Psi_L \cdot \cos\vartheta_L$. Remarcăm că în perioada activă, unghiul ϑ_L, datorit în special căderii gravitaţionale a tangentei la traiectorie (faţă de direcţia de lansare), nu depăşeşte de regulă 5—10°, iar unghiurile Ψ şi Ψ_L sînt foarte mici, de regulă sub un grad, ele fiind cauzate de abaterile unghiulare ale traiectoriei faţă de planul de lansare. În acest caz rezultă

$$\Psi = \Psi_L \cdot \cos\vartheta_L \cong \Psi_L . \tag{48}$$

În virtutea relaţiilor (31) şi (47), în cazul incidenţelor mici vom putea scrie

$$\begin{aligned} \omega_{\eta_2} \sin\nu_r \cong \omega_{\eta_2} \sin\nu &= \dot{\Psi}_L \cos\vartheta_L + \dot{\alpha}_H - \\ &- \cos\nu[\alpha\dot{\nu} + \dot{\Psi}_L \cos\vartheta_L \cos\nu - \dot{\vartheta}_L \sin\nu], \\ \omega_{\eta_2} \cos\nu_r \cong \omega_{\eta_2} \cos\nu &= \dot{\vartheta}_L + \dot{\alpha}_v + \\ &+ \sin\nu[\alpha\dot{\nu} + \dot{\Psi}_L \cos\vartheta_L \cos\nu - \dot{\vartheta}_L \sin\nu]. \end{aligned} \tag{49}$$

După cum este cunoscut [5], [2], [14], în cazul rachetelor stabilizate giroscopic, prin rotaţie proprie rapidă, variaţia incidenţei pe un arc scurt de traiectorie, obţinută într-o primă aproximaţie, considerînd că asupra rachetei acţionează numai momentul aerodinamic de răsturnare, se poate pune sub forma

$$\alpha = \frac{\dot{\alpha}_1}{\dot{\nu}\sqrt{\sigma}} \cdot \sin[\dot{\nu}\sqrt{\sigma}(t - t_1)], \tag{50}$$

în care $\dot{\alpha}_1$ este viteza unghiulară iniţială de nutaţie, iar $\dot{\nu}$ şi σ au expresiile :

$$\dot{\nu} = \frac{J_\zeta \omega_\zeta}{2J}, \qquad \sigma = 1 - \frac{\rho S l}{2J} \cdot \frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{V^2}{\dot{\nu}^2}. \tag{51}$$

Observînd că raportul momentelor de inerţie (aproximativ constant în timpul zborului) şi raportul dintre tracţiune şi masa rachetei sînt cuprinse în general în limitele

$$\frac{J}{J_\zeta} = 10 \ldots 30, \frac{\mathcal{T}}{m} = (100 \ldots 800)\frac{m}{s^2},$$

iar $\dot{\alpha}_1$ şi ω_ζ, au ordinele de mărime $10^{-1} \ldots 1$ (s^{-1}), respectiv, $10^2 \ldots 10^3 (s^{-1})$ şi ţinînd cont de (50), (51) şi (47) rezultă pentru $\dot{\alpha}_v$ şi $\dot{\alpha}_H$ ordinele de mărime $10^{-1} \ldots 1 (s^{-1})$. În sfîrşit, ţinînd cont de (49), din ultimele două ecuaţii (35) rezultă pentru $\dot{\vartheta}_L$ şi $\dot{\Psi}_L$ ordinele de mărime $10^{-2} \ldots 10^{-1} (s^{-1})$.

În baza observațiilor de mai sus, ținînd cont de (12), (48) și (49), în cazul incidențelor mici se pot admite relațiile simplificate:

$$\omega_\xi \cong -\dot{\alpha}_H - \dot{\Psi}, \qquad \omega_\eta \cong \dot{\alpha}_V + \dot{\vartheta}_L, \qquad \omega_\zeta \cong \dot{\gamma}, \tag{52}$$

$$\omega_{\eta_2} \sin \nu_r \cong \omega_{\eta_2} \sin \nu \cong \dot{\alpha}_H + \dot{\Psi} - \alpha_V \dot{\nu}, \tag{53}$$

$$\omega_{\eta_2} \cos \nu_r \cong \omega_{\eta_2} \cos \nu \cong \dot{\alpha}_V + \dot{\vartheta}_L + \alpha_H \dot{\nu}. \tag{54}$$

$$\dot{\Psi}_L \cos \vartheta_L \cong \dot{\Psi}, \tag{55}$$

termenii neglijați nedepășind cîteva procente din valorile mărimilor ce se calculează cu relațiile respective.

Se introduc notațiile

$$\theta_V = \vartheta_L, \qquad \theta_H = \Psi, \tag{56}$$

precum și mărimile unghiulare

$$\varphi_V = \alpha_V + \theta_V, \qquad \varphi_H = \alpha_H + \theta_H; \tag{57}$$

observăm că φ_V este unghiul format de planul $O\eta'\zeta'$ (ce conține axa longitudinală a rachetei și este perpendicular pe planul OXY) cu planul OX_LZ_L (paralel cu axa lansatorului și perpendicular pe planul de lansare); observăm, de asemenea, că φ_H este aproximativ egal cu unghiul format de axa longitudinală a rachetei cu planul de lansare.

În sfîrșit, vom introduce notațiile

$$\alpha_T^V = \alpha_T \cos \chi, \quad \alpha_T^H = \alpha_T \sin \chi, \quad e_T^V = e_T \cos \chi, \quad e_T^H = e_T \sin \chi, \tag{58}$$

$$\alpha_P^V = \alpha_P \cos \chi_P, \quad \alpha_P^H = \alpha_P \sin \chi_P, \quad \alpha_M^V = \alpha_M \cos \chi_M, \quad \alpha_M^H = \alpha_M \sin \chi_M,$$

precum și mărimile dimensionale

$$K_X = \frac{\rho S C_X}{2m}, \qquad K_Z = \frac{\rho S}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}C_Z}{\mathrm{d}\alpha}, \qquad K_n = \frac{\rho S}{2m} \cdot \frac{l_c}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}C_Z}{\mathrm{d}\alpha},$$

$$K_l = \frac{\rho S}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}C_{\mathrm{Mag}}}{\mathrm{d}\alpha}, \qquad K_l^* = \frac{\rho S}{2m} \cdot \frac{l_c'}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}C_{\mathrm{Mag}}}{\mathrm{d}\alpha},$$

$$K_m = \frac{\rho S l}{2J} \cdot \frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\alpha}, \qquad K_\omega = \frac{\rho S l_c}{2J} \cdot \frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\alpha}, \qquad K_{ax} = \frac{\rho S l}{2J_\zeta} \cdot C_{ax}, \tag{59}$$

$$K_{mM} = \frac{\rho S l}{2J} \cdot \frac{\mathrm{d}C_{mM}}{\mathrm{d}\alpha}, \qquad K_{mM}^* = \frac{\rho S l_c'}{2J} \cdot \frac{\mathrm{d}C_{mM}}{\mathrm{d}\alpha},$$

$$K_j = \frac{C_j Q_e}{J}, \qquad K_j' = \frac{C_j' Q_e}{J_\zeta}.$$

Ţinînd cont de relaţiile (47), (48), (52)...(59), în cazul incidenţelor mici, sistemele de ecuaţii dinamice (35) şi (36) devin

$$\dot{V} = a_R - K_X V^2 - g \sin(\Theta_0 + \theta_V),$$

$$V\dot{\theta}_V = a_R(\alpha_V - \alpha_T^V) + K_Z V^2(\alpha_V - \alpha_P^V) - K_n l V(\dot{\varphi}_V + \alpha_H \dot{\nu}) +$$

$$+ K_l l V \omega_\zeta \alpha_H - K_l^* l^2 \omega_\zeta(\dot{\varphi}_H - \alpha_V \dot{\nu}) - g \cos\Theta_0 \cos\theta_V + g \sin\Theta_0 \cdot \theta_V, \tag{60}$$

$$V\dot{\theta}_H = a_R(\alpha_H - \alpha_T^H) + K_Z V^2(\alpha_H - \alpha_P^H) - K_n l V(\dot{\varphi}_H - \alpha_V \dot{\nu}) -$$

$$- K_l l V \omega_\zeta \alpha_V + K_l^* l^2 \omega_\zeta(\dot{\varphi}_V + \alpha_H \dot{\nu}) + g \cdot \sin\Theta_0 \cdot \theta_H$$

pentru mişcarea centrului de greutate şi, respectiv,

$$\ddot{\varphi}_H - \frac{\omega_\zeta}{\Gamma} \cdot \dot{\varphi}_V = \frac{a_R}{k^2} \cdot e_T^H + K_m V^2(\alpha_H - \alpha_M^H) - K_\omega l V(\dot{\varphi}_H - \alpha_V \dot{\nu}) -$$

$$- K_{mM} l V \omega_\zeta \alpha_V + K_{mM}^* l^2 \omega_\zeta(\dot{\varphi}_V + \alpha_H \dot{\nu}) - K_j \dot{\varphi}_H,$$

$$\ddot{\varphi}_V + \frac{\omega_\zeta}{\Gamma} \cdot \dot{\varphi}_H = \frac{a_R}{k^2} \cdot e_T^V + K_m V^2(\alpha_V - \alpha_M^V) - K_\omega l V(\dot{\varphi}_V + \alpha_H \dot{\nu}) + \tag{61}$$

$$+ K_{mM} l V \omega_\zeta \alpha_H - K_{mM}^* l^2 \omega_\zeta(\dot{\varphi}_H - \alpha_V \dot{\nu}) - K_j \dot{\varphi}_V,$$

$$\dot{\omega}_\zeta = C a_R - K_{ax} l V \omega_\zeta - K_J' \cdot \omega_\zeta$$

pentru mişcarea în jurul centrului de greutate, în care a_R este acceleraţia corespunzătoare forţei de tracţiune (acceleraţia reactivă), k şi k_ζ sînt razele de giraţie corespunzătoare momentului de inerţie transversal (J) şi, respectiv, axial (J_ζ), C este un coeficient, iar Γ raportul momentelor de inerţie ale rachetei, ce se definesc cu ajutorul relaţiilor:

$$a_R = \frac{\mathcal{T}}{m}; \quad k^2 = \frac{J}{m}; \quad k_\zeta^2 = \frac{J_\zeta}{m}; \quad C = \frac{\mu_1}{k_\zeta^2}; \quad \Gamma = \frac{J}{J_\zeta}. \tag{62}$$

Ecuaţiile diferenţiale (60) şi (61), ţinînd cont de relaţiile de legătură (57), formează un sistem din care se pot determina parametrii V (viteza centrului de greutate), ω_ζ (viteza de rotaţie proprie), α_V, α_H, θ_V, θ_H, φ_V şi φ_H, care definesc mişcarea generală spaţială a rachetei în cazul incidenţelor mici.

Menţionăm că ecuaţii de forme asemănătoare cu (60) şi (61), cu alte semnificaţii pentru variabilele unghiulare de poziţie sînt prezentate şi în alte lucrări [10], [2], [5], [14], dar acestea se referă la cazuri particulare cum ar fi cazul traiectoriilor aproape orizontale, cazul rachetelor „ideale" (fără disimetrii aerodinamice şi propulsive) etc.

Observăm că din sistemul de ecuații (60), (61), (57), întocmit anterior pentru cazul rachetei stabilizate prin rotație proprie rapidă (giroscopic), se poate obține sistemul corespunzător mișcării cu incidențe mici pentru racheta fără rotație proprie, făcînd particularizările $C = 0$, $\omega_\zeta = 0$, anulînd termenii corespunzători forței și momentului Magnus și schimbînd semnul coeficienților K_n și K_m, deoarece centrul de presiune trece în spatele centrului de greutate. Ecuațiile obținute astfel sînt valabile cu o bună aproximație și pentru racheta cu ampenaj și rotație „lentă", în care caz, ultima ecuație (61), ținînd cont de valoarea lui C (de data asta diferită de zero), va servi pentru determinarea vitezei unghiulare de rotație proprie.

Deoarece mărimile definite de relațiile (58), (59), (62) sînt în general variabile, iar forma ecuațiilor este destul de complicată, integrarea sistemului format de (60), (61), (57) se poate face numai prin metode numerice, cu ajutorul calculatoarelor electronice. Consemnăm însă faptul, foarte important, că făcînd anumite ipoteze suplimentare sistemul respectiv ne conduce la ecuații [8] ale căror soluții se pot exprima analitic.

Primită la redacție la 7 iunie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Appazov, R. F., Lavrov, S. S., Mișin, V. P., *Ballistika upravliaemîh rakel dalnevo deistviia*, Moskva, Izd. „Nauka", 1966.
2. Davis, L., Jr., Follin, J. W., Jr., Blitzer, L., *The Exterior Ballistics of Rockets*, Princeton—Toronto—London—New York, D. Van Nostrand Co., Inc., 1958.
3. Dobrolenski, Iu. P., Ivanova V. I., Pospelov G. S., *Avtomatica upravliaemîh snariadov*, Moskva, Oboronghiz, 1963.
4. Ecary, C., *Navigation proportionnelle d'un missile dans l'espace*, *Mémorial de l'artillerie française*, Sciences et technique de l'armement, **43**, *168* (1969).
5. Gantmaher, R. F., Levin, L. M., *Teoriia poleta naupravliaemîh rakel*, Moskva, Fizmatghiz, 1959.
6. Lebedev, A. A., Gerasiuta, N. F., *Ballistika rakel*, Moskva, Izd. Mașinostroenie, 1970.
7. Molitz, H., Strobel, R., *Äussere Ballistik*, Berlin, Springer-Verlag, 1963.
8. Moraru, F., *Contribuții la studiul mișcării generale spațiale a rachetei, cu aplicații în cazul rachetei stabilizate giroscopic*, teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1970 (nepublicată).
9. Nicolaides, J., *Two Non — Linear Problems in Flight Dynamics of Modern Ballistics Missiles*, I.A.S. Report, *59* (1959).
10. Niță, M. M., Adreescu D. St., *Zborul rachetei*, București, Editura militară, 1964.
11. Rankine R. A., *The Mathematical Theory of the Motion of Rotated and Unrotated Rockets*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*; London, Mathematical and Physical Sciences, 1949.
12. Rosser, J. B., Newton R. R., Gross, L. G., *Mathematical Theory ofRocket Flight*, New York, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1947.
13. Sviatoduh, V. K., *Dinamica prostranstvennovo dvijeniia upravliaemîh rakel*, Moskva, Mașinostroenie, 1969.
14. Sapiro, Ia. M., Mazing, G. Iu., Prudnicov, N. E., *Osnovî proectirovaniia rakel na tverdom toplive*, Moskva, Voennoe Izdatelstvo Ministerstva Oboronî SSSR, 1968.

EVALUAREA PERICOLULUI DE AVARIE A SISTEMELOR MECANICE SUPUSE LA VIBRAȚII ALEATORII

de S. LARIONESCU
Institutul de construcții București

Avariile sistemelor mecanice pot apărea în mod brusc sau într-o perioadă de timp mai îndelungată. În lucrare sînt analizate avariile de-al doilea tip, provocate de vibrațiile aleatorii cu banda de frecvențe îngustă. La început se stabilește o scară ierarhică a pericolului de avarie funcțională, iar după aceea se calculează timpul de apariție al unei avarii prin oboseală. Se iau în considerație efectele vibrațiilor aleatorii cu un spectru larg de frecvențe, ca și efectul suprapunerii peste vibrațiile aleatorii cu banda îngustă de frecvențe a unui număr finit de componente armonice. În sfîrșit, se prezintă modul în care pot fi estimate caracteristicile necesare ale vibrațiilor aleatorii cu ajutorul aparaturii obișnuite pentru măsurarea vibrațiilor sinusoidale.

INTRODUCERE

Uneori, după realizarea sistemelor mecanice, se observă vibrații puternice ale acestora. În aceste cazuri se pune problema evaluării *urgente* a pericolului de avarie. Procedura folosită în acest scop trebuie să fie expeditivă, simplă, adaptată condițiilor grele de șantier în care se fac determinările experimentale și, pe cît posibil, să nu perturbe funcționarea sistemului mecanic investigat. Pericolul de avarie a sistemului mecanic depinde de doi factori : forma vibrațiilor și intensitatea vibrațiilor. Forma vibrațiilor poate fi foarte variată. Din fericire, în practică, nu se întîlnesc decît puține tipuri de vibrații, dintre care cel mai frecvent îl constituie, de departe, vibrațiile sinusoidale. În ultimul timp apar însă tot mai des cazuri de sisteme mecanice supuse la vibrații aleatorii, în marea majoritate a lor cu spectrul de frecvență îngust.

În această lucrare se prezintă o metodă originală, relativ simplă și expeditivă, pentru evaluarea pericolului de avarie funcțională sau (și) prin oboseală în cazul vibrațiilor aleatorii cu spectrul îngust de frecvență. Se studiază, de asemenea, cazul în care vibrațiile aleatorii apar împreună cu vibrații sinusoidale și se face o comparație a cazurilor studiate cu vibrațiile aleatorii ce au un spectru larg de frecvență.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 781–807

AVARIILE PROVOCATE DE VIBRAȚIILE SINUSOIDALE

Datorită faptului că vibrațiile sinusoidale simple sau compuse apar ori de cîte ori sistemele mecanice conțin părți aflate într-o mișcare periodică, cum este cazul majorității instalațiilor și utilajelor mecanice, problema avariei pentru acest tip de vibrații a fost mult studiată și este în prezent bine cunoscută. După mecanismul de producere, avariile pot fi de mai multe tipuri, dintre care menționăm pe cele mai importante:

a) avarii funcționale provocate de apariția unei *singure* amplitudini a vibrației cu valoarea mai mare decît o anumită limită;

b) avarii funcționale provocate de apariția, pentru cel puțin *o anumită perioadă de timp*, a unor vibrații avînd amplitudinea mai mare decît o anumită valoare;

c) avarii datorită fenomenului de oboseală.

Primul tip de avarii apare deci în mod brusc, ducînd la scoaterea din funcțiune a sistemului mecanic. După apariția avariilor nu se mai poate face nimic în afară de reproiectarea și reconstruirea sistemului mecanic. Avariile de tipul b), în schimb, apar într-o perioadă de timp mai lungă, fiind precedate de anumite semnale de alarmă, cum ar fi, de exemplu, fisurile, zgomotele sau funcționarea defectuoasă a instalației. În această situație se pot face măsurători și se pot lua unele măsuri, ca, de pildă, micșorarea sarcinii sau consolidarea anumitor elemente structurale, astfel încît nivelul vibrațiilor să scadă, iar pericolul de avarie funcțională să fie îndepărtat. Valorile maxim admisibile ale amplitudinilor vibrațiilor astfel încît avariile de tipul b) să nu apară, au fost stabilite în mod experimental în funcție de frecvența vibrațiilor și prezentate sub diferite forme (tabele, coeficienți empirici) în lucrările de specialitate [2], [7], [8], [20], [22].

Conceptul de „*oboseală a materialelor*" a fost folosit încă în 1839 de I. V. Poncelet, însă a început să fie folosit într-un sens asemănător celui de azi în 1855 în legătură cu rupturile apărute în osiile vagoanelor de cale ferată. O analiză științifică a acestui fenomen a fost făcută de August Wöhler, care a stabilit importanta concluzie practică că oboseala nu apare dacă amplitudinile nu depășesc o anumită limită. Rezultate asemănătoare cu cele obținute de Wöhler au fost prezentate grafic pentru prima dată în 1910 sub forma unei curbe care îi poartă numele și a cărui alură este prezentată în figura 1. În ordonata figurii sînt marcate valorile maxime ale oscilației efortului unitar (valoarea de vîrf), iar pe abscisă numărul ciclilor necesari pentru a se obține deteriorarea prin oboseală. Această curbă este stabilită în ipoteza variației *sinusoidale* a eforturilor cu o amplitudine *constantă* și o *valoare medie nulă*. Ea nu depinde de frecvență. Un parametru important care o caracterizează este σ_{ob}, limita de rezistență la oboseală. Deoarece curba lui Wöhler va juca un rol important în expunerea noastră, să insistăm puțin asupra ei. În primul rînd, forma ei depinde de foarte mulți parametri printre care menționăm: natura materialului, tratamentul termic la care a fost supus acesta, modul de prelucrare, felul solicitării, temperatura, dimensiunile epruvetei de încercare, prelucrarea și starea suprafeței, acțiunea agenților corosivi, tensiunile remanente etc. În al doilea rînd, fiecare punct al curbei Wöhler este obținut în urma unei prelucrări statistice a rezultatelor obținute pentru cel

puțin 8—10 epruvete. Histograma corespunzătoare fiecărei valori a lui σ este prezentată, de asemenea, în figura 1. În sfîrșit, am văzut că curba Wöhler este trasată pentru solicitări dinamice armonice cu amplitudinea constantă. În practică însă se întîlnesc destul de rar astfel de cazuri. De

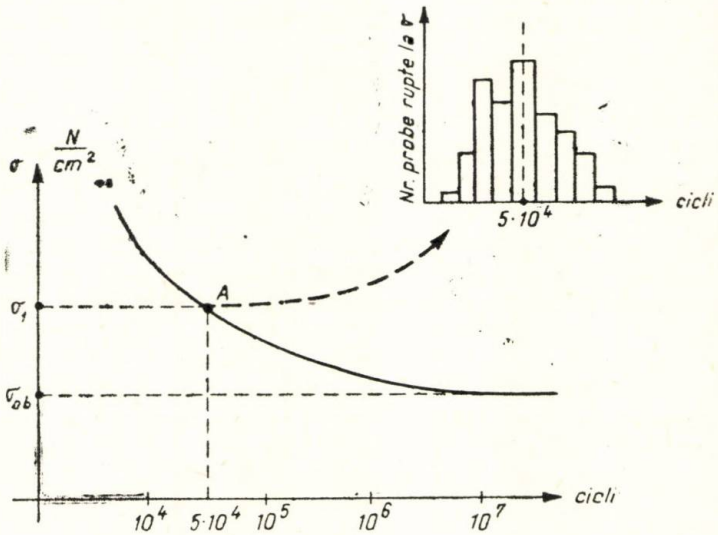


Fig. 1. — Forma curbei Wöhler și histograma corespunzătoare punctului A.

obicei amplitudinea vibrațiilor se modifică în timp. Această situație frecventă nu a putut fi încă rezolvată. Totuși au fost elaborate un număr de reguli *empirice*. Cea mai cunoscută și folosită dintre ele este regula acumulării liniare, denumită și regula Palmgren-Miner. Conform acesteia, ruperea prin oboseală constituie rezultatul unei acumulări liniare a unor defecte provocate prin „oboseală parțială". Dacă, de exemplu, materialul este supus unui număr oarecare de cicluri n_i de eforturi la un anumit nivel de vibrații, iar numărul total de cicluri pentru a provoca un defect prin oboseală la acest nivel este N_i, atunci materialul a acumulat o „oboseală parțială" definită de

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}. \tag{1}$$

Atunci cînd nivelul de vibrație se schimbă se poate calcula o nouă oboseală parțială din curba Wöhler și așa mai departe. Oboseala totală acumulată după aplicarea eforturilor oscilatorii de diferite nivele este

$$D = \Sigma D_i = \Sigma \frac{n_i}{N_i}, \tag{2}$$

unde D este o constantă. Dacă vibrațiile sînt la un singur nivel, ruperea apare atunci cînd $D = 1$. Pentru mai multe valori *discrete* ale nivelului efortului unitar, valoarea indicelui D variază de la 0,3 la 3 în funcție de numărul nivelelor de încărcare și funcție de faptul dacă s-au aplicat inițial cicluri de efort unitar ridicat sau scăzut [15].

Amănunte asupra pericolului de avarie prin oboseală în cazul vibrațiilor sinusoidale pot fi găsite în lucrările [9], [15], [19], [21], [24].

CARACTERISTICILE VIBRAȚIILOR ALEATORII

Valoarea instantanee a unei vibrații aleatorie nu poate fi prevăzută, însă se poate stabili pe cale statistică probabilitatea de realizare a unei anumite valori, la un moment dat t_1. Să presupunem că s-a realizat un număr de N accelerograme ale unei vibrații aleatorie (fig. 2). Printre acestea există n accelerograme în care accelerația la momentul t_1 este mai mică decît a_1. Dacă numărul total N al accelerogramelor este suficient

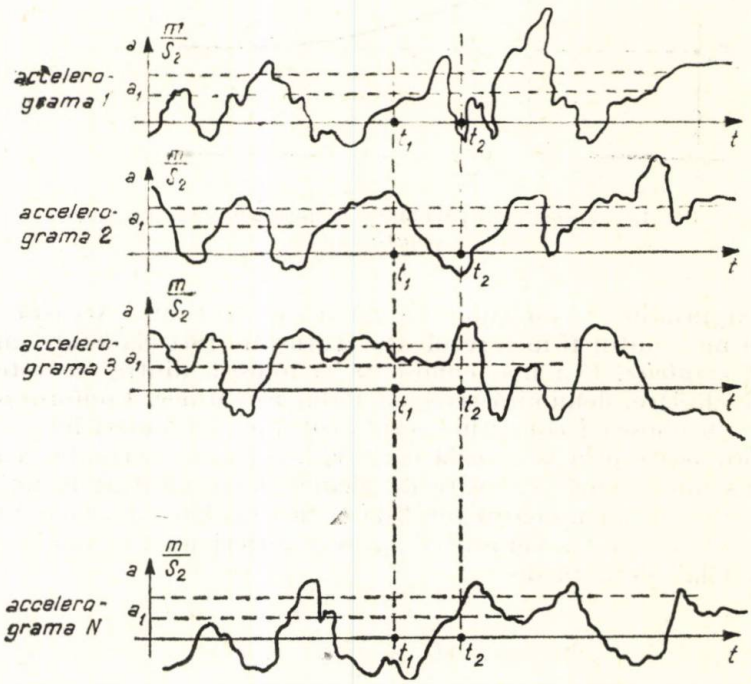


Fig. 2. — Cele N accelerograme necesare determinării funcției de repartiție $P(a, t_1)$.

de mare, atunci se poate calcula probabilitatea $P_1(a_1, t_1)$ ca accelerația să nu depășească la momentul t_1 valoarea a_1:

$$P_1(a_1, t_1) \simeq \frac{n}{N}. \tag{3}$$

Operația efectuată mai înainte pentru valoarea a_1 a accelerației, poate fi efecutată pentru orice alte valori, obținîndu-se în felul acesta *funcția de repartiție* $P_1(a, t_1)$. Dacă aceasta admite o derivată, se definește *densitatea de probabilitate* (densitatea de repartiție)

$$p_1(a, t_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} P_1(a, t_1). \tag{4}$$

Vibrațiile aleatorii întîlnite în practică admit cel mai frecvent o funcție de repartiție denumită *normală* sau a lui Gauss. Funcția densității de probabilitate corespunzătoare este definită prin expresia

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x - \bar{x}}{2\sigma^2}\right], \tag{5}$$

unde

$\bar{x}$ este valoarea medie sau speranța matematică a variabilei aleatorie x,

σ — abaterea medie pătratică.

În situațiile practice cele mai frecvente și luate în considerație în lucrarea de față este realizată ipoteza ergotică, iar mărimile de mai înainte se pot determina cu ajutorul următoarelor expresii (momentele de ordinul întîi și doi):

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \tag{8}$$

În această lucrare vor fi luate în considerație numai vibrațiile aleatorii cu densitatea de probabilitate normală. Această restricție nu este supărătoare, deoarece, conform teoremei limitei centrale, chiar vibrațiile aleatorii cu o densitate de probabilitate diferită de cea a lui Gauss, tind să devină gaussiene după transmiterea lor de la un element la altul al sistemului mecanic.

Vibrațiile aleatorii pot avea „forme" foarte diferite între ele. Pentru ilustrare sînt prezentate în figura 3 două cazuri tipice. În scopul punerii în evidență a „formei" unei vibrații aleatorii trebuie stabilită o relație între valorile ei la diferite momente de timp, relație de natură statistică. Pentru cazul a două momente de timp această relație este funcția de repartiție de ordinul doi $P_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$, care se definește, în mod asemănător cu cea de ordinul întîi, drept probabilitatea ca vibrația aleatorie să nu depășească valoarea x_1 la timpul t_1 și valoarea x_2 la timpul t_2. Pentru cazul a N accelerograme (fig. 2), această probabilitate poate fi determinată aproximativ raportînd numărul cazurilor în care accelerațiile sînt mai

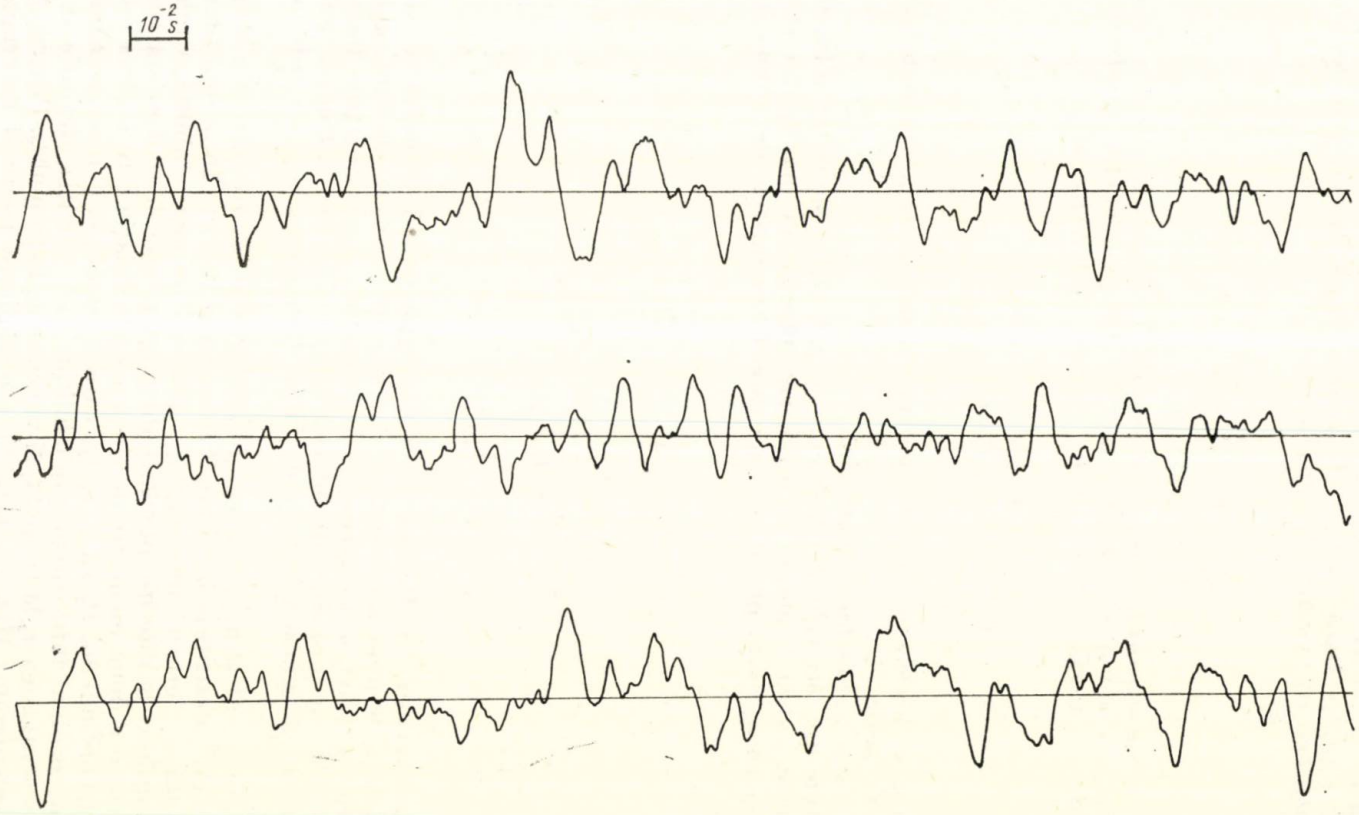


Fig. 3a. — Vibrații aleatorii cu spectru larg de frecvențe cuprins între 5 și 200 Hz (3 dE).

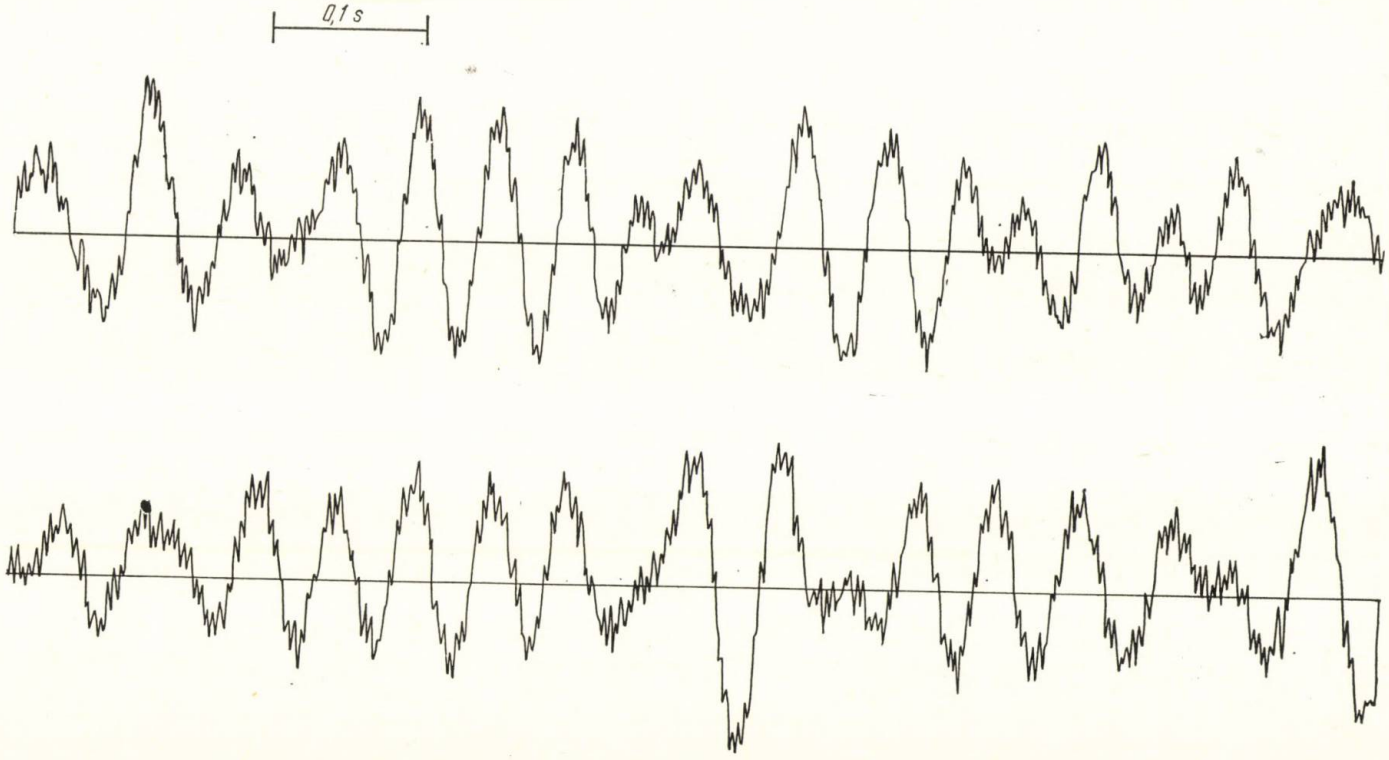


Fig. 3b. — Vibrații aleatorii cu spectru îngust de frecvențe cuprins între 11,2 și 22,4 Hz (3 dB).

mici decît a_1 şi a_2, pentru timpi t_1 şi t_2, la numărul total de cazuri N. Funcţiei de repartiţie de ordinul doi îi corespunde o funcţie a densităţii de probabilitate de ordinul doi definită astfel:

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial P(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{9}$$

O vibraţie aleatorie va fi definită complet atunci cînd vor fi cunoscute toate densităţile de probabilitate de ordinul 1, 2, 3, ..., n,... Ea va fi normală atunci cînd toate densităţile de probabilitate sînt de tipul Gauss. Apare evident că determinarea experimentală şi manipularea matematică a funcţiilor de densitate de probabilitate este dificilă. Din fericire, pentru cazurile practice, cele mai frecvente şi considerate în această lucrare, a vibraţiilor aleatorii normale (gaussiene), este suficientă cunoaşterea densităţii de probabilitate de ordinul întîi şi doi. Pentru determinarea densităţii de probabilitate gaussiene de ordinul 2 este necesară cunoaşterea unor momente de ordinul întîi şi doi (relaţiile 6, 7, 8) şi a unui nou parametru denumit funcţia de autocorelaţie şi definit de expresia

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T} x(t)\, x(t+\tau)\, \mathrm{d}t. \tag{10}$$

Analiza vibraţiilor aleatorii pe care am efectuat-o pînă acum a fost făcută în domeniul timpului real. Aceeaşi analiză, fără un spor de informaţii dar cu unele avantaje în domeniul obţinerii datelor experimentale şi în domeniul manipulării matematice, poate fi făcută şi în domeniul frecvenţelor. Transformarea Fourier a vibraţiei aleatorie nu poate fi definită, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, \mathrm{d}t \to \infty. \tag{11}$$

Pentru a evita acest inconvenient vom lua o parte din vibraţia aleatorie (de pildă înregistrată pe bandă de magnetofon) pe care o vom numi *trunchiată*. Transformarea ei Fourier va fi

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t, \tag{12}$$

unde indicele T arată durata vibraţiei aleatoare trunchiate. Puterea medie a vibraţiei va fi proporţională cu valoarea medie pătratică definită de relaţia (7), pe care o putem scrie în funcţie de $X_T(j\omega)$ cu ajutorul transformării Fourier inverse:

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(j\omega)\, \mathrm{e}^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \right] \mathrm{d}t. \tag{13}$$

Inversînd ordinea de integrare obținem

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(j\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \, d\omega, \tag{14}$$

unde

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(j\omega)|^2}{T}. \tag{15}$$

Datorită faptului că $\overline{x^2}$ este proporțional cu puterea vibrației aleatorie, iar (14) poate fi considerată o relație de definiție, $S(\omega)$ a primit denumirea de densitate spectrală a puterii.

În considerațiile de mai sus trecerea de la domeniul timp la domeniul frecvență s-a făcut printr-un artificiu, introducîndu-se vibrația aleatorie trunchiată. Principalul rezultat obținut îl constituie relația (14) care stabilește legătura dintre o caracteristică $\overline{x^2}$ definită în domeniul timp și densitatea spectrală de putere definită în domeniul frecvență. O altă legătură dintre cele două domenii este dată de teorema Wiener-Hincin care stabilește că densitatea spectrală de putere este transformata Fourier a funcției de autocorelație. Prin urmare, ambele caracteristici furnizează aceleași informații. Deosebirea constă în faptul că densitatea spectrală de putere poate fi determinată experimental mult mai ușor. Să remarcăm la început că din relația (15) rezultă că $S(j\omega)$ este *reală* și *pară* în raport cu frecvența. Semnalul electric, proporțional cu vibrația aleatorie, poate fi trecut printr-un filtru electric cu banda de trecere $\Delta\omega$ foarte îngustă în jurul frecvenței ω_i. Valoarea medie pătratică la ieșirea filtrului poate fi determinată foarte ușor cu ajutorul unui circuit care modelează relația (7), unde T ia o valoare suficient de mare. Cunoscînd pe $\overline{x^2}$, ω_i, $\Delta\omega$ din relația (14) rezultă

$$S(\omega_i) = 2\pi \frac{\overline{x^2}}{\Delta\omega} = \frac{\overline{x^2}}{\Delta f}. \tag{16}$$

Variind frecvența ω_i de trecere a filtrului cu banda îngustă Δf (de obicei constantă) se poate reprezenta grafic variația densității spectrale de putere în funcție de frecvență. Pe lîngă faptul că poate fi determinată experimental relativ ușor, densitatea spectrală de putere $S_2(\omega)$ a vibrației aleatorii la ieșirea unui sistem mecanic mai prezintă, de asemenea, avantajul că se găsește într-o relație matematică simplă cu densitatea spectrală de putere $S_1(\omega)$ a excitației

$$S_2(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_1(\omega), \tag{17}$$

unde $H(j\omega)$ este funcția de transfer a sistemului mecanic.

Pentru evaluarea pericolului de avarie datorit vibrațiilor aleatorii, este foarte importantă cunoașterea distribuției *valorilor maxime*. Am văzut că densitatea de probabilitate a *valorilor instantanee* ale unei vibrații aleatorii gaussiene (normale) depinde numai de valoarea medie și

abaterea medie pătratică (relația 5). În cazul valorilor maxime, pentru același tip de vibrații, densitatea de probabilitate mai depinde și de densitatea spectrală de putere (spectrul vibrației), așa cum se vede pentru două cazuri-limită în figura 4. Pentru diferite forme de spectru situate între cele două situații-limită, densitatea de probabilitate are o formă intermediară între curba Gauss și Rayleigh (fig. 5). O metodă aproximativă de calcul a parametrului α în funcție de forma densității spectrale de putere este prezentată în lucrarea [4].

EVALUAREA AVARIILOR FUNCȚIONALE PROVOCATE DE VIBRAȚIILE ALEATORII

După cum am menționat la începutul lucrării, evaluarea pericolului de avarie funcțională în cazul vibrațiilor *sinusoidale* a fost făcută pe cale empirică. Pentru vibrațiile *aleatorii* nu se dispune încă de experiența necesară, astfel încît singura cale de apreciere a efectului acestor vibrații asupra sistemelor mecanice constă în folosirea datelor obținute pentru vibrațiile sinusoidale.

Vibrațiile aleatorii cu forma cea mai apropiată de a vibrațiilor sinusoidale sînt, după cum rezultă și din figura 3, cele cu banda îngustă de frecvență. Ele sînt totodată și cele mai frecvent întîlnite în practică din următoarele motive :

a) vibrațiile periculoase prin amplitudinea lor mare sînt cele cu frecvența situată în domeniul de rezonanță al sistemului mecanic. Însă caracteristica de transfer $H(j\omega)$ în domeniul de rezonanță este îngustă, așa încît spectrul de ieșire dat de relația (17) va avea banda de frecvențe, de asemenea, îngustă ;

b) vibrațiile aleatorii gaussiene, a căror răspîndire largă este explicată de teorema limitei centrale, pot fi interpretate ca fiind formate dintr-o infinitate de vibrații sinusoidale cu faza întîmplătoare. Marile întreprinderi moderne posedă întotdeauna hale cu multe utilaje ce produc fiecare excitații sinusoidale avînd faza întîmplătoare fie datorită variațiilor de sarcină, fie datorită opririlor, pornirilor frecvente sau ale altor caracteristici ale procesului tehnologic. Aceste utilaje funcționează însă de obicei cu aceeași turație sau cu turații apropiate, așa că hala în întregul ei poate fi considerată ca o sursă de excitație cu vibrații aleatorii avînd spectrul îngust de frecvență. Înregistrarea vibrațiilor care apar în hala cu războaie ale unei țesătorii (fig. 6) ilustrează caracterul aleatoriu cu banda îngustă de frecvență.

În afară de faptul că sînt foarte des întîlnite în practică și sînt asemănătoare cu vibrațiile sinusoidale, mai există cîteva considerente care au făcut ca în această lucrare vibrațiile aleatorii cu banda de frecvență îngustă să fie tratate cu prioritate. Din punctul de vedere al pericolului de avarie, cele mai importante sînt valorile mari ale amplitudinii vibrației. Însă, după cum rezultă din figura 5, probabilitatea de apariție a unor valori maxime mari este mai accentuată în cazul spectrelor înguste de frecvență. Deci rezultatele obținute în ipoteza vibrațiilor aleatorii cu spectru îngust de frecvență sînt *acoperitoare* și pentru cele cu spectru larg. În sfîrșit, caracteristicile vibrațiilor aleatorii cu spectru îngust de frecvență

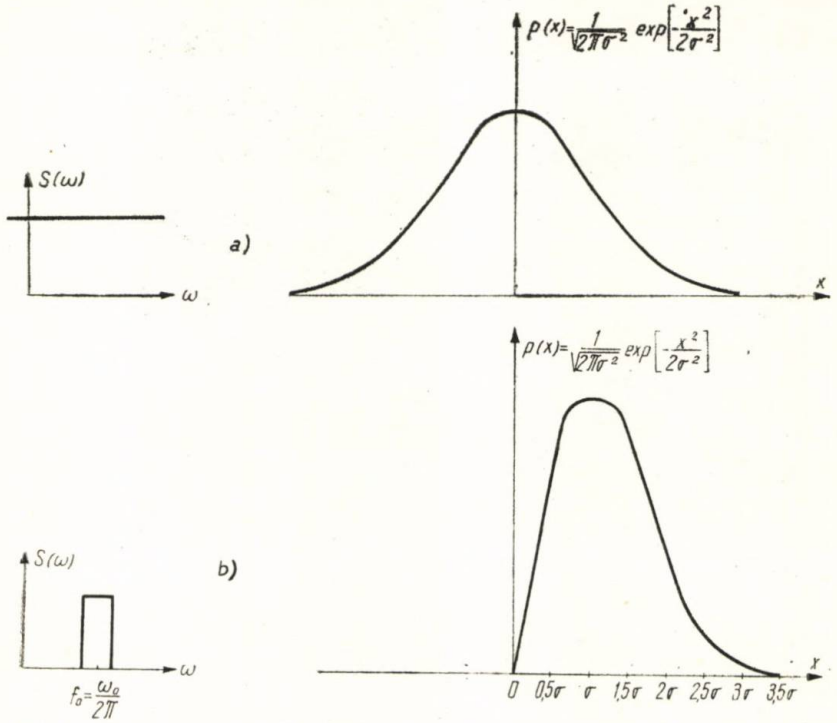


Fig. 4. — Distribuția valorilor maxime ale unei vibrații aleatorie este de tip Gauss (a) în cazul unui spectru lat și de tip Rayleigh (b) în cazul unui spectru îngust de frecvență.

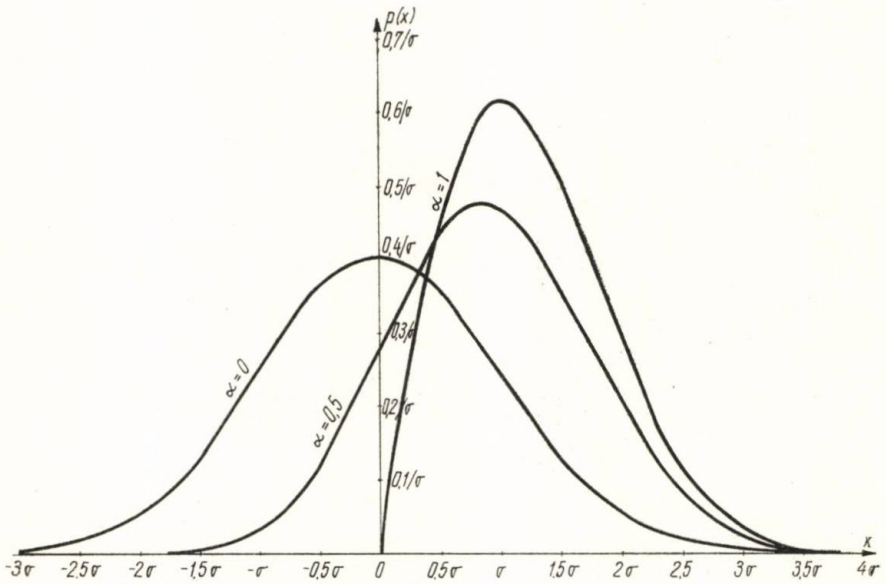


Fig. 5. — Densitatea de probabilitate a valorilor maxime ale vibrației aleatorie în funcție de spectrul vibrației; $\alpha = 0$ pentru spectrul infinit de larg, $\alpha = 1$ pentru spectrul infinit de îngust.

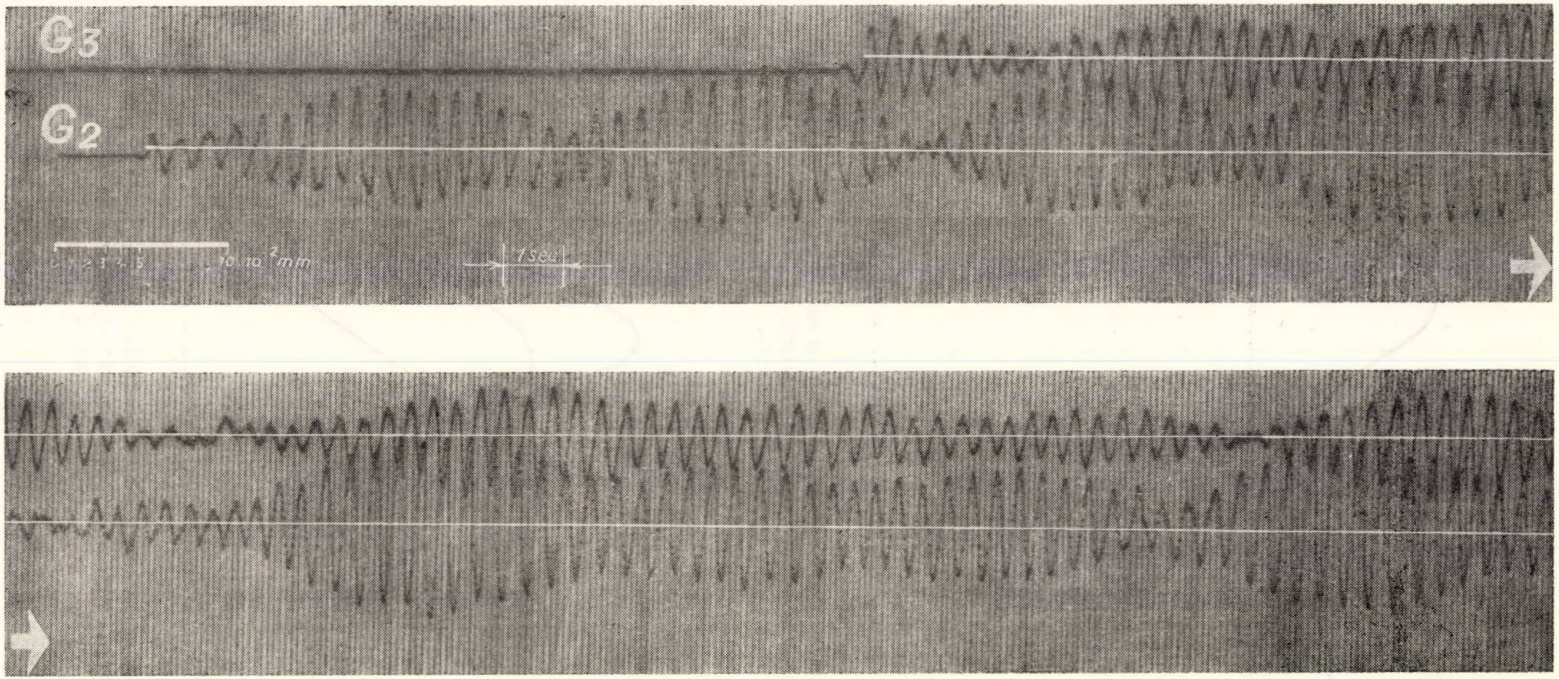


Fig. 6. — Vibrații aleatorii tipice, cu banda îngustă de frecvențe, care apar în halele cu multe utilaje de același tip; în acest caz hala cu războaie ale unei țesătorii.

pot fi măsurate și înregistrate mai simplu cu ajutorul aparaturii obișnuite pentru vibrații sinusoidale.

Vibrațiile aleatorii considerate în această lucrare satisfac ipoteza ergotică. Din această cauză definiția (3) a funcției de repartiție poate fi scrisă sub o formă echivalentă :

$$P_1(a_1) \simeq \frac{\tau}{T}, \tag{18}$$

unde

T este durata, suficient de mare, a unei accelerograme;

τ — durata în care vibrațiile din accelerograma considerată nu depășesc valoarea a_1.

Avariile funcționale de tip *b* apar, după cum am mai menționat, dacă vibrațiile depășesc o anumită *amplitudine* pentru o anumită *valoare de timp*. Deci un indicator al pericolului de avarie va trebui să depindă de amîndoi acești parametri. Ținînd seama de relația (18), pare convenabilă alegerea următorului indicator al pericolului de avarie :

$$A(x_1) = 1 - P_1(x_1), \tag{19}$$

unde

$P_1(x_1)$ este funcția de repartiție a *valorilor maxime* ale vibrației. Se remarcă ușor că relația de mai sus nu exprimă altceva decît probabilitatea ca valoarea maximă a vibrației aleatorii să depășească o anumită valoare. Înlocuind pe (18) în (19), rezultă

$$A(x_1) \simeq 1 - \frac{\tau}{T} = \frac{T-\tau}{T} = \frac{\theta}{T}, \tag{20}$$

unde

θ este durata în care valorile maxime ale vibrației *depășesc* valoarea x_1.

Pentru vibrațiile aleatorii cu spectru îngust de frecvență am văzut că densitatea de probabilitate a valorilor maxime este de tip Rayleich. Considerînd legătura (4) dintre densitatea de probabilitate și funcția de repartiție și înlocuind în (19) și (20), obținem

$$A = \frac{\theta}{T} = 1 - \int_0^{x_1} p_1(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_0^{x_1} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x,$$

$$A = \frac{\theta}{T} = \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{21}$$

Cu ajutorul acestei relații pot fi interpretate numeroasele norme existente pentru vibrațiile sinusoidale și stabilite limitele admisibile în cazul vibrațiilor aleatorii cu spectru îngust de frecvență. Să exemplificăm aceasta pentru cazul mașinilor și fundațiilor de mașini. În [7], [8] este dată o clasificare a valorilor de vîrf $\hat{x}$ ale acestor vibrații, în funcție de frecvență, clasificare pe care o prezentăm în graficul din figura 7. Limita

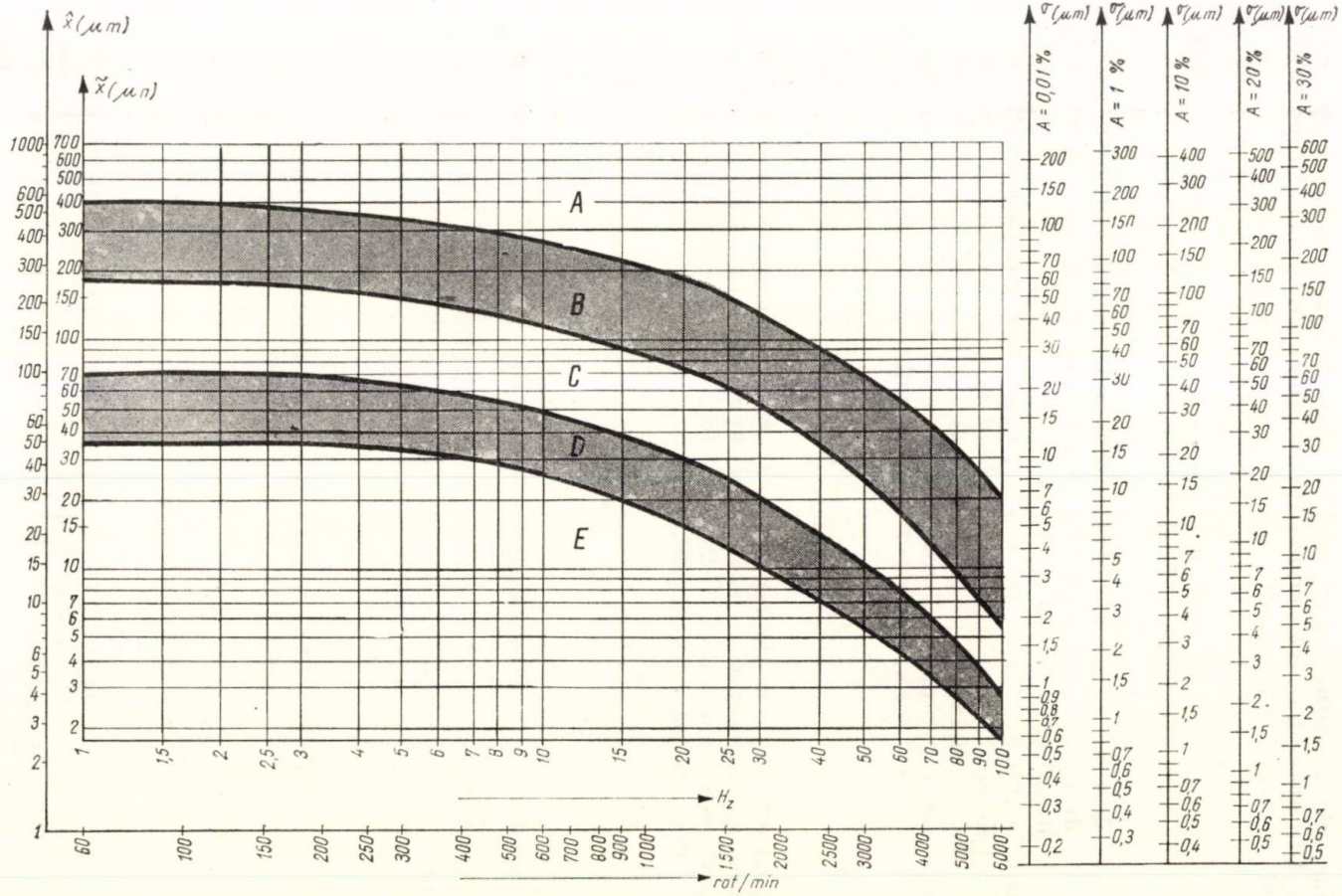


Fig. 7. — Clasificarea vibrațiilor sinusoidale ($\hat{x}$: valoarea de vîrf, $\tilde{x}$: valoarea eficace) și a vibrațiilor aleatorii cu banda îngustă de frecvență (σ: abaterea medie pătratică)
A = vibrații foarte puternice; B = vibrații puternice; C = vibrații moderate; D = vibrații slabe; E = vibrații foarte slabe.

vibrațiilor admisibile poate fi considerată linia care separă domeniul vibrațiilor moderate de domeniul vibrațiilor puternice. Această linie poate aproxima totodată și valoarea maximă admisibilă a amplitudinilor vibrațiilor clădirilor (aproximativ 40 de vibrari, nivelul la care apar fisuri în zidurile principale), ca și granița dintre domeniul vibrațiilor foarte bine perceptibile și domeniul vibrațiilor neplăcute. În paralel cu ordonata valorilor de vîrf $\hat{x}$, pe același grafic din figura 7, este dată valoarea eficace*) a vibrației definită de următoarea expresie :

$$\tilde{x} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T x^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Pentru vibrații sinusoidale pure se poate stabili o relație simplă între valoarea de vîrf și cea eficace a vibrației

$$\hat{x} = 1{,}414\ \tilde{x}. \tag{23}$$

Se observă ușor asemănarea dintre valoarea eficace $\tilde{x}$ a unei vibrații sinusoidale și abaterea medie pătratică σ a unei vibrații aleatorie ergotice, avînd valoarea medie $\bar{x}$ nulă, dată de relațiile (7) și (8). Vom profita de această asemănare, care reflectă faptul că atît x, cît și σ sînt proporționale cu energia vibrației, pentru a extinde cunoștințele empirice de la vibrațiile sinusoidale la vibrațiile aleatorii. O proprietate importantă a valorii eficace a unor vibrații sinusoidale, pe care o vom folosi în această lucrare, se referă la compunerea mai multor vibrații sinusoidale, fiecare dintre ele avînd frecvența f_i și valoarea eficace $\tilde{x}_i$. Vibrația rezultantă va avea următoarea valoare eficace :

$$\tilde{x} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Considerînd că vibrațiile aleatorii cu banda îngustă de frecvență în jurul valorii f au același efect dăunător asupra sistemului mecanic ca și o vibrație sinusoidală de aceeași frecvență f, rămîne să stabilim intensitatea maximă admisibilă a vibrației aleatorie. Măsura intensității este convenabil de exprimat prin intermediul caracteristicii σ. Cunoscînd valoarea de vîrf maxim admisibilă $\hat{x}_M$ a vibrației sinusoidale, putem impune ca valoarea de vîrf a vibrației aleatorie să nu depășească această limită decît pentru o perioadă foarte scurtă, să zicem 0,01 %, din timpul de funcționare a sistemului mecanic. În acest caz, indicatorul A al pericolului de avarie va avea valoarea 10^{-4}, iar din expresia (21) putem calcula valoarea maxim admisibilă pentru σ

$$\sigma_M = \frac{\hat{x}_M}{4{,}25}\cdot \tag{25}$$

---

* În literatura de limbă engleză este indicată prin inițialele RMS ale expresiei *Root Mean Square*; în unele lucrări sau traduceri în limba română această valoare este denumită „medie pătratică".

Graficul din figura 7 ne prezintă mai degrabă zone şi nu curbe de pericol pentru amplitudinile vibraţiilor. Este clar că graniţa dintre aceste zone este aproximativă. În aceeaşi ordine de idei să considerăm o perioadă de funcţionare a sistemului mecanic de 10 000 s. Dacă vibraţiile aleatorii ale acestuia au abaterea medie pătratică egală cu σ_M dat de (25) şi o bandă de frecvenţă îngustă în jurul frecvenţei de 1 Hz, atunci sistemul mecanic va atinge în cele 10 000 s de funcţionare numai o singură dată o valoare *mai mare* decît $\hat{x}_M$ specificat în graficul din figura 7. Celelalte maxime ale vibraţiei aleatorie vor fi distribuite sub valoarea $\hat{x}_M = 4{,}25M$, conform curbei lui Rayleigh prezentate în figura 4 *b*). Se observă că numărul maximelor avînd valoarea ceva mai mică decît $\hat{x}_M$ este iarăşi foarte redus şi deci putem conclude că sistemul considerat nu va avea în cele 10 000 de secunde decît cîteva ($10 \div 20$) vibraţii cu frecvenţa de aproximativ 1 Hz şi amplitudinea maximă în jurul lui $\hat{x}_M$. Remarcăm, de asemenea, că cele 10—20 de vibraţii cu amplitudinea periculos de mare nu vor avea loc una după alta, ci vor fi distanţate în perioada de 10 000 de secunde considerată.

Sistemul mecanic echivalent celui considerat va avea vibraţii sinusoidale cu frecvenţa de 1 Hz şi amplitudinea maximă egală cu $\hat{x}_M$. În cele 10 000 de secunde sistemul mecanic echivalent va atinge valoarea primejdioasă $\hat{x}_M$ de 10 000 de ori (este vorba numai de maxime, nu şi de minime) acoperind uniform perioada de timp considerată. Este evident că echivalenţa dintre cele două sisteme nu este prea corectă. O echivalenţă mai bună se poate obţine adoptînd valori mai mari pentru indicatorul A al pericolului de avarie. În figura 7 s-au trasat în dreapta mai multe axe, avînd pentru σ scări corespunzătoare unor valori diferite ale indicatorului de avarie al sistemului mecanic. Valoarea lui A nu poate fi luată prea mare, deoarece încep să apară maxime izolate ale vibraţiei aleatorie cu o valoare mult mai mare decît $\hat{x}_M$ determinat de graniţa dintre domeniul vibraţiilor moderate şi domeniul vibraţiilor puternice. N-am răspuns totuşi la întrebarea : care anume din cele cinci scări pentru σ să fie folosită? Un răspuns este dificil şi depinde în mare măsură de tipul concret de sistem mecanic şi de avarie funcţională considerată, deoarece în unele cazuri este posibil să se tolereze pentru perioade foarte scurte de timp şi vibraţii a căror amplitudine este situată în zona „vibraţii periculoase". Pentru a răspunde la întrebarea precedentă este necesar să se răspundă mai întîi la o altă întrebare : cît de mult se depăşeşte graniţa dintre zona „vibraţii moderate" şi zona „vibraţii puternice" atunci cînd A are valori mai mari decît 0,01 %? Un exemplu este edificator în acest sens. Să considerăm un sistem mecanic care vibrează aleatoriu cu o bandă de frecvenţă îngustă situată în jurul frecvenţei de 10 Hz. Dacă vibraţiile ar fi fost sinusoidale, de pildă datorite unei maşini care se roteşte cu 600 de ture pe minut, atunci limita maximă a amplitudinii vibraţiilor moderate o putem afla din figura 7, $\hat{x}_M = 160$ μm. Din acelaşi grafic determinăm imediat abaterea-standard maxim admisibilă pentru vibraţia aleatorie. Aceleaşi operaţii le putem face şi în situaţia în care sistemul mecanic ar funcţiona acceptabil în condiţiile unor vibraţii puternice, avaria funcţională apă-

rînd numai la depășirea graniței superioare a zonei „vibrații puternice". Rezultatele obținute sînt prezentate în următoarea tabelă :

	$\hat{x}_M$ (μm)	σ_M(μm)				
		$A=0{,}01\%$	$A=1\%$	$A=10\%$	$A=20\%$	$A=30\%$
vibrații moderate acceptabile	160	38	54	75	92	105
vibrații puternice acceptabile	380	89	125	170	210	240

Examinînd această tabelă și reamintindu-ne că indicele A reprezintă probabilitatea ca $\hat{x}_M$ să fie depășit, sau altfel spus reprezintă suma perioadelor scurte de timp (în procente față de timpul total de funcționare) în care se depășește $\hat{x}_M$, putem conclude că în cazul cînd $A = 20\%$ amplitudinile maxime ale vibrațiilor vor fi în proporție de 80% mai mici decît $\hat{x}_M = 160$, restul de 20% fiind cuprinse între 160 μm și 380 μm, valoare ce reprezintă limita maximă a vibrațiilor puternice. Într-adevăr, σ_M, în cazul în care nu se depășește 380 μm, are valoarea lui $\sigma_M = 92$ μm, corespunzător cazului în care limita vibrațiilor moderate de 160 μm este depășită 20% din timp. Putem răspunde acum și la întrebarea care a constituit originea discuției prezentate : care dintre cele cinci valori ale lui A din figura 7 este mai potrivită de adoptat. Răspunsul depinde de toleranța sistemului mecanic la vibrații aleatorii puternice. Pentru a cunoaște această toleranță ar trebui efectuate încercări ale sistemului supus la vibrații aleatorii puternice. Cum astfel de încercări sînt dificil de realizat, recomandăm să se procedeze în felul următor : 1) se măsoară σ și frecvența centrală a benzii înguste a vibrațiilor aleatorii ; 2) cu ajutorul graficului din figura 7 se determină zona în care se situează vibrațiile aleatorii folosind scara $A = 30\%$; 3) se stabilește toleranța sistemului la vibrații puternice din examinarea efectelor produse în timp (de exemplu fisuri, rebuturi ale liniei tehnologice etc.) ; 4) dacă sistemul mecanic este tolerant la vibrații puternice se aleg valori mari pentru A (de exemplu 20 sau 30%), dacă sistemul nu este tolerant la vibrații puternice se aleg valori mici pentru A (de ex. 1%) și, în sfîrșit, dacă nu se poate trage nici o concluzie cu privire la toleranța sistemului (de pildă fiindcă vibrațiile aleatorii la care a fost supus nu au fost puternice) se adoptă pentru A valoarea 10% ; 5) folosind granița dintre domeniul vibrațiilor moderate și domeniul vibrațiilor puternice și cunoscînd frecvența și valoarea lui A se determină din figura 7 abaterea-standard σ_M maxim admisibilă ; 6) se iau toate măsurile ca în viitor să nu se depășească valoarea lui σ_M stabilit. Din figura 7 se observă că un efect favorabil asupra funcționării sistemului mecanic îl poate avea și micșorarea frecvenței centrale a vibrației aleatorie. Din păcate, această acțiune nu este posibilă în majoritatea cazurilor.

Un caz întîlnit frecvent în practică îl constituie sistemele mecanice supuse la vibrații compuse, aleatorii și sinusoidale. Pentru a putea evalua pericolul de avarie funcțională și de data aceasta ar fi necesar să cunoaștem un procedeu care să permită evaluarea influenței dăunătoare a vibra-

țiilor sinusoidale compuse din mai multe armonici. În literatura de specialitate consultată nu se menționează un astfel de procedeu, așa încît propunem noi unul inspirat de relația (24). Pericolul de avarie al unui sistem mecanic supus la vibrații periodice poate fi evaluat cu ajutorul următorului coeficient :

$$L = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{x}_i^2}{\tilde{x}_{iM}^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

unde $\tilde{x}_i$ este valoarea eficace măsurată a componentei cu frecvența f_i ;
$\tilde{x}_{iM}$ — valoarea eficace maxim admisibilă a componentei cu frecvența f_i, determinată din figura 7.

Dacă $L \leqslant 1$, nu există pericol de avarie ; dacă $L > 1$, avaria funcțională este posibil să apară. În sfîrșit, dacă odată cu vibrațiile periodice apar și vibrații aleatorii cu o densitate spectrală de putere ce poate fi aproximată de cea din figura 8, relația (26) poate fi completată în felul următor :

$$L = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{x}_i^2}{\tilde{x}_{iM}^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_{iM}^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

unde apar următoarele notații noi :
σ_i — abaterea-standard măsurată, corespunzătoare vibrației aleatorie cu banda îngustă de frecvență Δf_i ;
σ_{iM} — abaterea-standard maximă admisibilă, pentru Δf_i, determinată din figura 7.

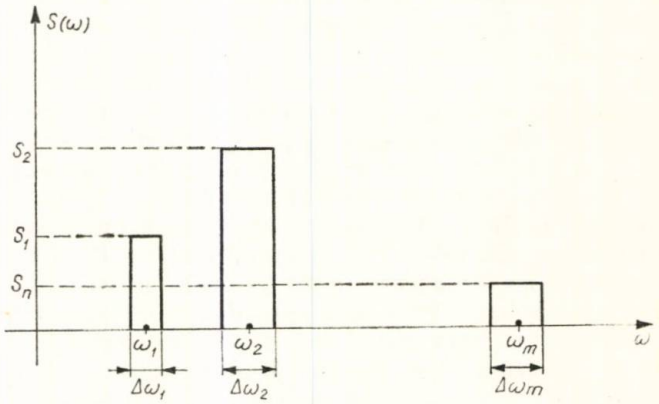


Fig. 8. — Aproximarea densității spectrale de putere a unei vibrații aleatorie.

Revenim asupra faptului că pentru a putea fi folosit graficul din figura 7, este necesar ca benzile de frecvență să fie înguste ($\Delta\omega$ mic), iar valoarea medie $\bar{x}$ a vibrației aleatorie să fie nulă. Cu aceste condiții, din expresiile (8) și (16) rezultă următoarea relație folositoare la prelucrarea unor rezul-

tate experimentale, prezentate sub forma unei densități spectrale de putere (fig. 8) :

$$\sigma_i^2 = \frac{S_i \cdot \Delta\omega_i}{2\pi} = S_i \cdot \Delta f_i. \tag{28}$$

Un spectru de frecvențe avînd forma celui prezentat în figura 8 poate fi întîlnit destul de frecvent în practică. El poate proveni din aproximația grosieră a răspunsului unui sistem mecanic cu mai multe grade de libertate, excitat de o vibrație aleatorie cu un spectru larg de frecvențe, răspuns dat de relația (17).

EVALUAREA AVARIILOR PRIN OBOSEALĂ PROVOCATE DE VIBRAȚIILE ALEATORII

Un rol central în evaluarea pericolului de avarie prin oboseală îl joacă curba Wöhler. Pentru a putea folosi informațiile furnizate de această curbă împreună cu caracteristicile vibrațiilor aleatorii cu banda îngustă de frecvență, este necesară o exprimare analitică, aproximativă, a curbei Wöhler. În acest scop am prezentat în figura 9 cîteva curbe obținute experimental pentru diferite tipuri de oțel [19]. Se observă imediat că în coordonate logaritmice, curba Wöhler poate fi aproximată suficient de

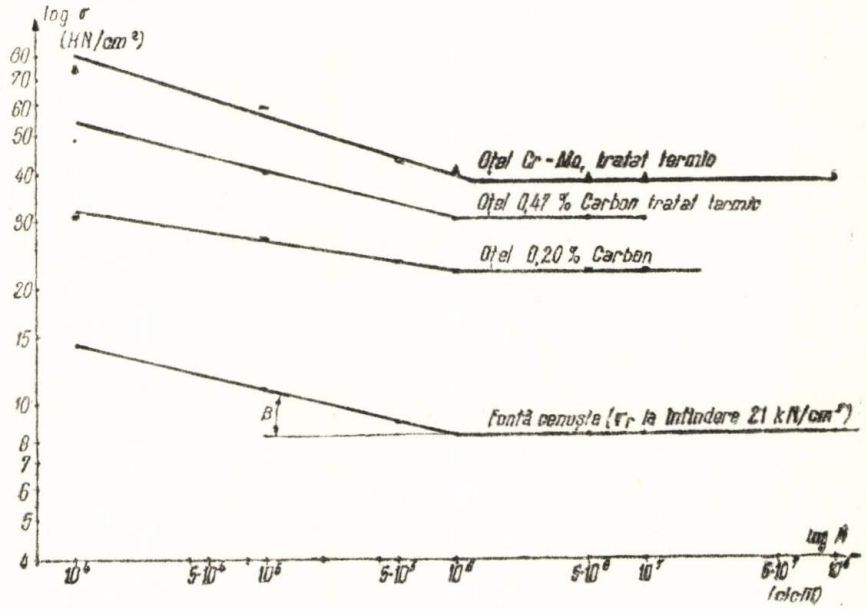


Fig. 9. — Curba Wöhler obținută experimental pentru cîteva metale.

bine prin două drepte ale căror puncte de intersecție sînt situate pe o dreaptă paralelă cu axa log σ și situată de ea la distanța log $N = 6$. Una dintre cele două drepte, cea orizontală, are o ecuație simplă :

$$\sigma = \sigma_{0b}, \tag{29}$$

unde σ_{0b} este efortul unitar sub a cărui valoare fenomenul de oboseală nu apare (fig. 1).

Scriem ecuaţia celei de-a doua drepte observînd că trece prin punctul (log 10^6; log σ_{0b}) şi definind următorul coeficient unghiular ($m = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{b}$. Vom avea

$$\log \sigma - \log \sigma_{0b} = -\frac{1}{b}(\log N - 6)$$

sau

$$N \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0b}}\right)^b = 10^6. \tag{30}$$

Ecuaţiile (29) şi (30) reprezintă expresia analitică a curbei Wöhler. În consideraţiile următoare ar fi posibil să se producă unele confuzii, deoarece am notat cu acelaşi simbol σ două mărimi complet diferite : efortul unitar în relaţiile (29), (30) şi abaterea medie pătratică în relaţiile (5), (8), (21), (27), (28). Pentru a evita această situaţie neplăcută, în continuare vom păstra acest simbol pentru eforturile unitare, iar abaterea medie pătratică o vom denumi σ_{ef}.

Să notăm cu f_0 frecvenţa medie a vibraţiei aleatorii cu spectru îngust de frecvenţă a efortului unitar. Vibraţia va avea forma din figura 3 *b*. Numărul total de cicluri în timpul T poate fi calculat atunci cu ajutorul relaţiei

$$n_T = f_0 T. \tag{31}$$

Pe de altă parte numărul de cicluri din intervalul de timp T, în care efortul unitar are o valoare situată în intervalul $\mathrm{d}\sigma$, din jurul lui σ, este

$$n(\sigma) = f_0 T p(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{32}$$

unde $p(\sigma)$ este funcţia densităţii probabilităţii de apariţie a unei valori de vîrf.

Defecţiunile parţiale provocate prin oboseală vor fi, conform ipotezei Palmgren-Miner a cumulării liniare, calculate cu ajutorul relaţiei (1) în care introducem pe (32)

$$D_\sigma = f_0 T \frac{p(\sigma)\cdot \mathrm{d}\sigma}{N(\sigma)}, \tag{33}$$

unde $N(\sigma)$ este determinat de curba Wöhler a materialului. Însumînd defecţiunile parţiale prin oboseală se poate găsi

$$D = \sum_0^\infty \frac{n(\sigma)}{N(\sigma)} = f_0 T \int_0^\infty \frac{p(\sigma)}{N(\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{34}$$

În [15] se arată că ruperea la oboseală apare, în cazul unor vibrații cu nivele discrete ce apar întîmplător, atunci cînd $D = 0{,}5$. Din (34) se poate calcula atunci timpul de viață al sistemului mecanic

$$T = \frac{1}{2f_0 \int_0^{\infty} \frac{p(\sigma)}{N(\sigma)} \, \mathrm{d}\sigma}. \tag{35}$$

Putem explicita relația de mai sus ținînd seama de expresiile analitice (29), (30) ale curbei Wöhler și de distribuția valorilor maxime $p(\sigma)$ tip Rayleigh prezentată în figura 4 *b*). Cu noile notații folosite ecuația distribuției va fi:

$$p(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma_{ef}^2} \exp\left[-\frac{\sigma}{\sigma_{ef}^2}\right]. \tag{36}$$

Efectuînd cîteva calcule după înlocuirile menționate, expresia (35) va deveni:

$$T = \frac{10^6 . k^{\frac{b}{2}}}{2 . f_0 . \left[\Gamma\left(1 + \frac{b}{2}\right) - \int_0^k t^{\frac{b}{2}} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t\right]}, \tag{37}$$

unde $k = \frac{\sigma_{0b}^2}{2\sigma_{ef}^2}$. (38)

Dacă presupunem că $\frac{b}{2} = d$ este o valoarea *întreagă* putem calcula următoarea valoare pentru (37):

$$\frac{T}{T_0} = 10 . ^6 \frac{k^d . e^k}{2 . d! \left[1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \cdots + \frac{k^d}{d!}\right]}, \tag{39}$$

unde $T_0 = \frac{1}{f_0}$ este perioada medie a vibrației aleatorie.

Pentru a putea determina comod timpul de apariție al avariei prin oboseală cu ajutorul relației (39) am trasat graficul din figura 10, ținînd seama de valorile frecvent întîlnite ale parametrilor. Folosirea acestui grafic presupune anumite cunoștințe prealabile despre material (b și σ_{0b}), anumite determinări experimentale ale caracteristicilor vibrației aleatorie (σ_{ef} și T_0) și permite determinarea timpului de viață T al sistemului mecanic. De cele mai multe ori ne lipsesc informațiile necesare despre comportarea materialului la oboseală. În aceste situații putem adopta,

în cazul oţelului, pentru b o valoare cuprinsă în intervalul 4—6, iar pentru σ_{0b} o valoare aproximativă dată pentru oţel de relaţia

$$\sigma_{0b} = 0{,}27\ \sigma_r + 18{,}5\ (\mathrm{kN/cm^2}), \tag{40}$$

unde σ_r este rezistenţa de rupere la întindere exprimată în kN/cm².

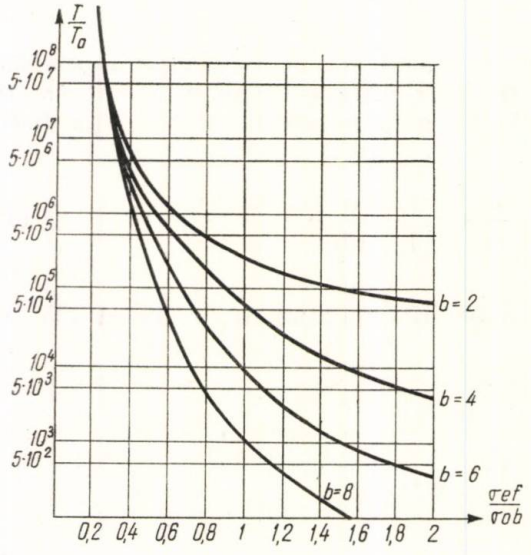


Fig. 10 — Timpul de apariţie al avariei prin oboseală în cazul vibraţiilor aleatorii cu banda îngustă de frecvenţă.

O concluzie importantă care poate fi trasă din examinarea graficului din figura 10 stabileşte că în cazul sistemelor mecanice supuse la vibraţii aleatorii cu banda îngustă de frecvenţă, fenomenul de oboseală nu apare, în mod practic, dacă abaterea medie pătratică a vibraţiei σ_{ef} este mai mică decît o treime din rezistenţa la oboseală σ_{0b}.

Pînă acum am examinat în acest paragraf în mod exclusiv avariile prin oboseală provocate de vibraţiile aleatorii cu spectru îngust de frecvenţă. În mod analog cu cazul avariilor funcţionale se pot trage însă unele concluzii referitoare şi la cazul avariilor provocate de vibraţiile aleatorii cu spectru larg de frecvenţă. După cum rezultă din figura 5, probabilitatea de apariţie a unor amplitudini mari a eforturilor unitare este mai mare în cazul spectrelor înguste de frecvenţă. Din această cauză rezultatele obţinute prin metoda prezentată sînt acoperitoare şi în cazul spectrelor largi de frecvenţă. Această concluzie teoretică este întărită şi de rezultatele experimentale prezentate în [5].

MĂSURAREA CARACTERISTICILOR VIBRAŢIILOR ALEATORII

Evaluarea pericolului de avarie funcţională sau (şi) de oboseală cu ajutorul metodei prezentate în această lucrare necesită obţinerea pe cale experimentală a trei informaţii. Prima dintre informaţii este de natură

calitativă : trebuie să știm dacă vibrațiile investigate pot sau nu fi încadrate, în tipul „aleator, staționar, ergotic, gaussian, cu banda îngustă de frecvență și valoare medie nulă". În cazul unui răspuns pozitiv urmează să obținem prin măsurători alte două informații, — de data aceasta cantitative —, referitoare la valoarea frecvenței centrale f_0 a benzii înguste de frecvență și la valoarea abaterii medii pătratice σ*) a vibrației aleatorie. În cele ce urmează prezentăm pe scurt două demersuri pentru obținerea informațiilor menționate :

a) folosirea unui analizor de frecvență permite obținerea densității spectrale de putere. Aceasta poate fi aproximată ca în figura 8, obținîndu-se după aceea imediat frecvențele centrale și abaterile medii pătratice ale componentelor cu ajutorul relației (28). Atunci cînd folosim această cale de investigare experimentală trebuie să ne îngrijim de obținerea prin alte mijloace a certitudinii că vibrațiile aleatorii sînt gaussiene, ergotice și au valoare medie nulă. Dacă caracterul gaussian și ergotic al vibrațiilor poate fi, după cum am argumentat pe parcursul lucrării, presupus întotdeauna adevărat, lucrurile nu stau la fel cu valoarea medie nulă. Din fericire, certitudinea că acest parametru este nul poate fi obținută și dintr-o analiză teoretică a modului de apariție a vibrațiilor aleatorii. O dificultate mai greu de depășit în cadrul acestui demers o constituie caracterul de „bandă îngustă" al vibrațiilor. Cît de mic trebuie să fie $\Delta\omega$ din figura 8 pentru a putea afirma că facem o aproximație bună tratînd fenomenul aleatoriu investigat drept o „vibrație cu banda îngustă de frecvență"? Evident că răspunsul la această întrebare trebuie să țină seama și de mărimea frecvenței centrale f_0. O orientare mai bună în aprecierea acestei situații putem obține dacă comparăm funcția de autocorelație a unei vibrații sinusoidale cu faza și amplitudinea întîmplătoare independent (cazul de bandă îngustă ideal [1], [16], [23]),

$$R_1(\tau) = R_1(0) \cos \omega_0 \tau, \tag{41}$$

cu funcția de autocorelație a unei vibrații aleatorii, avînd o densitate spectrală de putere finită, de formă dreptunghiulară, concentrată în jurul unei frecvențe centrale ω_0 [1, 16] :

$$R_2(\tau) = R_2(0) \frac{\sin \frac{\tau \Delta\omega}{2}}{\frac{\tau \Delta\omega}{2}} \cos \omega_0 \tau. \tag{42}$$

Cele două expresii trebuie să fie egale pentru un domeniu de variație al lui τ cît mai mare. Să punem, de exemplu, condiția ca R_2 să nu scadă cu

---

*) În timpul studierii fenomenului de oboseală, am notat abaterea medie pătratică cu σ_{ef} pentru a evita confuzia cu eforturile unitare.

mai mult de 5% atunci cînd τ este egal cu cinci perioade corespunzătoare lui ω_0:

$$\frac{\Delta\omega}{2}\cdot\left\{5\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}\right\}=0{,}55, \tag{43}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=3{,}5\%. \tag{44}$$

Condiţia (44) ne arată că putem interpreta vibraţiile aleatorii drept tip „cu bandă îngustă de frecvenţă" dacă lăţimea benzii $\Delta\omega$ reprezintă cîteva procente din frecvenţa centrală a benzii ω_0. Folosirea unui analizor de frecvenţă pentru măsurarea caracteristicilor vibraţiilor aleatorii constituie o soluţie, care tinde să se impună tot mai mult. Din păcate, aparatura necesară este încă scumpă şi greu transportabilă, în special aparatura din domeniul frecvenţelor joase, foarte adesea întîlnite la oscilaţiile sistemelor mecanice. Din această cauză vom lua în considerare şi o soluţie alternativă, care permite determinarea aproximativă a caracteristicilor vibraţiilor aleatorii, soluţie satisfăcătoare dacă se iau în consideraţie aproximaţiile inerente ce se fac la evaluarea pericolului de avarie a unui sistem mecanic;

b) aparatele de măsură folosite în mod curent la determinarea caracteristicilor vibraţiilor sinusoidale, şi anume un înregistrator şi un voltmetru de valori eficace la frecvenţe joase, ce este de obicei încorporat în vibrometrele universale, pot furniza cele trei informaţii de care avem nevoie. Într-adevăr, cîteva înregistrări ale vibraţiilor făcute în momente caracteristice de funcţionare ale sistemului ne pot convinge că fenomenul aleatoriu este ergotic şi are media nulă. Aspectul de vibraţii sinusoidale, cu bătăi neregulate, al vibrogramelor, este un indiciu sigur al faptului că banda de frecvenţă este îngustă. Din înregistrare se poate calcula imediat frecvenţa medie pe o perioadă de timp mai lungă, care reprezintă tocmai frecvenţa centrală a benzii. Dificultăţi mai serioase încep să apară însă, odată cu încercarea de a determina abaterea medie pătratică a vibraţiei aleatorii cu ajutorul voltmetrului pentru măsurarea valorii eficace a vibraţiei sinusoidale. Pe plan teoretic aceasta corespunde la folosirea relaţiei (22) în locul relaţiei (7). Deosebirea esenţială dintre aceste două relaţii constă în timpul finit de integrare necesar la determinarea valorii eficace. În cazul vibrometrelor sau voltmetrelor pentru frecvenţe joase acesta poate fi maximum de ordinul secundelor. Din această cauză, valoarea eficace măsurată a unei vibraţii aleatorii va fi o mărime *aleatorie*. În mod practic aceasta se reflectă în mişcarea dezordonată a acului instrumentului indicator. Cum facem în aceste condiţii măsurătoarea? Ne ajută faptul că valoarea medie a diferitelor valori eficace măsurate reprezintă tocmai abaterea medie pătratică, adică [1], [16]

$$\overline{\tilde{x}^2}=\overline{x^2}=\sigma^2 \text{ dacă } \bar{x}=0. \tag{45}$$

Se poate face şi o estimare a dispersiei diferitelor valori eficace măsurate în jurul mediei lor [1], [16], dacă se consideră că vibraţia aleatorie are

banda de frecvență foarte îngustă, adică funcția sa de autocorelație are forma (41)

$$\text{Disp } \{\tilde{x}^2\} = \frac{1}{2} R^2(0) \left(\frac{\text{din } \omega_0 T}{\omega_0 T} \right)^2 \leqslant \frac{\sigma^4}{2(\omega_0 T)^2}, \tag{46}$$

unde T este timpul de integrare din relația (22), specific fiecărui aparat de măsură.

Relația (46) ne dă posibilitatea să apreciem domeniul în care este avantajoasă metoda propusă. Să presupunem că dorim să măsurăm o abatere medie pătratică $\sigma = 1$. Deoarece aparatul nostru măsoară în realitate valoarea eficace, acul instrumentului indicator va oscila dezordonat în jurul valorii 1. Pentru a putea evalua vizual că valoarea medie a deplasărilor acului indicator este 1 va trebui desigur ca acesta să nu oscileze prea puternic. Există însă o probabilitate de 95% ca domeniul de oscilații al acului în jurul valorii 1 să nu fie mai mare decît $\pm 3[\text{Disp. } \{\tilde{x}^2\}]^{\frac{1}{2}}$. Înlocuind pe $\sigma = 1$ în (46) constatăm că domeniul de oscilație este $\pm 0{,}33\, f/f_0$, unde f este frecvența cea mai mică la care aparatul de măsură funcționează corect. Deci, admițînd că în cazul unor oscilații dezordonate ale acului indicator de $\pm 5\%$ în jurul valorii medii 1, putem face o apreciere vizuală satisfăcătoare, rezultă că frecvența centrală a vibrației aleatorie trebuie să fie de cel puțin șase ori mai mare decît frecvența minimă de mărură a aparatului (de regulă voltmetru) pentru determinat valori eficace.

Determinarea abaterii medii pătratice σ cu ajutorul unui voltmetru de valori eficace impune o alegere atentă a aparatului electronic de măsură. Într-adevăr, apar două probleme legate de corespondența dintre denumirea comercială a aparatului și funcțiunile sale reale. În primul rînd, voltmetrul de valori eficace, sau cum i se mai spune uneori aparat pentru determinarea mediei valorilor pătratice, ne ajută să estimăm prin metoda și în condițiile expuse mai înainte mărimea $\overline{x^2}$ dată de relația (7). Această mărime însă depinde atît de componenta statică $\overline{x}$ (valoarea medie), cît și de componenta dinamică σ (abaterea medie pătratică) a vibrației aleatorii prin relația (8) care poate fi scrisă în modul următor :

$$\overline{x^2} = \sigma^2 + (\overline{x})^2. \tag{47}$$

Pe noi ne interesează numai componenta dinamică σ, și din această cauză voltmetrul trebuie să *nu* reacționeze la componenta continuă a semnalului măsurat. Deseori aceste aparate sînt denumite voltmetre de curent alternativ. Aici apare cea de-a doua problemă. Mulți fabricanți înțeleg prin curent alternativ un semnal sinusiodal

$$x(t) = X \sin \omega t. \tag{48}$$

Uneori, din considerente constructive, valoarea eficace $\tilde{x}$ este determinată în mod *indirect* din valoarea de vîrf X sau din valoarea medie a mărimii

absolute $\overline{|x|}$ printr-o etalonare ce ţine seama de relaţiile existente între aceste mărimi *numai* în cazul vibraţiilor sinusoidale:

$$\tilde{x} = \frac{X}{\sqrt{2}}, \tag{49}$$

$$\tilde{x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\overline{|x|} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{50}$$

Aceste aparate, indiferent de numele pe care îl poartă, pot fi folosite numai în cazul vibraţiilor sinusoidale. Pentru evitarea confuziilor, unii fabricanţi denumesc aparatele ce folosesc relaţia (22) şi *nu* relaţiile (49) sau (50) la determinarea valorii eficace voltmetre de *valoare eficace adevărată* (*true R.M.S.*)

Precizia măsurării abaterii medii pătratice σ este afectată şi de alţi factori analizaţi amănunţit în lucrările de specialitate [1], [16]. Astfel se studiază influenţa circuitului integrator (tip RC sau amplificator operaţional), ori eroarea introdusă de circuitul pentru ridicarea la pătrat. O abordare mai precisă a problemei ar impune, de asemenea, considerarea unei distribuţii de selecţie a eşantioanelor tip χ^2 şi nu gaussiană cum am presupus la estimarea dispersiei diferitelor valori eficace măsurate în jurul mediei lor. Pentru ţelurile propuse în această lucrare considerăm totuşi că erorile introduse de aceşti factori suplimentari sînt neglijabile.

CONCLUZII

Pericolul de avarie al unui sistem mecanic supus la vibraţii aleatorii este o mărime complexă cu numeroase coordonate de natură foarte diferită: tehnică, tehnologică, economică, financiară, psihologică şi chiar sociologică (de exemplu în legătură cu protecţia muncii). Din această cauză evaluarea pericolului de avarie efectuată în această lucrare pe baza a numai doi indicatori, pericolul de avarie funcţională şi timpul de apariţie al avariei prin oboseală are mai mult o valoare orientativă. Trebuie, de asemenea, să remarcăm că indicatorul pericolului de avarie funcţională ia valori pe o scară ierarhică. Prin urmare se pot face comparaţii foarte rodnice, cu acest tip de indicator, în special între sistemele mecanice de acelaşi tip. Din această cauză factorul „experienţă personală" are o importanţă mai deosebită la aplicarea metodei de evaluare a pericolului de avarie propusă în această lucrare. Şi fiindcă orice medalie îşi are reversul ei, să subliniem în încheiere *universalitatea şi simplitatea* folosirii în scopuri orientative a metodei prezentate. Într-adevăr, sistemul mecanic poate fi de orice tip, începînd cu maşini şi terminînd cu construcţii trecînd prin fundaţii de maşini; nu se impune nici o restricţie asupra materialului din care este făcut sistemul mecanic sau asupra metodei de proiectare; mai mult, metoda prezentată poate fi folosită şi la determinarea efectului vibraţiilor aleatorii asupra organismului uman.

Primită la redacţie la 8 noiembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Bendat, J. S., A. G. Piersol, *Measurement and Analysis of random data*, John Willy, New York, 1967.
2. Branovskii, M. A. și colab., *Isledovanie i ustranenie vibrații turboagregatov*, Energhia, Moskva, 1969.
3. Broch, J. T., C. G. Wahrman, *R.M.S. Recording of Narrow Band Noise with the Level Recorder Type 3205*, Brüel & Kjaev Technical Review, *4* (1960).
4. Broch, J. T., *Effects of Spectrum Non-liniarities upon the beak Distribution of Random Signals*, Brüel & Kjaer Technical Review, *3* (1963).
5. Broch, J. T., *Peak Distribution Effects in Random Load Fatigue*, Brüel & Kjaer Technical Review, *1* (1968).
6. Broch, J. T., *On the Damaging Effects of Vibration*, Brüel & Kjaer Technical Review, *4* (1968).
7. Buzdugan, Gh., *Dinamica fundațiilor de mașini*, București, Edit. Academiei, 1968.
8. Buzdugan, Gh., *Măsurarea vibrațiilor mecanice*, București, Edit. tehnică, 1964.
9. Buzdugan, Gh., *Calculul de rezistență la solicitări variabile*, București, Edit. tehnică, 1963.
10. Dincă, F., C. Teodosiu, *Vibrații neliniare și aleatoare*, București, Edit. Academiei, 1969.
11. Dincă, F., *Vibrațiile aleatoare ale sistemelor mecanice*, București, Buletinul științific al Institutului de construcții, *1—2* (1971).
12. Ioriș, Iu. I., *Vibrometria*, Moskva, 1963.
13. Fano, M. R., *Transmission of Information*, John Willy & Sons, Inc., New York, 1961.
14. Gibson, J. E., *Sisteme automate neliniare*, București, Edit. tehnică, 1967.
15. Harris, C. M., Ch. E. Crede, *Șocuri și vibrații*, București, Edit. tehnică, 1968.
16. Korn, G. A., *Simularea și măsurarea proceselor aleatoare*, București, Edit. tehnică, 1969.
17. Kotiuk, A. F. și colab., *Metodi i apparatura dlia analiza havaktevistik sluciainih proțesov*, Energhia, Moskva, 1967.
18. Mason, I., H. Zimmerman, *Electronic Circuits Signals and Systems*, John Willy & Sons Inc., New York, 1960.
19. * * * *Metals Handbook 1948 Edition*, The American Society for Metals, Cleveland, Ohio, 1948.
20. Pleșu, Gh., *Unele aspecte ale criteriilor de apreciere a vibrațiilor turboagregatelor*, Energetica, *3* (1971).
21. Ponomariov, S. O. și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, București, Edit. tehnică, 1964.
22. Rausch, E., *Maschinenfundamente und andere dynamisch beanspruchte Baukonstruktionen*, VDI — Verlag GmbH., Düsseldorf, 1959.
23. Spătaru Al., *Teoria transmisiunii informației*, București, Edit. tehnică, 1966.
24. * * * *Structural engineering Handbook*, edited by Edwin H. Gaylord, Jr. and Charles N. Gaylard, McGrow Hill Book Comp., New York, 1968.
25. Tse, F. S., Morse, I. E., Hinkle, R. T., *Mechanical Vibrations*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1963.

STUDIUL VIBRAȚIILOR GRINZILOR CU ZĂBRELE CU CONFIGURAȚIE OARECARE LA ACȚIUNEA UNOR FORȚE VARIABILE ÎN TIMP ÎN DOMENIUL ELASTOPLASTIC

de MIRCEA GRIGORIU
Institutul de construcții București

Lucrarea tratează problema vibrațiilor grinzilor cu zăbrele solicitate la încărcări variabile în timp. Se formulează problema propusă într-un cadru general și apoi se indică modul de rezolvare pentru cazul unor solicitări, care conduc la depășirea stadiului elastic de lucru al structurii.
Prin restricționarea cazului general prezentat se ajunge la formularea binecunoscutei probleme a modurilor proprii.

O gamă foarte largă de structuri conțin printre elementele de rezistență care le alcătuiesc grinzi cu zăbrele de diferite configurații. Este de remarcat că în majoritatea cazurilor în care apar, grinzile cu zăbrele nu sînt solicitate numai la sarcini statice, ci acțiunea predominantă este variabilă în timp.

În cele ce urmează se indică un mod de rezolvare al grinzilor cu zăbrele cu configurație spațială oarecare, static determinate sau nu interior și exterior supuse unor acțiuni cunoscute, dar variabile în timp.

Pentru aceasta vom considera un sistem de N puncte materiale (P_r, m_r), $1 \leqslant r \leqslant N$ a cărui stare inițială este dată de mulțimea vectorilor de poziție $(\vec{\rho}_r^0)$, $1 \leqslant r \leqslant N$, iar acțiunea mediului asupra acestui sistem este dată de forțele $\vec{\mathcal{P}}_r(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$, avînd ca puncte de aplicație punctele materiale ale sistemului (astfel forța $\vec{\mathcal{P}}_r(t)$ este aplicată pe punctul material de indice r).

Vom considera în plus că în starea inițială definită de vectorii de poziție $(\vec{\rho}_r^0)$, $1 \leqslant r \leqslant N$, interacțiunea dintre punctele sistemului considerat este nulă, presupunere deloc restrictivă pentru studiul propus, dar care ne permite o scriere mai simplă (în final se va înțelege că această considerare este echivalentă cu considerarea studiului vibrațiilor unui

sistem deformabil oarecare luînd ca reper poziţia de echilibru sub acţiunea greutăţii proprii).

Utilizînd figura 1, unde este prezentat modelul reologic al sistemului de puncte materiale, precum şi un sistem fix de referinţă $O\vec{I}_1\ \vec{I}_2\ \vec{I}_3$,

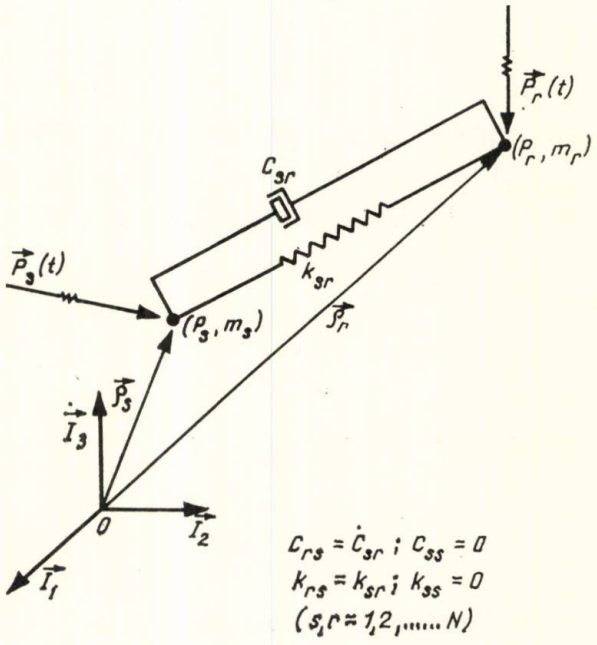


Fig. 1

se vor putea scrie imediat toate forţele ce acţionează asupra unui punct oarecare al sistemului material.

Astfel, considerînd punctul material (P_s, m_s), se obţin următoarele valori pentru forţe:

— forţa de interacţiune elastică dintre punctul material (P_s, m_s) şi un punct oarecare (P_r, m_r) notată $\vec{F}^{(e)}_{sr}$:

$$\vec{F}^{(e)}_{sr} = \begin{cases} k_{sr}\left[\,|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s| - |\vec{\rho}^{\,0}_r - \vec{\rho}^{\,0}_s|\,\right] \dfrac{\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s}{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s|}, & r \neq s, \\ 0, & r = s, \end{cases} \tag{1}$$

unde k_{sr} este constanta elastică a elementului deformabil, care uneşte punctul (P_s, m_s) cu punctul (P_r, m_r) şi care numeric este egală cu valoarea forţei aplicată pe direcţia $(\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s)$, care produce o variaţie a distanţei dintre cele două puncte egală cu unitatea;

— forța de interacțiune dintre punctele (P_s, m_s) și (P_r, m_r) datorită amortizării, notată $\vec{F}^{(a)}_{sr}$:

$$\vec{F}^{(a)}_{sr} = \begin{cases} c_{sr}\varepsilon_{sr}\dot{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s|}\,\dfrac{\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s}{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s|}, & r \neq s, \\ 0, & r = s, \end{cases} \tag{2}$$

$\varepsilon_{sr} = -1$, dacă vectorul $(\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s)$ nu-și schimbă sensul,

unde c_{sr} este coeficientul de amortizare al elementului deformabil, care unește cele două puncte materiale.

Odată definite aceste forțe interioare la un moment oarecare de timp t (prin relațiile (1) și (2)), se pot scrie imediat cele N ecuații de mișcare ale sistemului material; se va obține un sistem diferențial de N ecuații cu N necunoscute vectoriale din spațiul cu trei dimensiuni de ordinul II, care are forma

$$m_s \ddot{\vec{\rho}}_s = \sum_{r=1}^{N} k_{sr}[|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s| - |\vec{\rho}^0_r - \vec{\rho}^0_s|]\,\frac{\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s}{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s|} -$$

$$- \sum_{r=1}^{N} c_{sr}\varepsilon_{sr}\dot{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s|}\,\frac{\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s}{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s|} + \vec{\mathcal{P}}_s(t). \tag{3}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, N)$$

Rezolvarea sistemului de ecuații (3) prezintă o dificultate deosebită, de aceea se va evita o integrare directă a sa în această formulare generală a problemei. Pentru a putea ajunge la rezolvări concrete, vom utiliza o ipoteză simplificatoare și dealtfel acceptabilă, și anume că deplasările sistemului material sînt mici, astfel încît vom putea scrie cu suficient de bună aproximație relațiile :

$$\frac{\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s}{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s|} \simeq \frac{\vec{\rho}^0_r - \vec{\rho}^0_s}{|\vec{\rho}^0_r - \vec{\rho}^0_s|} = \vec{1}^0_{sr} \qquad (s, r = 1, 2, \ldots, N), \tag{4}$$

unde $\vec{1}^0_{sr}$ reprezintă, după cum rezultă din definiția sa, versorul vectorului $\overrightarrow{P^0_s P^0_r}$ și deci vom avea relația $\vec{1}^0_{sr} = -\vec{1}^0_{rs}$.
Utilizînd (4), relația (3) devine

$$m_s \ddot{\vec{\rho}}_s = \sum_{r=1}^{N} k_{sr}[|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s| - |\vec{\rho}^0_r - \vec{\rho}^0_s|]\,\vec{1}^0_{sr} - \sum_{r=1}^{N} c_{sr}\varepsilon_{sr}\dot{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s|}\,\vec{1}^0_{sr} + \vec{\mathcal{P}}_s(t). \tag{5}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, N).$$

Vom căuta să rezolvăm sistemul (5), considerînd că, sub acţiunea solicitărilor mediului, variaţia distanţelor dintre punctele materiale poate duce şi la depăşiri ale limitei de elasticitate a elementului ce uneşte două puncte materiale din sistem.

Pentru a urmări mai bine comportarea sistemului de puncte materiale, vom introduce o cantitate adimensională definită prin relaţia

$$U_{sr} = \begin{cases} \dfrac{|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s| - |\vec{\rho}_r^{\,0} - \vec{\rho}_s^{\,0}|}{\xi_{sr}}, & r \neq s, \\ 0, & r = s, \end{cases} \tag{6}$$

unde $\xi_{sr} = [\,|\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s| - |\vec{\rho}_r^{\,0} - \vec{\rho}_s^{\,0}|\,]_c$ este variaţia distanţei dintre punctele P_r şi P_s, pentru care are loc cedarea plastică. Utilizînd valoarea U_{sr}, definită de (6), vom putea înregistra imediat într-un grafic variaţia forţei de răspuns f_{sr} în ipoteza mediului de legătură dintre două puncte ideal elastoplastic. Evident se pot utiliza şi alte ipoteze mai puţin restrictive asupra materialului de legătură, dar principiul de rezolvare rămîne acelaşi, şi de aceea s-a preferat acest caz mai clar.

Este de observat că definiţia dată constantei elastice k_{sr}, atunci cînd s-a explicat formula (1), este adevărată atît timp cît $|U_{sr}| < 1$; de asemenea, prin utilizarea relaţiei de definiţie pentru f_{sr}; ilustrată de graficul din figura 2, însăşi numele de constantă elastică îşi pierde sensul, dar vom păstra în continuare această nomenclatură.

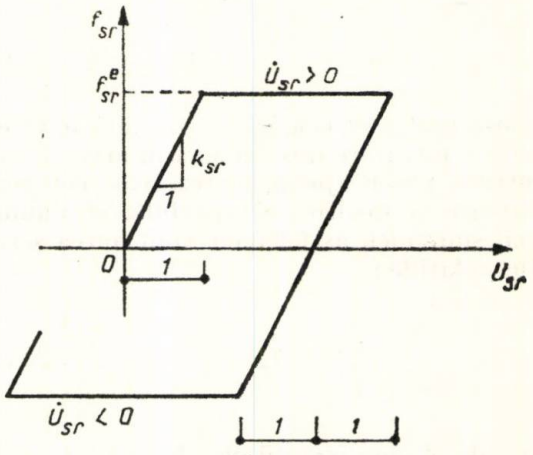


Fig. 2

Utilizînd (6), relaţia (5) devine

$$m_s \ddot{\vec{\rho}}_s = \sum_{r=1}^{N} f_{sr} \vec{1}_{sr}^{\,0} - \sum_{r=1}^{N} c_{sr} \varepsilon_{sr} \dot{U}_{sr} \xi_{sr} \vec{1}_{sr}^{\,0} + \vec{\mathcal{P}}_s(t), \qquad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{7}$$

unde

$$f_{sr} = k_{sr} U_{sr} \xi_{sr} \text{ pentru } |U_{sr}| < 1. \tag{8}$$

Sistemul diferențial de ecuații (7), care descrie mișcarea sistemului de N puncte materiale, reprezintă o generalizare a sistemului (5), (7) fiind adevărat independent de stadiul de solicitare; utilizînd (8), rezultă identitatea (7) și (5) în stadiul elastic.

Chiar și pentru acest sistem o soluție exactă este deosebit de dificilă și, în principiu, se poate obține doar pentru anumite cazuri care prezintă diferite particularități și de aceea vom utiliza pentru rezolvarea sa integrarea numerică. În acest scop vom mai face anumite schimbări în sistemul (7); se observă că pentru orice $q < s$ putem scrie

$$\vec{\rho}_s = \vec{\rho}_1 + \sum_{p=2}^{q} U_{p-1,p}\xi_{p-1,p}\vec{1}^0_{p-1,p} + U_{qs}\xi_{qs}\vec{1}^0_{qs}. \tag{9}$$

Derivînd (9) de două ori în raport cu timpul se obține

$$\ddot{\vec{\rho}}_s = \ddot{\vec{\rho}}_1 + \sum_{p=2}^{q} \ddot{U}_{p-1,p}\xi_{p-1,p}\vec{1}^0_{p-1,p} + \ddot{U}_{qs}\xi_{qs}\vec{1}^0_{qs}, \tag{10}$$

și introducînd în sistemul (7) se ajunge la sistemul recurent

$$m_s\ddot{U}_{qs}\xi_{qs}\vec{1}^0_{qs} = \sum_{r=1}^{N} f_{sr}\vec{1}^0_{sr} - \sum_{r=1}^{N} c_{sr}\varepsilon_{sr}\dot{U}_{sr}\xi_{sr}\vec{1}^0_{sr} + \vec{\mathcal{P}}_s(t) -$$

$$-m_s\ddot{\vec{\rho}}_1 - m_s\sum_{p=2}^{q}\ddot{U}_{p-1,p}\xi_{p-1,p}\vec{1}^0_{p-1,p} \tag{11}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, N) \text{ și } (q < s).$$

Pentru rezolvare vom împărți durata acțiunii exterioare în intervale de timp egale între ele (τ) și presupunînd un astfel de interval de dimensiune τ, pentru care cunoaștem în origine valorile U^i_{sr}, $\dot{U}^i_{sr}$, $\ddot{U}^i_{sr}$, $\ddot{\vec{\rho}}_1$ (fig. 3), atunci, utilizînd relațiile

$$U^f_{sr} = U^i_{sr} + \dot{U}^i_{sr}\cdot\tau + \ddot{U}_{sr}\frac{\tau^2}{2}, \tag{12}$$

$$\dot{U}^f_{sr} = \dot{U}^i_{sr} + \ddot{U}^i_{sr}\cdot\tau, \tag{13}$$

găsim valorile funcțiilor U_{sr} și $\dot{U}_{sr}$ la sfîrșitul intervalului considerat. Pentru a găsi valoarea $\ddot{\vec{\rho}}^f_1$, scriem ecuația din (11) pentru $s = 1$, iar apoi deducem în ordine crescătoare după indicele s, prin recurență, totalitatea valorilor $\ddot{U}^f_{qs}$ ($s = 1, 3, \ldots, N$; $q < s$).

La determinarea cantităţilor $\overset{\parallel}{\vec{\rho}}{}^f_1$, $\overset{\parallel}{U}{}^f_{qs}$ se vor lua acele valori pentru forţele de răspuns f_{sr} care rezultă din graficul de definiţie al lor, grafic care este reprezentat în figura 2 (acest grafic oferă o funcţie bine definită dacă se cunoaşte la fiecare moment U_{rs} şi $\dot{U}_{rs}$).

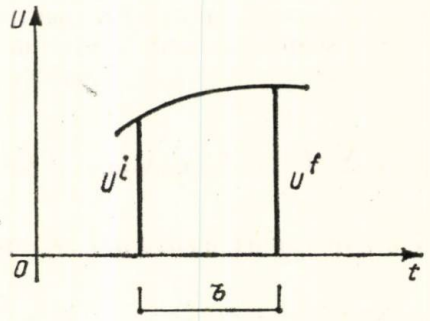


Fig. 3

În acest mod am obţinut mulţimea valorilor U^f_{sr}, $\overset{|}{U}{}^f_{sr}$, $\overset{\parallel}{U}{}^f_{sr}$, $\overset{\parallel}{\vec{\rho}}{}^f_1$, adică valorile necunoscutelor la sfîrşitul intervalului de timp considerat şi care vor deveni valori iniţiale pentru intervalul de timp următor.

Acest calcul prezentat este identic pe durata fiecărui interval de timp elementar τ, deoarece condiţiile iniţiale ale mişcării sînt elemente cunoscute, rezultă că procedeul prezentat este aplicabil şi că ne oferă atît valorile funcţiilor, cît şi ale derivatelor lor pentru anumite valori de timp ale duratei acţiunii, situate una faţă de alta la distanţa τ; este evident că exactitatea procedeului depinde în mod esenţial de lărgimea intervalelor elementare τ alese pentru calcul. Este de observat că determinarea acestor funcţii ne permite determinarea forţelor suplimentare ce apar pe sistemul studiat, datorită acţiunii forţelor perturbatoare, şi în acest fel putem determina la orice moment al timpului răspunsul sistemului de puncte considerat, la acţiunea exterioară dată prin forţele $(\vec{\mathcal{P}}_s(t))$.

Observaţii

1. În cele de mai sus s-a considerat un sistem de puncte materiale liber în spaţiu, supus unor acţiuni caracterizate prin vectori dependenţi de timp, avînd punctele de aplicaţie în punctele sistemului material. Trecerea de la acest sistem material la un altul, care este supus şi anumitor constrîngeri geometrice, se face fără nici o dificultate, considerînd vectorii de poziţie pentru o parte din punctele materiale invariabili în timp (pentru rezemare rigidă) sau variind după o lege cunoscută (pentru rezemări deformabile). Deci studiul prezentat se poate folosi la grinzi cu zăbrele cu configuraţie spaţială oarecare static determinată sau static nedeterminată, avînd rezemări rigide sau deformabile.

2. Reluînd o remarcă anterioară se vede uşor, urmărind calculul prezentat, că proprietăţile elastoplastice ale elementelor de legătură dintre

punctele materiale pot diferi de la o pereche de puncte materiale la alta, lucru avantajos pentru structurile de acest tip și în plus se pot introduce pentru o parte din elementele de legătură sau pentru toate, curbe caracteristice care exprimă degradarea în timp a rigidității elementului considerat.

3. Este de menționat că pentru cazul cel mai frecvent întîlnit în practică, și anume grindă cu zăbrele plană, și pentru care studiul vibrațiilor este interesant pe o singură direcție comună tuturor maselor, formulele de calcul se simplifică considerabil, putînd în acest caz să se renunțe la exprimarea vectorială a relațiilor de echilibru dinamic.

4. Calculul prezentat este deosebit de util, și de fapt singurul acceptabil pentru cazul forțelor perturbatoare cu amplitudini mari (care în diferite puncte ale sistemului material conduc la depășirea limitei de elasticitate). Evident, în acest caz, un calcul elastic bazat pe forme proprii de vibrații își pierde sensul, rezultatele obținute în acest fel fiind niște aproximații grosolane ale fenomenului real. Totuși, pentru forțe perturbatoare de amplitudini mici (adică pentru acele forțe care asigură nedepășirea limitei de elasticitate în nici un punct al sistemului considerat), calculul elastic apare firesc, el constituind în fapt o restricție în acest caz particular al calculului elastoplastic prezentat. Din acest motiv un calcul corespunzător la forțe variabile în timp trebuie să se facă distinct, după cum valoarea excitației exterioare implică sau nu trecerea dincolo de limita de elasticitate. Deci pentru forțe mici se va face un calcul elastic, iar pentru forțe mari se va face un calcul elastoplastic utilizînd modelul reologic cel mai adecvat materialului care trebuie reprezentat.

Din aceste motive vom face în continuare unele precizări privind calculul elastic al sistemelor de puncte materiale.

CALCULUL ELASTIC AL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Pentru acest studiu vom păstra ipoteza introdusă încă de la începutul lucrării (ipoteza micilor deplasări) și în plus vom considera coeficienții de amortizare suficient de mici astfel încît să poată fi neglijați, adică ne vom ocupa de vibrațiile libere fără amortizare ale unui sistem de puncte materiale.

În acest caz sistemul diferențial de ecuații (5) se poate scrie mai convenabil utilizînd anumite observații de natură geometrică și care apar foarte clar din figura 4.

Utilizînd notațiile (u, v, w) = coordonatele deplasărilor unui punct material oarecare al sistemului, înregistrate în sistemul $P^0\vec{I}_1\vec{I}_2\vec{I}_3$ și

$$l^0_{sr} = |\vec{\rho}^{\,0}_r - \vec{\rho}^{\,0}_s| \quad \text{și} \quad l_{sr} = |\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s| \tag{14}$$

valorile distanței dintre două puncte P_r și P_s la momentul zero și la un moment oarecare t, notînd de asemenea

$$\cos\alpha_{sr} = \vec{1}^{\,0}_{sr}\cdot\vec{I}_1\,; \qquad \cos\beta_{sr} = \vec{1}^{\,0}_{sr}\cdot\vec{I}_2\,; \qquad \cos\gamma_{sr} = \vec{1}^{\,0}_{sr}\cdot\vec{I}_3\,, \tag{15}$$

atunci, scriind proiecția liniei poligonale închise $P_s^0 P_s'' P_s' P_s P_r P_r' P_r'' P_r^0 P_s^0$ pe direcția versorului $\vec{I}_1$, se obține

$$u_s + l_{sr} \cos \alpha_{sr} - u_r - l_{sr}^0 \cos \alpha_{sr} = 0$$

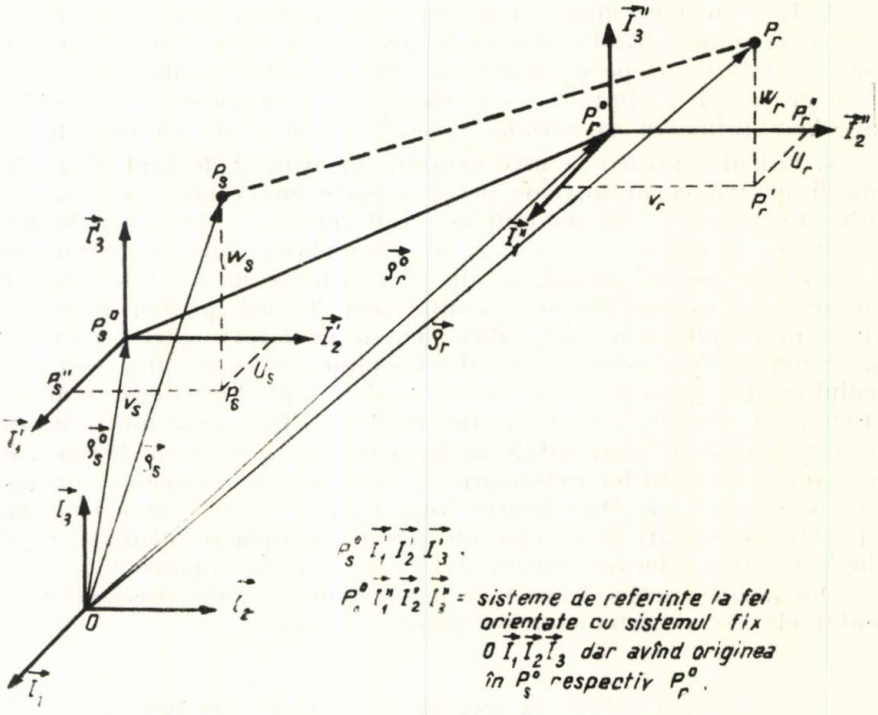


Fig. 4

sau încă

$$l_{sr} \cos \alpha_{sr} = l_{sr}^0 \cos \alpha_{sr} + u_r - u_s , \tag{16}$$

analog, proiectînd același poligon pe direcțiile $\vec{I}_2$, $\vec{I}_3$, avem

$$\begin{aligned} l_{sr} \cos \beta_{sr} &= l_{sr}^0 \cos \beta_{sr} + v_r - v_s , \\ l_{sr} \cos \gamma_{sr} &= l_{sr}^0 \cos \gamma_{sr} + w_r - w_s , \end{aligned} \tag{16'}$$

unde tripletele (u_r, v_r, w_r), (u_s, v_s, w_s) reprezintă coordonatele vectorilor de deplasare ale punctului P_r, respectiv, P_s, la un moment oarecare al mișcării.

Prin amplificarea expresiilor (16) cu $\cos \alpha_{sr}$, $\cos \beta_{sr}$ și, respectiv, cu $\cos \gamma_{sr}$, și apoi sumarea lor, se ajunge, utilizînd faptul că modulul vectorului $\vec{1}_{sr}^0$ este unu, la relația

$$\Delta l_{sr} = l_{sr} - l_{sr}^0 = (u_r - u_s) \cos \alpha_{sr} + (v_r - v_s) \cos \beta_{sr} + (w_r - w_s) \cos \gamma_{sr} , \tag{17}$$

care reprezintă variația distanței dintre punctele de indici s și r, variație considerată între un moment t și momentul zero al mișcării. Observînd că tripletul $(u_r - u_s, v_r - v_s, w_r - w_s)$ reprezintă coordonatele vectorului $(\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s) - (\vec{\rho}_r^0 - \vec{\rho}_s^0)$, iar $(\cos\alpha_{sr}, \cos\beta_{sr}, \cos\gamma_{sr})$ coordonatele versorului $\vec{1}_{sr}^0$ înregistrate în sistemul $O\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3)$, relația (17) devine

$$\Delta l_{sr} = [(\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s) - (\vec{\rho}_r^0 - \vec{\rho}_s^0)] \cdot \vec{1}_{sr}^0. \tag{17'}$$

Introducînd relația (17') în ecuația de mișcare (3), ecuație adevărată în stadiul de solicitare elastic al sistemului material, utilizînd și ipoteza suplimentară introdusă în acest capitol, descrierea mișcării vibratorii este dată de

$$m_s \overset{\cdot\cdot}{\vec{\rho}}_s = \sum_{r=1}^{N} k_{sr}\{[(\vec{\rho}_r - \vec{\rho}_s) - (\vec{\rho}_r^0 - \vec{\rho}_s^0)] \cdot \vec{1}_{sr}^0\} \vec{1}_{sr}^0 \tag{18}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, N),$$

adică un sistem de N ecuații diferențiale de ordinul II. Soluția acestui sistem se ia de forma

$$\vec{\rho}_s - \vec{\rho}^0 = \vec{a}_s \cos(\omega t - \nu) \qquad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{19}$$

introducînd (19) în (18), rezultă

$$m_s \omega^2 \vec{a}_s + \sum_{r=1}^{N} k_{sr}([\vec{a}_r - \vec{a}_s) \cdot \vec{1}_{sr}^0] \vec{1}_{sr}^0 = 0 \tag{20}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, N).$$

Proiectînd relațiile (20) pe cele trei axe de coordonate considerate și notînd cu (u_s^0, v_s^0, w_s^0) coordonatele vectorului $\vec{a}_s$, sistemul (20) se transformă în

$$\begin{aligned}
&m_s\omega^2 u_s^0 + \sum_{r=1}^{N} k_{sr}[(u_r^0 - u_s^0)\cos\alpha_{sr} + (v_r^0 - v_s^0)\cos\beta_{sr} + (w_r^0 - w_s^0)\cos\gamma_{sr}]\cos\alpha_{sr} = 0,\\
&m_s\omega^2 v_s^0 + \sum_{r=1}^{N} k_{sr}[(u_r^0 - u_s^0)\cos\alpha_{sr} + (v_r^0 - v_s^0)\cos\beta_{sr} + (w_r^0 - w_s^0)\cos\gamma_{sr}]\cos\beta_{sr} = 0,\\
&m_s\omega^2 w_s^0 + \sum_{r=1}^{N} k_{sr}[(u_r^0 - u_s^0)\cos\alpha_{sr} + (v_r^0 - v_s^0)\cos\beta_{sr} + (w_r^0 - w_s^0)\cos\gamma_{sr}]\cos\gamma_{sr} = 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, N)$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1848

sau încă utilizînd următoarele notaţii :

$$\omega^2 = \lambda$$

$$a_{sr} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m_s} k_{sr} \cos^2 \alpha_{sr}, & r \neq s, \\ \dfrac{1}{m_s} \sum_{r=1}^{N} k_{sr} \cos^2 \alpha_{sr}, & r = s, \end{cases} \qquad b_{sr} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m_s} k_{sr} \cos \beta_{sr} \cos \alpha_{sr}, & r \neq s, \\ \dfrac{1}{m_s} \sum_{r=1}^{N} k_{sr} \cos \beta_{sr} \cos \alpha_{sr}, & r = s, \end{cases}$$

$$c_{sr} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m_s} k_{sr} \cos \gamma_{sr} \cos \alpha_{sr}, & r \neq s, \\ \dfrac{1}{m_s} \sum_{r=1}^{N} k_{sr} \cos \gamma_{sr} \cos \alpha_{sr}, & r = s, \end{cases} \qquad d_{sr} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m_s} k_{sr} \cos^2 \beta_{sr}, & r \neq s, \\ \dfrac{1}{m_s} \sum_{r=1}^{N} k_{sr} \cos^2 \beta_{sr}, & r = s, \end{cases} \tag{22}$$

$$e_{sr} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m_s} k_{sr} \cos \gamma_{sr} \cos \beta_{sr}, & r \neq s, \\ \dfrac{1}{m_s} \sum_{r=1}^{N} k_{sr} \cos \gamma_{sr} \cos \beta_{sr}, & r = s, \end{cases} \qquad f_{sr} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m_s} k_{sr} \cos^2 \gamma_{sr}, & r \neq s, \\ \dfrac{1}{m_s} \sum_{r=1}^{N} k_{sr} \cos^2 \gamma_{sr}, & r = s \end{cases}$$

$$(s,\ r = 1, 2, \ldots,\ N),$$

$$\delta_{sr} = \begin{cases} 1, & s = r, \\ 0, & s \neq r, \end{cases} \qquad (s,\ r = 1, 2, \ldots, N),$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad (i,\ j = 1, 2, \ldots, 3N)$$

atunci sistemul de ecuaţii liniar (21) se scrie astfel :

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{N} (a_{sr} - \lambda \delta_{sr}) u_r^0 + \sum_{r=1}^{N} b_{sr} v_r^0 + \sum_{r=1}^{N} c_{sr} w_r^0 = 0, \\ &\sum_{r=1}^{N} b_{sr} u_r^0 + \sum_{r=1}^{N} (d_{sr} - \lambda \delta_{sr}) v_r^0 + \sum_{r=1}^{N} e_{sr} w_r^0 = 0, \\ &\sum_{r=1}^{N} c_{sr} u_r^0 + \sum_{r=1}^{N} e_{sr} v_r^0 + \sum_{r=1}^{N} (f_{sr} - \lambda \delta_{sr}) w_r^0 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, N).$$

Utilizînd notațiile

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} (a_{sr}) & (b_{sr}) & (c_{sr}) \\ (b_{sr}) & (d_{sr}) & (e_{sr}) \\ (c_{sr}) & (e_{sr}) & (f_{sr}) \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ \vdots \\ u_N^0 \\ v_1^0 \\ \vdots \\ v_N^0 \\ w_1^0 \\ \vdots \\ w_N^0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

adică o matrice cu $3N$ linii și tot atîtea coloane și, respectiv, o matrice cu $3N$ linii și o singură coloană, sistemul de ecuații liniar și omogen (23) se scrie

$$(\mathcal{A} - \lambda\delta_{ij})\, x = 0. \tag{25}$$

Dacă matricea $(\mathcal{A} - \lambda\delta_{ij})$ este inversabilă, atunci rezultă $x = 0$, adică stare de repaus, deci soluția interesantă este matricea $(\mathcal{A} - \lambda\delta_{ij})$ neinversabilă, ceea ce echivalează cu anularea determinantului acestei matrice.

Deci problema determinării modurilor proprii de vibrații pentru sistemul material considerat este echivalentă cu determinarea valorilor și vectorilor proprii pentru matricea $\mathcal{A}$, simetrică și de componente reale din spațiul real cu $3N$ dimensiuni.

Observații

1. După cum s-a demonstrat anterior, problema rezolvării dinamice în stadiul elastic a sistemului de puncte materiale revine la determinarea valorilor și vectorilor proprii pe o matrice simetrică de componente reale ($\mathcal{A}$) adică un caz particular de matrice hermitică. ($\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^t = : \mathcal{A}^+$) Două dintre proprietățile acestor matrice sînt deosebit de utile în calculul de vibrații, și anume

— toate valorile proprii sînt numere reale.

Presupunînd prin absurd că există o valoare proprie $\lambda \neq$ nr. reale, atunci avem din (25), prin adjuncționare,

$$x^+\mathcal{A}^+ = \bar{\lambda}x^+. \tag{25'}$$

Amplificînd relația (25) la stînga cu x^+ și (25') la dreapta cu x și ținînd seama de proprietatea de simetrie a lui $\mathcal{A}$, rezultă $(\lambda - \bar{\lambda})x^+x = 0$, de unde, pentru că $x^+x \neq 0$, rezultă $\lambda = \bar{\lambda}$; deci, orice valoare proprie pentru o astfel de matrice este un număr real;

— la valori proprii distincte corespund vectori proprii; ortogonali; fie două valori proprii distincte λ_1, λ_2 și vectorii proprii corespunzători

x_1 și x_2. Din (25) obținem

$$\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1 \quad \text{și} \quad \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$$

sau adjuncționînd $x_1^+\mathcal{A}^+ = \lambda_1 x_1^+$ și amplificînd această relație cu x_2 la dreapta și cea referitoare la valoarea proprie λ_2 cu x_1^+ la stînga, rezultă egalitatea $(\lambda_1 - \lambda_2)x_1^+ x_2 = 0$; cum $\lambda_1 \neq \lambda_2$ prin ipoteză, rezultă $x_1^+ x_2 = 0$, adică produsul scalar al celor doi vectori este nul. Deci pulsațiile proprii sînt numere reale, iar la pulsații proprii diferite corespund vectori proprii ortogonali.

2. Și aici, și la calculul dincolo de limita elastică, s-a analizat comportarea unui sistem de puncte materiale liber în spațiul tridimensional; introducerea diferitelor constrîngeri geometrice (adică a legăturilor cu mediul) se face fără nici o dificultate, considerînd vectorii de poziție pentru o parte din punctele sistemului invariabili în timp sau variabili după legi date.

3. În cazul vibrațiilor libere cu sau fără amortizoare, unele informații privind mișcarea sistemului material se pot obține urmărind mișcarea centrului de inerție al sistemului. Astfel, pentru un sistem de puncte materiale liber în spațiu, ecuația impulsului pentru un punct (P_s, m_s) este

$$\dot{\vec{H}}_s = \sum_{r=1}^{N} \vec{F}_{sr}^{(e)} - \sum_{r=1}^{N} \vec{F}_{sr}^{(a)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, N). \tag{26}$$

Sumînd relația anterioară după s, obținem

$$\dot{\vec{H}} = \sum_{s=1}^{N} \dot{\vec{H}}_s = 0 \tag{27}$$

sau

$$\dot{\overrightarrow{OG}} = 0 \tag{27'}$$

(G = centrul de inerție al sistemului de puncte materiale)
adică centrul de inerție al sistemului are o mișcare rectilinie și uniformă.

Evident, în cazul legăturilor cu mediul, relația (27) se modifică, în dreapta egalității căpătînd suma acțiunilor mediului asupra sistemului material considerat. Această observație apare interesantă în studiul diverselor cazuri particulare, și atunci cînd ne interesează doar prima formă proprie de vibrație.

CONCLUZII

Studiul prezentat pleacă de la ideea utilizării unui calculator electronic urmărind descrierea cît mai corectă a fenomenului real propus, sugerînd și o cale utilizabilă pentru un calcul aproximativ.

S-a dat o dezvoltare mai mare calculului dincolo de limită elastică datorită dificultăților ce le prezintă, cît și necesității de a studia comportarea elementelor constructive și în acest stadiu de lucru. După cum s-a arătat în partea aferentă calculului elastoplastic nu s-a utilizat cel mai complet model reologic și nici cea mai complicată diagramă deplasare-rigiditate; de asemenea s-a introdus doar amortizare de natură vîscoasă și nu s-a introdus și o amortizare coulombiană care poate apare în unele cazuri la aceste structuri. Toate acestea s-au făcut pentru simplificarea scrierii și urmărirea în condiții mai bune a textului, generalitatea în principiu nerestrîngîndu-se, pentru că și cazul general are formal aceeași tratare.

Pentru studiul elastic este suficient să formăm matricea $\mathcal{A}$ (lucru care poate fi făcut automat de către un calculator) și apoi, utilizînd un subprogram de determinare a valorilor și vectorilor proprii pe matrice, căpătăm integral caracteristicile dinamice ale structurii considerate în stadiul elastic.

Prin acest mod de tratare s-a căutat să se realizeze o sistematizare precisă a calculului dinamic al structurilor independent de stadiul de lucru; această afirmație este evidentă pentru că comportarea structurii în stadiul elastic este definită tot de sistemul de ecuații diferențial (7), dar în care impunem restricția

$$|U_{rs}| < 1 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, N). \tag{28}$$

Nu s-a dezvoltat mai mult acest caz particular (adică (7) + (28)), pentru că prin tratarea cazului general elastoplastic s-a rezolvat în fond orice altă situație mai particulară, iar pe de altă parte există o serie de studii elastice care rezolvă problema pentru o alegere convenabilă a coeficienților de amortizare.

În final trebuie reținută ideea de a lucra diferențiat după intensitatea acțiunii exterioare, și anume pentru intensități mari (care duc la depășirea limitei elastice), este indicat calculul elastoplastic, iar pentru intensități mici (care păstrează structura sub limita de elasticitate), deși se poate folosi calculul din prima parte a lucrării, totuși se poate utiliza un calcul elastic cu neglijarea amortizării, cu rezultate destul de bune și cu volum de muncă mult mai redus.

Primită la redacție la 27 ianuarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. J. Penzien, *Elasto-Plastic Response of Idealized Multy-Story Structures Subjected to a Strong Motion Earthquake*, Proceedings Second World Conference of Earthquake Engineering Japan 1960.
2. N. Țopa, *Cu privire la determinarea oscilațiilor proprii ale cadrelor având bare înclinate, cu mase concentrate la noduri*, St. cerc. mec. apl., **15**, *1* (1964).

CALCULUL ÎMBINĂRILOR PRIN FLANȘE LA ÎNCĂRCĂRI NESIMETRICE PRIN UTILIZAREA ELEMENTELOR FINITE

de MAGDALENA POSEA

Institutul de construcții București

În lucrare se prezintă un procedeu nou de calcul al îmbinărilor prin flanșe pentru cazul nesimetriei încărcărilor datorate forțelor din șuruburi.

Părțile componente ale flanșei, gîtul și talerul acesteia, se descompun în elemente finite. Din studiul echilibrului fiecărui element finit și al fiecărui nod de legătură dintre elementele finite considerate, se ajunge la un sistem de ecuații algebrice a cărui soluție constituie deplasările și rotirile tuturor secțiunilor de separație dintre elementele finite. În funcție de aceste deformații, se dau relațiile necesare pentru calculul eforturilor în orice secțiune a flanșei.

Se precizează că metoda propusă ia concomitent în considerație deformabilitatea tuturor elementelor îmbinării, inclusiv șuruburile și garnitura.

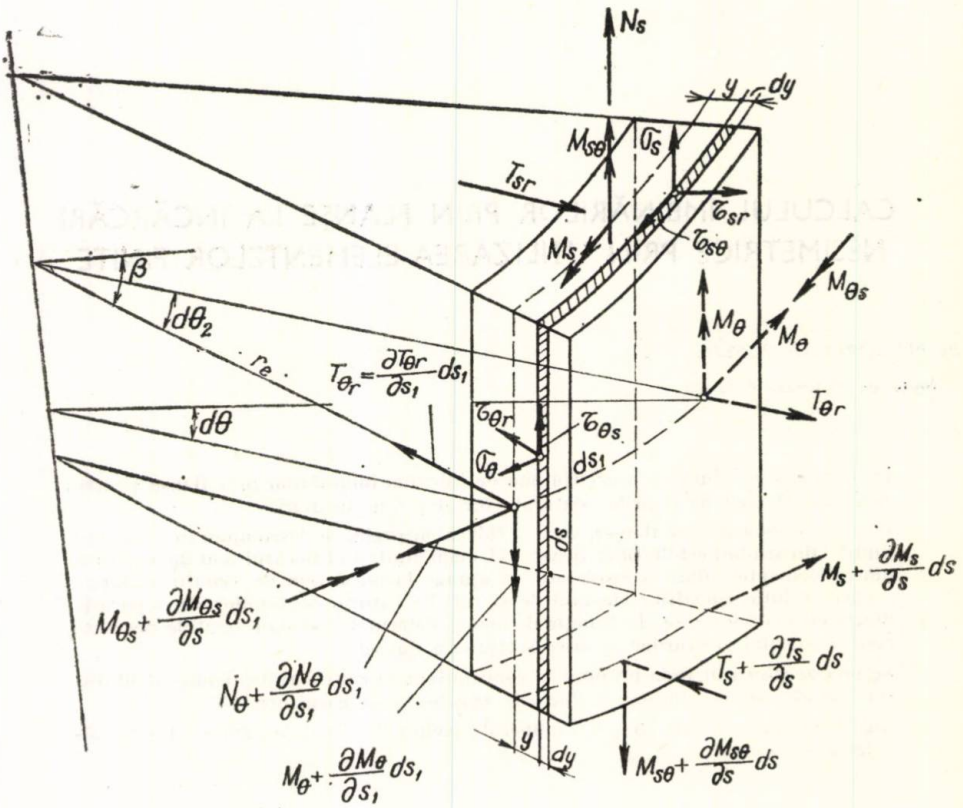
Algoritmul obținut este simplu, cu operații ciclice și ușor de programat la un calculator automat.

Spre deosebire de cazul încărcărilor simetrice [10], unde eforturile și deplasările sînt funcție de o singură variabilă (r), în cazul de față intervin două variabile (r și θ). Într-o astfel de situație elementele finite nu mai pot fi reduse la o singură dimensiune și se vor considera de formă triunghiulară sau dreptunghiulară. Prezentînd numai cazul nesimetriei, datorit forțelor din șuruburi, în ipoteza că nu există încărcări nesimetrice exterioare care să solicite în ansamblu aparatul prevăzut cu îmbinarea prin flanșe analizată, problema se poate simplifica și va fi expusă în continuare folosind în principiu schema de calcul de la încărcările simetrice [10].

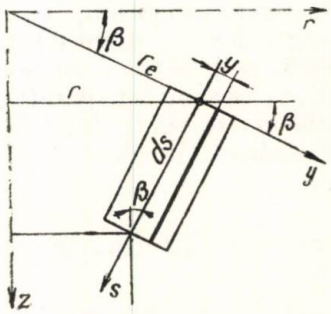
1. CALCULUL GÎTULUI FLANȘEI

Izolînd un element din porțiunea gîtului flanșei, considerată ca un înveliș conic, eforturile secționale pozitive se aleg ca în figura 1*a*. Elementul se raportează la un sistem de axe cilindrice r, z, θ. Se consideră însă și un sistem suplimentar de axe y, s (fig. 1*b*) cu originea la mij-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 823–850


Ns
y
dy
Mso
σs
Tsr
τsr
τsθ
Ms
β
dθ2
re
Mθs
Mθ
Mθ
Tθr = ∂Tθr/∂s1 ds1
Tθr
τθr
τθs
σθ
ds1
ds
Ms + ∂Ms/∂s ds
Mθs + ∂Mθs/∂s ds1
Nθ + ∂Nθ/∂s1 ds1
Ts + ∂Ts/∂s ds
y
dy
Mθ + ∂Mθ/∂s1 ds1
Mso + ∂Mso/∂s ds

b


r
β
re
y
r
β
ds
β
y
z
s

b.

Fig. 1

locul grosimii elementului, cu y după normala la suprafața mediană și s după generatoarea conului.

Deplasările se consideră astfel: u, după rază; w, după z și v, după tangenta la paralel. Față de y deplasarea se notează cu $\overline{u}$, iar față de s cu $\overline{w}$.

1.1. EXPRIMAREA EFORTURILOR ÎN FUNCȚIE DE DEPLASĂRILE SUPRAFEȚEI MEDIANE

Analizînd separat deplasările segmentului AB (fig. 2*a*) și ale segmentului AC (fig. 2*b*), deplasările elementului $AB \times BC$ de pe suprafața mediană a învelișului arată ca în figura 2*c*.

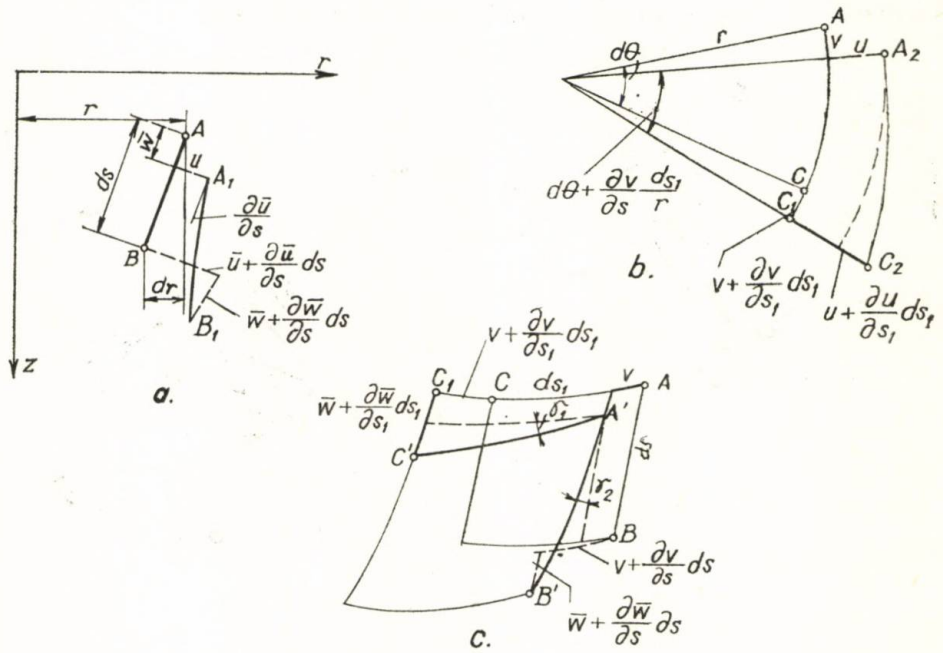


Fig. 2

Deformațiile specifice ale acestui element de suprafață urmînd metodologia din [8] sînt

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \overline{w}}{\partial s},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_2}\left(\overline{u} - \overline{w}\,\mathrm{tg}\,\beta + \frac{\partial v}{\partial \theta_2}\right), \tag{1}$$

$$\gamma_{s\theta} = \frac{\partial \overline{w}}{r_2 \partial \theta_2} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{r_2}\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Considerînd un element la distanța y de suprafața mediană (fig. 3*a*) și analizînd, pe baza ipotezei normalelor drepte, deplasările într-un plan meridian (fig. 3*b*) și în al doilea plan principal al suprafeței (fig. 3*c*), se obțin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{u}_c &= \overline{u}, \\ v_c &= v\frac{r_2+y}{r_2} + y\frac{1}{r_2}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\theta_2}, \\ \overline{w}_c &= \overline{w} + y\frac{\overline{u}}{\partial s}, \end{aligned} \tag{2}$$

care exprimă deplasările punctului C aflat la distanța y de suprafața mediană în funcție de deplasările suprafeței mediane.

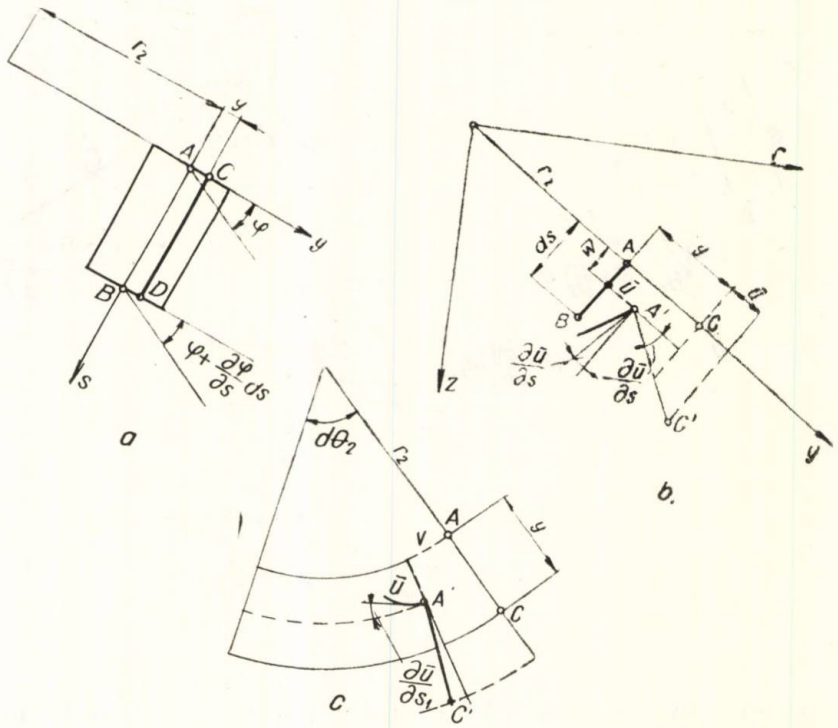


Fig. 3

Deformațiile specifice în punctul curent C se determină cu relațiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial\overline{w}_c}{\partial s}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r_2+y}\left(\overline{u}_c - \overline{w}_c \operatorname{tg}\beta + \frac{\partial v_c}{\partial\theta_2}\right), \\ \gamma_{s\theta} &= \frac{\partial\overline{w}_c}{(r_2+y)\,\partial\theta_2} + \frac{\partial v_c}{\partial s} + \frac{v_c}{r_2+y}\operatorname{tg}\beta, \end{aligned} \tag{3}$$

obținute din(1) prin înlocuirea deplasărilor cu deplasările corespunzătoare punctului C și a razei r_2 cu $r_{2c} = r_2 + y$.

Înlocuind (2) în (3) și ținînd seama că

$$\frac{\partial r_2}{\partial s} = -\operatorname{tg}\beta\,;\quad \frac{\partial r}{\partial s} = -\sin\beta\,;\quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r_2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\beta}{r_2^2} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{r^2},$$

$$r_2 \mathrm{d}\theta_2 = r\mathrm{d}\theta\,;\quad r = r_2\cos\beta,$$

rezultă deformațiile specifice într-un punct curent y, exprimate în funcție de deplasările suprafeței mediane

$$\varepsilon_s = \frac{\partial \overline{w}}{\partial s} + y\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial s^2},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_2 + y}\left[\overline{u} - \overline{w}\operatorname{tg}\beta - y\frac{\partial \overline{u}}{\partial s}\operatorname{tg}\beta + \left(1 + \frac{y}{r_2}\right)\frac{\partial v}{\partial \theta} + y\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \overline{u}}{r\partial\theta}\right)\right],$$

$$\gamma_{s\theta} = \frac{r_2}{r_2+y}\frac{\partial \overline{w}}{r\partial\theta} + \frac{y}{r}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial s\partial\theta}\left(\frac{r_2}{r_2+y} + 1\right) + \frac{y}{r}\frac{\partial \overline{u}}{\partial\theta}\operatorname{tg}\beta\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2+y}\right) + \tag{4}$$

$$+ \frac{r_2 + y}{r_2}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{r_2 + y}{r_2^2} v\operatorname{tg}\beta.$$

Introducînd aceste expresii în relațiile aspectului fizic, reprezentat prin legea generalizată a lui Hooke pentru situația plană,

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_s + \mu\varepsilon_\theta),$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_s), \tag{5}$$

$$\tau_{s\theta} = \frac{E}{1-\mu^2}\frac{1-\mu}{2}\gamma_{s\theta},$$

și în relațiile de echivalență între eforturile secționale și cele unitare,

$$N_s = \int_{-g/2}^{g/2} \sigma_s \frac{r_2 + y}{r_2}\mathrm{d}y\,;\quad N_\theta = \int \sigma_\theta \mathrm{d}y\,;\quad N_{s\theta} = \int \tau_{s\theta}\frac{r_2 + y}{r_2}\mathrm{d}y,$$

$$M_s = -\int_{-g/2}^{g/2} \sigma_s \frac{r_2 + y}{r_2} y\mathrm{d}y\,;\quad M_\theta = -\int \sigma_\theta y\,\mathrm{d}y\,;\quad M_{s\theta} = \int \tau_{s\theta}\frac{r_2 + y}{r_2} y\mathrm{d}y, \tag{6}$$

se obţin expresiile eforturilor secţionale în funcţie de deplasările suprafeţei mediane :

$$N_s = \frac{Eg}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial s} + \mu\left(\frac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right],$$

$$N_\theta = \frac{Eg}{1-\mu^2}\left(\frac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial s}\right),$$

$$N_{s\theta} = \frac{Eg}{1-\mu^2}\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{r}\sin\beta\right),$$

$$M_s = \frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left[-\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial s^2} + \mu\left(\frac{\sin\beta}{r}\frac{\partial\overline{u}}{\partial s} - \frac{\cos\beta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\theta^2}\right)\right], \tag{7}$$

$$M_\theta = \frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left[\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\theta^2} + \frac{\sin\beta}{r}\frac{\partial\overline{u}}{\partial s} - \frac{\cos\beta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) - \mu\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial s^2}\right],$$

$$M_{s\theta} = \frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1-\mu}{2}\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial s\partial\theta} + \frac{\sin\beta}{r^2}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\theta} + \frac{\cos\beta}{r}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{r^2}\sin\beta\cos\beta\right)\right].$$

Notînd

— vectorul deformaţiilor specifice :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\overline{w}}{\partial s} \\ \dfrac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial\theta} + \dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{v}{r}\sin\beta \\ -\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial s^2} \\ -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial\theta^2} + \dfrac{\sin\beta}{r}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial s} - \dfrac{\cos\beta}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial\theta} \\ 2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial s\partial\theta} + \dfrac{\sin\beta}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\theta} + \dfrac{\cos\beta}{r}\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{\cos\beta\sin\beta}{r^2}v\right) \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

— vectorul eforturilor secționale:

$$\{N\} = \{N_s N_\theta N_{s\theta} M_s M_\theta M_{s\theta}\}^T, \tag{9}$$

— matricea elementelor elastice și geometrice:

$$[D] = \frac{Eg}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^2/12 & \mu g^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu g^2/12 & g^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{24} g^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

rezultă că eforturile pot fi scrise sub forma

$$\{N\} = [D]\{\varepsilon\}. \tag{11}$$

1.2. DEPLASĂRI ȘI EFORTURI PE ELEMENTUL FINIT

1.2.1. *Funcția deplasărilor.* Alegînd un element finit e (fig. 4), avînd capătul din stînga i și cel din dreapta j, se definesc vectorii

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ v_i \end{Bmatrix}; \quad \{\delta_j\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \\ v_j \end{Bmatrix}; \quad \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}, \tag{12}$$

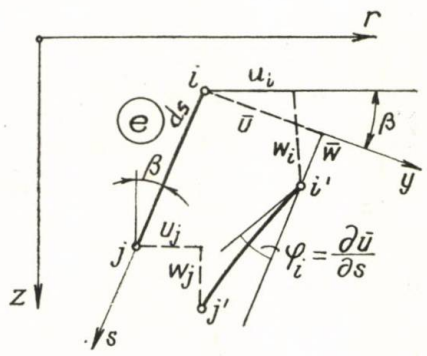


Fig. 4

considerați ca necunoscute ale problemei analizate.

Față de axele y, s (fig. 4) se definește vectorul

$$\{\overline{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{w} \\ \overline{\varphi} \\ \overline{v} \end{Bmatrix} = [\lambda]\{\delta\}, \tag{13}$$

în care matricea de transformare este

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Pentru sarcini exterioare care pot fi exprimate prin

$$\begin{aligned} p_r &= \sum_n p_{rn}(r)\cos n\theta, \\ p_z &= \sum_n p_{zn}(r)\cos n\theta, \end{aligned} \tag{15}$$

deplasările $\overline{u}$, $\overline{w}$, $\overline{v}$ pot fi alese ca variații de forma

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \sum \overline{u}_n(s)\cos n\theta, \\ \overline{w} &= \sum \overline{w}_n(s)\cos n\theta, \\ \overline{v} &= \sum \overline{v}_n(s)\sin n\theta. \end{aligned} \tag{16}$$

În acest fel, elementele finite în care se împarte învelișul pot fi reduse în planul meridian la segmente de forma $i-j$ (fig. 4). În funcție de aceste deplasări (16), se exprimă vectorul $\{\overline{\delta}_i\}$:

$$\{\overline{\delta}_i\} = \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{w}_i \\ \overline{\varphi}_i \\ \overline{v}_i \end{Bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} \{\overline{\delta}_i\}_n,$$

care, notînd

$$[\gamma]_n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin n\theta \end{bmatrix}, \tag{17}$$

și ținînd seama de (13), devine

$$\{\overline{\delta}_i\}_n = [\gamma]_n [\lambda] \{\delta_i\}_n . \tag{18}$$

Pentru $\{\overline{\delta}_i\}^e$ se obține

$$\{\overline{\delta}\}^e_n = \begin{Bmatrix} \overline{\delta}_i \\ \overline{\delta}_j \end{Bmatrix}^e_n = \begin{bmatrix} [\gamma]_n [\lambda] & 0 \\ 0 & [\gamma]_n [\lambda] \end{bmatrix} \{\delta\}^e_n . \tag{19}$$

Alegînd pentru $\overline{u}(s)$, $\overline{w}(s)$, $\overline{v}(s)$ expresiile

$$\begin{aligned} \overline{u}(s) &= \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3, \\ \overline{w}(s) &= \alpha_5 + \alpha_6 s, \\ \overline{v}(s) &= \alpha_7 + \alpha_8 s, \end{aligned}$$

din condițiile la limită

pentru $s = 0 : \overline{u} = \overline{u}_i ; \ \overline{w} = \overline{w}_i ; \ \overline{\varphi} = \overline{\varphi}_i ; \ \overline{v} = \overline{v}_i$ și

pentru $s = l : \overline{u} = \overline{u}_j ; \ \overline{w} = \overline{w}_j ; \ \overline{\varphi} = \overline{\varphi}_j ; \ \overline{v} = \overline{v}_j ,$

rezultă deplasările

$$\begin{aligned} \overline{u} &= (1 - 3s'^2 + 2s'^3)\,\overline{u}_i + l\,(s' - 2s'^2 + s'^3)\,\varphi_i + \\ &\quad + (3s'^2 - 2s'^3)\,\overline{u}_j + l\,(-s'^2 + s'^3)\,\varphi_j , \\ \overline{w} &= (1 - s')\,\overline{w}_i + s'\,\overline{w}_j , \\ \overline{v} &= (1 - s')\,\overline{v}_i + s'\,\overline{v}_j \end{aligned}$$

(s-a notat $ls' = s$).

Aranjînd aceste deplasări sub formă matriceală și folosind (18) și (19), se obține funcția deplasărilor

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{w} \\ \overline{v} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|cc|c|cc} 1-3s'^2+2s'^3 & 0 & l(s'-2s'^2+s'^3) & 0 & 3s'^2-2s'^3 & 0 & l(-s'^2+s'^3) & 0 \\ 0 & 1-s' & 0 & 0 & 0 & s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s' & 0 & 0 & 0 & s' \end{array}\right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} [\gamma]_n & 0 \\ 0 & [\gamma]_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \{\delta\}^e_n . \tag{20}$$

Notînd

$$[H_i']_n = \begin{bmatrix} 1-3s'^2+2s'^3 & 0 & l(s'-2s'^2+s'^3) & 0 \\ 0 & 1-s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s' \end{bmatrix} [\gamma]_n, \quad (21)$$

$$[H_j']_n = \begin{bmatrix} 3s'^2-2s'^3 & 0 & l(-s'^2+s'^3) & 0 \\ 0 & s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s' \end{bmatrix} [\gamma]_n, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} [H_i]_n &= [H_i']_n [\lambda], \\ [H_j]_n &= [H_j']_n [\lambda], \\ [H]_n &= [H_i H_j]_n, \end{aligned} \quad (23)$$

rezultă

$$\{f\}_n^e = [H_i H_j]_n \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}_n^e = [H]_n \{\delta\}_n^e. \quad (24)$$

1.2.2. *Exprimarea vectorului eforturilor în funcție de vectorul deplasărilor.* Înlocuind expresiile $\overline{u}$, $\overline{w}$, $\overline{v}$ din (22) în (8), se obține tabela (1), care reprezintă vectorul $\{\varepsilon\}$.

Fiecare coloană se înmulțește cu deplasarea indicată deasupra ei și fiecare linie cu funcția trigonometrică indicată în partea dreaptă.

Ținînd seama că liniile *1*, *2*, *4*, *5* conțin ca factor pe cos $n\theta$ și liniile *3* și *6* pe sin θ, se definește matricea diagonală

$$[\gamma']_n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin n\theta \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Tabela 1

	$\overline{u}_i$	$\overline{w}_i$	$\overline{\varphi}_i$	$\overline{v}_i$	$\overline{u}_j$	$\overline{w}_j$	$\overline{\varphi}_j$	$\overline{v}_j$	
1	0	$-1/l$	0	0	0	$1/l$	0	0	$\times\cos n\theta$
2	$(1-3s'^2+2s'^3)\frac{\cos\beta}{r}$	$-\frac{1-s'}{r}\sin\beta$	$l(s'-2s'^2+s'^3)\frac{\cos\beta}{r}$	$(1-s')\frac{n}{r}$	$(3s'^2-2s'^3)\frac{\cos\beta}{r}$	$-s'\frac{\sin\beta}{r}$	$l(-s'^2+s'^3)\frac{\cos\beta}{r}$	$s'\frac{n}{r}$	$\times\sin n\theta$
3	0	$-(1-s')\frac{n}{r}$	0	$-\frac{1}{l}+$ $+(1-s')\frac{\sin\beta}{r}$	0	$-s'\frac{n}{r}$	0	$\frac{1}{l}+s'\frac{\sin\beta}{r}$	$\times\sin n\theta$
4	$\frac{6}{l^2}(1-2s')$	0	$\frac{2}{l}(2-3s')$	0	$-\frac{6}{l^2}(1-2s')$	0	$\frac{2}{l}(1-3s')$	0	$\times\cos n\theta$
5	$(1-3s'^2+2s'^3)\frac{n^2}{r^2}+$ $+(-s'+s'^2)\frac{6\sin\beta}{lr}$	0	$(s'-2s'^2+s'^3)\frac{ln^2}{r^2}+$ $+(1-4s'+3s'^2)\frac{\sin\beta}{r}$	$-(1-s')\frac{n\cos\beta}{r^2}$	$(3s'^2-2s'^3)\frac{n^2}{r^2}+$ $+(s'-s'^2)\frac{6\sin\beta}{lr}$	0	$(-s'^2+s'^3)\frac{ln^2}{r^2}+$ $+(-2s'+$ $+3s'^2)\frac{\sin\beta}{r}$	$-s'n\frac{\cos\beta}{r^2}$	$\times\cos n\theta$
6	$\frac{12n}{lr}(s'-s'^2)-$ $-\frac{2n}{r^2}(1-3s'^2+$ $+2s'^3)\sin\beta$	0	$-\frac{2n}{r}[1-4s'+3s'^2+$ $+\frac{l}{r}(s'-2s'^2+$ $+s'^3)\sin\beta]$	$\frac{2\cos\beta}{lr}[-1+$ $+(1-s')\frac{l}{r}\sin\beta]$	$\frac{2n}{lr}[6(s'^2-s')-$ $-\frac{l}{r}(3s'^2+$ $+2s'^3)\sin\beta]$	0	$\frac{2n}{r}[-2s'+3s'^2-$ $-\frac{l}{r}(-s'^2+$ $+s'^3)\sin\beta]$	$\frac{2\cos\beta}{lr}\left(1+\right.$ $\left.+s'\frac{l}{r}\sin\beta\right)$	$\times\sin n\theta$

Notînd primele patru coloane ale tabelei 1 cu

$$[B'_i]_n =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ (1-3s'^2+2s'^3)\frac{\cos\beta}{r} & -\frac{1-s'}{r}\sin\beta & \frac{l\cos\beta}{r}(s'-2s'^2+s'^3) & \frac{n}{r}(1-s') \\ 0 & -(1-s')\frac{n}{r} & 0 & -\frac{1}{l}+(1-s')\frac{\sin\beta}{r} \\ \frac{6}{l^2}(1-2s') & 0 & \frac{2}{l}(2-3s') & 0 \\ \frac{n^2}{r^2}(1-3s'^2+2s'^3)+ & 0 & \frac{ln^2}{r^2}(s'-2s'^2+s'^3)+ & -(1-s')\frac{n\cos\beta}{r^2} \\ +\frac{6\sin\beta}{lr}(-s'+s'^2) & & +\frac{\sin\beta}{r}(1-4s'+3s'^2) & \\ \frac{12n}{lr}(s'-s'^2)- & 0 & -\frac{2n}{r}[1-4s'+3s'^2+ & \frac{2\cos\beta}{lr}\left[-1+\right. \\ -\frac{2n}{lr}(1-3s'^2+ & & +\frac{l}{r}(s'-2s'^2+ & +(1-s')\frac{l}{r}\sin\beta \\ +2s'^3)\sin\beta & & +s'^3)\sin\beta] & \end{bmatrix} \tag{26}$$

și pe ultimele patru cu

$$[B'_j]_n =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/l & 0 & 0 \\ \frac{\cos\beta}{r}(3s'^2-2s'^3) & -s'\frac{\sin\beta}{r} & \frac{l}{r}(-s'^2+s'^3)\cos\beta & s'\frac{n}{r} \\ 0 & -s'\frac{n}{r} & 0 & \frac{1}{l}+s'\frac{\sin\beta}{r} \\ -\frac{6}{l^2}(1-2s') & 0 & \frac{2}{l}(1-3s') & 0 \\ \frac{n^2}{r^2}(3s'^2-2s'^3)+ & 0 & \frac{ln^2}{r^2}(-s'^2+s'^3)+ & -\frac{s'n}{r^2}\cos\beta \\ +\frac{6\sin\beta}{lr}(s-s'^2) & & \frac{\sin\beta}{r}(-2s'+3s'^2) & \\ \frac{2n}{lr}\left[6(s'^2-s')-\right. & 0 & \frac{2n}{r}\left[-2s'+3s'^2-\right. & \frac{2\cos\beta}{lr}\left(1+\frac{s'l}{r}\sin\beta\right) \\ \left.-\frac{l}{r}(3s'^2+2s'^3)\sin\beta\right] & & \left.-\frac{l}{r}(-s'^2+s'^3)\sin\beta\right] & \end{bmatrix} \tag{27}$$

se obține vectorul deformațiilor specifice (8), reprezentat în tabela 1, ținînd seama și de (13) sub forma

$$\{\varepsilon\}_n = [\gamma']_n \, [[B'_i]_n \, [B'_j]_n] \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \{\delta\}_n . \tag{28}$$

Notînd în continuare

$$[B_i]_n = [\gamma']_n \, [B'_i]_n \, [\lambda]; \quad [B_j]_n = [\gamma']_n \, [B'_j]_n \, [\lambda],$$
$$[B]_n = [B_i]_n \, [B_j]_n], \tag{29}$$

se obține componenta

$$\{\varepsilon\}_n = [B]_n \, \{\delta\}_n \tag{30}$$

și apoi vectorul total al deformațiilor specifice

$$\{\varepsilon\} = \sum_n \{\varepsilon\}_n = \sum_n [B]_n \{\delta\}_n \tag{31}$$

Introducînd (31) în (11), se obține vectorul eforturilor secționale

$$\{N\} = [D] \{\varepsilon\} = \sum_n [D] \, [B]_n \{\delta\}_n , \tag{32}$$

în funcție de deplasările nodurilor elementelor finite considerate.

Valorile $\{\delta\}_n$ se calculează pentru fiecare termen al seriilor (16) și eforturile finale se obțin prin însumarea (32), în care, se înțelege, termenii descresc odată cu creșterea numărului n.

Nici în acest caz nu au fost introduse în vectorul eforturilor forțele tăietoare, deoarece influența lor asupra valorilor deplasărilor nodurilor este mică și, în plus, nu intervin nici în formulele de dimensionare. În cazurile cînd valorile lor vor fi necesare, ele vor putea fi determinate din ecuații de echilibru în mod similar ca în cazul încărcărilor simetrice[10].

1.3. STABILIREA ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE PENTRU DETERMINAREA NECUNOSCUTELOR

Pe elementul h, cuprins între nodurile $h-1$ și h, se consideră că acționează forțele nodale

$$\{F\}^h = (\{F_{h-1} F_h\}^h)^T = \{F_{u,h-1} F_{w,h-1} F_{\varphi,h-1} F_{v,h-1} F_{u,h} F_{w,h} F_{\varphi,h} F_{v,h}\}^T, \tag{a}$$

având semne pozitive cînd acționează în sensul pozitiv al deplasărilor respective.

Sarcinile exterioare pe gît se consideră cu trei componente

$$\{p\} = \{p_r p_z p_\theta\}^T. \tag{b}$$

Față de axele y, s, θ, componentele vor fi

$$\{\overline{p}\}^h = \begin{Bmatrix} p_y \\ p_s \\ p_\theta \end{Bmatrix}^h = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \\ p_\theta \end{Bmatrix} = [\lambda_1]\{p\}^h. \tag{c}$$

Întrucît în cazul flanșelor $p_\theta = 0$, iar p_r, p_z se consideră de forma (15), se obține

$$\{\overline{p}\}^h = \Sigma \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \\ p_\theta \end{Bmatrix}^h = \Sigma\,[\gamma_1]_n\{p\}_n^h, \tag{d}$$

care, introdus în (c), conduce la

$$\{\overline{p}\}_n^h = [\lambda_1]\,[\gamma_1]_n\{p\}_n^h. \tag{33}$$

1.3.1. *Determinarea forțelor nodale.* Se aplică teorema lucrului mecanic virtual pentru corpurile elastice $\overline{L}_{ex} = \overline{L}_{ei}$.

Se consideră vectorul deplasărilor virtuale $\{\delta^*\}^e$ similar cu vectorul deplasărilor reale, fiecare componentă a lui putînd fi dată în mod independent.

Sarcinile exterioare pe elementul e fiind forțele nodale (a) și forțele exterioare (33) se obține pentru armonica de ordinul n a încărcării:

$$\overline{L}_{ex} = (\{\delta^*\}^e)^T\{F\}_n^e + \iint (\{f^*\}^e)_n^T)\,\{\overline{p}\}_n \mathrm{d}s\mathrm{d}s_1. \tag{e}$$

Ținînd seama de (24) și (33) rezultă

$$\overline{L}_{ex} = (\{\delta^*\}^e)^T(\{F\}_n^e + \iint [H]_n^T\,[\lambda_1][\gamma_1]_n\{p\}_n^e\, lr\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}\theta). \tag{f}$$

Se notează

$$\{F\}_{p,n}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_{p,n}^e = \iint [H]_n^T\,[\lambda_1]\,[\gamma_1]_n\{p_n\}^e\, lr\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}\theta \tag{34}$$

și expresia anterioară devine

$$\overline{L}_{ex} = (\{\delta^*\}^e)^T(\{F\}_n^e + \{F\}_{p,n}^e). \tag{f'}$$

Pornind de la

$$\overline{L}_{ef} = \iint (\{\varepsilon^*\}^e)^T \{N\}\, ds\, ds_1,$$

în care înlocuind relațiile (31) și (32) se obține

$$\overline{L}_{ef} = (\{\delta^*\}_n^e)^T \left(\iint [B]_n^T [D] [B]_n \, lr \, ds' \, d\theta \right) \{\delta\}_n^e. \tag{g}$$

Se notează, în mod similar ca la încărcările simetrice, matricea de rigiditate a elementului:

$$[k]_n^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}_n = \iint [B]_n^T [D] [B]_n \, lr \, ds' \, d\theta, \tag{35}$$

ale cărei submatrice se calculează cu expresia

$$[k_{ij}]_n = \iint [B]_n^T [D] [B_j]_n \, lr \, ds' \, d\theta, \tag{35'}$$

prin permutarea corespunzătoare a indicilor.

Egalînd (f') cu (g) și ținînd seama de (35), se obțin forțele nodale

$$\{F\}_n^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_n^e = [k]_n^e \{\delta\}_n^e - \{F\}_{p.n}^e. \tag{36}$$

1.3.2. *Ecuațiile de echilibru ale nodurilor.* Întrucît forțele nodale au fost determinate pentru elemente finite de tipul trunchiurilor de con, un nod curent h leagă numai elementele h și $h + 1$. Condiția de echilibru a acestui nod,

$$\sum_e \{F_h\}^e = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, n,$$

devine

$$\{F_h\}^h + \{F_h\}^{h+1} = 0. \tag{h}$$

Alegînd în mod corespunzător aceste componente din relația (36), pe baza faptului că nodul h pe elementul h se află la dreapta, corespunde deci lui j, iar pe elementul $h + 1$ la stînga, corespunde lui i, relația h de mai sus devine

$$[k_{h,h-1}]_n^h \{\delta_{h-1}\}_n + ([k_{h,h}]_n^h + [k_{h,h}]_n^{h+1}) \{\delta_h\}_n + \\ + [k_{h,h+1}]_n^{h+1} \{\delta_{h+1}\}_n - (\{F_h\}_{p.n}^h + \{F_h\}_{p.n}^{h+1}) = 0. \tag{37}$$

$h = 1, 2, \ldots q.$

Coeficienții acestei ecuații vectoriale (patru ecuații algebrice obișnuite), ținînd seama de (35) și de ordinea notațiilor $h-1$, h, $h+1$, se determină cu expresiile

$$[k_{h,h-1}]_n^h = \iint [B_j]_n^T [D] [B_i]_n \, lr \, ds' \, d\theta. \tag{38}$$

$$[k_{h,h}]_n^h = \iint [B_j]_n^T [D] [B_j]_n \, lr \, ds' \, d\theta, \tag{39}$$

$$[k_{h,h}]_n^{h+1} = \iint [B_i]_n^T [D] [B_i]_n \, lr \, ds' \, d\theta, \tag{40}$$

$$[k_{h,h+1}]_n^{h+1} = \iint [B_i]_n^T [D] [B_j]_n \, lr \, ds' \, d\theta. \tag{41}$$

În aceste relații $[D]$ este dat de (10), $[B_i]_n$, $[B_j]_n$ de (29). Expresiile termenilor liberi rezultă din (34), ținînd seama de (23), sub forma

$$\{F_h\}_{p,n}^h = \iint [H_j]_n^T [\lambda_1] [\gamma_1]_n \{p_n\}^h \, lr \, ds' \, d\theta, \tag{42}$$

$$\{F_h\}_{p,n}^{h+1} = \iint [H_i]_n^T [\lambda_1] [\gamma_1]_n \{p_n\}^{h+1} \, lr \, ds' \, d\theta. \tag{43}$$

Sistemul format din toate ecuațiile (37) constituie sistemul ecuațiilor de condiție pentru determinarea necunoscutelor, care sînt deplasările nodurilor.

După determinarea acestora, pentru fiecare termen armonic al încărcării se calculează eforturile cu relația (32).

Observații

1. Numărul ecuațiilor de tipul (37) este egal cu numărul nodurilor de separație dintre elementele finite considerate. În consecință, sistemul (37) are numărul de necunoscute egal cu numărul ecuațiilor, și matricea caracteristică de tip Iakobi este nesingulară.

2. Ecuația vectorială de tipul (37) se scrie sub această formă pentru toate nodurile rețelei de elemente finite, cu excepția nodului de la stînga al primului element al gîtului, unde trebuie să se țină seama de elementul de legătură dintre gît și taler și nodul din dreapta al ultimului element de pe manta, unde se consideră eforturile cunoscute și se determină pe baza acestora o relație vectorială între deplasările nodului din stînga și a celui din dreapta.

3. În cazul flanșelor, sarcinile exterioare pe gît sînt de obicei simetrice; nesimetria încărcării în funcție de θ provine numai din forțele

concentrate din șuruburi. În această situație încărcările îmbinării prin flanșe se descompun într-o încărcare simetrică, ce se rezolvă ca în [10], și o încărcare nesimetrică, dependentă de θ numai pe talerul flanșei. Pentru această încărcare nesimetrică toate ecuațiile de condiție (37) au termenii liberi nuli. Soluția sistemului este unică și diferită de zero, deoarece în componența sa intervin deplasările primului nod din stînga al gîtului, care depind de încărcarea de pe taler; sistemul (37) este legat de sistemul ecuațiilor de condiție de pe taler prin deplasările elementului de legătură O (vezi [10]).

2. CALCULUL TALERULUI FLANȘEI

Talerul [10] reprezintă pentru calcul o placă circulară cu sarcini normale pe plan a cărei ecuație diferențială pentru deplasarea w normală pe plan este dată în [11]. În aceeași lucrare [11] sînt stabilite și expresiile momentelor încovoietoare M_r, M_θ, ale momentului de torsiune $M_{r\theta}$ și ale forțelor tăietoare T_r, T_θ.

Întrucît în planul talerului nu apar încărcări exterioare nesimetrice, eforturile N_r, N_θ, $N_{r\theta}$ sînt nule.

Aplicarea metodei elementului finit în cazul unor sarcini oarecare normale pe plan ar necesita ca întreaga placă să fie împărțită în elemente finite de dimensiuni $r\,\Delta\theta$, Δr (figura 5).

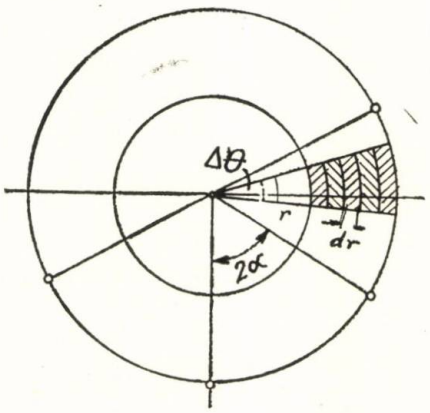


Fig. 5

În cazul flanșelor însă, forțele din șuruburi se descompun, după cum se arată în [11], într-o încărcare constantă, care intervine în rezolvarea prezentată în [10], și una variabilă, nesimetrică,

$$p_z = \sum_n p_{zn} \cos n\theta = \frac{mP}{\pi b} \sum_{n'} \cos(mn'\theta), \tag{44}$$

în care P reprezintă forța dintr-un singur șurub, m numărul total de șuruburi și b raza cercului de distribuție a șuruburilor.

Deoarece totdeauna $m > 2$, rezultă $n = mn' > 2$ şi aşa cum este arătat în [11], soluţia generală a plăcii pentru încărcarea nesimetrică are forma

$$w(r\theta) = \sum_{n} w(r)\cos n\theta = \sum_{n'} w(r)\cos mn'\theta. \tag{45}$$

În această situaţie se poate adopta o reţea de elemente finite numai în direcţia razei, urmînd însă ca integralele ce intervin la determinarea matricelor de rigiditate şi a termenilor de încărcare să se efectueze pe întreaga suprafaţă.

2.1. EXPRIMAREA EFORTURILOR ÎN FUNCŢIE DE DEPLASĂRILE NODURILOR

În componenţa vectorului eforturilor se vor lua numai eforturile secţionale M_r, M_θ, $M_{r\theta}$

$$\{N\} = \{M_r M_\theta M_{r\theta}\}^T. \tag{46}$$

Ca necunoscute se aleg deplasările w şi rotirile φ constituite în vectorul

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\end{Bmatrix} \{w_i, \varphi_i, w_j, \varphi_j\}^T. \tag{47}$$

Pentru funcţia $w(r) = w(r_i + s)$ se dă expresia

$$w_{(s)} = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3,$$

din care se obţine

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial s} = \alpha_2 + 2\alpha_3 s + 3\alpha_4 s^2.$$

Din condiţiile la limită pentru $s = 0$, unde $w = w_i$, $\varphi = \varphi_i$, şi pentru $s = l$, unde $w = w_j$, $\varphi = \varphi_j$, se obţin valorile constantelor α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_6$ şi apoi expresia

$$\begin{aligned} w = {} & (1 - 3s'^2 + 2s'^3)w_i + l(s' - 2s'^2 + s'^3)\varphi_i + \\ & + (3s'^2 - 2s'^3)w_j + l(-s'^2 + s'^3)\varphi_j. \end{aligned} \tag{i}$$

Notînd

$$\begin{aligned} \{H'_i\} &= \{(1 - 3s'^2 + 2s'^3),\ l(s' - 2s'^2 + s'^3)\},\\ \{H'_j\} &= \{(3s'^2 - 2s'^3),\ l(-s'^2 + s'^3)\},\\ \{H'\} &= \{H'_i,\ H'_j\} \end{aligned} \tag{48}$$

expresia (i) devine

$$w^e_{(r)} = \{H'\}\ \{\delta\}^e = \{H'_i,\ H'_j\} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}. \tag{49}$$

Componenta $w_n(r\theta)$ din (45) se scrie matriceal sub forma

$$w_n(r\theta) = \{H'_i,\ H'_j\} \begin{bmatrix} [\gamma]_n & 0 \\ 0 & [\gamma]_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \{\{H'_i\}\ [\gamma]_n,\ \{H'_j\}[\gamma]_n\} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}, \tag{50}$$

unde

$$[\gamma]_n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 \\ 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos mn'\theta & 0 \\ 0 & \cos mn'\theta \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Notînd în continuare

$$\{H_i\}_n = \{H'_i\}[\gamma]_n;\quad \{H_j\}_n = \{H'_j\}[\gamma]_n;\quad \{H\}_n = \{H_i,\ H_j\}_n, \tag{52}$$

(50) ia forma

$$w_n(r\theta) = \{H_i,\ H_j\}_n \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}_n = \{H\}_n\{\delta\}_n, \tag{53}$$

iar (45) devine

$$w(r\theta) = \sum_n w_n(r\theta) = \sum_n \{H\}_n\,\{\delta\}_n. \tag{54}$$

Folosind expresiile din [11], vectorul eforturilor secționale (46) se aranjează sub forma

$$\{N\} = [D]\ \{\bar{\varepsilon}\}, \tag{55}$$

în care

$$[D] = \frac{-Eg^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu) \end{bmatrix} \tag{56}$$

este matricea elementelor elastice și geometrice, iar

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \chi_r \\ \chi_\theta \\ \chi_{r\theta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \tag{57}$$

vectorul deformațiilor specifice convenționale.

Pe baza relației (54) vectorul $\{\overline{\varepsilon}\}$ se obține în tabela 2. Fiecare coloană a tabelei se înmulțește cu deplasarea trecută deasupra și fiecare linie cu funcția trigonometrică trecută în dreapta ei.

La derivarea funcției w s-a ținut seama că

$$r = r_i + ls' = r_i(r_{i+1} - r_i)s' \text{ și deci } \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial s'} \cdot \frac{1}{l}.$$

Notînd

$$[B'_i]_n = \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2}(-1+2s') & \frac{2}{l}(-2+3s') \\ \hline \frac{6}{lr}(-s'+s'^2) - & \frac{1}{r}(1-4s'+3s'^2) - \\ -\frac{k^2n^2}{r^2}(1-3s'^2+2s'^3) & -\frac{k^2n^2l}{r^2}(s'-2s'^2+s'^3) \\ \hline -\frac{6kn}{lr}(-s'+s'^2)+ & -\frac{kn}{r}(1-4s'+3s'^2)+ \\ +\frac{kn}{r^2}(1-3s'^2+2s'^3) & +\frac{knl}{r^2}(s'-2s'^2+s'^3) \end{bmatrix}, \tag{58}$$

$$[B'_j]_n = \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2}(1-2s') & \frac{2}{l}(-1+3s') \\ \hline \frac{6}{lr}(s'-s'^2) - & \frac{1}{r}(-2s'+3s'^2) - \\ -\frac{k^2n^2}{r^2}(3s'^2-2s'^3) & -\frac{k^2n^2l}{r^2}(-s'^2+s'^3) \\ \hline -\frac{6kn}{lr}(s'-s'^2)+ & -\frac{kn}{r}(-2s'+3s'^2)+ \\ +\frac{kn}{r^2}(3s'^2-2s'^3) & +\frac{knl}{r^2}(-s'^2+s'^3) \end{bmatrix}, \tag{59}$$

$$[\gamma']_n = \begin{bmatrix} \cos mn'\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos mn'\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos mn'\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \tag{60}$$

(n' poate lua valorile șirului natural 1, 2, . . . , i, . . . , iar valorile lui n rezultă din produsul $n = mn'$),

Tabela 2

	w_i	φ_i	w_j	φ_j	
χ_r^n	$\frac{6}{l^2}(-1+2s')$	$\frac{2}{l}(-2+3s')$	$\frac{6}{l^2}(1-2s')$	$\frac{2}{l}(-1+3s')$	$\cos mn'\theta$
χ_θ^n	$\frac{6}{lr}(-s'+s'^2)-$ $-\frac{k^2n^2}{r^2}(1-3s'^2+2s'^3)$	$\frac{1}{r}(1-4s'+3s'^2)-$ $-\frac{k^2n^2l}{r^2}(s'-2s'^2+s'^3)$	$\frac{6}{lr}(s'-s'^2)-$ $-\frac{k^2n^2}{r^2}(3s'^2-2s'^3)$	$\frac{1}{r}(-2s'+3s'^2)-$ $-\frac{k^2n^2l}{r^2}(-s'^2+s'^3)$	$\cos mn'\theta$
$\chi_{r\theta}^n$	$\frac{-6kn}{lr}(-s'+s'^2)+$ $+\frac{kn}{r^2}(1-3s'^2+2s'^3)$	$-\frac{kn}{r}(1-4s'+3s'^2)+$ $+\frac{knl}{r^2}(s'-2s'^2+s'^3)$	$\frac{-6kn}{lr}(s'-s'^2)+$ $+\frac{kn}{r^2}(3s'^2-2s'^3)$	$-\frac{kn}{r}(-2s'+3s'^2)+$ $+\frac{knl}{r^2}(-s'^2+s'^3)$	$\sin mn'\theta$

$$[B_i]_n = [\gamma']_n [B_i']_n; \quad [B_j]_n = [\gamma']_n [B_j']_n, \tag{61}$$

$$[B]_n = [B_i\ B_j]_n. \tag{62}$$

Vectorul deformațiilor specifice devine

$$\{\bar{\varepsilon}\}_n = [B_i\ B_j]_n \{\delta\}_n = [B]_n \{\delta\}_n. \tag{63}$$

Introducînd (63) în (55), se obține vectorul eforturilor în funcție de deplasările nodurilor elementelor finite

$$\{N\} = [D]\{\bar{\varepsilon}\} = \sum_n [D]\,[B]_n \{\delta\}_n. \tag{64}$$

2.2. STABILIREA ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE PENTRU DETERMINAREA NECUNOSCUTELOR

Pe elementul finit h cuprins între nodurile $h-1$ și h se introduce pentru echilibru sistemul de forțe nodale

$$\{F\}^h = \{F_{w,h-1}\ F_{\varphi,h-1}\ F_{w,h}\ F_{\varphi,h}\}^T. \tag{j}$$

Pentru componenta de ordinul n a încărcării (44), aplicînd teorema lucrului mecanic virtual în mod identic ca la § 1.3, se obțin forțele nodale pentru elementul h sub forma

$$\{F\}_n = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_n = [k]_n \{\delta\}_n - \{F\}_{pn}, \tag{65}$$

în care

$$[k]_n = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} = \iint_{(h)} [B]_n^T [D] [B]_n \, lr \, ds' \, d\theta. \tag{66}$$

Integrala se efectuează pe toată suprafața elementului h, considerat cu raza interioară r_i și raza exterioară r_j. $[D]$ este dat de (56), iar $[B]$ de (62) cu ajutorul formulelor (58), (59), (60) și (61).

O submatrice curentă $[k_{ij}]_n$ din (66) are expresia

$$[k_{ij}]_n = \iint_{(h)} [B_i]_n^T [D] [B_j] \, lr \, ds' d\theta \tag{67}$$

(celelalte submatrice se obțin prin permutarea corespunzătoare a indicilor).

În mod similar expresiei (34), $\{F\}_{pn}$ din (65) ținînd seama de încărcarea (44), care este o mărime scalară, și de (53), rezultă sub forma

$$\{F\}_{pn} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_{pn} = \iint_{(h)} \{H\}^T p_{zn} \cos mn'\theta \, lr \, ds' \, d\theta. \tag{68}$$

Scriind echilibrul nodurilor care separă elementele finite, se obține sistemul ecuațiilor de condiție sub aceeași formă ca (37)

$$[k_{h,h-1}]_n^h \{\delta_{h-1}\} + ([k_{h,h}]_n^h + [k_{h,h}]_n^{h+1}) \{\delta_h\}_n + [k_{h,h+1}]_n^{h+1} \{\delta_{h+1}\}_n - \\ - (\{F_h\}_{p,n}^h + \{F_h\}_{p,n}^{h+1}) = 0, \tag{69}$$

$h = 1, 2, \ldots, q,$

în care însă fiecare vector $\{\delta_h\}$ are numai două componente și fiecare coeficient $[k_{h,h-1}]$ este o matrice pătratică 2×2.

Expresiile coeficienților, obținute prin particularizarea relației (67), sînt

$$[k_{h,h-1}]_n^h = \iint_{(h)} [B_j]_n^T [D] [B_i]_n \, r \, dr \, d\theta, \tag{70}$$

$$[k_{hh}]_n^h = \iint_{(h)} [B_j]_n^T [D] [B_j] r \, dr \, d\theta, \tag{71}$$

$$[k_{hh}]_n^{h+1} = \iint_{(h+1)} [B_i]_n^T [D] [B_i] r \, dr \, d\theta, \tag{72}$$

$$[k_{h,h+1}]_n^{h+1} = \iint_{(h+1)} [B_i]_n^T [D] [B_j]_n \, r \, dr \, d\theta. \tag{73}$$

De asemenea, termenii liberi pornind de la (69) și folosind (52) devin

$$\{F\}_{p,n}^{h} = \iint_{(h)} \{H_j\}_n^T p_{zn} \cos mn'\theta r \, dr \, d\theta, \tag{74}$$

$$\{F\}_{p,n}^{h+1} = \iint_{(h+1)} \{H_i\}_n^T p_{zn} \cos mn'\theta r \, dr \, d\theta. \tag{75}$$

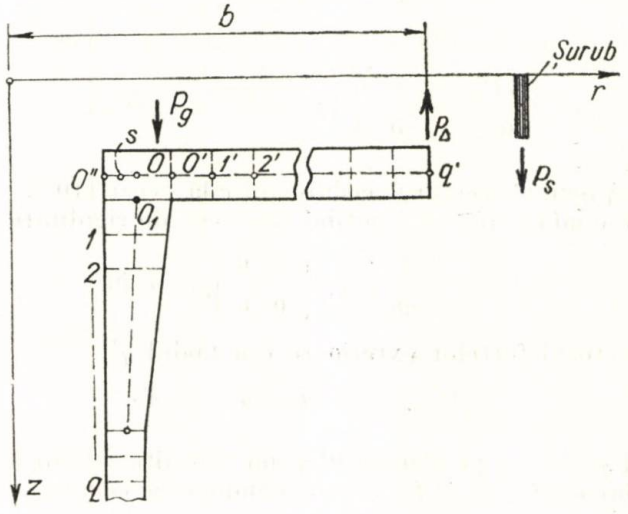


Fig. 6

În aceste expresii se introduc $[B_i]_n$, $[B_j]_n$ din (61); $[D]$ din (56), $[H_i]_n$, $[H_j]_n$ din (52). Se înțelege că vor exista termeni liberi numai pe elementele finite pe care se vor aplica sarcini exterioare de tipul (44). În cazul flanșelor aceștia vor exista numai pentru elementele pe care se aplică garnitura și șuruburile.

Forțele din șuruburi, aflîndu-se pe conturul cercului de rază b, intervin ca forțe exterioare direct în echilibrul nodului q' (fig. 5).

Folosind descompunerea în serie (vezi [11]), sarcina variabilă $p_{s,n}$ distribuită pe cercul de rază b (fig. 5), ținînd seama de convenția de semne adoptată, este

$$p_{s,n} = -\frac{mP}{\pi b} \cos mn'\theta. \tag{k}$$

Întrucît la fiecare nod al rețelei de elemente finite am considerat cîte două necunoscute (săgeata și rotirea), vom introduce forța exterioară în nodul q' sub forma unui vector

$$\{P_{q'}\}_n = \int \{p_{q'}\}_n r \, d\theta = \int \begin{Bmatrix} p_s \\ 0 \end{Bmatrix}_n r \, d\theta = -\int [\gamma]_n \begin{Bmatrix} mP \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\pi b} r \, d\theta, \tag{l}$$

în care $[\gamma]_n$ este dat de (51), m reprezintă numărul de şuruburi, iar P efortul dintr-un şurub.

Folosind coeficientul de rigiditate al tuturor şuruburilor

$$k_s = \frac{2E_s A_s m}{l_s} \tag{76}$$

şi ţinînd seama de variaţia deplasărilor

$$\{\delta_{q'}\}_{n\theta} = [\gamma]_n \{\delta_{q'}\}_n, \tag{m}$$

forţa totală din şuruburi se scrie matriceal sub forma

$$\begin{Bmatrix} mP \\ 0 \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [\gamma]_n (\{\delta_{q'}\}_n + \{\delta^0_{q'}\}_n), \tag{n}$$

unde $\{\delta^0_{q'}\}$ reprezintă vectorul cedare iniţială (vezi [10]).

Introducînd (n) în (1) şi notînd matricea de rigiditate a şuruburilor,

$$[\overline{k}_s] = \frac{1}{\pi b} \int [\Upsilon_n] \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [\Upsilon_n] \, r \, d\theta, \tag{77}$$

se obţine vectorul forţelor exterioare din nodul q'

$$\{P_{q'}\}_n = -[\overline{k}_s](\{\delta_{q'}\}_n + \{\delta^0_{q'}\}_n. \tag{78}$$

Ţinînd seama că pe elementul q' nu sînt alte sarcini exterioare, echilibrul nodului $q'(\{F_{q'}\}_n + \{P_{q'}\}_n = 0)$ conduce la ecuaţia

$$[k_{q',q'-1}]_n^{q'} \{\delta_{q'-1}\}_n + ([k_{q'q'}]_n^{q'} + [\overline{k}_s])\{\delta_{q'}\}_n + [\overline{k}_s]\{\delta^0_{q'}\} = 0. \tag{79}$$

Dacă se alege ca stare de referinţă situaţia după montaj, atunci ecuaţia de echilibru a nodului q' devine

$$[k_{q',q'-1}]_n^{q'} \{\delta_{q'-1}\}_n + ([k_{q'q'}]_n^{q'} + [\overline{k}_s])\{\delta_{q'}\}_n = 0. \tag{79'}$$

În acest fel sistemul (69), a cărui ultimă ecuaţie are forma (79) sau (79′) după caz, conduce la obţinerea deplasărilor talerului ţinînd seama atît de deformarea flanşelor, cît şi a şuruburilor.

Considerînd că garnitura se aplică pe elementul O (fig. 6), ea influenţează numai ecuaţiile de echilibru corespunzătoare acestui element.

Observaţie. Ecuaţia (79) se putea obţine şi prin particularizarea directă a ecuaţiei curente (69). În acest caz se folosea pentru obţinerea termenului liber $\{F_{q'}\}^q_{p,n}$ relaţia (74) în $\{H_j\}$, se particulariza pentru $s=1$, $p_{zn}\,dr$ se înlocuia cu $-p_s$ şi integrala se efectua în funcţie numai de θ, după ce se exprima dependenţa forţei din şurub de deformaţii.

3. ASAMBLAREA GÎTULUI CU TALERUL

În mod similar ca în cazul încărcării simetrice [10], legătura dintre gît şi taler se realizează prin elementul O (fig. 6).

Ecuațiile de condiție curente ale gîtului se scriu pentru nodurile *1*, *2*,..., *q*, iar ale plăcii pentru nodurile 1′, 2′,..., *q*′. Pentru nodurile *O*″ și *O*′ (fig. 6) ecuațiile vor avea o structură diferită, datorită faptului că în forțele exterioare ale nodului *O* vor intra forțele nodale din punctul O_1, aparținînd elementului finit *1* al gîtului.

Particularizînd relația (36), pentru nodul O_1 se obține sistemul de forțe din O_1, aplicat însă pe elementul *O* sub forma

$$-\{F_{0_1}\}_n^1 = [k_{0_1,0_1}]_n^1 \{\delta_{0_1}\}_n + [k_{0_1,1}]_n^1 \{\delta_1\}_n - \{F_{0_1}\}_{p,n}^1. \tag{80}$$

Întrucît calculul gîtului s-a tratat într-un caz mai general de încărcare decît placa, rezultă că o parte din componentele deplasărilor și a forțelor vor trebui să fie nule, în cazul acțiunii unor forțe numai pe placă. Astfel vor fi nule componentele v ale vectorilor deplasare și componentele forțelor nodale după aceleași direcții.

Deoarece în echilibrul nodului *O* componenta $\{F_{0_1}\}_n^1$ intervine numai în ecuația de lucru mecanic virtual, faptul că aceasta are mai multe componente decît forțele nodale de pe placă, se va corecta prin introducerea unui vector deplasare pentru $\{\delta_{0_1}\}$ cu același număr de componente ca și sistemul de forțe nodale, dintre care unele vor fi evident nule.

Exprimarea lui $\{\delta_{0_1}\}$ se va face în funcție de deplasările nodurilor *O*″ și *O*′ ale elementului *O*, aranjate în vectorul $\{\delta\}^0$. Se procedează în mod identic ca în cazul încărcărilor simetrice [10]. Pornind de la (48), (49) și (50), se definește pe elementul *O* vectorul

$$\{\delta_s\}^0 = \begin{Bmatrix} w_s \\ \varphi_s \end{Bmatrix}^0 =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1-3s'^2+2s'^3 & l(s'-2s'^2+s'^3) & (3s'^2-2s'^3 & l(-s'^2+s'^3) \\ \\ \dfrac{6}{l}(-s'+s'^2) & 1-4s'+3s'^2 & \dfrac{6}{l}(s'-s'^2 & -2s'+3s'^2 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} w_{0''} \\ \varphi_{0''} \\ w_{0'} \\ \varphi_{0'} \end{Bmatrix}, \tag{o}$$

care, pentru centrul elementului $s' = \dfrac{1}{2}$ și pentru armonica de ordinul *n*, ținînd seama de (52), (53), se aranjează sub forma

$$\{\delta_0\}_n^0 = \begin{Bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix}_n^0 = [[d_{0''}]\,[\gamma]_n,\ [d_{0'}]\,[\gamma]_n]\,\{\delta\}_n^0 = [d]_n\,\{\delta\}_n^0, \tag{81}$$

unde $[d]_n$ este o matrice 2×4; $[d_{0''}]_{2\times 2}$ cuprinde primele două coloane ale matricei de transformare din 0, iar $[d_{0'}]_{2\times 2}$ ultimele două.

Pe baza ipotezei normalelor drepte, din vectorul $\{\delta_0\}_n^0$ se deduc deplasările punctului O_1

$$u_{0_1} = -\varphi_0 \frac{1}{2} g_p;\quad w_{0_1} = w_0;\quad \varphi_{0_1} = \varphi_0;\quad v_{0_1} = 0,$$

care, notînd

$$[e]=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\,g_p \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{82}$$

și ținînd seama de (81), se scriu sub forma

$$\{\delta_{0_1}\}_n = [e]\,[d]_n\,\{\delta\}^0_n = [G]_n\,\{\delta\}^0_n, \tag{83}$$

unde

$$[G]_n = [e]\,[d]_n = [G_{0''}G_{0'}]_n \tag{84}$$

reprezintă o matrice de transformare 4×4.

Introducînd (83) în (80), rezultă forța nodală din punctul O_1 aplicată pe elementul O.

$$\{F_{0_1}\}^0_n = -\,[k_{0_1,0_1}]^1\,[G]_n\,\{\delta\}^0_n - [k_{0_1,1}]^1_n\,\{\delta_1\}_n + \{F_{0_1}\}^1_{p,n}. \tag{80'}$$

Aplicînd teorema lucrului mecanic virtual $\bar{L}_{ex} = \bar{L}_{ef}$, se obțin forțele nodale pe elementul O din punctele O'' și O'

$$\{F\}^0_n = \begin{Bmatrix} F_{0''} \\ F_{0'} \end{Bmatrix}^0_n = [\bar{k}]_n\,\{\delta\}^0_n + [\bar{k}_{0,1}]\,\{\delta_1\} - \{\bar{F}\}^0_{p,n} - \{F\}^0_{g,n}, \tag{85}$$

unde

$$[\bar{k}]^0_{n(4\times4)} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{0'',0''} & \bar{k}_{0'',0'} \\ \bar{k}_{0'0''} & \bar{k}_{0'0'} \end{bmatrix}_n = [k]^0_n + [G]^T_n\,[k_{0_1 0_1}]^1_n\,[G]_n, \tag{86}$$

$$[\bar{k}_{0,1}]_{n(4\times4)} = [G]^T_n\,[k_{0_1,1}]^1_n, \tag{87}$$

$$\{\bar{F}\}^0_{p,n} = \{F\}^0_{p,n} + [G]^T_n\,\{F_{0_1}\}^1_{p,n}, \tag{88}$$

$$\{F\}^0_{g,n} = \int \{H\}^T_{g,n}\,p_{g,n}\,r\,\mathrm{d}\theta, \tag{89}$$

în care termenii se obțin astfel: $[k]^0_n$ din (66); $[G]_n$ din (84), $[k_{0_1},\mathbf{0_1}]^1_n$ din (40); $[k_{0_1,1}]^1_n$ din (41); $\{F\}^0_{p,n}$ din (68); $\{F_{0_1}\}^1_{p,n}$ din (43); $\{H_g\}_n$ din (52) particularizată pentru raza medie a garniturii.

Forța pe garnitură $p_{g,n}$, considerată ca rezultantă a presiunii pe lățimea garniturii, se scrie sub forma

$$p_{g,n} = k_g \cdot w_{g,n}, \tag{90}$$

unde

$$k_g = \frac{E_g b_g}{h_g/2}, \tag{91}$$

reprezintă rigiditatea garniturii luată pentru jumătate din înălțime (vezi [10]), iar w_{gn} deplasarea flanșei în dreptul garniturii și se obține prin particularizarea relației (53). Folosind (53) și introducînd (90) în (89) rezultă forța nodală datorită garniturii :

$$\{F\}^0_{g,n} = \left(\int \{H\}^T_{g,n} \{H\}_{g,n} k_g r_g \, d\theta \right) \{\delta\}^0_n = [\bar{k}]^g_n \{\delta\}^0_n, \tag{92}$$

în care, în mod evident,

$$[\bar{k}]^g_n = \int \{H\}^T_{g,n} \{H\}_{g,n} k_g r_g \, d\theta. \tag{93}$$

Introducînd (92) în (85), rezultă forțele nodale pe elementul O sub forma

$$\{F\}^0_n = \begin{Bmatrix} F_{0''} \\ F_{0'} \end{Bmatrix} = ([\bar{k}]^0_n - [\bar{k}]^g_n) \{\delta\}^0_n + [\bar{k}_{0,1}] \{\delta_1\} - \{\bar{F}\}^0_{p,n}. \tag{94}$$

Folosind condițiile de echilibru ale nodurilor O'' ($\{F_{0''}\}^0 = 0$) și O' ($\{F_{0'}\}^0_n + \{F_{0'}\}^{1'} = 0$), rezultă ecuațiile

$$[\bar{k}_{0'',1}]_n \{\delta_1\}_n + ([\bar{k}_{0''0''}]^0_n - [\bar{k}_{0''0''}]^g_n) \{\delta_{0''}\}_n +$$

$$+ ([\bar{k}_{0''0'}]^0_n - [\bar{k}_{0''0'}]^g_n) \{\delta_{0'}\}_n - \{\bar{F}_{0''}\}^0_{p,n} = 0, \tag{95}$$

$$[\bar{k}_{0',1}]_n \{\delta_1\} + [\bar{k}_{0'0''}]^0_n - [\bar{k}_{0',0''}]^g_n) \{\delta_{0''}\} + ([\bar{k}_{0',0'}]^0_n - [\bar{k}_{0',0'}]^g_n +$$

$$+ [\bar{k}_{0',0'}]^{1'}_n) \{\delta_{0'}\}_n + [k_{0'1'}]^{1'}_n \{\delta_{1'}\}_n - (\{\bar{F}_{0'}\}^0_{p,n} + \{F_{0'}\}^{1'}_{p,n}) = 0. \tag{96}$$

Sistemul general de ecuații pentru calculul întregii flanșe, cu luarea în considerație a deformabilității flanșelor, a șuruburilor și a garniturii, se compune din ecuațiile de condiție (37), obținute din echilibrul nodurilor $1, 2, \ldots, q$ ale gîtului flanșei, din ecuațiile (69), (79), care reprezintă echilibrul nodurilor $1', 2', \ldots, q'$ de pe taler și din ecuațiile (83), (95) și (96), rezultatele din asamblarea gîtului cu talerul.

Rezolvarea acestui sistem pentru fiecare termen al dezvoltării în serie a încărcării exterioare (44) conduce la aflarea necunoscutelor (săgeților și rotirilor din noduri), după care se calculează eforturile cu expresia (32) pe gîtul flanșei și cu expresia (64) pe talerul flanșei.

CONSIDERAȚII ASUPRA METODEI PROPUSE

1. Formularea algoritmului pentru încărcările nesimetrice ale îmbinărilor prin flanșe cu luarea în considerație a deformabilității tuturor elementelor îmbinării, dă posibilitatea stabilirii exacte a efectului de ondulare circumferențială a flanșelor. Acest fenomen nestudiat în literatura tehnică de specialitate are implicații majore atît pentru calculul de etanșeitate, cît și pentru partea economică a proiectării unei îmbinări prin flanșe.

2. În cazul încărcărilor nesimetrice, gîtul flanșei considerat un înveliș conic s-a rezolvat pentru o încărcare exterioară oricare, și acest fapt permite aplicarea rezultatelor în mod direct și la alte elemente, cum ar fi calculul coloanelor autoportante, a recipientelor cu pereți de grosime variabilă etc. Se menționează în ceea ce privește luarea în considerație a deformabilității garniturii că folosirea relației (86) necesită realizarea unei prestrîngeri, astfel încît valoarea w_{gn} să nu depășească valoarea deformației din prestrîngere în zonele în care w_{gn} reprezintă o destindere a garniturii.

3. Algoritmul metodei este simplu, cuprinde operații ciclice și poate fi transpus cu ușurință într-un program pentru un calculator automat. În consecință, metoda propusă prezintă toate elementele pentru a sta la baza unui program de proiectare optimă a tuturor îmbinărilor prin flanșe.

Primită la redacție la 26 ianuarie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. E. L. Brownell, H. E. Young, *Process equipment design*, Londra, 1959.
2. Șt. Teodorescu, *Construcția și calculul mecanic al aparaturii statice din instalațiile de prelucrare a țițeiului și petrochimice*, București, Lito. învățămîntului, 1956.
3. M. Renert, G. Tănase, *Calculul și construcția utilajului chimic*, vol. I ed. 2, București, Edit. didactică și pedagogică, 1964.
4. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, Londra, 1967.
5. R. Amon și colab., *Circular plate with suported edgebeam*, Journal fo the engineering mechanics division, june 1968.
6. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
7. S. D. Ponomariov și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. II, București, Edit. tehnică 1963.
8. W. Flügge, *Stresses in shells*, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960.
9. Gh. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, București, Edit. tehnică, 1970.
10. M. Posea, *O metodă nouă pentru calculul flanșelor*, București, St. cerc. mec. apl., *6* (1971).
11. M. Posea, *O metodă exactă pentru calculul ondulării circumferențiale a flanșelor*, St. cerc. mec. apl., *4* (1971).

CALCULUL UNOR PLĂCI REZEMATE PE PILOȚI*)

de N. UNGUREANU
Institutul politehnic Iași, Facultatea de construcții

Se prezintă calculul unor plăci rezemate pe piloți, considerînd piloții reazeme elastice. Modelul matematic propus pentru rezolvarea problemei implică corectarea ecuației diferențiale a lui Lagrange, cu termeni care iau în considerație încastrarea piloților în placă.
Cu ajutorul funcțiilor ortogonale, se obțin soluții pentru cîteva cazuri practice de încărcare și rezemare pe contur.
Folosind metoda diferențelor finite se extinde rezolvarea problemei și la cazuri mai generale, îndeosebi prin utilizarea calculatoarelor electronice.

Calculul radierelor elastice de tipul placă, rezemate pe piloți, constituie o problemă complexă, puțin abordată pînă în prezent.

În literatura de specialitate, pentru calculul plăcilor elastice pe piloți se recomandă procedeul cadrului înlocuitor, aplicat în mod curent la calculul planșeelor-ciuperci. Se pot, de asemenea, folosi unele rezultate din teoria plăcilor plane pentru rezolvarea unor cazuri particulare de radiere și încărcări, în ipoteza că piloții sînt legați prin articulații de placă și fără a considera conlucrarea dintre piloți și teren.

Autorul, în lucrarea [2], a dezvoltat calculul radierelor elastice pe piloți plecînd de la teoria plăcilor plane, luînd în considerație legătura reală dintre piloți și radier și conlucrarea piloților cu terenul. În aceeași lucrare, s-a dezvoltat mai amplu cazul particular al problemei plane, prezentîndu-se și rezultate experimentale.

Pentru abordarea calculului plăcilor plane rezemate pe piloți, trebuie, în prealabil, să se cunoască legătura dintre eforturile din capetele superioare ale piloților și deplasările corespunzătoare (fig. 1).

În articolul de față se prezintă succint cîteva rezultate de bază pentru cazul piloților, considerați elemente elastice în mediu deformabil.

*) Comunicată la Conferința națională de mecanică aplicată, iunie 1969.

Între forţa axială din pilot N_{0p} şi deplasarea axială Δl a capătului superior al pilotului se poate scrie următoarea relaţie :

$$N_{0p} = \frac{E_p A_p}{sl} \cdot \Delta l = \rho_N \cdot \Delta l, \tag{1}$$

în care E_p, A_p şi l sînt, respectiv, modulul de elasticitate, aria şi lungimea pilotului, s este coeficientul care ţine cont de deformaţiile terenului şi care obişnuit se determină experimental, ρ_N este rigiditatea pilotului la forţe axiale, depinzînd şi de rigiditatea terenului.

Între forţa transversală (tăietoare), T_{0p}, momentul încovoietor, $\mathfrak{M}_{0p}$, din capătul superior al pilotului şi deplasările acestuia, adică săgeata y_{0p} şi rotirea θ_{0p} se pot scrie relaţiile :

$$T_{0p} = \rho_{T\Delta}\, y_{0p} + \rho_{T\theta}\, \theta_{0p}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{M}_{0p} = \rho_{M\Delta}\, y_{0p} + \rho_{M\theta}\, \theta_{0p},$$

în care $\rho_{T\Delta}$, $\rho_{T\theta}$, $\rho_{M\Delta}$, $\rho_{M\theta}$ reprezintă rigidităţile pilotului faţă de axa în jurul căreia are loc încovoierea şi depind şi de rigiditatea terenului.

Primul indice arată natura rigidităţii, T, forţă tăietoare, M, moment încovoietor, iar al doilea indice arată acţiunea unitară, Δ, săgeata, θ, rotirea.

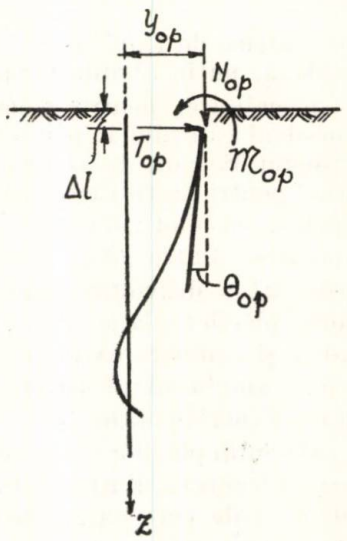


Fig. 1

În mod curent, piloţii pot fi consideraţi grinzi de lungime semiinfinită în mediu deformabil.

În consecinţă, calculul piloţilor se poate face adoptînd, de exemplu, ipoteza lui Winkler pentru conlucrarea teren-pilot. Se consideră

coeficientul de rigiditate al terenului $k'=\text{const}$, pentru terenuri coezive și $k'=n_h\cdot\frac{z}{b_p}$ (variabil liniar cu adîncimea) pentru terenuri necoezive, în care n_h este o constantă care se determină experimental, iar b_p este lățimea pilotului în direcție normală pe planul de încovoiere. În aceste cazuri rigiditățile piloților sînt [2], [3]:

a) coeficient de rigiditate al terenului $k'=\text{const}$,

$$\rho_{T\Delta}=\frac{k'b_p}{\alpha_p},\quad \rho_{T\theta}=\rho_{M\Delta}=\frac{k'b_p}{2\alpha_p^2},\quad \rho_{M\theta}=\frac{k'b_p}{2\alpha_p^3}, \tag{3}$$

în care $\alpha_p=\sqrt[4]{k'b_p/4E_pI_p}$, I_p fiind momentul de inerție al secțiunii pilotului față de axa proprie normală pe planul de încovoiere;

b) coeficient de rigiditate al terenului, k', variabil liniar cu adîncimea

$$\rho_{T\Delta}=1{,}065\sqrt[4]{n_h^2(E_pI_p)^2},\quad \rho_{T\theta}=\rho_{M\Delta}=0{,}98\sqrt[5]{n_h^2(E_pI_p)^3},$$

$$\rho_{M\theta}=1{,}4755\sqrt[5]{n_h(E_pI_p)^4}. \tag{4}$$

Conlucrarea pilot-teren este analizată în lucrările [2] și [3] și în ipoteza că terenul este considerat semispațiu liniar deformabil. În acest caz, cu unele aproximații admisibile, rigiditățile piloților se pot scrie sub forma:

$$\rho_{T\Delta}=0{,}963\,b_p^{0,2}E_t^{0,8}(E_pI_p)^{0,2},$$

$$\rho_{T\theta}=\rho_{M\Delta}=0{,}7935\,b_p^{0,2}E_t^{0,55}(E_pI_p)^{0,45},$$

$$\rho_{M\theta}=1{,}3077\,b_p^{0,2}E_t^{0,3}(E_pI_p)^{0,7}, \tag{5}$$

în care E_t este modulul de deformație al terenului, care poate fi determinat în laborator.

Pentru abordarea calculului plăcilor elastice pe piloți se fac următoarele ipoteze:

— materialul din placă și piloți este continuu, omogen, izotrop și lucrează în domeniul liniar elastic;

— tensiunile σ_z normale pe planul median se neglijează;

— deformațiile elastice ale plăcii sînt mici în raport cu grosimea sa;

— un segment normal pe planul median înainte de deformație rămîne normal pe suprafața mediană a plăcii după deformație;

— piloții au aceleași dimensiuni și sînt la fel orientați, sînt verticali sau egal înclinați și au cîmpuri aferente din placă de aceeași mărime;

— după deformarea structurii, tangenta la axul deformat al pilotului rămîne normală pe suprafața deformată a plăcii și se poate conchide că direcția de încovoiere maximă pentru pilot corespunde cu direcția de

încovoiere maximă pentru placă, în centrul geometric de prindere cu pilotul. În locul legăturii discrete, între piloți și placă se introduce un mediu de rezemare continuu, echivalent.

Mediul continuu se realizează prin distribuirea uniformă a rigidităților piloților la deplasare axială, respectiv la încovoiere, cîmpurilor aferente, obținîndu-se coeficienții de rigiditate ai mediului.

La deplasare,

$$k = \frac{\rho_N}{\Omega} + k'_0, \tag{6}$$

în care k este rigiditatea mediului la deplasare, ρ_N — rigiditatea pilotului la forță axială, Ω — aria din placă aferentă unui pilot și k'_0 — coeficientul de rigiditate (pat) al terenului.

La încovoiere,

$$k_x^* = \frac{\rho_x}{\Omega}, \quad k_y^* = \frac{\rho_y}{\Omega} \tag{7}$$

în care k_x și k_y sînt rigidități ale mediului la rotire (rigidități distorsionale), ρ_x și ρ_y sînt rigiditățile pilotului la încovoiere în direcțiile corespunzătoare, adică rigidități de forma $\rho_{M\theta}$, calculate în raport cu axele proprii ale secțiunii pilotului.

Dacă se ia în considerație influența grosimii plăcii, rigiditățile ρ_x și ρ_y se înlocuiesc cu ρ_x^* și ρ_y^* [2], care se deduc cu relația

$$\rho^* = \rho_{T\Delta} h_1^2 + (\rho_{M\Delta} + \rho_{T\theta}) h_1 + \rho_{M\theta}, \tag{8}$$

în care h_1 reprezintă jumătate din grosimea plăcii în dreptul pilotului.

Rigiditățile $\rho_{T\Delta}$, $\rho_{T\theta}$, $\rho_{M\Delta}$, $\rho_{M\theta}$ se calculează în raport cu axele principale centrale ale secțiunii pilotului, și anume față de $y - y$ pentru ρ_x^* și față de $x - x$ pentru ρ_y^*.

Presiunea care ia naștere în mediul de rezemare ipotetic va fi

$$\overline{p} = kw, \tag{9}$$

w fiind săgeata plăcii.

Momentele distribuite m_x, m_y din același mediu în direcțiile axelor de coordonate, conform ipotezelor făcute, rezultă

$$m_x = k_x^* \frac{\partial w}{\partial x} = k_x^* \theta_x, \quad m_y = k_y^* \frac{\partial w}{\partial y} = k_y^* \theta_y. \tag{10}$$

În practică, cel mai adesea se întîlnește cazul piloților cu $\rho_x = \rho_y$, ($\rho_x^* = \rho_y^*$) și deci,

$$k_x^* = k_y^* = k^*, \quad m_x = k^* \frac{\partial w}{\partial x}, \quad m_y = k^* \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{11}$$

Dacă $\bar{p}$, m_x, m_y se consideră reacții aplicate plăcii în relațiile (9), (10), (11), se introduce semnul minus.

Variația cuplurilor m_x și m_y de la un punct la altul este aceeași cu a pantelor plăcii deformate a radierului.

Se poate imediat constata că ecuația lui Lagrange nu permite să se includă în calcul acțiunile m_x și m_y, de aceea în continuare se aduc modificările corespunzătoare acestei ecuații.

Se consideră un element infinetizimal din placă de dimensiuni dx, dy și h, cu eforturile secționale pe fețele sale și încărcările aferente (fig. 2). Echilibrul acestui element conduce la următoarele ecuații de echilibru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x - m_x &= 0, \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y - m_y &= 0, \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Aceste trei ecuații de echilibru se pot înlocui cu o singură ecuație diferențială, adică

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} + p(x, y) = 0. \tag{13}$$

Din analiza stării de tensiuni pe secțiune se poate conchide că eforturile M_x, M_y și M_{xy} își păstrează forma cunoscută:

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \tag{14}$$

în care $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$,

E și ν fiind modulul de elasticitate și, respectiv, coeficientul lui Poisson al materialului din placă, iar h grosimea plăcii.

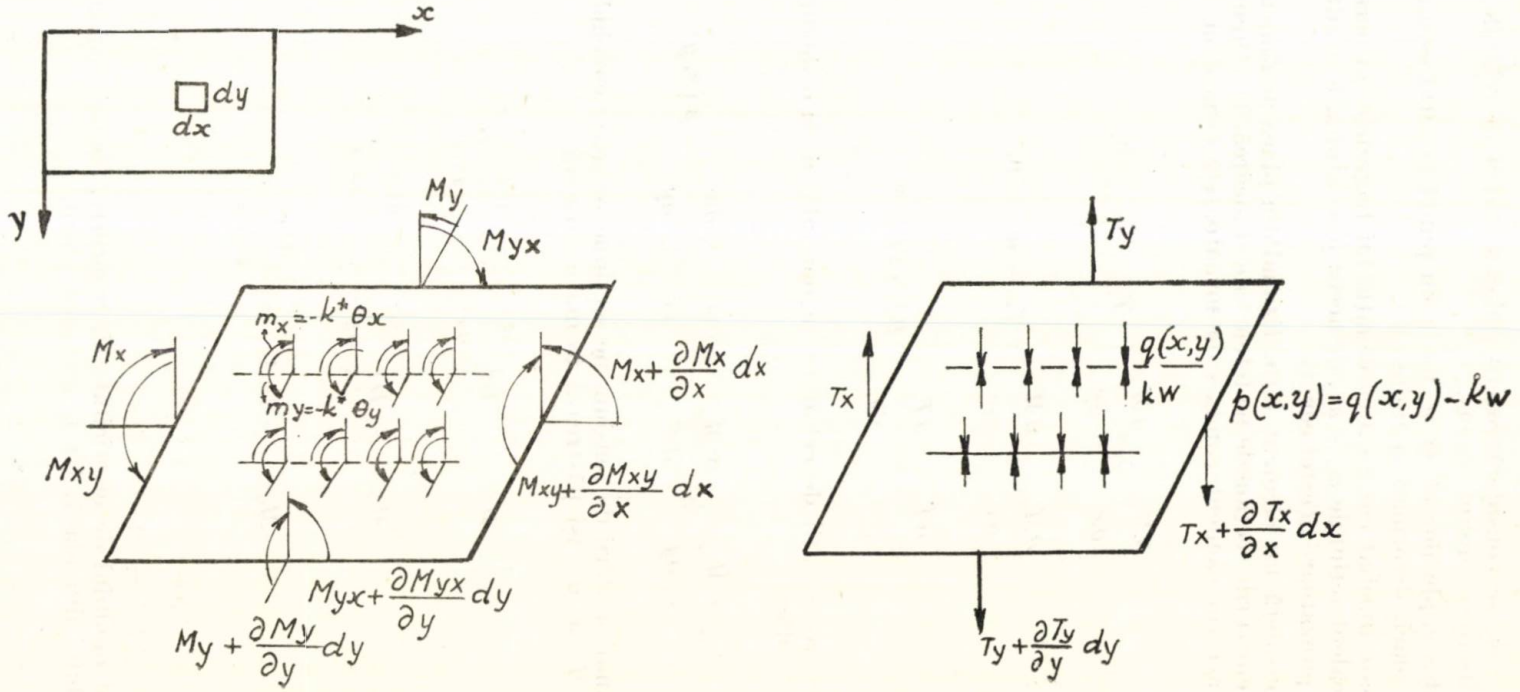

x
y
dy
dx
My
Myx
Mx
mx=-k*θx
my=-k*θy
Mx+ ∂Mx/∂x dx
Mxy
Mxy+ ∂Mxy/∂x dx
Myx+ ∂Myx/∂y dy
My + ∂My/∂y dy
Ty
Tx
q(x,y)
kw
p(x,y)=q(x,y)-kw
Tx+ ∂Tx/∂x dx
Ty+ ∂Ty/∂y dy

Fig. 2

Dacă în ecuația (13) se înlocuiește M_x, M_y, M_{xy} din relațiile (14) și m_x, m_y din relațiile (10) și se ține cont că $p(x, y) = q(x, y) - kw$, se obține ecuația diferențială a suprafeței mediane deformate:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{D}\left(k_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \\ + \frac{k}{D} w = \frac{q(x, y)}{D}, \tag{15}$$

$q(x, y)$ fiind intensitatea sarcinii distribuite aplicate normal pe placă. Eforturile T_x și T_y se pot deduce din primele două ecuații de echilibru din (12), ținînd cont de (10), și (14), și au expresiile

$$T_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) + k_x^* \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{16}$$

$$T_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) + k_y^* \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Condițiile de rezemare pe contur sînt cele cunoscute, cu excepția condiției $T_n^* = T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0$, corespunzătoare unei margini libere care devine

$$\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2 - \nu)\frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} - \frac{k_n^*}{D}\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{17}$$

(n arată direcția normalei la contur, iar t direcția tangentei).

Pentru cazul curent întîlnit cînd piloții au aceeași rigiditate la încovoiere în orice direcție, adică $\rho_x = \rho_y$ ($\rho_x^* = \rho_y^*$) și deci $k_x^* = k_y^*$ și se consideră că placa nu este în contact cu terenul, $k_0' = 0$, au fost prezentate unele soluții în lucrarea [2].

În studiul de față se dau cîteva soluții pentru cazul cînd $k_x^* \neq k_y^*$ și considerînd că radierul este în contact cu terenul ($k_0' \neq 0$). Evident, în această situație coeficientul s, care ține cont de deformațiile terenului datorită forței axiale din piloți și care se determină experimental pe piloți individuali, trebuie corectat astfel, încît să se țină cont că radierul se reazemă atît pe piloți, cît și pe teren.

Prin integrarea ecuației diferențiale (15) se obține ecuația algebrică a suprafeței mediane deformate a plăci, $w = w(x, y)$. Cu relațiile (14) și (16) se determină eforturile secționale din placă. Presiunea $\bar{p}$ care ia naștere în mediul ipotetic va fi

$$\bar{p} = kw = \left(\frac{\rho_N}{\Omega} + k_0'\right) w = \bar{p}_1 + \bar{p}_2. \tag{18}$$

Forța axială care revine unui pilot se va putea calcula astfel:

$$N_{0p} = \iint_{\Omega} \overline{p}_1 \, d\Omega \text{ sau } N_{0p} \cong \rho_N w. \tag{19}$$

Cu o aproximație suficientă se pot deduce momentele din capul unui pilot cu relațiile

$$\overline{M}_x = \rho_x \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \overline{M}_y = \rho_y \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{20}$$

Piloții sînt deci solicitați la compresiune cu încovoiere.

Soluțiile ecuației diferențiale (15) depind de modul de rezemare al plăcii pe contur și de forțele care acționează.

Unele construcții cu fundații radiere elastice pe piloți au pereții de rigiditate mare, astfel încît radierul poate fi considerat rezemat sau încastrat pe contur sau numai pe unele laturi; reazemele au însă și deplasări verticale (tasări) de care trebuie să se țină cont. Astfel de construcții sînt clădiri cu pereți-diafragmă sau cu subsoluri rigide din pereți de beton armat, silozuri, rezervoare etc.

Pentru determinarea soluțiilor ecuației diferențiale (15) se pot folosi funcțiile ortogonale, iar dintre acestea, pentru plăcile de formă dreptunghiulară, seriile Fourier sînt cele mai indicate.

1. Se consideră un radier pe piloți cu placă dreptunghiulară de grosime constantă, simplu rezemat pe două laturi paralele și încărcat pe contur cu forțe de intensitate constantă; în particular poate fi încărcat numai pe laturile simplu rezemate. Radierul fiind acționat numai pe contur (fig. 3), sarcina distribuită de pe radier va fi

$$\overline{p} = k(w_0 - w), \tag{21}$$

care se introduce în locul sarcinii $q(x, y) - kw$ și ecuația (15) devine

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{D}\left(k_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{k}{D} w = \frac{k}{D} w_0. \tag{22}$$

Soluția acestei ecuații diferențiale se compune dinr-o soluție particulară w_1 și soluția generală a ecuației omogene w_2.

Soluția particulară w_1 corespunde plăcii simplu rezemate pe laturile paralele cu axa $y - y$, supusă la încovoiere cilindrică, a cărei ecuație diferențială este

$$\frac{\mathrm{d}^4 w_1}{\mathrm{d}x^4} - \frac{k_x^*}{D}\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}x^2} + \frac{k}{D} w_1 = \frac{k}{D} w_0. \tag{23}$$

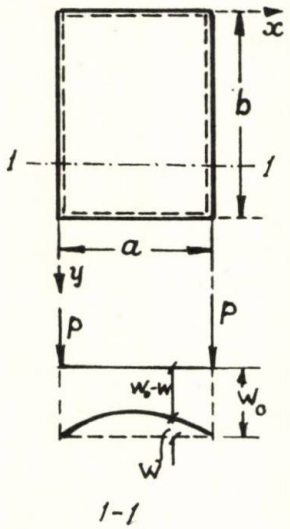


Fig. 3

Se dezvoltă în serie Fourier termenul $\frac{k}{D} w_0$,

$$\frac{k}{D} w_0 = \sum_1^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{a} x, \tag{24}$$

cu

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a \frac{k}{D} w_0 \sin \frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{4kw_0}{n\pi D}.$$

Se ia w_1 sub forma unei serii în sinus, care satisface condițiile de contur pe cele două laturi simplu rezemate, paralele cu $y - y$.

$$w_1 = \sum_1^{\infty} w_{1n} \sin \frac{n\pi}{a} x. \tag{25}$$

Punînd condiția ca w_1 să satisfacă ecuația diferențială (23), se deduce w_{1n} :

$$w_{1n} = \frac{4kw_0}{n\pi D\left(\gamma_n^4 + \frac{k_x^*}{D}\gamma_n^2 + \frac{k}{D}\right)}, \tag{26}$$

în care s-a notat

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale omogene asociată ecuaţiei (22) se ia tot sub forma unei serii Fourier în sinus, cu coeficienţii variabili, care satisface de asemenea condiţiile de contur pe laturile simplu rezemate paralele cu $y - y$

$$w_2 = \sum_1^S Y_n(y) \sin \frac{n\pi}{a} x. \tag{27}$$

Punînd condiţia ca w_2 să satisfacă ecuaţia diferenţială omogenă, asociată ecuaţiei (22), se obţine o ecuaţie diferenţială ordinară cu coeficienţi constanţi în Y_n.

$$Y_n^{IV} - 2\left(\gamma_n^2 + \frac{k_y^*}{2D}\right) Y_n'' + \left(\gamma_n^4 + \frac{k_x^*}{D}\gamma_n^2 + \frac{k}{D}\right) Y_n = 0. \tag{28}$$

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice corespunzătoare ecuaţiei diferenţiale (28) sînt

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\gamma_n^2 + \frac{k_y^*}{2D} \pm \sqrt{\frac{k_y^*}{D}\gamma_n^2 + \frac{k_y^{*2}}{4D} - \frac{k_x^*}{D}\gamma_n^2 - \frac{k}{D}}} =$$

$$= \pm \sqrt{\gamma_n^2 + \frac{k_y^*}{2D} \pm \sqrt{G_n}}. \tag{29}$$

În funcţie de mărimea G_n se disting următoarele cazuri posibile:

$$1)\ G_n < 0, \quad 2)\ G_n > 0, \quad 3)\ G_n = 0.$$

Din punct de vedere practic, se întîlneşte primul caz $G_n < 0$. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice mai pot fi scrise astfel:

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(\gamma_n^2 + \frac{k_y^*}{2D} + \sqrt{\gamma_n^4 + \frac{k_x^*}{D}\gamma_n^2 + \frac{k}{D}}\right)} \pm$$

$$\pm i \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\gamma_n^2 - \frac{k_y^*}{2D} + \sqrt{\gamma_n^4 + \frac{k_x^*}{D}\gamma_n^2 + \frac{k}{D}}\right)} = \pm \lambda_n \pm i\mu_n. \tag{30}$$

Soluția ecuației diferențiale omogene va fi

$$w_2 = \sum_1^{\infty} (C_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n y \cos \mu_n y + C_{2n} \operatorname{sh} \lambda_n y \sin \mu_n y + C_{3n} \operatorname{sh} \lambda_n y \cos \mu_n y + C_{4n} \operatorname{ch} \lambda_n y \sin \mu_n y) \sin \gamma_n x. \tag{31}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (22) se obține sumînd w_1 și w_2.

$$w = \sum_{1,3...}^{\infty} \left(\frac{4kw_0}{n\pi D \left(\gamma_n^4 + \frac{k_x^*}{D} \gamma_n^2 + \frac{k}{D} \right)} + C_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n y \cos \mu_n y + C_{2n} \operatorname{sh} \lambda_n y \sin \mu_n y + C_{3n} \operatorname{sh} \lambda_n y \cos \mu_n y + C_{4n} \operatorname{ch} \lambda_n y \sin \mu_n y \right) \sin \gamma_n x. \tag{32}$$

Constantele C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n} se deduc din condiții de rezemare pe cele două laturi paralele cu axa $x - x$.

Dacă placa prezintă simetrie de rezemare și încărcare față de axa $x - x$, ecuația (32) devine:

$$w = \sum_{1,3...}^{\infty} \left(\frac{4kw_0}{n\pi D \left(\gamma_n^4 + \frac{k_x^*}{D} \gamma_n^2 + \frac{k}{D} \right)} + C_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n y \cos \mu_n y + C_{2n} + \operatorname{sh} \lambda_n y \sin \mu_n y \right) \sin \gamma_n x, \tag{33}$$

iar condițiile de rezemare din care se determină C_{1n} și C_{2n} sînt:

latură încastrată	latură simplu rezemată	latură liberă
$w = 0,$	$w = 0,$	$M_y = 0,$
$\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$	$T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0,$

w_0 se determină din următoarea condiție de echilibru:

$$R = \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{b/2} kw \, dx \, dy, \tag{34}$$

R fiind rezultanta forțelor exterioare aplicate pe contur.

Cu ajutorul reațiilor (14) și (16) se calculează eforturile secționale, iar cu relațiile (18), (19) și (20), presiunea pe teren și eforturile din piloți.

2. Dacă placa radierului pe piloţi este simplu rezemată pe toate laturile şi este încărcată cu o sarcină de intensitate constantă pe tot conturul, se poate determina o soluţie particulară cu ajutorul seriilor Fourier

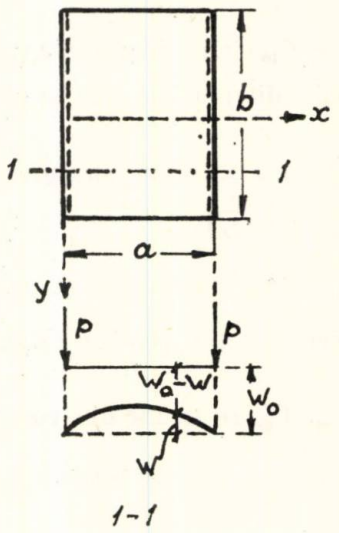


Fig. 4

duble, care să satisfacă atît ecuaţia diferenţială, cît şi condiţiile pe frontieră.

Termenul $\frac{k}{D} w_c$ se dezvoltă în serii Fourier duble,

$$\frac{k}{D} w_0 = \sum_{m=1,3\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \tag{35}$$

unde

$$a_{mn} = \frac{4kw_0}{abD} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy = \frac{16}{mn\pi^2} \frac{k}{D} w_0. \tag{36}$$

Ecuaţia algebrică a suprafeţei deformate a plăcii, se ia de asemenea sub forma unei serii Fourier duble în sinus, care, pentru sistemul de axe ales (fig. 4), satisface condiţiile pe frontieră

$$w = \sum_{m=1,3\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y. \tag{37}$$

Din condiţia ca expresia (37) să satisfacă ecuaţia diferenţială (22) se deduce A_{mn}

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{\pi^2}{D} \left(k_x^* \frac{m^2}{a^2} + k_y^* \frac{n^2}{b^2} \right) + \frac{k}{D}}, \tag{38}$$

iar din ecuația de echilibru $R = \int_0^a \int_0^b kw \, dx \, dy$ se deduce w_0 (fig. 4)

$$w_0 = \frac{\pi^4 DR/64abk^2}{\sum_{m=1,3...}^{\infty} \sum_{n=1,3...}^{\infty} \frac{1}{m^2n^2\left[\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{\pi^2}{D}\left(k_x^*\frac{m^2}{a^2}+k_y^*\frac{n^2}{b^2}\right)+\frac{k}{D}\right]}}, \tag{39}$$

$w\ (x,\ y)$ fiind astfel determinat.

3. Soluțiile analitice ale problemei sînt în general dificil de obținut, iar calculele sînt laborioase. Folosirea metodei diferențelor finite care conduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice este indicată îndeosebi în cazul utilizării calculatoarelor electronice moderne, care permit rezolvarea unui număr mare de ecuații.

Se consideră un radier elastic pe piloți, avînd placa de formă dreptunghiulară și grosime constantă; pe placă se trasează o rețea ortogonală cu $\Delta x = \Delta y = \Delta$ (fig. 5).

Ecuația diferențială a suprafeței mediane deformate a plăcii transcrise în diferențe finite conduce la un sistem de ecuații algebrice de forma:

$$20\mathcal{H}w_{i,k} - 8\left[\Lambda_1(w_{i,k-1} + w_{i,k+1}) + \Lambda_2\,(w_{i-1,k} + w_{i+1,k})\right] +$$

$$+ 2\,(w_{i-1,k-1} + w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k-1} + w_{i+1,k+1}) + w_{i,k-2} + w_{i,k+2} + w_{i-2,k} +$$

$$+ w_{i+2,k} = \frac{q_{ik}\Delta^4}{D}, \tag{40}$$

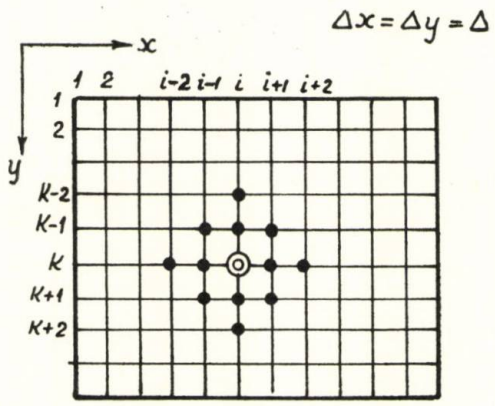


Fig. 5

în care

$$\mathcal{H} = 1 + \frac{k_x^*\Delta^2}{10D} + \frac{k_y^*\Delta^2}{10D} + \frac{k\Delta^4}{20D}, \quad \Lambda_1 = 1 + \frac{k_y^*\Delta^2}{8D}, \quad \Lambda_2 = 1 + \frac{k_x^*\Delta^2}{8D}. \tag{41}$$

În sistemul de ecuații (40) intră și puncte de pe contur și din afara conturului, care se determină din condițiile pe frontieră. Condițiile pe frontieră se scriu în funcție de modul de rezemare a plăcii pe contur, astfel :

latură simplu rezemată	latură încastrată	latură liberă
$w = w_{\text{contur}},$	$w = w_{\text{contur}},$	$M_n = 0,$
$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0,$	$\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ sau $\frac{\partial w}{\partial n} = \theta_{n\text{contur}}$	$T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0.$

În relațiile (42) transcrise în diferențe finite pot intra în funcție de modul de rezemare și de încărcare cel mult trei parametri, care se determină din condițiile de echilibru : proiecția tuturor forțelor pe axa $z - z$ și momentele tuturor forțelor față de axele $x - x$ și $y - y$ [2].

Primită la redacție la 21 ianuarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoshenko, S. Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company Inc. New-York-Toronto-Londra, 1959.
2. N. Ungureanu, *Contribuții la calculul radierelor elastice pe piloți* (problemă de conlucrare), teză de doctorat, Institutul politehnic Iași, 1969.
3. A. Vesić, *Contribution à l'étude des fondations sur pieux verticaux et inclinés*, Annales des Travaux Publics de Belgique, *6* (1956).

SINTEZA ANALITICĂ TRIPOZIȚIONALĂ PE BAZA CURBELOR r_c

de N. I. MANOLESCU și GH. C. POPA
Institutul politehnic București

Lucrarea folosește rezultatele obținute de autori în alte articole publicate anterior [3], [4]. Autorii stabilesc formelele cele mai convenabile pentru sinteză ale ecuației curbei r_c la mecanismul patrulater, manivelă-piston etc.
În continuare sînt prezentate aplicații ale curbelor r_c la sinteza analitică tripoziționlă a conturului patrulater, fără folosirea triunghiului polilor.
Rezultatele obținute sînt exemplificate prin rezolvări numerice.
În final este prezentată o metodă de sinteză de asemenea principial nouă, sinteza tripoziționlă cu „mecanism ajutător".

1. ECUAȚIA CURBEI POLILOR RELATIVI r_c

Într-o serie de lucrări anterioare [3], [4], autorii au definit conceptul de curbă a polilor relativi de rotație, au analizat formele ei la mecanismul patrulater și manivelă-piston. Curba polilor relativi, r_c, este locul geometric al punctelor de tip P_1^n (fig. 1) în jurul cărora printr-o rotație finită poate fi adusă o poziție oarecare $\overline{C_nD_n}$ dintr-un fascicul de poziții $\overline{CD}$, în coincidență cu una din ele, numită poziție de referință, notată $\overline{C_1D_1}$.

În figura 1 s-a determinat grafic polul P_1^n (poziție de referință $\overline{C_1D_1}$) de pe curba $(r_1^n)^*$ și s-au indicat unghiurile de rotație corespunzătoare lui φ_{1n}.

Ecuația curbei polilor relativi r_c se poate stabili pe baza proprietății de „izovizibilitate" de care se bucură punctele de pe această curbă, cu aplicații multiple în sinteza poziționlă [2].

Această proprietate, enunțată în forma generală: „două elemente legate la bază se văd dintr-un punct al curbei r_c sub unghiuri egale $\frac{\varphi_{1n}''}{2}$ (fig. 1*b*), a fost demonstrată în [3] (cap. 1).

---

* r_1^n este curba polilor relativi de rotație, construită considerînd $\overline{C_1D_1}$ drept poziție de referință. Pentru citirea notațiilor vezi [3], [4].

Pe baza acestei proprietăţi se poate scrie în sistemul rectangular xA_0y (fig. 1*b*)

$$\frac{\varphi_{1n}}{2} = \beta - \alpha = \delta - \theta, \tag{1}$$

unde

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}\ ;\ \operatorname{tg}\beta = \frac{y - y_A}{x - x_A}\ ;\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x - x_{B0}}\ ;\ \operatorname{tg}\delta = \frac{y - y_B}{x - x_B}, \tag{2}$$

care, înlocuite în

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_{1n}}{2} = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \operatorname{tg}(\delta - \theta), \tag{3}$$

duc, după ordonare în funcţie de coordonatele x, y ale polului P_1^n la

$$(x^2 + y^2)(A_1x + A_2y + A_3) + A_4(x^2 - y^2) + A_5xy + A_6x + A_7y = 0, \tag{4}$$

în care

$$\begin{aligned} A_1 &= y_B - y_A, \\ A_2 &= x_A - x_B + x_{B0}, \\ A_3 &= x_By_A - y_A(x_A + x_{B0}), \\ A_4 &= x_{B0}y_A, \\ A_5 &= -2x_Ax_{B0}, \\ A_6 &= x_{B0}(x_Ay_B - x_By_A), \\ A_7 &= x_{R0}(x_Ax_B + y_Ay_B). \end{aligned} \tag{5}$$

Curba focală dată de (4) reprezintă ecuaţia cubicei r_c la mecanismul patrulater articulat.

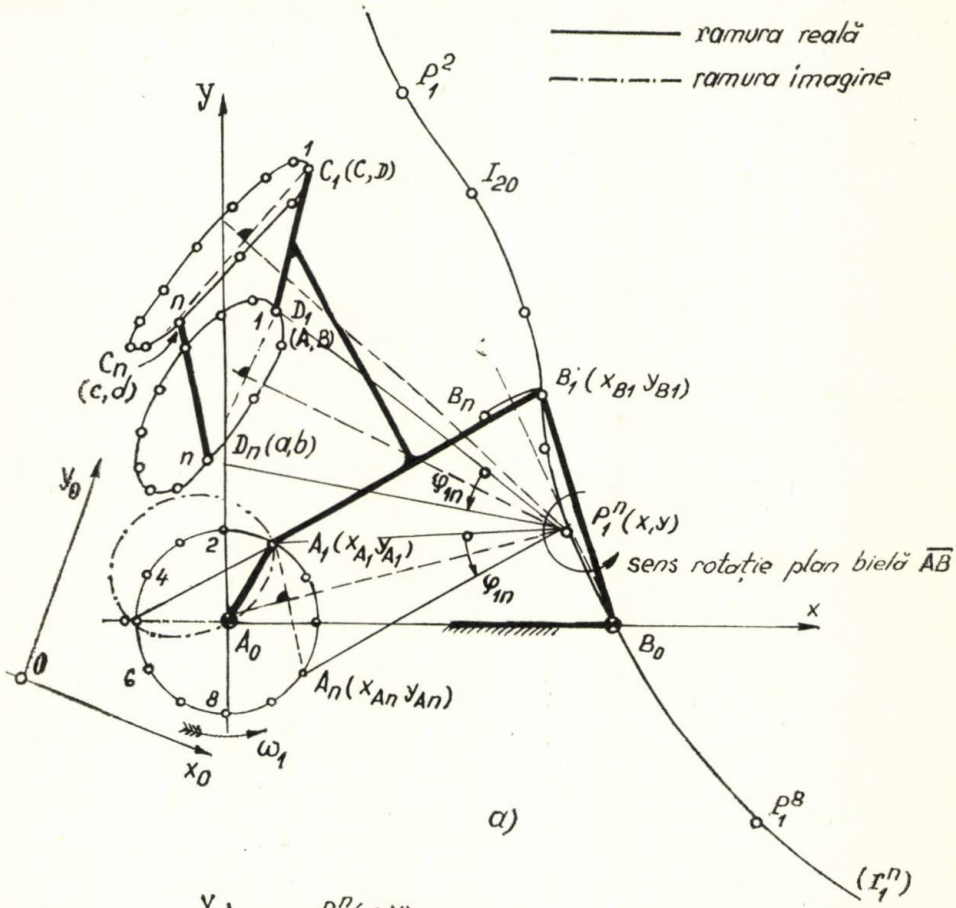

ramura reală
ramura imagine
y
ρ_1^2
I_{20}
$C_1(C,D)$
D_1 (A,B)
C_n (c,d)
$D_n(a,b)$
B_n
$B_1(x_{B1}\ y_{B1})$
φ_{1n}
$\rho_1^n(x,y)$
sens rotație plan bielă $\overline{AB}$
$A_1(x_{A1}\ y_{A1})$
A_0
B_0
$A_n(x_{An}\ y_{An})$
y_0
x_0
ω_1
x
ρ_1^8
(r_1^n)
a)
$\rho_1^n(x,y)$
$\frac{\varphi_{1n}}{2}$
δ
β
A_n
$B_1\begin{bmatrix}x_{B1}\\y_{B1}\end{bmatrix}$
$A_1\begin{bmatrix}x_{A1}\\y_{A1}\end{bmatrix}$
B_n
α
θ
$A_n(0,0)$
$B_0(x_{B0},0)$
b).

Fig. 1

Aplicînd aceeaşi proprietate la mecanismul manivelă-piston [3], se obţine (fig. 2)

$$\frac{\varphi_{n1}}{2} = \frac{\varphi_{1n}}{2} = \delta - \varphi = \psi - \frac{\pi}{2}.$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_{n1}}{2} = \operatorname{tg}(\delta - \varphi) = -\operatorname{ctg}\psi, \tag{6}$$

în care

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\ ;\ \operatorname{tg}\delta = \frac{y - y_A}{x - x_A}\ ;\ \operatorname{tg}\psi = \frac{y - y_B}{x - x_B}. \tag{7}$$

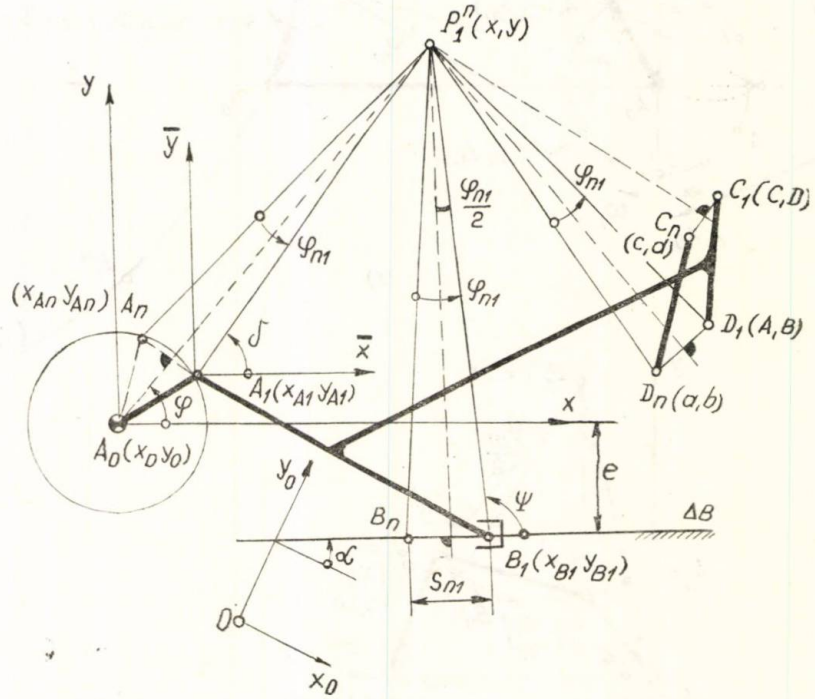


Fig. 2

Înlocuind (7) în (6) şi ordonînd după x, y, rezultă ecuaţia curbei r_c la mecanismul manivelă-piston în sistemul xA_0y (fig. 2):

$$x^3 + xy^2 + B_1x^2 + B_2y^2 + B_3xy + B_4x + B_5y = 0, \tag{8}$$

în care

$$B_1 = -(x_A + x_B),$$

$$B_2 = x_A - x_B,$$

$$B_3 = -2y_A, \tag{9}$$

$$B_4 = x_A x_B + y_A y_B,$$

$$B_5 = x_B y_A - x_A y_B.$$

Procedînd analog în sistemul $\bar{x}A_1\bar{y}$, rezultă

$$(x^2 + y^2)(x + C_1) + C_2 x + C_3 y = 0, \tag{10}$$

unde

$$C_1 = -(x_0 + x_B),$$

$$C_2 = x_0 x_B - y_0 y_B, \tag{11}$$

$$C_3 = x_B y_0 + x_0 y_B.$$

În cazul mecanismului dublu-piston cu cilindri fix și oscilant, polul P_1^n se obține la intersecția mediatoarelor segmentelor $\overline{B_1 B_n}$ și $\overline{B_0 B_0^n}$ (punctul B_0^n este corespondentul imaginii lui B_0 pe ΔB din poziția n în poziția 1, obținut prin rigidizarea conturului $C_n D_n B_n B_0$ și suprapunerea lui peste $C_1 D_1 B_1 B_0^n$ (fig. 3).

Folosind unghiurile de reper θ și ψ și exprimînd, ca mai sus, unghiul de rotație $\frac{\varphi_{n1}}{2}$, se obține, după ordonare,

$$x^2 - y^2 - 2xy \operatorname{ctg} \varphi + x(l \operatorname{ctg} \varphi - e) + y(l + e \operatorname{ctg} \varphi) = 0. \tag{12}$$

Ecuația (12) reprezintă o hiperbolă echilateră în sistemul xB_1y (fig. 3)

Pe figură s-a marcat cu linie-punct „ramura imagine" a curbei r_c

În expresiile (2), (5), (7), (9) și (11) s-au notat x_{A1}, y_{A1}, x_{B1}, y_{B1} (fig. 1, 2), respectiv cu x_A, y_A, x_B, y_B pentru simplificare. Notația completă (x_{A1}, x_{B1} etc.) va fi folosită în continuare.

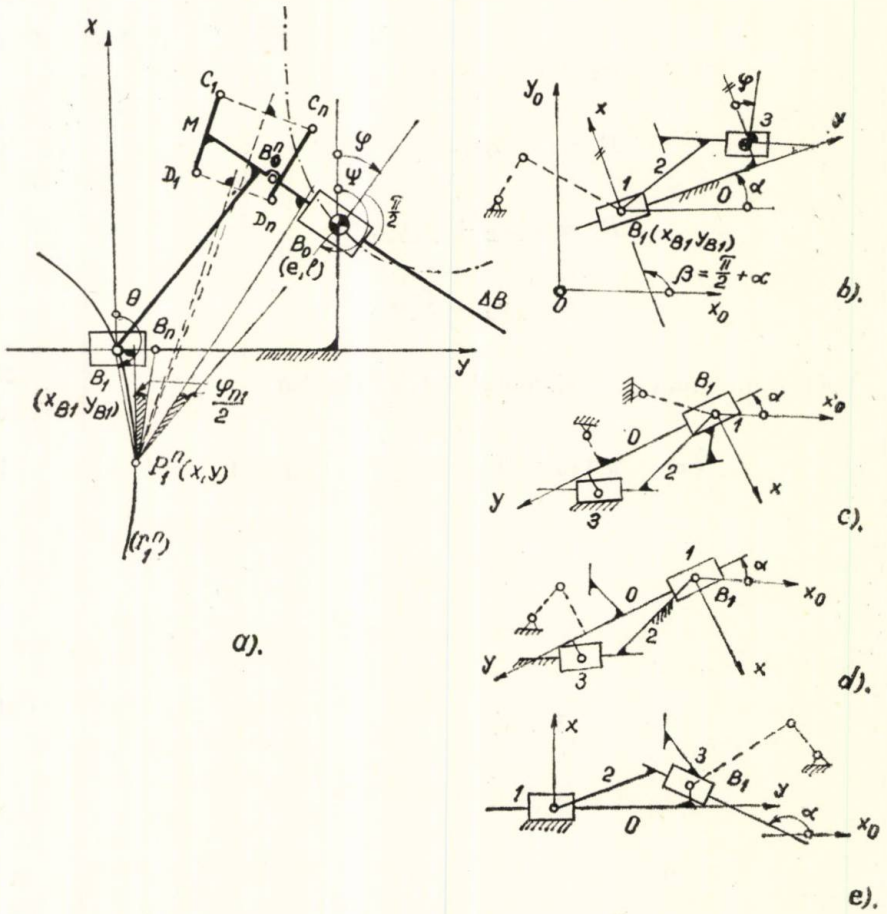


Fig. 3

2. CURBA r_c ȘI SCHIMBAREA BAZEI. „RAMURĂ REALĂ" ȘI „RAMURĂ IMAGINE"

Relațiile (4), (8), (10), (12), care dau ecuația curbei polilor relativi r_c corespunzător diverselor forme constructive ale conturului patrulater, conțin numai coordonatele poziționale ale cuplelor c_5 de rotație sau translație.

Evident, deci că noțiunea de „element fix" (bază) nu influențează asupra formei curbei r_c și nici asupra proprietăților ei geometrice [3], [4].

În concluzie, curba polilor relativi de rotație este legată biunivoc numai de conturul patrulater care a generat-o, fără ca acestuia să i se precizeze baza. Se ia în considerație deci lanțul cinematic și nu mecanismul.

Schimbarea bazei la un contur patrulater poziționat în plan prin cuplele sale c_5, duce, în consecință, la aceeași curbă r_c, cu condiția ca poziția de referință să fie *chiar cea poziționată.*

Astfel de schimbări de bază sînt operate în figurile 3 *b, c, d, e,* 6 *b, c,* 7 *b, c.*

Proprietatea enunțată mai sus este deosebit de utilă în calculele ce urmează, deoarece la sinteza variantelor-mecanisme rezultate din același lanț cinematic-contur prin schimbarea bazei se va folosi același tip de ecuație *stabilit la una din variante,* la care sistemul de coordonate duce la o formă convenabilă calculului.

Astfel, cu ecuația (8), stabilită pe mecanismul din figura 2, sistem xA_0y, se va lucra la sinteza analitică a :

— mecanismului manivelă-piston (fig. 5);

— mecanismului cu cilindru oscilant (fig. 6 sistem xA_1y); iar cu ecuația (10) la sinteza mecanismului manivelă-culisă (fig. 7).

În figurile 6 *b, c* sînt arătate schimbările de bază pentru trecerea de la mecanism manivelă-piston la mecanism cu cilindru oscilant cu menținerea sistemului xA_0y, care a dat ecuația (8) (xA_1y în fig. 6 *c* prin trecerea articulației A_0 în A_1 datorită schimbării rolului cinematic în contur). Analog. cu ecuația (10) se va lucra la sinteza mecanismului manivelă-culisă (schimbarea de bază în fig. 7 *b, c*).

Este necesară, de asemenea, diferențierea ramurilor r_c în :

a) *ramură reală,* pe care polii P_1^n se obțin prin ducerea mediatoarelor segmentelor $\overline{C_1C_n}$, respectiv $\overline{D_1D_n}$, pozițiile $\overline{C_nD_n}$ ocupînd o succesiune normală, dictată de ciclul cinematic (fig. 1, 2),

b) *ramura imagine,* care nu se poate construi grafic prin metoda mediatoarelor menționată mai sus. Această ramură este figurată în desene prin linie-punct.

Clasificarea de mai sus este impusă de necesități practice, deoarece :

— dacă un pol relativ P_1^n folosit în sinteză se află pe „ramura imagine", poziția $\overline{C_nD_n}$ care a folosit la determinarea lui nu este atinsă la o succesiune continuă (normală), ci numai cînd mecanismul în poziția n a elementului conducător ocupă *o poziție oglindită.*

În figura 4 este arătată poziția A_0A_n $(B_n)B_0$ oglindită față de $A_0A_nB_nB_0((B_B)$ simetricul lui B_n față de A_nB_0), precum și determinarea polului oglindit corespunzător, notat P_1^n.

Punctul B_n este în consecință a doua intersecție a cercului de rază $\overline{AB}$ și centru în A_n cu cercul descris de articulația B a balansierului;

— de acest lucru trebuie ținut seamă și în sinteza grafică (clasică) tripozițională care duce la aceleași rezultate dacă polii P_{12} și P_{13} nu sînt pe ramura reală a curbei r_c la mecanismul de proiectat.

Astfel, în figurile 5, 6, polul $P_1^3 \equiv P_{13}$ se află pe ramura imagine r_c și deci $\overline{C_3D_3}$ este atins nu în succesiune continuă, ci de o poziție oglindită, de exemplu A_0A_3 (B_3). În figura 5 este arătată și trasarea grafică a polului P_1^3 prin poziția oglindită $A_0A_3(B_3)$.

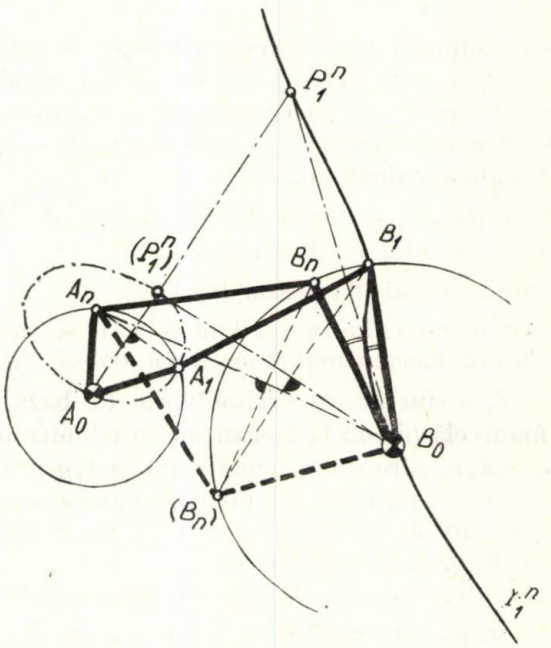


Fig. 4

Această observație duce deci *la apariția de restricții în sinteza tripozițională* clasică și limitează considerabil numărul de soluții utilizabile în practică.

3. SINTEZA TRIPOZIȚIONALĂ FĂRĂ FOLOSIREA TRIUNGHIULUI POLILOR

Utilizarea curbelor r_c în sinteza tripozițională analitică duce la simplificarea considerabilă a calculului și ceea ce este mai important la liniarizarea lui. Expresiile obținute sînt simple și se pot calcula cu instrumente de calcul obișnuite, iar programarea se poate face unitar pe un program general. Menționăm că programarea se justifică numai dacă parametrii iau o grupă mare de valori și trebuie comparate simultan mai multe variante constructive ale conturului cu patru elemente (patrulater, manivelă-culisă, dublu piston cu cilindri fix și oscilant etc.) care ating aceleași trei poziții impuse.

Datele inițiale de calcul sînt:

— coordonatele poziției de referință, care se va nota permanent cu indicele 1, $\overline{C_1D_1}$, (A, B, C, D);

— coordonatele celorlalte două poziții ale planului mobil $\overline{C_n D_n}$ (a, b, c, d),

măsurate într-un sistem rectangular oarecare $x_0 O Y_0$.

Cu aceste date se calculează coordonatele (x, y) ale polilor P_1^n (de asemenea în sistemul $x_0 O Y_0$), precum și unghiul de rotație polar φ_{n1}.

Formulele de calcul sînt [1]:

$$x = \frac{A + a + t(B - b)}{2},$$

$$y = \frac{B + b - t(A - a)}{2}, \tag{13}$$

$$t = \frac{2(A - C)(b - d) - 2(B - D)(a - c)}{(A + c - a - C)^2 + (B + d - b - D)^2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_{n1}}{2} = \frac{1}{t}.$$

Calculul se ramifică apoi după tipul mecanismului de proiectat.

3.1. SINTEZA MEÇANISMULUI PATRULATER

(formule de bază)

Deoarece butonul de manivelă A_1 aparține planului bielei $\overline{AB}$, punctul A_n se obține printr-o rotație de unghi φ_{1n} în jurul polului relativ P_1^n (fig. 1, 2). Aplicînd punctelor A_1 și A_n formulele (13), cu notațiile din figurile 1, 2, se obține

$$x_i = \frac{x_{A1} + x_{An} + t_i(y_{A1} - y_{An})}{2},$$

$$y_i = \frac{y_{A1} + y_{An} - t_i(x_{A1} - x_{An})}{2}, \quad (i = 2, 3), \tag{14}$$

unde

$$P_1^2(x_2, y_2, t_2), \quad P_1^3(x_3, y_3, t_3).$$

Deoarece coordonatele polilor P_1^2, P_1^3 sînt calculate cu (13) (deci $x_2 y_2 x_3 y_3 t_2 t_3$ sînt determinate în $x_0 O y_0$), din (14) rezultă

$$x_{An} = \frac{2x_i + x_{A1}(t_i^2 - 1) - 2t_i(y_{A1} - y_i)}{1 + t_i^2},$$

$$y_{An} = \frac{2y_i + y_{A1}(t_i^2 - 1) - 2t_i(x_i - x_{A1})}{1 + t_i^2}, \quad \begin{matrix} n = 2, 3, \\ i = 2, 3, \\ i = n. \end{matrix} \tag{15}$$

Alegînd arbitrar $A_1(x_{A1}\, y_{A1})$, rezultă din (15) celelalte două poziţii ale butonului A, $A_2(x_{A2}\, y_{A2})$ şi $A_3(x_{A3}\, y_{A3})$.

Centrul cercului ce trece prin A_1, A_2 şi A_3 este A_0.

Scriind că A_1, A_2 şi A_3 aparţin cercului, se obţine sistemul liniar:

$$x_{A1}^2 + y_{A1}^2 - 2x_0\, x_{A1} - 2y_0\, y_{A1} + c = 0,$$

$$x_{A2}^2 + y_{A2}^2 - 2x_0\, x_{A2} - 2y_0\, y_{A2} + c = 0,$$

$$x_{A3}^2 + y_{A3}^2 - 2x_0\, x_{A3} - 2y_0\, y_{A3} + c = 0 \quad (c = x_0^2 + y_0^2 - \overline{A_0 A}^2),$$

din care

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{(x_{A2}^2 + y_{A2}^2 - x_{A1}^2 - y_{A1}^2)(y_{A3} - y_{A1}) - (x_{A3}^2 + y_{A3}^2 - x_{A1}^2 - y_{A1}^2)(y_{A2} - y_{A1})}{y_{A1}(x_{A3} - x_{A2}) + y_{A2}(x_{A1} - x_{A3}) + y_{A3}(x_{A2} - x_{A1})},$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \frac{(x_{A3}^2 + y_{A3}^2 - x_{A1}^2 - y_{A1}^2)(x_{A2} - x_{A1}) - (x_{A2}^2 + y_{A2}^2 - x_{A1}^2 - y_{A1}^2)(x_{A3} - x_{A1})}{y_{A1}(x_{A3} - x_{A2}) + y_{A2}(x_{A1} - x_{A3}) + y_{A3}(x_{A2} - x_{A1})}, \tag{16}$$

unde x_0 şi y_0 sînt coordonatele punctului fix A_0 (fig. 1).

Analog se alege $B_1(x_{B1}, y_{B1})$ şi din (15) rezultă B_2, B_3, apoi din (16) B_0.

Mecanismul de proiectat, rezultă în sistemul $x_0 O y_0$ (fig. 1).

Aplicaţii numerice sînt prezentate în figurile 5, 6, 7 şi 8 pentru determinarea manivelei $\overline{A_0 A}$.

3.2. SINTEZA MECANISMULUI MANIVELĂ-PISTON

3.2.1. *Formulele de calcul.* Fiind date cele trei segmente $\overline{C_1 D_1}$, $\overline{C_2 D_2}$, $\overline{C_3 D_3}$ din planul bielei $\overline{AB}$ şi considerînd $\overline{C_1 D_1}$ poziţie de referinţă, cu formulele (13) se determină coordonatele celor doi poli relativi $P_1^2(x_2 y_2)$ şi $P_1^3(x_3 y_3)$.

Determinarea se face într-un sistem oarecare x_0Oy_0.

Se alege punctul A_1 (fig. 5) și cu formulele (15) și (16) se poziționează în același sistem de axe x_0Oy_0 punctele A_2, A_3 și A_0.

Printr-o transformare plană de forma

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\ \bar{y} &= -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha, \end{aligned} \tag{17}$$

se determină noile coordonate ale polilor relativi P_1^2, P_1^3 și ale articulației A_1:

$$P_1^2(\bar{x}_2\ \bar{y}_2);\quad P_1^3(\bar{x}_3\ \bar{y}_3);\quad A_1(\bar{x}_{A1}\ \bar{y}_{A1}),$$

x_0 și y_0 fiind coordonatele lui A_0 în x_0Oy_0. În urma transformării (17) s-a adus sistemul în poziția xA_0y (fig. 5), deci se lucrează cu ecuația (8).

Parametrul care se alege arbitrar *este unghiul* α, înclinarea ghidajului fix ΔB față de axa Ox_0.

Verificînd ecuația (8) cu coordonatele polilor P_1^2, P_1^3 în noul sistem xA_0y, A_1 fiind cunoscut, rezultă sistemul liniar:

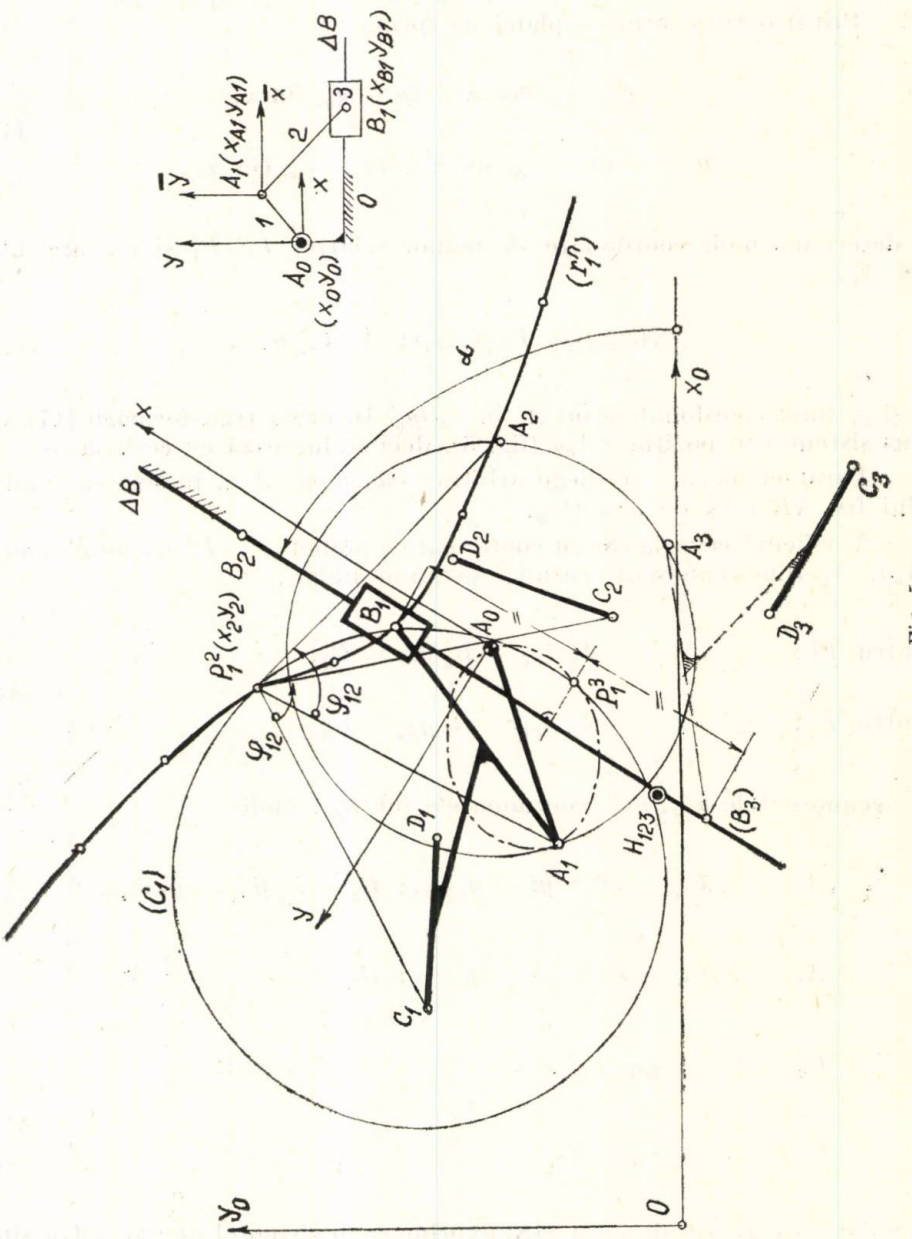
$$\begin{aligned} &\text{pentru } P_1^2: && A_2\,\bar{x}_{B1} + B_2\,\bar{y}_{B1} = C_2, \\ &\text{pentru } P_1^3: && A_3\,\bar{x}_{B1} + B_3\,\bar{y}_{B1} = C_3, \end{aligned} \tag{18}$$

cu necunoscutele $\bar{x}_{B1}$, $\bar{y}_{B1}$ (coordonatele lui B_1), unde

$$\begin{aligned} A_2 &= \bar{x}_2\,\bar{x}_{A1} - \bar{x}_2^2 - \bar{y}_2^2 + \bar{y}_1\,\bar{y}_{A1};\quad B_2 = \bar{x}_2\,\bar{y}_{A1} - \bar{y}_2\,\bar{x}_{A1}, \\ A_3 &= \bar{x}_3\,\bar{x}_{A1} - \bar{x}_3^2 - \bar{y}_3^2 + \bar{y}_3\,\bar{y}_{A1};\quad B_3 = \bar{x}_3\,\bar{y}_{A1} - \bar{y}_3\,\bar{x}_{A1}, \\ C_2 &= 2\bar{x}_2\,y_2\,\bar{y}_{A1} + \bar{x}_{A1}(\bar{x}_2^2 - \bar{y}_2^2) - x_2(\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2), \\ C_3 &= 2\bar{x}_3\,\bar{y}_3\,\bar{y}_{A1} + \bar{x}_{A1}(\bar{x}_3^2 - \bar{y}_3^2) - \bar{x}_3(\bar{x}_3^2 + y_3^2). \end{aligned} \tag{19}$$

Soluțiile care rezultă din (18) exprimate în sistemul de axe xA_0y sînt

$$\bar{x}_{B1} = \frac{C_2B_3 - C_3B_2}{A_2B_3 - A_3B_2},\quad \bar{y}_{B1} = \frac{A_2C_3 - A_3C_2}{A_2B_3 - A_3B_2}.$$



A_0
$(x_0 y_0)$
$A_1(x_{A1} y_{A1})$
$B_1(x_{B1} y_{B1})$
ΔB
$\bar{x}$
$\bar{y}$
x
y
0
1
2
3
(r_1^n)
α
x_0
A_2
A_3
C_3
D_3
D_2
C_2
B_1
B_2
A_0
$P_1^2(x_2 y_2)$
P_1^3
φ_{12}
φ_{12}
D_1
A_1
H_{123}
(B_3)
(C_1)
C_1
y_0
0

Fig. 5

3.2.2. *Aplicație numerică.* Se dau :

$$\overline{C_1D_1}\quad \begin{matrix} A = 49{,}75 \text{ mm}; & B = 31{,}62 \text{ mm}, \\ C = 27{,}68 \text{ mm}; & D = 32{,}78 \text{ mm}, \end{matrix}$$

(referință) rezultă $P_1^2\begin{cases} x_2 = 69{,}71740 \text{ mm}, \\ y_2 = 54{,}52334 \text{ mm}, \\ t_2 = 1{,}37691, \end{cases}$

$$\overline{C_2D_2}\quad \begin{matrix} a = 85{,}32 \text{ mm}; & b = 28{,}45 \text{ mm}, \\ c = 77{,}40 \text{ mm}; & d = 7{,}85 \text{ mm}, \end{matrix}$$

rezultă $P_1^3\begin{cases} x_3 = 69{,}89761 \text{ mm}, \\ y_3 = 13{,}26041 \text{ mm}, \\ t_3 = 0{,}25114, \end{cases}$

$$\overline{C_3D_3}\quad \begin{matrix} a = 78{,}98 \text{ mm}; & b = -12{,}44 \text{ mm}, \\ c = 98{,}26 \text{ mm}; & d = -24{,}12 \text{ mm}. \end{matrix}$$

Se alege $A_1\begin{cases} x_{A1} = 49{,}19 \text{ mm}, \\ y_{A1} = 15{,}11 \text{ mm}. \end{cases}$

Din datele de mai sus prin calcul se obține

$$A_2\begin{cases} x_{A2} = 101{,}16042 \text{ mm}, \\ y_{A2} = 22{,}70815 \text{ mm}, \end{cases} \qquad A_3\begin{cases} x_{A3} = 87{,}31205 \text{ mm}, \\ y_{A3} = 1{,}87801 \text{ mm}, \end{cases}$$

toate în sistemul x_0Oy_0 (fig. 5).

Se alege $\alpha = 58°$.

Rezultă (în sistemul xA_0y)

$$P_1^2 : \begin{matrix} \bar{x}_2 = 23{,}20165 \text{ mm}, \\ \bar{y}_2 = 20{,}35104 \text{ mm}, \end{matrix} \qquad A_1 : \begin{matrix} \bar{x}_{A1} = -21{,}40022 \text{ mm}, \\ \bar{y}_{A1} = 17{,}65201 \text{ mm}, \end{matrix}$$

$$P_1^3 : \begin{matrix} \bar{x}_3 = -11{,}95105 \text{ mm}, \\ \bar{y}_3 = -1{,}88262 \text{ mm}, \end{matrix} \quad \text{(soluție)} \qquad B_1 : \begin{matrix} \bar{x}_{B1} = 11{,}76948 \text{ mm}, \\ \bar{y}_{B1} = 5{,}60932 \text{ mm}. \end{matrix}$$

Poziția $\overline{C_3D_3}$ este atinsă oglindit, polul P_1^3 fiind pe „ramura imagine" a lui r_1^n (fig. 5).

3.3. SINTEZA MECANISMULUI CU CILINDRU OSCILANT (fig. 6)

3.3.1. *Formulele de calcul.* Dîndu-se segmentele $\overline{C_iD_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, care poziţionează biela mecanismului, se determină ca anterior (paragraf 3.2):

— polii relativi de rotaţie $P_1^2(x_2\, y_2)$ şi $P_1^3(x_3, y_3)$;

— se alege poziţia A_1 a butonului de manivelă şi se determină A_2, A_3, A_0,

— prin transformarea (17) scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x - x_{A1}) \cos \alpha + (y - y_{A1}) \sin \alpha, \\ \bar{y} &= -(x - x_{A1}) \sin \alpha + (y - y_{A1}) \cos \alpha. \end{aligned} \tag{17.1}$$

Se mută sistemul în poziţia xA_1y (fig. 6*c*) şi se determină noile coordonate ale polilor relativi şi ale articulaţiei A_0:

$$P_1^2(\bar{x}_2, \bar{y}_2);\quad P_1^3(\bar{x}_3, \bar{y}_3);\quad A_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0).$$

Parametrul ales arbitrar (afară de A_1) *este unghiul* α, făcut de ghidajul ΔB cu axa Ox_0 (fig. 6).

Pentru sinteză se foloseşte ecuaţia (8) în xA_1y (fig. 6*b* şi 6*c*) conform celor enunţate la § 2.

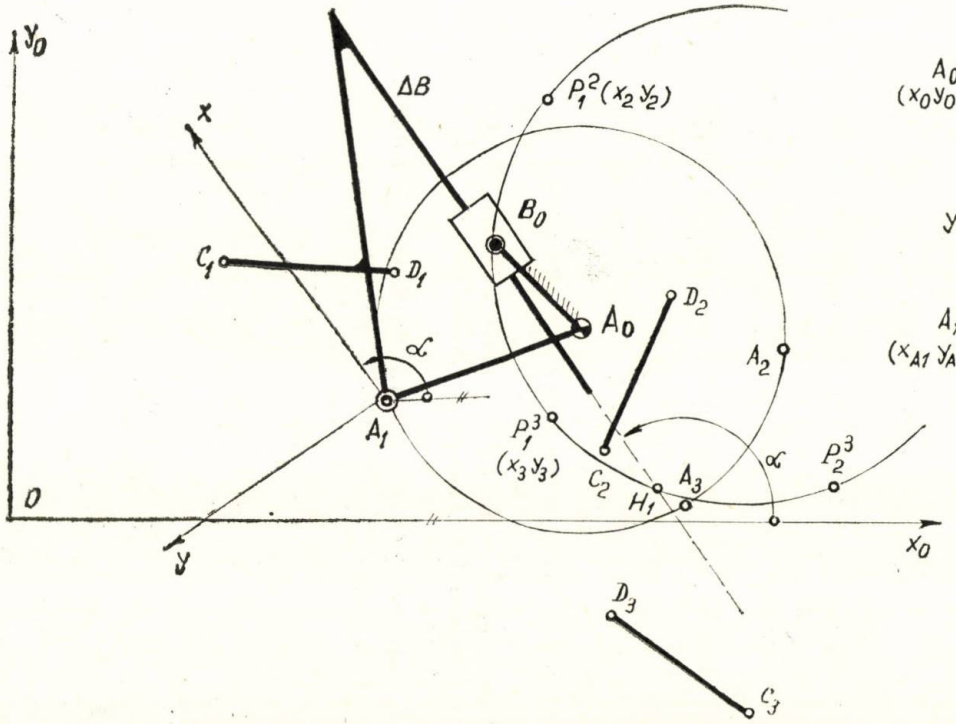
Verificînd (8) cu coordonatele polilor relativi P_1^2, P_1^3 cu A_0 cunoscut, rezultă, după ordonare în funcţie de $B_0(\bar{x}_B, \bar{y}_B)$,

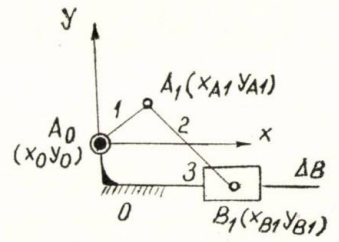
$$\begin{aligned} P_1^2:&\quad A_2 \bar{x}_B + B_2 \bar{y}_B = C_2, \\ P_1^3:&\quad A_3 \bar{x}_B + B_3 \bar{y}_B = C_3, \end{aligned} \tag{20}$$

unde coeficienţii numerici au expresiile:

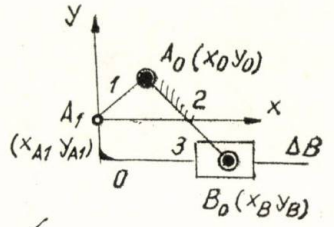
$$\begin{aligned} A_2 &= \bar{x}_2 \bar{x}_0 - \bar{x}_2^2 - \bar{y}_2^2 + \bar{y}_2 \bar{y}_0;\quad B_2 = \bar{x}_2 \bar{y}_0 - \bar{y}_2 \bar{x}_0, \\ A_3 &= \bar{x}_3 \bar{x}_0 - \bar{x}_3^2 - \bar{y}_3^2 + \bar{y}_3 \bar{y}_0;\quad B_3 = \bar{x}_3 \bar{y}_0 - \bar{y}_3 \bar{x}_0, \\ C_2 &= -(\bar{x}_2^3 + \bar{x}_2 \bar{y}_2^2 - \bar{x}_2^2 \bar{x}_0 + \bar{y}_2^2 \bar{x}_0 - 2\bar{x}_2 \bar{y}_2 \bar{y}_0), \\ C_3 &= -(\bar{x}_3^3 + \bar{x}_3 \bar{y}_3^2 - \bar{x}_3^2 \bar{x}_0 + \bar{y}_3^2 \bar{x}_0 - 2\bar{x}_3 \bar{y}_3 \bar{y}_0). \end{aligned} \tag{21}$$

Soluţiile lui (20) sînt $\bar{x}_B, \bar{y}_B(B_0)$, de asemenea în xA_1y (fig. 6).


y_0
x
ΔB
$P_1^2(x_2 y_2)$
B_0
C_1
D_1
A_0
D_2
α
A_2
A_1
P_1^3
$(x_3 y_3)$
C_2
H_1
A_3
P_2^3
0
y
x_0
D_3
C_3


y
$A_1(x_{A1} y_{A1})$
1
2
x
A_0
$(x_0 y_0)$
3
ΔB
0
$B_1(x_{B1} y_{B1})$

b).


y
$A_0(x_0 y_0)$
1
2
x
A_1
$(x_{A1} y_{A1})$
3
ΔB
0
$B_0(x_B y_B)$

c).

Fig. 6

3.3.2. *Aplicație numerică.* S-a menținut setul de date inițiale din aplicația de la § 3.2 în sistemul x_0Oy_0 (fig. 6), de asemenea s-a menținut A_1.

Se alege $\alpha = 124° 30'$. Rezultă în sistemul xA_1y :

$$P_1^2 : \begin{matrix} \bar{x}_2 = 20{,}20135 \text{ mm}, \\ \bar{y}_2 = -39{,}80485 \text{ mm}, \end{matrix} \qquad P_1^3 : \begin{matrix} \bar{x}_3 = -14{,}20188 \text{ mm}, \\ \bar{y}_3 = -16{,}90901 \text{ mm}, \end{matrix}$$

$$A_0 : \begin{matrix} \bar{x}_0 = -7{,}61076 \text{ mm}, \\ \bar{y}_0 = -26{,}52018 \text{ mm}. \end{matrix}$$

Rezultă din (20)

$$B_0 : \begin{matrix} \bar{x}_B = 7{,}19805 \text{ mm}, \\ \bar{y}_B = -22{,}71088 \text{ mm}. \end{matrix}$$

3.4. SINTEZA MECANISMULUI MANIVELĂ-CULISĂ

3.4.1. *Formulele de calcul.* Se dau segmentele $\overline{C_iD_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ care poziționează piatra de culisă 3 (fig. 7*a*).

Se determină ca la § 3.2., 3.3. polii P_1^2, P_1^3 și A_2, A_3, A_0, alegîndu-se A_1.

Prin transformarea (17) unde x_0, y_0 sînt coordonatele lui A_0 (fig. 7) se determină :

$$P_1^2(\bar{x}_2\, \bar{y}_2); \quad P_1^3(\bar{x}_3\, \bar{y}_3); \quad A_1(\bar{x}_{A1}, \bar{y}_{A1}) \text{ în sistemul } \bar{x}A_0\bar{y}.$$

Parametrii aleși arbitrar sînt A_1(în x_0Oy_0) și unghiul făcut de portculisa ΔA cu axa Ox_0 (fig. 7).

Pentru sinteză se folosește ecuația (10) scrisă în $\bar{x}A_1\bar{y}$ pentru mecanismul manivelă-piston (fig. 7*b* cu baza O) și în $\bar{x}A_0\bar{y}$ pentru manivelă-culisă (fig. 7*c*, cu bază 1).

Folosind polii P_1^2, P_1^3 pentru verificare și ordonînd după $(\bar{x}_B, \bar{y}_B)$ coordonatele lui B_0 (fig. 7*c*) rezultă sistemul

$$\begin{aligned} P_1^2 &: \quad A_2\, \bar{x}_B + B_2\, \bar{y}_B = C_2, \\ P_1^3 &: \quad A_3\, \bar{x}_B + B_3\, \bar{y}_B = C_3, \end{aligned} \tag{22}$$

unde

$$\begin{aligned} A_2 &= \bar{x}_2\, \bar{x}_{A1} + \bar{y}_2\, \bar{y}_{A1} - (\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2); \quad B_2 = \bar{y}_2\, \bar{x}_{A1} - \bar{x}_2\, \bar{y}_{A1}, \\ A_3 &= \bar{x}_3\, \bar{x}_{A1} + \bar{y}_3\, \bar{y}_{A1} - (\bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2); \quad B_3 = \bar{y}_3\, \bar{x}_{A1} - \bar{x}_3\, \bar{y}_{A1}, \\ C_2 &= (\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2)\ (\bar{x}_{A1} - \bar{x}_2), \\ C_3 &= (\bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2)\ (\bar{x}_{A1} - \bar{x}_3), \end{aligned} \tag{23}$$

cu soluțiile $B_0(\bar{x}_B, \bar{y}_B)$ în $\bar{x}A_0\bar{y}$ (fig. 7*c*).

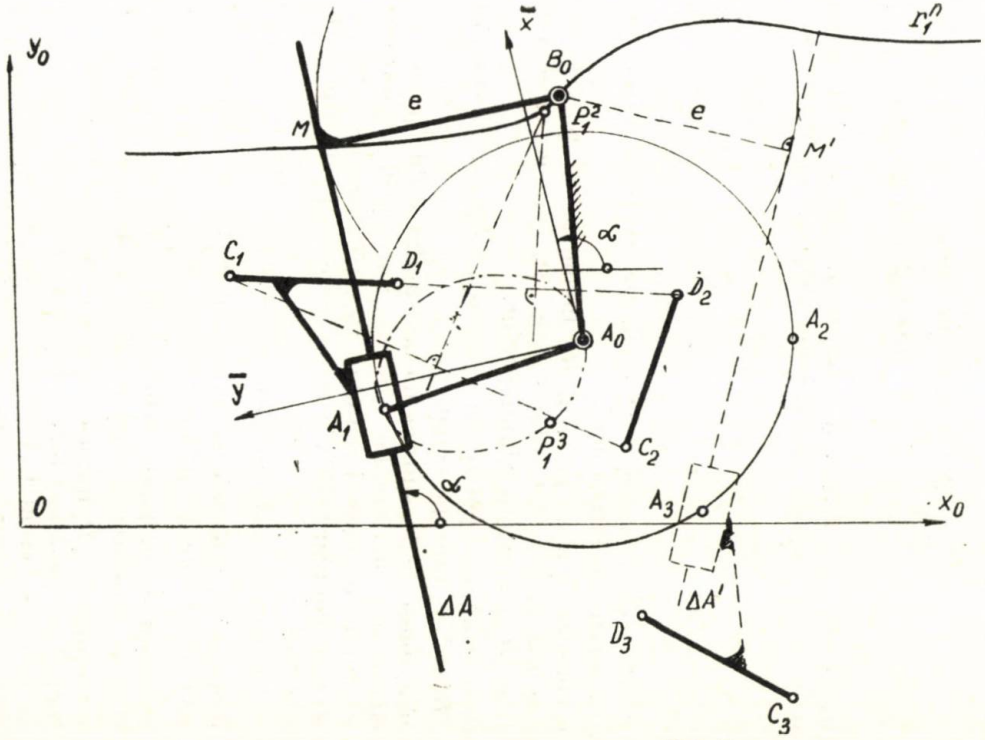
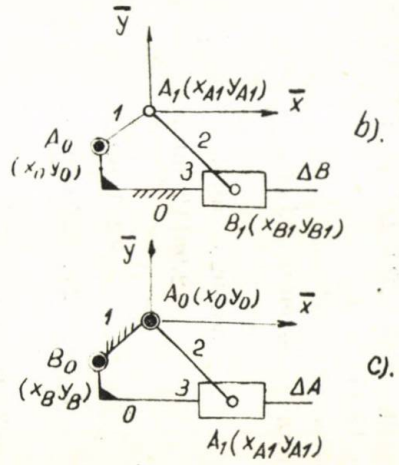

y_0
$\bar{x}$
r_1^n
B_0
e
e
M
M'
ρ_1^2
α
C_1
D_1
D_2
A_2
A_0
$\bar{y}$
A_1
ρ_1^3
C_2
A_3
0
x_0
α
ΔA
$\Delta A'$
D_3
C_3

Fig. 7


$\bar{y}$
$A_1(x_{A1}y_{A1})$
$\bar{x}$
1
2
A_0
$(x_0 y_0)$
3
ΔB
0
$B_1(x_{B1}y_{B1})$
b).
$\bar{y}$
$A_0(x_0y_0)$
$\bar{x}$
1
2
B_0
$(x_B y_B)$
3
ΔA
0
$A_1(x_{A1}y_{A1})$
c).

3.4.2. *Aplicație numerică.* S-au folosit aceleași date inițiale în x_0Oy_0 din aplicațiile de la § 3.2.2 și § 3.3.2. S-a menținut, de asemenea, A_1 (49,19; 15,11).

Se alege $\alpha = 102°$.

Rezultă în sistemul $\bar{x}A_0\bar{y}$:

$$P_1^2: \begin{matrix} \bar{x}_2 = 30{,}60253 \text{ mm}, \\ \bar{y}_2 = -\ 2{,}90112 \text{ mm}, \end{matrix} \qquad P_1^3: \begin{matrix} \bar{x}_3 = -\ 9{,}80035 \text{ mm}, \\ \bar{y}_3 = 6{,}41211 \text{ mm}, \end{matrix}$$

$$A_1: \begin{matrix} \bar{x}_{A1} = -\ 3{,}01261 \text{ mm}, \\ \bar{y}_{A1} = 27{,}30223 \text{ mm}. \end{matrix}$$

Din (22) rezultă

$$B_0: \begin{matrix} \bar{x}_B = 32{,}82166 \text{ mm}, \\ \bar{y}_B = -\ 4{,}66152 \text{ mm}. \end{matrix}$$

Poziția $\overline{C_3D_3}$ este atinsă de mecanismul $B_0M'A_3$ în poziție oglindită, deoarece P_1^3 se găsește pe „ramura imagine" (punctat în fig. 7) a curbei r_1^a.

3.5. SINTEZA CU „MECANISM AJUTĂTOR"

3.5.1. *Principiul metodei.* Din sinteza tri-pozițională grafică este cunoscută „teorema coliniarității".

Ca o consecință a ei, punctul B_1 (făcînd parte din cele trei puncte colineare) se află pe cercul Carnot C_1 (fig. 8), cerc ce trece prin P_1^2, P_1^3 și ortocentrul H_{123} al triunghiului polilor.

Întrucît triunghiul polilor nu se construiește, este necesară o metodă prin care B_1 să fie adus pe cercul C_1.

Metoda folosește la sinteza mecanismului dublu piston cu cilindrii fix și oscilant și a derivatelor sale obținute prin schimbări de bază (fig. 3*a*—*e*), unde originea sistemului xB_1y trebuie să se afle pe C_1, conform „teoremei coliniarității", caz în care se poate folosi pentru sinteză ecuația (12).

Mersul calculului este următorul:

— dîndu-se segmentele $\overline{C_iD_i}$ ($i = 1, 2, 3$) se determină polii relativi P_1^2, P_1^3 cu formulele (13);

— alegîndu-se un punct arbitrar A_1 și unghiul α făcut de ΔB cu Ox_0, se proiectează un mecanism ajutător care să realizeze aceleași poziții $\overline{C_iD_i}$ impuse, ca și mecanismul ce se proiectează după metoda expusă la § 3.2, obținîndu-se punctul B_1 aflat acum obligatoriu pe cercul Carnot C_1. Mecanismul manivelă-piston ajutător este figurat punctat în figura 8;

— se execută o schimbare de sistem în xB_1y (fig. 8), obținîndu-se noile coordonate ale celor doi poli relativi

$$P_1^2(\bar{x}_2, \bar{y}_2); \quad P_1^3(x_3, \bar{y}_3);$$

— se alege unghiul φ făcut de perpendiculara pe ΔB_0 cu axa B_1x (fig. 8). În felul acesta pentru proiectarea mecanismului sînt aleși doi parametri: α în sistemul x_0Oy_0 și φ în xB_1y;

— verificînd ecuația (12) cu coordonatele polilor P_1^2 și P_1^3 și ordonînd după necunoscutele $B_0(e, l)$, se obține sistemul

$$\begin{aligned} A_2 l + B_2 e &= C_2, \\ A_3 l + B_3 e &= C_3, \end{aligned} \tag{24}$$

unde

$$\begin{aligned} A_2 &= \bar{x}_2 \operatorname{ctg} \varphi + \bar{y}_2; \quad B_2 = \bar{y}_2 \operatorname{ctg} \varphi - \bar{x}_2, \\ A_3 &= \bar{x}_3 \operatorname{ctg} \varphi + \bar{y}_3; \quad B_3 = \bar{y}_3 \operatorname{ctg} \varphi - \bar{x}_3, \\ C_2 &= \bar{y}_2^2 - \bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_2 \bar{y}_2 \operatorname{ctg} \varphi, \\ C_3 &= \bar{y}_3^2 - \bar{x}_3^2 + 2\bar{x}_3 \bar{y}_3 \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \tag{25}$$

Rezolvarea lui (24) determină necunoscutele problemei.

3.5.2. *Aplicație numerică.* Se folosește ca mecanism ajutător mecanismul rezultat din exemplul numeric de la § 3.2.2 (în care s-au inversat axele sistemului x_0Oy_0).

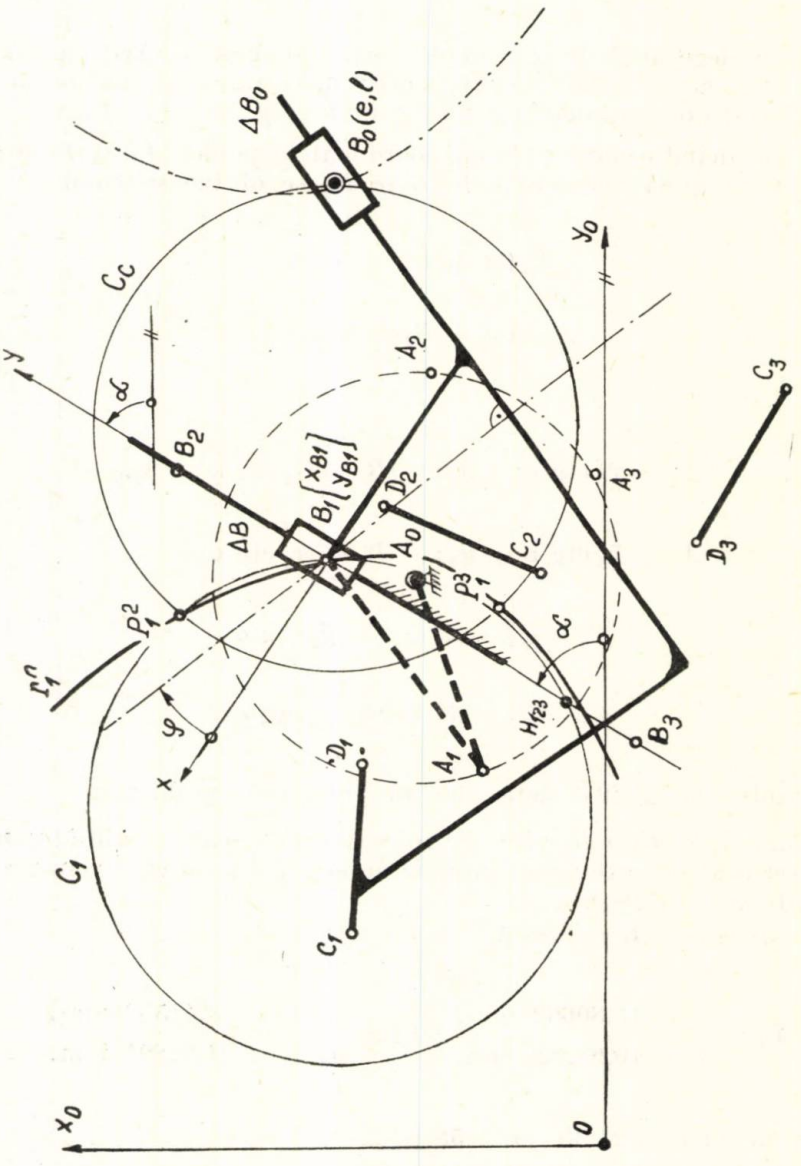
În sistemul xB_1y rezultă

$$P_1^2: \begin{matrix} \bar{x}_2 = 15{,}80662 \text{ mm}, \\ \bar{y}_2 = 10{,}91288 \text{ mm}, \end{matrix} \quad P_1^3: \begin{matrix} \bar{x}_3 = -\ 6{,}41552 \text{ mm}, \\ \bar{y}_3 = -\ 24{,}02891 \text{ mm}. \end{matrix}$$

Se alege: $\varphi = 21°30'$ ($\alpha = 58°$).

Din (24) se obțin coordonatele lui

$$B_0: \begin{matrix} e = -\ 42{,}10823 \text{ mm}, \\ l = 24{,}27182 \text{ mm}. \end{matrix}$$



ΔB_0
$B_0(e,\ell)$
C_c
y_0
y
α
B_2
A_2
C_3
$B_1\begin{bmatrix}x_{B1}\\y_{B1}\end{bmatrix}$
D_2
A_3
ΔB
A_0
C_2
D_3
P_1^2
P_1^3
Γ_1^n
α
φ
x
H_{123}
B_3
D_1
A_1
C_1
C_1
x_0
0

Fig.8

Observație: Pentru sinteza variantelor din figurile 3 *b*, *c*, *d*, *e* se atașează următoarele mecanisme ajutătoare:
— pentru figurile 3*b*, *e*-mecanism manivelă — piston,
— pentru figura 3 *c*-mecanism manivelă — culisă,
— pentru figura 3 *d*-mecanism cu cilindru oscilant.
Toate servesc pentru determinarea articulației B_1 și a unghiului α.

4. CONCLUZII

Sinteza tripozițională analitică a mecanismelor plane articulate cu patru elemente folosind curba r_c are avantajul, față de metoda clasică grafică, a unei mari operativități. Ecuațiile curbelor r_c, precum și posibilitatea determinării polilor P_1^2, P_1^3 și articulațiilor fixe folosind ecuațiile (15) și (16); (18) și (19); (20) și (21); (22) și (23) și (24) și (25) permit o operativă sinteză prin programarea lor pe calculatoare.

Programul de calcul poate fi consultat la Catedra teoria mecanismelor din Institutul Politehnic București.

Primită la redacție la 5 ianuarie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. K. Luck, *Zur rechnerischen Ermittlung der Abmessugen von ebenen Gelenkgetrieben*, Wiss. Zeitschrift der Tehn. Hochschule — Dresden — 10 (1961) Heft 1 p 109—122.
2. P. Lohse, *Neue Wege in der Getriebesynthese*, Feinwerktechnik, *8*, 331 — 340 (1970).
3. N. I. Manolescu, G. C. Popa, *Cubica polilor relativi de rotație la mecanismul manivelă — piston*, St. corc. mec. apl. *3*. 569—586 (1970).
4. N. I. Manolescu, G. C. Popa, *Contribuții la stabilirea formei curbelor r_c, Γ_0 și Γ_j cu ajutorul ecuației Veldkamp*, St. cerc. mec. apl. *5*, 1137 — 1147 (1971).

STUDII

UN MODEL MATEMATIC AL SEPARĂRII GRANULOMETRICE PE SITELE VIBRATOARE

de MARIUS MUNTEANU
Institutul politehnic București

În prima parte a lucrării s-a determinat inițial o ecuație integrodiferențială ce descrie fenomenul separării de-a lungul sitei, considerînd cazul unei distribuții granulometrice omogene după înălțime a stratului de material.
Soluțiile acestei ecuații reprezintă ecuațiile curbelor de separare de-a lungul sitei, corespunzătoare claselor de granulație în care se divizează gama dimensională a granulelor materialului de cernut. În legătură cu curbele de separare s-au calculat alte mărimi importante ca: funcțiile concentrației, debit etc.
Prin introducerea lungimii saltului materialului x_r se face o legătură indirectă a formulelor obținute cu parametrii vibrației mașinii.
Partea a doua cuprinde rezultatele determinărilor experimentale efectuate la Uzinele sodice Ocna-Mureș, precum și verificarea rezultatelor teoretice pentru acest caz particular.
Pentru determinarea experimentală a punctelor curbelor de separare și a curbelor de concentrație s-a aplicat metoda statistică a sondajului simplu repetat, caracteristica studiată fiind curba de distribuție granulometrică de-a lungul sitei.
În finalul acestei părți s-a calculat efectul a trei surse de erori principale: aproximările făcute la determinarea formulelor factorilor de cernere, imprecizia balanței cu care s-au cîntărit probele de material și aplicarea sondajului simplu repetat în condițiile recoltării unui număr redus de probe.

1. INTRODUCERE

Fenomenul separării granulometrice cu ajutorul sitei vibratoare apare ca rezultat al acțiunii vibrațiilor asupra sistemului mecanic neliniar format din masa materialului granulos. Desfășurarea fenomenului cernerii poate fi rezumată astfel:

— stratul de material se deplasează de-a lungul lungimii sitei fie în salturi succesive, cazul cel mai des întîlnit, fie printr-o deplasare fără desprindere de pe cadru, cazul granulelor în formă de ace sau foarte plate [9];

— în timpul acestei deplasări, granulele fine se strecoară printre cele grosolane pînă ating pînza sitei (fenomenul segregației);

— ocuparea de către granule a ochiurilor sitei, unde unele rămîn în continuare pe sită, iar altele cad sub sită.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 887—915

Vibroseparareа presupune deci provocarea preponderentă a efectelor enumerate, aşa cum, de exemplu, pentru vibrotransport ne interesează doar primul dintre ele, deplasarea vibratorie.

Efectul deplasării vibratorii se datoreşte neliniarităţii forţei de frecare uscată, precum şi nesimetriei agitării vibratorii, adică datorită acţiunii vibraţiilor sub un unghi de atac cuprins între zero şi $\pi/2$ faţă de planul sitei.

Mecanismul producerii segregării sau a altor efecte specifice, ca distribuirea granulelor după coeficienţi de frecare sau după formă, reducerea coeficienţilor efectivi de frecare, „fierberea" (turbulentă) etc., nu este încă complet elucidat.

Pentru cazul cel mai frecvent, cînd în timpul deplasării de-a lungul sitei stratul de material rămîne destul de compact, declanşarea procesului cernerii se face prin învingerea forţelor de legătură dintre granule şi dintre granule şi sită. Aceasta se obţine prin lovirea şi forfecarea stratului de material datorită vibrării.

Probabilitatea de trecere a unei granule prin ochiurile sitei este cu atît mai mică, cu cît dimensiunea granulei se apropie mai mult de cea a ochiului sitei. Aceste granule fac parte din clasa de granule numite dificile, iar dacă sînt în cantitate mare obturează ochiurile sitei.

Procesul cernerii depinde, în esenţă, de următorii factori:

— material (distribuţie granulometrică, greutate specifică, forma granulelor, coeficienţi de frecare, umiditate);

— excitarea vibratorie (amplitudine, frecvenţă, unghiul de atac al vibraţiei în cazul mişcării de translaţie rectilinie; natura vibraţiei: liniară, compusă şi neliniară);

— parametrii tehnologici şi constructivi (dimensiunile suprafeţei sitei, îndeosebi raportul dintre lungime şi lăţime, înclinarea sitei, înălţimea stratului de material, modul alimentării etc.).

Din cele de mai sus reiese că o analiză calitativă şi cantitativă a fenomenului vibroseparării întîmpină mari dificultăţi datorită numărului mare de factori ce concurează şi caracterului aleator al deplasării granulelor şi trecerii lor prin sită.

Există o mare varietate de tipuri de site vibratoare care din punct de vedere constructiv şi dinamic sînt suficient de bine studiate (de exemplu [21], [22]), pe cînd comportarea materialului pe suprafaţa vibratoare s-a analizat mult mai puţin şi numai pentru cazuri particulare cu simplificarea condiţiilor reale.

Deoarece aceste utilaje sînt foarte răspîndite în multe ramuri industriale, fiind folosite pentru o gamă foarte largă de granulaţie şi influenţînd direct calitatea produselor, se impune o analiză atentă a fenomenului cernerii. Investigaţia cu caracter teoretic mai accentuat prezintă, pe lîngă interesul în sine, şi o importanţă practică deosebită, în sensul că, pentru producţia de unicate sau de serie mică a acestor maşini, un volum mare de cercetări experimentale nu este întotdeauna rentabil.

În lucrarea de faţă s-a urmărit o analiză mai aprofundată a procesului cernerii cu ajutorul sitelor vibratoare atît în sens analitic, cît şi în sensul unor evaluări cantitative şi calitative necesare tehnologilor şi proiectanţilor.

O privire asupra cercetărilor din acest domeniu ne arată că ele s-au canalizat după trei direcţii principale : deplasarea granulelor pe suprafeţe vibrante, procesul cernerii şi optimizarea. Astfel, în [1] şi [2] se determină viteza medie a unei granule individuale în mişcarea sa pe o suprafaţă vibrantă, iar în [3] şi [4] se analizează deplasarea unui strat, dar tot în legătură cu parametrii balisticii unei granule individuale. Monografia [5] cuprinde o analiză profundă şi vastă a mişcării granulei individuale pe suprafeţe vibrante aspre. Se analizează cazul unei clase largi de granule ce pot fi studiate ca puncte materiale, granule sferice şi cilindrice în mişcarea lor pe un plan ce efectuează o mişcare oscilatorie armonică. Cazul mişcării particulelor foarte fine este tratat în [6], iar în [7] se calculează viteza medie a stratului de material în zbor prin introducerea unei rezistenţe de tip vîscos. Variaţia presiunii aerului în stratul de material este studiată în [8].

O sinteză a rezultatelor experimentale în legătură cu cernerea, obţinută de mai mulţi cercetători, este cuprinsă în [9]. Eficienţa cernerii este legată de probabilitatea de trecere a granulelor prin ochiuri în [10] şi de balistica unei granule individuale în [11]. Consideraţii asupra diametrelor statistice ale granulelor au fost făcute în [6], iar în [12] asupra „diametrului" ca dimensiune caracteristică a granulei din punct de vedere al capacităţii de trecere a acesteia prin ochiurile sitei.

Încercări de formulare matematică a fenomenului cernerii s-au făcut în [13], citată în [6], apoi în [14] şi [15], iar pentru ciurul rotativ în [12]. În [17] se propune o ecuaţie diferenţială de tipul Fokker-Plank care să descrie separarea granulelor, pînza sitei avînd rolul unei suprafeţe absorbante. O analiză experimentală comparativă a cernerii pe site standard, site de încercare şi site de lucru este prezentată în [19].

2. MODELUL MATEMATIC AL SEPARĂRII GRANULOMETRICE DE-A LUNGUL SITEI VIBRATOARE ÎN CAZUL DISTRIBUŢIEI GRANULOMETRICE OMOGENE DUPĂ ÎNĂLŢIME A STRATULUI DE MATERIAL

2.1. ECUAŢIILE PROCESULUI DE SEPARARE ŞI SOLUŢIONAREA LOR

Se consideră o sită vibratoare alimentată continuu cu material dintr-o parte a sa. Presupunem materialul de aceeaşi greutate specifică şi cu o granulaţie spaţială asemănătoare. Diametrul granulei se consideră în sensul amintit anterior şi se va respecta inegalitatea

$$0 < \rho_{min} \leqslant \rho \leqslant \rho_{max}.$$

Din întreaga gamă a diametrelor separăm grupa cu diametrele cuprinse în intervalul (ρ_1, ρ_2), adică toate granulele cu diametrul cuprins aici trec prin sita cu ochiuri de diametrul ρ_2, dar nu trec prin cea cu ochiuri de diametru ρ_1. Diametrul ochiului ρ_s este o dimensiune convenţională, ca şi cea a diametrului granulei, putînd fi dianetru lungimea unei laturi, diagonală etc. Nu este încă necesară precizarea dimensiunii ce caracterizează ochiul sitei, deoarece, cum se va vedea, ea nu intră explicit în calcule.

Clasa de granule considerată (ρ_1, ρ_2) este o grupă de granule pentru care (ρ_1, ρ_2) este intervalul cel mai mic în care sînt cuprinse toate aceste granule. Cantitatea de material dintr-un volum unitar se poate împărți în n clase oricît de înguste. Datorită segregării și comportării diferite a materialului în funcție de mărimea granulei, probabilitatea de a ajunge la pînza sitei și a trece de ea diferă de la clasă la clasă. Se observă că, indiferent de legea vibrației și parametrii ei, situația pe sită de-a lungul timpului este staționară. Adică înălțimea stratului rămîne constantă în timp pentru același punct de pe sită, iar concentrația în material cu diametrul mai mic decît al sitei scade odată cu apropierea de capătul de deversare.

Ne propunem determinarea variației concentrației materialului de cernut de-a lungul lungimii sitei, variație ce va caracteriza eficiența cernerii. Pentru același material și aceleași condiții tehnologice, o variație a eficacității cernerii se obține prin variația parametrilor vibrației, respectiv, a intensității salturilor, unghiului de aruncare și viteza medie de deplasare. Dar aceasta constituie o altă problemă.

În analiza cazului staționar definim două situații :

— granulația este distribuită omogen într-un volum elementar de-a lungul înălțimii stratului ;

— granulația nu este distribuită omogen după înălțime.

Prima presupunere reprezintă o simplificare a fenomenului, dar poate fi acceptată cu o bună aproximație pentru straturi suficient de groase de material și cînd salturile succesive efectuează un amestec de omogenizare.

2.1.2. Ipoteza de calcul

Se definește

$G(\rho, x)$ — cantitatea granulelor cuprinse într-un volum mărginit la distanța x (fig. 1)

$$C(\rho, x) = \frac{\partial G}{\partial x}, \tag{1}$$

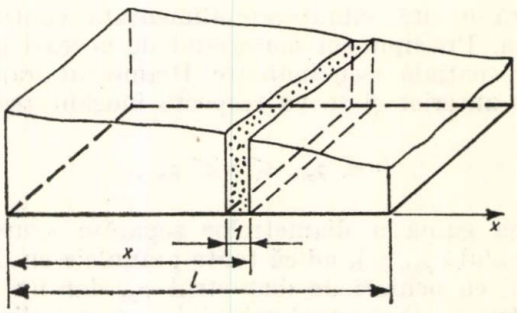


Fig. 1

funcție ce caracterizează distribuția granulelor după diametre pentru volumul mărginit la distanța x.

Rezultă

$$G(\rho, x) = \int_{\rho_{min}}^{\rho} C(\lambda, x)\, d\lambda, \tag{2}$$

cantitatea de material de granulație între ρ_{min} și ρ curent cuprinse în volumul dat.

Analog,

$$G(\rho_{max}, x) = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} C(\lambda, x)\, d\lambda, \tag{3}$$

cantitatea totală de granule cuprinsă în volumul dat. Se introduce funcția

$$K(\rho, x) = \frac{C(\rho, x)}{G(\rho_{max}, x)}, \tag{4}$$

densitatea de concentrație a granulelor de diametre cuprinse între ρ_{min} și ρ, din volumul mărginit la distanța x.

Se observă că satisface egalitatea

$$\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} k(\lambda, x)\, d\lambda = 1. \tag{5}$$

Presupunem variabilă următoarea ipoteză de bază: variația cantității de granule pierdute în raport cu distanța x este proporțională cu concentrația clasei de granule date din volumul respectiv. Adică

$$\frac{\Delta G}{\Delta x} = -\varkappa(\rho', \rho_s) \int_{\rho_1}^{\rho_2} K(\lambda, x')\, d\lambda, \tag{6}$$

unde factorul de proporționalitate $\varkappa(\rho, \rho_s)$ l-am denumit factor de cernere, iar $\rho_1 \leqslant \rho' \leqslant \rho_2$ și $x_1 \leqslant x' \leqslant x_2$. După înlocuiri și după două treceri succesive la limită pentru Δx, x' și, respectiv, $\Delta\rho$, ρ' se obține ecuația integrodiferențială neliniară ce caracterizează procesul separării de-a lungul sitei

$$\frac{\partial C(\rho, x)}{\partial x} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} C(\lambda, x)\, d\lambda = -\varkappa(\rho, \rho_s)\, C(\rho, x), \tag{7}$$

avînd condiția la limită

$$C(\rho, 0) = \alpha(\rho), \tag{8}$$

$\alpha(\rho)$ — caracterizează distribuția inițială a materialului în punctul de alimentare.

Pentru cazul cernerii unei singure clase de granule, tot materialul este capabil să treacă prin ochiurile sitei cu excepţia unei cantităţi neglijabile (operaţia de presortare).

Soluţia ecuaţiei (7) este

$$C(\rho, x) = 1 - \frac{\varkappa_0}{\alpha} x, \tag{9}$$

unde s-a notat

$$\overline{\alpha} = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \alpha(\lambda)\, d\lambda. \tag{10}$$

Soluţionarea ecuaţiei (7), în cazul cernerii a n clase de granule ce trec prin sită, a $n+1$—a clasă constituind reziduul, s-a făcut pe baza ipotezei că factorul $\varkappa(\rho, \rho_s)$ este de forma

$$\varkappa(\rho, \rho_s) = \begin{cases} \varkappa_1 \text{ pentru } \rho_{min} = \rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1, \\ \varkappa_2 \text{ pentru } \rho_1 < \rho \leqslant \rho_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varkappa_n \text{ pentru } \rho_{n-1} < \rho \leqslant \rho_n = \rho_s, \\ 0 \text{ pentru } \rho_s < \rho \leqslant \rho_{max}, \end{cases} \tag{11}$$

dacă subclasele de granulaţie respectă inegalităţile

$$\rho_{min} = \rho_0 \leqslant \rho_1 < \cdots < \rho_i < \cdots \leqslant \rho_n = \rho_s < \rho_{max}. \tag{12}$$

Presupunem o soluţie de forma

$$C(\rho, x) = \begin{cases} \alpha(\rho)\, \varphi_i(x) \text{ pentru } \rho_{i-1} < \rho \leqslant \rho, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha(\rho) \qquad \text{pentru } \rho_s < \rho \leqslant \rho_{max}. \end{cases} \tag{13}$$

Înlocuind integrala din ecuaţia (7) prin expresia

$$\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} C(\lambda, x)\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) + \alpha_0, \tag{14}$$

se obţine iniţial relaţia

$$\varphi_r = \varphi_s^{\varkappa_{rs}}, \qquad r, s = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

unde

$$\frac{\varkappa_r}{\varkappa_s} = \varkappa^{rs}. \tag{16}$$

Soluția ecuației (7) este sistemul

$$\ln \varphi_j = \frac{\varkappa_i}{\varkappa_0}\left[-x + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\varkappa_i}(1 - \varphi_j^{\varkappa_{ij}})\right], \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

adică

$$x = -\frac{\alpha_0}{\varkappa_j} \ln \varphi_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\varkappa_i}(1 - \varphi_j^{\varkappa_{ij}}), \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

unde

$$\alpha_i = \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \alpha(\lambda)\, d\lambda \; (2.31) \qquad \alpha_0 = \int_{\rho_s}^{\rho_{max}} \alpha(\lambda)\, d\lambda. \tag{19}$$

2.2. DETERMINAREA FACTORILOR DE CERNERE

Prin analiza granulometrică a uneia sau a mai multor probe de material recoltate de pe sită în anumite puncte apropiate de capătul de deversare se determină valorile φ_{01}, adică valorile funcțiilor φ_i în punctele de lungime l_i. Înlocuind aceste valori în ecuațiile (18), se obține un sistem de ecuații algebrice ale cărui soluții sînt, în urma neglijării unor termeni, tocmai factorii de cernere

$$\varkappa_i = \frac{a_i}{l_i - 0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Conform (16), rezultă

$$\varkappa_{ij} = \frac{a_i(l_j - D)}{a_j(l_i - D)}, \tag{21}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

unde

$$a_i = -\alpha_0 \ln \varphi_{01}, \tag{22}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$D = \frac{\sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{a_r} l_r}{1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{a_r}}. \tag{23}$$

Factorii de cernere $\varkappa_i$ caracterizează capacitatea granulelor de a trece prin ochiurile sitei. Mărimea și forma ochiului în raport cu dimensiunile granulelor rezultă indirect prin intermediul distanțelor $l_1, l_2, \cdots$ și depinde de raportul dintre cantitatea de refuz față de cantitatea totală de material.

2.3. PARTICULARIZAREA ECUAȚIILOR PENTRU ANUMITE DISTRIBUȚII INIȚIALE ALE MATERIALULUI

Coeficienții α_i reprezintă cantitățile de material ale intervalelor de granulație corespunzătoare.

Funcția $K(\rho, x)$ poate reprezenta, conform relației (5), densitatea de probabilitate a concentrației materialului în raport cu variabila ρ la distanța x, iar $K(\rho, 0)$ densitatea de probabilitate inițială.

Conform relației (1) putem scrie

$$\frac{C(\rho, x)}{G(\rho_{max}, x)} = \frac{\partial\left[\frac{G(\rho, x)}{G)\rho_{max}, x)}\right]}{\partial \rho}. \tag{24}$$

Funcția $\frac{G(\rho, x)}{G(\rho_{max}, x)}$ reprezintă deci o funcție de distribuție, iar $\frac{G(\rho, 0)}{G(\rho_{max}, 0)}$ funcția de distribuție inițială. Cantitatea totală de material din volumul inițial este

$$G(\rho_{max}, 0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \alpha_0 = A + \alpha_0. \tag{25}$$

Ținînd seama de aceste relații, în ipoteza divizării scării diametrelor în n intervale egale, s-au calculat expresiile lui α_i pentru unele forme particulare ale funcției distribuției inițiale.

Astfel, pentru distribuția normală avem (fig. 2*a*, *b*)

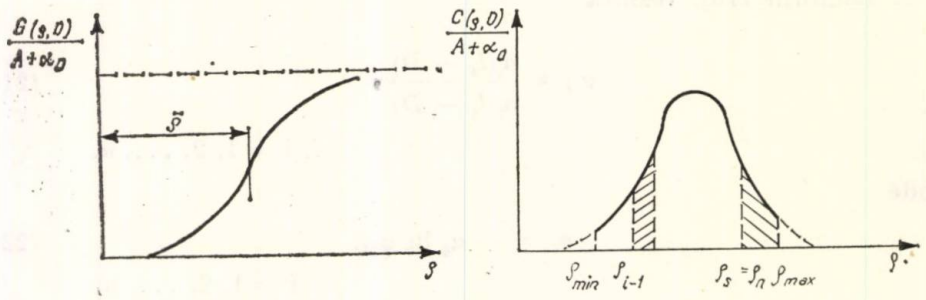


Fig. 2

$$\alpha_i = \frac{A + \alpha_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{i\rho_0 - \bar{\rho}}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(i-1)\rho_0 - \bar{\rho}}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right], \tag{26}$$

iar pentru distribuția asimetrică lognormală (fig. 4 *a*, *b*)

$$\alpha_i = \frac{A + \alpha_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{\ln i\rho_0 - \ln \rho_0}{\sqrt{2}\ln \sigma_g}\right) - \Phi\left(\frac{\ln (i-1)\ \rho_0 - \ln \rho_0}{\sqrt{2}\ln \sigma_g}\right)\right]. \tag{27}$$

Aici s-a notat:

σ — deviaţia standard a lui ρ, $\overline{\rho}$ — valoarea medie a lui ρ, Φ — funcţia lui Laplace, σ_g — deviaţia standard geometrică, ρ_g — media geometrică a lui ρ, ρ_0 — valoarea diviziunii gamei diametrelor.

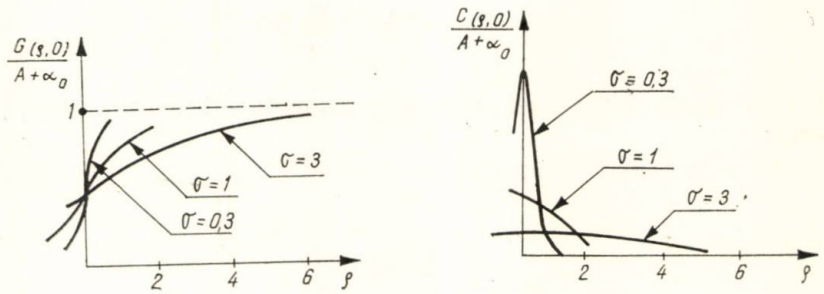


Fig. 3

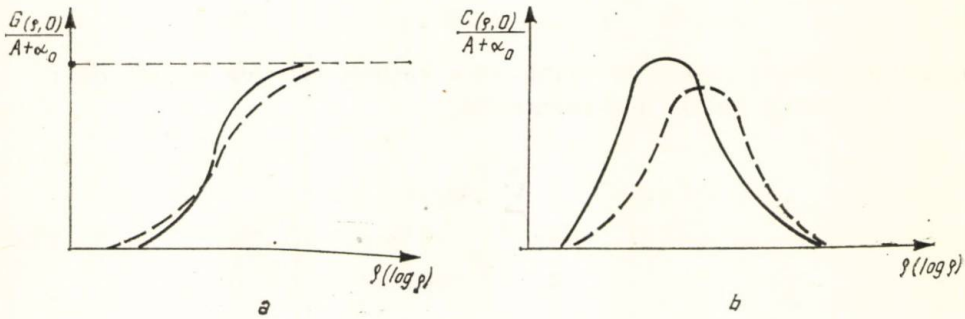


Fig. 4

În ipoteza distribuţiei granulometrice liniare şi pentru cazul unor distribuţii simple ale lungimilor l_i se pot scrie expresiile factorilor de cernere $\varkappa_i$ şi $\varkappa_{ij}$ ce formează în aceste cazuri serii simple de numere.

2.4. CURBELE DE SEPARARE

Curbele $\varphi_j = \varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ale căror ecuaţii sînt expresiile (17) descriu variaţia cantităţii de material din clasele respective de granulaţie de-a lungul lungimii sitei. Ele se numesc curbele de separare granulometrică. Trasarea acestor curbe se face prin puncte fără nici o dificultate, utilizînd expresiile (18), care reprezintă explicitări de forma $x = x$ (φ_j) $j = 1, \ldots, 2, n$.

O imagine de ansamblu a desfăşurării procesului cernerii ne oferă variaţia funcţiei densităţii de concentraţie K (ρ, x) de-a lungul lungimii sitei. Intersectînd această funcţie, reprezentată în sistemul triaxial x, ρ, K cu plane $x = \text{const}$, obţinem curbele densităţii de probabilitate, iar din intersecţia cu planele $\rho = \text{const}$, rezultă curbele concentraţiei.

În dependență de funcțiile φ_j se introduc cîteva funcții importante, ca :

— funcția concentrației :

$$\Gamma(\rho_{j-1}, \rho_j, x) = \frac{\alpha_j \varphi_j(x)}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)}, \tag{28}$$

ce definește concentrația unei clase de granule date într-un anumit punct x al sitei ;

— funcția totală a separării :

$$\varphi_t(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \tag{29}$$

ce caracterizează separarea simultană a tuturor claselor de material ;

— funcția totală a concentrației :

$$\Gamma_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)}. \tag{30}$$

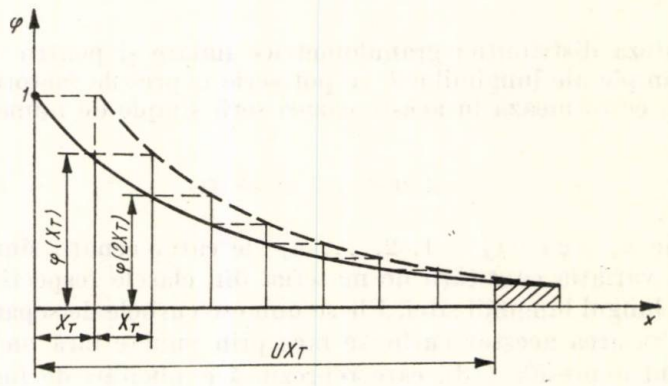


Fig. 5

Considerînd pentru simplitate cazul cernerii a două clase de granule, funcția $\varphi = \varphi(x)$ este reprezentată prin curba plină, iar curba reală de separare va fi curba în trepte (fig. 5). Aici s-a notat cu x_r lungimea saltului efectuat de material într-o perioadă de oscilație T a cadrului sitei.

Cantitatea totală de material de cernut aflată pe sită va fi proporțională cu aria cuprinsă între curba de separare și abscisă. Efectuînd integrala pentru clasa de granule j, după neglijarea termenilor de valoare foarte mică, obținem

$$G_{sj} = \alpha_j \left[\frac{\alpha_0}{\varkappa_j} (1 + \varphi_{jl} \ln \varphi_{jl}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\varkappa_i + \varkappa_j} \right] + \alpha_j \, l \, \varphi_{jl}. \tag{31}$$

Cantitatea totală a materialului de cernut aflat pe sită va fi

$$G_{st} = \alpha_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\varkappa_j} (1 + \varphi_{jl} \ln \varphi_{jl}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\varkappa_i + \varkappa_j} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, l \, \varphi_{jl}, \tag{32}$$

unde $\varphi_{jl} = \varphi_j(l)$.

Cantitatea de material trecut prin sită pe durata unui salt, deci într-o perioadă de oscilație, va fi proporțională cu aria, mărginită de cele două curbe continue, punctată și plină, precum și de dreapta $\varphi = 1$ (fig. 5). Obținem astfel

$$q_r = \alpha \, x_r(1 - \varphi_l). \tag{33}$$

Cantitatea de material trecut din clasa j va fi

$$q_{rj} = \alpha_j \, x_r(1 - \varphi_{jl}), \tag{34}$$

iar cantitatea totală de material este

$$q_{rt} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_r(1 - \varphi_{jl}). \tag{35}$$

Dacă notăm cu α_0 lățimea sitei și cu α_j' cantitatea de material din clasa j aflată în volumul inițial de lungime unitară și lățime de 1 m, atunci ultima relație devine

$$Q_{rt} = L_0 x_r \sum_{j=1}^{n} \alpha_j'(1 - \varphi_{jl}). \tag{36}$$

Din această expresie rezultă imediat atît debitul orar, cît și debitul orar raportat la 1 m lățime de sită.

2.5. UNELE PRECIZĂRI ÎN LEGĂTURĂ CU APLICABILITATEA FORMULELOR OBȚINUTE ȘI EXACTITATEA REZULTATELOR

Pentru ca relațiile de calcul obținute să ducă la rezultate acceptabile în condițiile idealizării fenomenului prin modelul matematic propus, este necesară precizarea anumitor limite atît în desfășurarea procesului

cernerii, cît şi unele aproximări făcute în desfăşurarea calculelor. În primul rînd este necesară o desfăşurare normală a procesului cernerii în sensul asigurării unei segregaţii normale continue, evitarea obturării pînzei sitei şi asigurarea unei alimentări unfirome cu material de aceeaşi compoziţie granulometrică. Segregaţia poate fi modificată de aglomerări de material, umiditate, procentajul granulelor critice, modul alimentării, grosimea stratului de material şi parametrii vibraţiei.

Ipoteza (6) presupune $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ constanţi pentru intervalele de granulaţie considerate. Presupunerea este valabilă pentru intervale infinit mici, şi cu cît intervalul finit este mai mare cu atît abatere este mai mare. Datorită variaţiei pantei curbei de distribuţie a curbei de distribuţie, există deosebiri calitative între intervalele de granulaţie şi deci, implicit, şi între factorii de cernere. Practic, se pot alege clase atît de strînse, astfel încît erorile să fie neglijabile.

La calculul formulelor factorilor $\varkappa_i$ s-au neglijat termenii de forma $\varphi_{ij}\,\varkappa^{ji}$. Efectul neglijării lor va fi cu atît mai mic cu cît φ_{0i} vor fi mai mici, ceea ce presupune determinări experimentale care să permită evaluarea precisă a unor cantităţi cît mai mici de material. Jumătate din factorii $\varkappa_{ij}$ vor lua valori supraunitare, iar cealaltă jumătate valori subunitare. Dacă vor apărea valori mult subunitare, termenii $\varphi_{0i}\,\varkappa^{ij}$ corespunzători nu se vor putea neglija. Acest lucru se poate întîmpla în cazul unei game foarte largi de granulaţie (de exemplu, în cazul distribuţiei normale $\sigma > 1$, fig. 3 *a*, 3 *b*), ceea ce este contraindicat din punct de vedere tehnologic. Eroarea de determinare a funcţiilor $\varphi_j(x)$ datorită neglijării funcţiilor $\varphi_{0i}\,\varkappa^{ji}$ se poate evalua pentru anumite valori ale lui x după determinările experimentale.

3. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

3.1. CONSIDERAŢII GENERALE

Variaţia cantităţii de material în deplasarea sa de-a lungul sitei se poate determina experimental prin recoltarea unui set de probe în diferite puncte de-a lungul sitei, la care se fac apoi analizele granulometrice. În cazul cînd distribuţia granulometrică a materialului nu este identică în toată masa materialului de alimentare sau cînd alimentarea nu se face cantitativ uniform pe toată lăţimea sitei, nu este suficientă recoltarea unei singure probe la fiecare dintre distanţele $x = l_1, l_2, \ldots$ Am considerat că aplicarea metodei statistice a sondajului simplu repetat de o singură caracteristică dă în acest caz un rezultat reprezentativ.

Astfel, stratul de material de la punctul de abscisă x, de lăţime unitară şi lungime egală cu lăţimea sitei, formează colectivitatea generală $A(x)$. Din aceasta se scoate la întîmplare subcolectivitatea de selecţie $B(x)$. Precizia selecţiei depinde atît de variaţia caracteristicii studiate (în cazul nostru curba de distribuţie), cît şi de volumul selecţiei. Unităţile sondajului colectivităţii generale iau valorile $a_1, a_2, \ldots, a_M$. Unitatea

a_i(a i-a probă individuală) va avea distribuţia $G_{i1}, G_{i2}, \ldots, G_{in}$. Valorile tipice ale colectivităţii $A(x)$ care ne interesează vor fi valorile medii:

$$\begin{aligned} \overline{G}_1 &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} G_{i1}, \\ \overline{G}_2 &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} G_{i2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \overline{G}_n &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} G_{in}, \end{aligned} \tag{37}$$

Valori care să aproximeze cît mai exact valorile medii de mai sus, se obţin prin recoltarea unei subcolectivităţi $B(x)$ de unităţi $b_1, b_2, \ldots, b_N$, unitatea b_j avînd distribuţia $g_{1j}, g_{2j}, \ldots, g_{nj}$. Valorile medii ale elementelor după colectivitatea B vor fi

$$\begin{aligned} \overline{q}_1 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_{i1}, \\ \overline{q}_2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_{i2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \overline{q}_n &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_{in}, \end{aligned} \tag{38}$$

$\overline{q}_1, \overline{q}_2, \ldots, \overline{q}_n$ reprezintă mediile de selecţie, fiind variabile aleatoare ce variază de la sondaj la sondaj. Utilizînd inegalitatea lui Cebîşev se ajunge la inegalitatea [25]

$$\overline{q}_j - \overline{r}_j < G_j < \overline{q}_j + \overline{r}_j, \tag{39}$$

care face legătura între $\overline{G}_j$ şi $\overline{q}_j$.

Aici s-a notat [25]

$$\overline{r}_j = k\,\frac{\overline{s}_j\sqrt{1-f}}{\sqrt{N}}, \tag{40}$$

$k = 3$, pentru ca inegalităţile (39) să aibă loc cu o probabilitate mai mare decît 0,89

$$f = \frac{N}{M}\,;\quad \overline{S}_j = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}(q_{ij} - q_j)^2. \tag{41}$$

Inegalitatea (39) ne arată cît este de apropiată cantitatea calculată de probele de selecţie $\overline{q}_j$ faţă de canitatea reală G_j.

3.2. EXPERIENȚELE EFECTUATE LA UZINELE SODICE OCNA-MUREȘ

Probele au fost recoltate pe o sită vibratoare de tipul: RHEWUM Schall-Siebmaschine Typ: 1369—180, anul fabricației 1965, avînd următoarele caracteristici:

— excitația vibratoare perpendiculară e pînza sitei efectuată cu ajutorul a 60 buc., electromagneți dispuși în 6 rînduri orizontale;

— amplitudinea și frecvența reglabile între 0,1+4 mm și, respectiv, 50 + 150 Hz, cu posibilitatea unor vibrări puternice la anumite intervale de timp pentru curățirea pînzei;

— pînza sitei formată din plasă de sîrmă rotundă împletită de diametru 0,35 mm, cu orificii dreptunghiulare avînd deschiderea 0,4 mm × × 1,2 mm;

— înclinarea pînzei sitei față de orizontală aproximativ 45°, lungimea 1800 mm, lățimea utilă aproximativ 2000 mm.

Materialul de alimentare a fost soda grea, omogenă, cu granule sferoidale, avînd granulația în general mai mică de 1 mm, fără impurități. Scopul cernerii era desprăfuirea mecanică a sodei, respectiv, eliminarea granulelor sub 0,4 mm. Lungimea sitei s-a împărțit în șase distanțe echidistante, iar în fiecare punct astfel obținut s-au luat cîte trei probe de-a lungul lățimii sitei. Analiza granulometrică a fiecărei probe s-a făcut cu ajutorul unui dispozitiv vibrator de tipul RHEWUM Remscheid-Lutringausen Schallfixsieb, pe care s-au montat cinci site standard cu ochiuri pătrate; dimensiunile laturilor ochiurilor avînd; 1,0 mm, 0,8 mm, 0,4 mm, 0,2 mm și 0,16 mm. Sitele fiind suprapuse în ordine descrescătoare, fracțiunea de material rămasă pe fiecare sită se consideră ca aparținînd unei clase de material în sensul definit anterior. Primele trei fracțiuni constituie refuzul, iar ultimele trei materialul ce va trece prin sită.

Rezultatele analizelor, inclusiv valorile calculate după formulele (38), (39) și (40), sînt cuprinse în tabelele 1*a*, 1*b*, 1*c*, 1*d*, 1*f*, 1*g*. O sinteză a acestor date este cuprinsă în tabela 2. Aici $G_i^{(k)}$ reprezintă cantitatea fracțiunii clasei i ($i = 1, 2, 3$) aflată la distanța $l_k (k = 0,1, 2, \ldots 5, L)$. În tabelă sînt calculate valorile reale în punctele date ale funcțiilor $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$), precum și valorile corespunzătoare funcțiilor concentrației ale celor trei clase. Se aleg valorile $\varphi_{01} = 0,066$, $\varphi_{02} = 0,039$ și $\varphi_{03} = 0,029$, iar din formulele (21) și (23) rezultă factorii de cernere $\varkappa_1 = 0,24$, $\varkappa_2 = = 0,22$ și $\varkappa_3 = 0,2$. Cu ajutorul relațiilor (18) și (29) s-au calculat prin puncte funcțiile φ_1, φ_2, φ_3, φ_t și s-au trasat curbele de separare din figurile 6, 7, 8 și 9. Utilizînd relațiile (28) și (30) au fost trasate curble concentrațiilor Γ_1, Γ_2, Γ_3 și Γ_t din figurile 10 și 11.

Ținînd seama că diferențele dintre valorile reale și cele calculate sînt mici în raport cu precizia cerută în evaluarea proceselor industriale se poate afirma că formulele obținute aproximează suficient de exact fenomenul cernerii, cel puțin în acest caz particular.

S-au evaluat apoi erorile ce pot apărea în calculul și trasarea curbelor. Erorile relative ale absciselor în punctele în care s-au recoltat probele corespunzătoare funcțiilor φ_{0i} ce apar datorită aproximărilor făcute la calculul factorilor au fost $\varepsilon_1 = 1,41\%$, $\varepsilon_2 = 1,07\%$, $\varepsilon_3 = 1,55\%$ pentru funcțiile φ_1, φ_2, resectiv, φ_3.

Tabela 1a

Rezultatele analizelor granulometrice ale probelor colectate şi prelucrarea lor

		$q_{i1}[g]$	$q_{i2}[g]$	$q_{i3}[g]$	$\bar{q} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} q_{ij}$	$\bar{s}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3}(q_{ij}-\bar{q})^2$	$\bar{r} = 3\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}$ $\left(\bar{r} = 2\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}\right)$	$\bar{q} - \bar{r} < G < \bar{q} + \bar{r}$
$x = l_0 = 0$	$q_1^{(0)}$	$q_{11}^{(0)} = 4{,}5$	$q_{12}^{(0)} = 3{,}0$	$q_{13}^{(0)} = 2{,}6$	3,33	0,995	1,8 (1,06)	$1{,}53 < G < 5{,}15$ $(2{,}27 < G < 4{,}39)$
	$q_2^{(0)}$	$q_{21}^{(0)} = 0{,}1$	$q_{22}^{(0)} = 5{,}2$	$q_{23}^{(0)} = 3{,}8$	5,66	4,8	3,5 (2,33)	$3{,}16 < G < 9{,}16$ $(3{,}33 < G < 7{,}99)$
	$q_3^{(0)}$	8,2	6,5	6,1	6,93	1,24	1,78 (1,18)	$5{,}15 < G < 8{,}71)$ $(5{,}75 < G < 8{,}11)$
	$q_4^{(0)}$	79,0	70,4	69,5	72,96	27,5	8,37 (5,6)	$64{,}59 < G < 81{,}33$ $(67{,}36 < G < 78{,}56)$
	$q_5^{(0)}$	19,0	18,3	29,6	22,30	39,9	10 (6,7)	$12{,}30 < G < 32{,}30$ $(15{,}60 < G < 28{,}0)$
	$q_6^{(0)}$	3,0	5,1	4,8	4,30	0,69	1,32 (0,875)	$3 < G < 5{,}62$ $(3{,}42 < G < 5{,}16)$
	$\sum_{i=1}^{6} q_{ij}^{(0)}$	101,0	93,84	103,9	99,56	26,98	8,32 (5,55)	$91{,}24 < G < 107{,}88$ $(94{,}01 < G < 105{,}11)$
	$\sum_{i=1}^{6} q_{ij}^{(0)}$	121,7	108,5	116,4	115,5	43,77	10,5 (7,5)	$105 < G < 126{,}0$ $(108{,}45 < G < 122{,}55)$

Tabela 1b

		$q_{i1}[g]$	$q_{i2}[g]$	$q_{i3}[g]$	$\bar{q} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} q_{ij}$	$\bar{s}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3}(q_{ij}-\bar{q})^2$	$\bar{r} = 3\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}$ $\left(\bar{r} = 2\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}\right)$	$\bar{q} - \bar{r} < G < \bar{q} + \bar{r}$
$x = l_1 = 300$ mm	$q_1^{(1)}$	$q_{11}^{(1)} = 1{,}8$	$q_{12}^{(1)} = 1{,}0$	$q_{13}^{(1)} = 1{,}5$	1,63	0,46	1,08 (0,72)	0,55 < G < 2,71 (0,91 < G < 2,35)
	$q_2^{(1)}$	$q_{21}^{(1)} = 3{,}0$	$q_{22}^{(1)} = 2{,}8$	$q_{23}^{(1)} = 3{,}6$	3,12	0,24	0,77 (0,51)	2,35 < G < 3,89 (2,61 < G < 3,61)
	$q_3^{(1)}$	3,2	3,6	3,9	3,66	0,135	0,59 (0,39)	3,07 < G < 4,25 (3,27 < G < 4,05)
	$q_4^{(1)}$	76,5	71,2	77,2	74,96	10,73	5,2 (3,47)	69,76 < G < 80,16 (71,49 < G < 78,43)
	$q_5^{(1)}$	22,5	20,2	13,0	18,56	24,6	7,92 (5,27)	10,6 < G < 26,5) (13,3 < G < 23,83)
	$q_6^{(1)}$	4,3	3,9	3,6	3,93	0,125	0,57 (0,38)	3,36 < G < 4,5) (3,55 < G < 4,31)
	$\sum_{i=4}^{6} q_{ij}^{(1)}$	103,3	95,3	93,8	97,46	26,03	8,2 (5,46)	89,26 < G < 105,66) (92,0 < G < 102,92
	$\sum_{i=1}^{6} q_{ij}^{(1)}$	111,3	102,7	102,8	105,87	24,45	7,91 (5,25)	97,96 < G < 113,78 (97,96 < G < 111,14)

Tabela 1c

		$q_{i1}[g]$	$q_{i2}[g]$	$q_{i3}[g]$	$\bar{q} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} q_{ij}$	$\bar{s}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3}(q_{ij}-\bar{q})^2$	$\bar{r} = 3\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}$ $\left(\bar{r} = 2\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}\right)$	$\bar{q} - \bar{r} < G < \bar{q} + \bar{r})$
$x = l_2 = 600$ mm	$q_1^{(2)}$	0,7	0,6	0,9	0,73	0,023	0,24 (0,16)	$0{,}49 < G < 0{,}97$ $(0{,}57 < G < 0{,}89)$
	$q_2^{(2)}$	1,4	1,7	1,5	1,53	0,023	0,24 (0,16)	$1{,}29 < G < 1{,}77$ $(1{,}37 < G < 1{,}69)$
	$q_3^{(2)}$	1,8	1,9	2,1	1,94	0,023	0,24 (0,16)	$1{,}70 < G < 2{,}18$ $(1{,}78 < G < 2{,}10)$
	$q_4^{(2)}$	74,0	73,2	68,2	71,8	9,89	5,03 (3,36)	$66{,}77 < G < 76{,}83$ $(68{,}44 < G < 75{,}16)$
	$q_5^{(2)}$	21,0	20,7	19,8	20,5	0,39	1,0 (0,66)	$19{,}5 < G < 21{,}5$ $(19{,}84 < G < 21{,}16$
	$q_6^{(2)}$	3,2	3,5	3,5	3,4	0,03	0,276 (0,18)	$3{,}14 < G < 3{,}68$ $(3{,}22 < G < 3{,}58)$
	$\sum_{i=4}^{6} q_{ij}^{(2)}$	98,2	97,4	91,5	95,7	12,9	5,76 (3,84)	$89{,}94 < G < 101{,}46$ $(91{,}86 < G < 99{,}54)$
	$\sum_{i=1}^{6} q_{ij}^{(2)}$	102,1	101,6	96,0	99,9	11,45	5,4 (3,6)	$94{,}5 < G < 105{,}3$ $(96{,}5 < G < 103{,}5)$

Tabela 1d

		$q_{i1}[g]$	$q_{i2}[g]$	$q_{i3}[g]$	$\bar{q} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} q_{ij}$	$\bar{s}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3}(q_{ij}-\bar{q})^2$	$\bar{r} = 3\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}$ $\left(\bar{r} = 2\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}\right)$	$\bar{q} - \bar{r} < G < \bar{q} + \bar{r}$
$x = l_3 = 900$ mm	$q_1^{(3)}$	0,4	0,4	0,3	0,36	0,0034	0,005 (0,004)	$0{,}355 < G < 0{,}365$ $(0{,}356 < G < 0{,}364$
	$q_2^{(3)}$	0,9	0,7	0,6	0,73	0,023	0,24 (0,16)	$0{,}49 < G < 0{,}97$ $(0{,}57 < G < 0{,}89)$
	$q_3^{(3)}$	1,2	1,1	1,3	1,2	0,01	0,16 (0,107)	$1{,}04 < G < 1{,}36$ $(1{,}09 < G < 1{,}31)$
	$q_4^{(3)}$	73,4	75,5	76,1	75,0	2	2,26 (1,5)	$72{,}74 < G < 77{,}26$ $(73{,}5 < G < 76{,}5)$
	$q_5^{(3)}$	19,8	19,4	21,2	20,2	0,9	1,51 (1,02)	$18{,}69 < G < 21{,}71$ $(19{,}18 < G < 21{,}22)$
	$q_6^{(3)}$	3,4	3,2	3,0	3,2	0,04	0,32 (0,21)	$2{,}88 < G < 3{,}52$ $(2{,}99 < G < 3{,}41)$
	$\sum_{i=4}^{6} q_{ij}^{(3)}$	96,6	98,1	100,3	98,3	3,31	2,91 (1,94)	$95{,}39 < G < 101{,}21)$ $(96{,}81 < G < 99{,}74)$
	$\sum_{i=1}^{6} q_{ij}^{(4)}$	99,1	100,3	102,5	100,59	2,97	4,75 (3,16)	$95{,}84 < G < 105{,}34$ $(97{,}4 < G < 103{,}75)$

Tabela 1e

		$q_{i1}[g]$	$q_{i2}[g]$	$q_{i3}[g]$	$\bar{q} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} q_{ij}$	$\bar{s}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3}(q_{ij} - \bar{q})^2$	$\bar{r} = 3\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}$ $\left(\bar{r} = 2\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}\right)$	$\bar{q} - \bar{r} < G < \bar{q} + \bar{r}$
$x = l_4 = 1.200$ mm	$q_1^{(4)}$	0,2	0,2	0,3	0,23	0,0041	0,1 (0,07)	$0{,}13 < G < 0{,}33$ $(0{,}16 < G < 0{,}31)$
	$q_2^{(4)}$	0,4	0,3	0,5	0,4	0,01	0,16 (0,11)	$0{,}24 < G < 0{,}56$ $(0{,}29 < G < 0{,}51)$
	$q_3^{(4)}$	0,7	1,0	0,8	0,83	0,023	0,24 (0,16)	$0{,}6 < G < 1{,}07$ $(0{,}67 < G < 0{,}99)$
	$q_4^{(4)}$	73,7	77,2	68,7	73,2	18,22	7,8 (4,54)	$66{,}4 < G < 80{,}8$ $(68{,}66 < G < 77{,}74)$
	$q_5^{(4)}$	23,0	19,7	18,6	20,4	5,43	3,73 (2,48)	$16{,}67 < G < 24{,}13$ $(17{,}92 < G > 22{,}88)$
	$q_6^{(5)}$	4,0	3,2	2,9	3,36	1,26	1,0 (0,67)	$2{,}36 < G < 4{,}36$ $(2{,}69 < G < 4{,}03)$
	$\sum_{i=4}^{6} q_{ij}^{(4)}$	98,2	94,4	97,9	96,8	4,45	3,36 (2,25)	$93{,}44 < G < 100{,}11$ $(94{,}55 < G < 99{,}05)$
	$\sum_{i=1}^{6} q_{ij}^{(4)}$	99,5	95,9	99,5	98,3	4,31	3,33 (2,22)	$94{,}97 < G < 101{,}63$ $(96{,}08 < G < 100{,}52)$

Tabela 1f

		$q_{i1}[g]$	$q_{i2}[g]$	$q_{i3}[g]$	$\bar{q} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} q_{ij}$	$\bar{s}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3}(q_{ij}-\bar{q})^2$	$\bar{r} = 3\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}$ $\left(\bar{r} = 2\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}\right)$	$\bar{q} - \bar{r} < G < \bar{q} + \bar{r}$
$x = l_5 = 1.500$ mm	$q_1^{(5)}$	0,2	0,1	0,2	0,17	0,0033	0,09 (0,06)	$0{,}08 < G < 0{,}26$ $(0{,}11 < G < 0{,}23)$
	$q_2^{(5)}$	0,2	0,3	0,2	0,23	0,0041	0,1 (0,07)	$0{,}13 < G < 0{,}33$ $(0{,}16 < G < 0{,}3\ )$
	$q_3^{(5)}$	0,4	0,5	0,3	0,4	0,01	0,16 (0,11)	$0{,}24 < G < 0{,}56$ $(0{,}29 < G < 0{,}51)$
	$q_4^{(5)}$	73,7	77,2	68,7	73,2	18,22	6,8 (4,54)	$66{,}4 < G < 80{,}8$ $(68{,}66 < G < 77{,}74)$
	$q_5^{(5)}$	20,2	17,9	22,0	20,03	4,21	3,28 (2,18)	$16{,}75 < G < 23{,}31$ $(19{,}85 < G < 22{,}21)$
	$q_6^{(5)}$	3,0	4,0	3,1	3,37	0,31	0,89 (0,59)	$2{,}48 < G < 4{,}26$ $(2{,}78 < G < 3{,}96)$
	$\sum_{i=4}^{6} q_{ij}^{(5)}$	96,9	99,1	93,8	73,2	7,05	4,25 (2,83)	$92{,}35 < G < 100{,}85$ $(94{,}77 < G < 99{,}43)$
	$\sum_{i=4}^{6} q_{ij}^{(5)}$	97,7	100,0	94,5	97,40	7,62	4,44 (2,96)	$92{,}96 < G < 101{,}84$ $(96{,}44 < G < 100{,}36)$

Tabela 1g

		$q_{i1}[g]$	$q_{i2}[g]$	$q_{i3}[g]$	$\bar{q} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} q_{ij}$	$\bar{s}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3}(q_{ij} - \bar{q})$	$r = 3\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}$ $\left(r = 2\bar{s}\sqrt{\frac{1-f}{3}}\right)$	$\bar{q} - \bar{r} < G < \bar{q} + \bar{r}$
$x = Lz = 1\,800$ mm	q_1^L	0,1	0,2	0,2	0,17	0,0033	0,09 (0,06)	$0{,}08 < G < 0{,}26$ $(0{,}11 < G < 0{,}23)$
	q_2^L	0,2	0,2	0,3	0,23	0,0041	0,1 (0,07)	$0{,}13 < G < 0{,}33$ $(0{,}16 < G < 0{,}3)$
	q_3^L	0,2	0,2	0,2	0,2	0	0	$G = 0{,}2$
	q_4^L	72,0	77,1	69,0	72,7	16,74	6,42 (4,35)	$66{,}45 < G < 78{,}95$ $(68{,}35 < G < 77{,}05)$
	q_5^L	23,0	18,6	21,3	20,96	4,91	3,55 (2,36)	$17{,}41 < G < 24{,}51)$ $(18{,}60 < G < 23{,}31)$
	q_6^L	3,1	4,2	2,0	3,1	1,21	1,76 (1,17)	$1{,}34 < G < 4{,}86$ $(1{,}93 < G < 4{,}27)$
	$\sum_{i=4}^{6} q_{ij}^L$	98,1	99,9	92,3	96,97	15,77	6,35 (4,22)	$90{,}41 < G < 103{,}11$ $(92{,}54 < G < 100{,}98)$
	$\sum_{i=1}^{6} q_{ij}^L$	98,6	100,5	93,0	97,36	15,19	6,26 (4,18)	$91{,}1 < G < 103{,}62$ $(93{,}8 < G < 101{,}54)$

Tabela 2

		$G_1[g]$	$G_2[g]$	$G_3[g]$	$G_r = \alpha_0$ $[g]$	$\frac{G_1}{\alpha_1}$	$\frac{G_2}{\alpha_2}$	$\frac{G_3}{\alpha_3}$	$\sum_{i=1}^{3} G_i$	$\frac{G_1}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{3} G_i}100$	$\frac{G_2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{3} G_i}100$	$\frac{G_3}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{3} G_i}100$
$x = 0$	$G^{(0)}$	$G_1^{(0)}=\alpha_1=3{,}33$	$G_2^{(0)}=\alpha_2=5{,}66$	$G_3^{(0)}=\alpha_3=6{,}93$	97,42	1	1	1	15,92	2,84	5	6,1
$x = l_1$	$G^{(1)}$	$G_1^{(1)} = 1{,}63$	$G_2^{(1)} = 3{,}11$	$G_3^{(1)} = 3{,}66$	97,42	0,49	0,55	0,53	8,40	1,54	2,94	3,66
$x = l_2$	$G^{(2)}$	$G_1^{(2)} = 0{,}73$	$G_2^{(2)} = 1{,}53$	$G_3^{(2)} = 1{,}94$	97,42	0,22	0,27	0,28	4,21	0,72	1,5	1,91
$x = l_3$	$G^{(3)}$	$G_1^{(3)} = 0{,}36$	$G_2^{(3)} = 0{,}73$	$G_3^{(3)} = 1{,}2$	97,42	0,108	0,13	0,173	2,29	0,361	0,732	1,2
$x = l_4$	$G^{(4)}$	$G_1^{(4)} = 0{,}23$	$G_2^{(4)} = 0{,}4$	$G_3^{(4)} = 0{,}83$	97,42	0,066	0,071	0,12	1,46	0,233	0,405	0,844
$x = l_5$	$G^{(5)}$	$G_1^{(5)} = 0{,}17$	$G_2^{(5)} = 0{,}23$	$G_3^{(5)} = 0{,}4$	97,42	0,051	0,039	0,058	0,80	0,173	0,234	0,406
$x = l_L$	G^{L}	$G_1^{(L)} = 0{,}17$	$G_2^{L} = 0{,}23$	$G_3^{L} = 0{,}2$	97,42	0,051	0,039	0,029	0,60	0,173	0,234	0,204

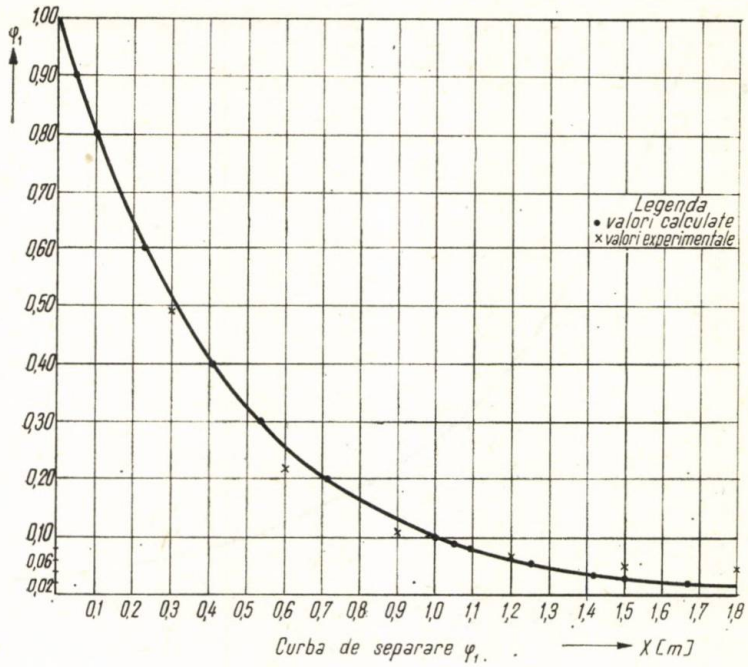

φ1
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,06
0,02
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8
Legenda
• valori calculate
× valori experimentale
Curba de separare φ1.
X [m]

Fig. 6

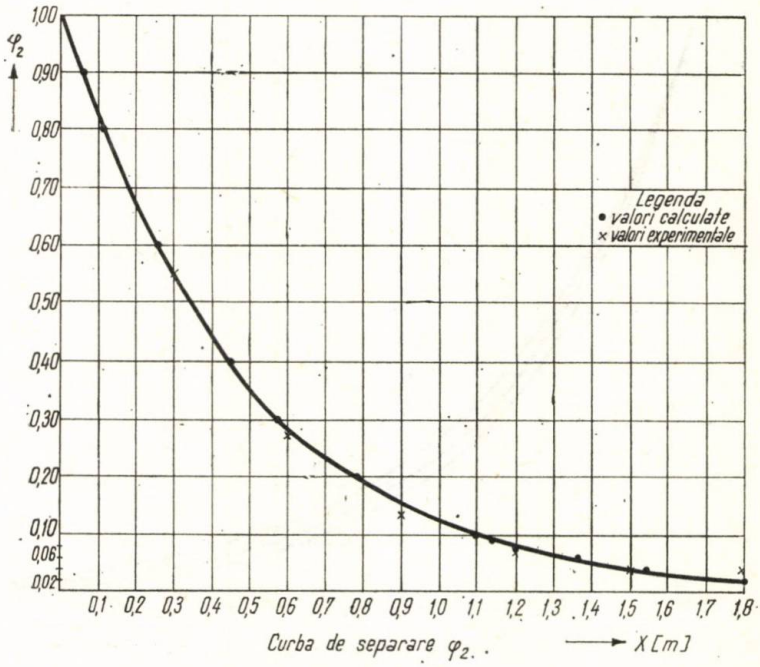

φ2
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,06
0,02
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8
Legenda
• valori calculate
× valori experimentale
Curba de separare φ2.
X [m]

Fig. 7

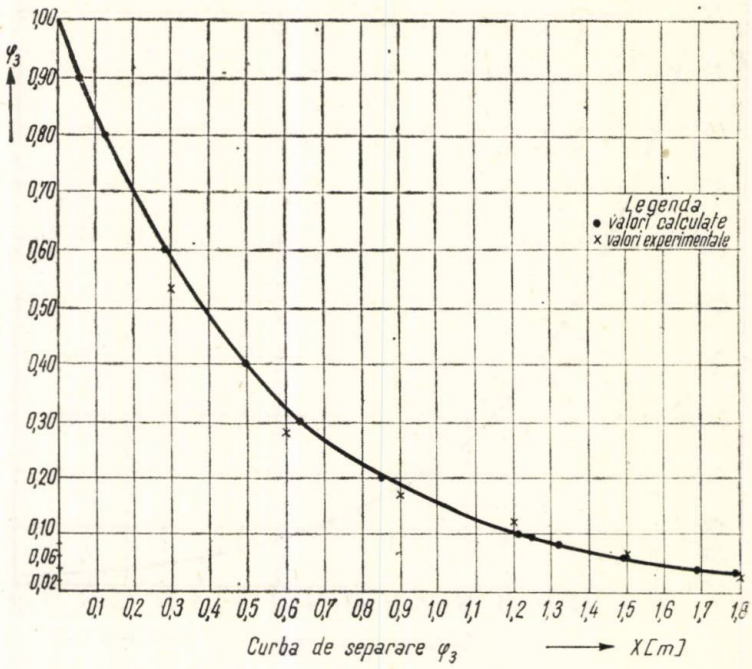

φ_3
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,06
0,02
Legenda
• valori calculate
× valori experimentale
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8
Curba de separare φ_3
X[m]

Fig. 8

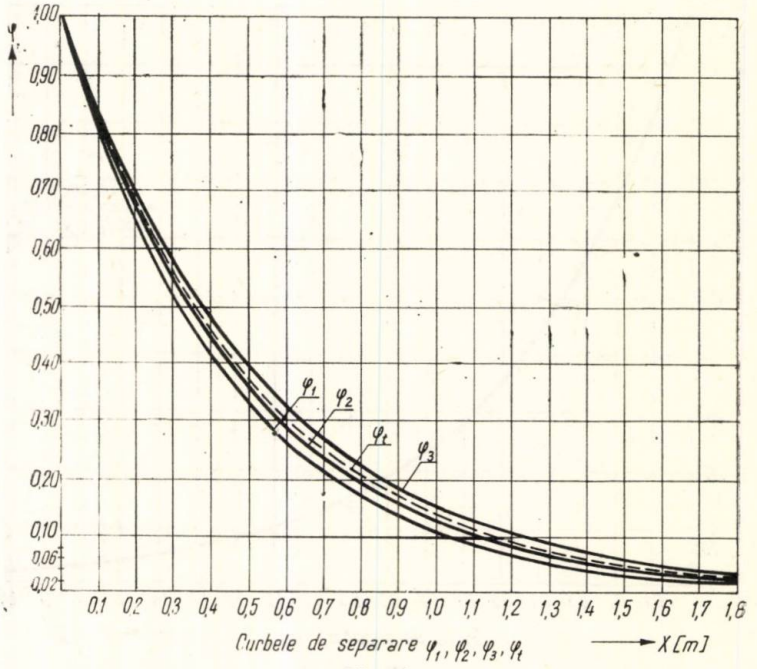
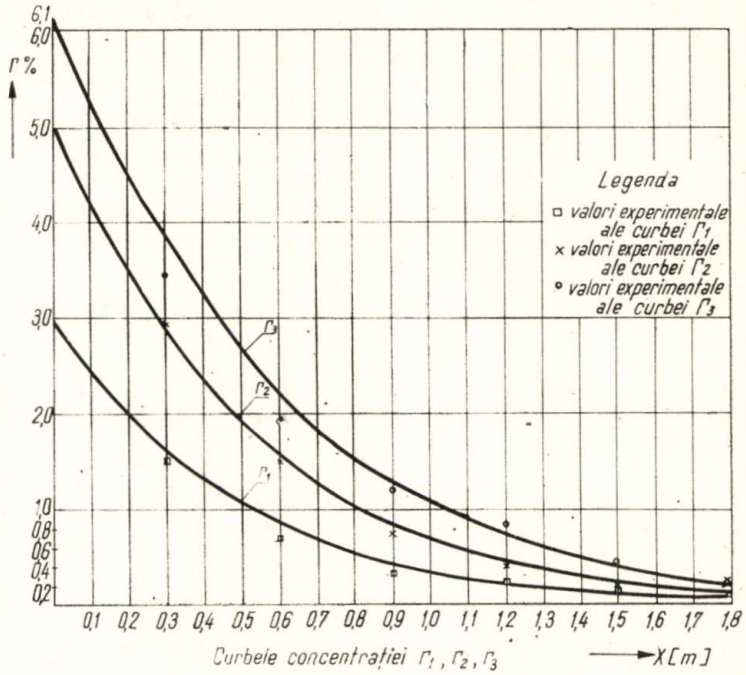
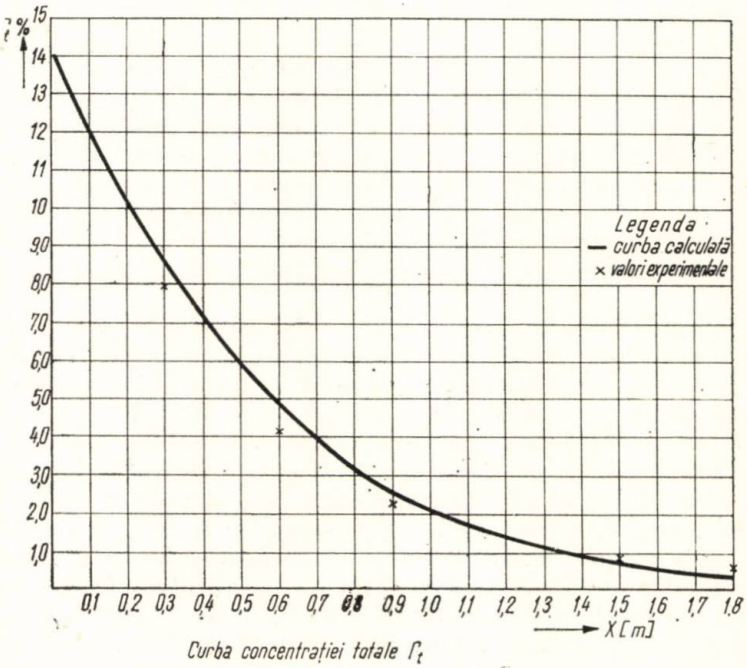

φ
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,06
0,02
φ_1
φ_2
φ_t
φ_3
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8
Curbele de separare $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_t$
X[m]

Fig. 9



Curbele concentrației $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$

Fig. 10



Curba concentrației totale Γ_t

Fig. 11

Fluctuaţia punctelor curbelor experimentale în jurul valorilor reale efective se poate micşora oricît dacă există posibilitatea luării unui număr de probe N cît mai apropiat de numărul M maxim. O apreciere cantitativă în acest sens la nivelul fiecărei fracţiuni de material s-a făcut cu ajutorul inegalităţii (39) în tabelele $1a - 1g$. Cîntărirea fracţiunilor de material s-a făcut cu o balanţă avînd precizia $\Delta G = \pm 0{,}05$ g. Erorile relative raportate la cantităţile medii din tabela 2, au fost cuprinse între limitele : $\varepsilon_{G1} = 1{,}5\%-29{,}4\%$ pentru funcţia φ_1, $\varepsilon_{G2} = 0{,}88\% - 21{,}8\%$ pentru φ_2 şi $\varepsilon_{G3} = 0{,}72\%-25\%$ pentru φ_3.

Erorile s-au calculat cu formula

$$\varepsilon_G = \frac{\Delta G}{G} 100\%. \tag{42}$$

Formula de calcul a erorii relative a funcţiei concentraţiei obţinută cu ajutorul relaţiei (28) este

$$\frac{\Delta \Gamma_j}{\Gamma_j} = \left[1 - n \frac{G_j}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} G_i}\right] \frac{\Delta G}{G} 100\%. \tag{43}$$

Erorile relative pentru funcţiile Γ_1, Γ_2, Γ_3 au fost cuprinse între limitele $\varepsilon_{\Gamma_1} = 1{,}37\% - 28{,}6\%$, $\varepsilon_{\Gamma_2} = 0{,}71\% - 22{,}5\%$ şi $\varepsilon_{\Gamma_3} = 0{,}6\% - 24{,}2\%$.

4. CONCLUZII

În introducere s-a văzut că puţini autori au abordat studiul teoretic al separării granulometrice pe site vibratoare. Din cele cîteva lucrări citate, ca [13], [17], ce se referă la vibroseparareа fără înaintarea concomitentă a materialului şi [14], [15] cu înaintarea concomitentă a materialului de-a lungul sitei, se pot desprinde cîteva constatări. Formularea matematică a ipotezelor cernerii s-a făcut prin analogie cu scurgerea unui fluid în sensul că se consideră valabilă ipoteza proporţionalităţii variaţiei cantităţii de material trecut prin sită cu cantitatea de material rămas pe sită.

Caracterul formal al ecuaţiilor astfel obţinute este accentuat şi din cauza coeficienţilor de proporţionalitate, care s-au considerat fie identici cu probabilitatea de trecere prin ochiurile sitei a unei granule individuale în cădere liberă fără a atinge pînza sitei, fie dintre produsul între această probabilitate şi probabilitatea simplificată ca o granulă individuală să ajungă pe un strat în imediata apropiere a pînzei.

Ipoteza (6) se referă în primul rînd la separarea unei fracţiuni de granulaţie aproximativ identică dimensional, iar în al doilea rînd se consideră valabilă proporţionalitatea dintre variaţia cantităţii fracţiunii de material căzut sub sită şi concentraţia (nu cantitatea) fracţiunii rămasă pe sită din volumul de la o anumită distanţă x de-a lungul sitei. Această formulare este mult mai apropiată de fenomenul fizic real decît cele citate anterior.

În legătură cu factorul de proporționalitate $\varkappa$, care a fost denumit factor de cernere, s-a arătat că nu este corect a-l considera identic ca valoare cu probabilitatea de trecere a granulei individuale prin ochiurile sitei. Formulele de calcul (20) pentru factorii de cernere $\varkappa_i$, aferenți fiecărei clase de granule, au un conținut mult mai bogat. Fiecare factor $\varkappa_i$ depinde de cantitățile inițiale $\varkappa_i$ ale tuturor claselor de granule, de cantitatea de refuz α_0, iar prin intermediul distanțelor l_1, l_2, ... și a cantităților fracțiunilor conținute în probele luate, factorul $\varkappa_i$ depinde indirect de probabilitățile reale de a se strecura prin ochiurile sitei ale tuturor claselor de granule.

Prin introducerea funcției densității concentrației $K(\rho, x)$ (4) s-a putut opera cu această funcție ca fiind o densitate de probabilitate în raport cu variabila ρ. Acest lucru era necesar pentru că distribuția granulometrică are în general un caracter statistic. Justificarea matematică rezultă din aceea că funcția $K(\rho, x)$ respectă egalitatea (5), ce caracterizează o densitate de probabilitate. Soluția ecuației (7) reprezintă variația distribuției granulometrice inițiale de-a lungul sitei vibratoare. În cazurile concrete această variație este dată de curbele concentrației. Modelele matematice citate mai sus nu țin seama de distribuția granulometrică inițială a materialului și din acest motiv nu s-a putut evidenția nici dependența dintre acest indicator esențial și eficiența cernerii.

Trebuie, de asemenea, remarcat că în formulele obținute nu intervin „diametrele" ρ_i ale granulelor. Dacă aceste mărimi ar fi apărut explicit în calcule, atunci aplicarea metodei s-ar fi restrîns numai la cazul particular al granulelor de formă sferoidală. Dimensiunile granulelor intervin indirect și sînt caracterizate de calitatea granulelor de a cădea sau a nu cădea prin ochiuri de diferite mărimi ale sitelor standard. Acest fapt a permis ocolirea problemei spinoase a definirii unui „diametru" pentru o granulă de formă oarecare.

Rezultatele investigațiilor teoretice sînt formulele de calcul pentru curbele de separare (18), curbele concentrației (28), curbele totale ale separării (29) și concentrației (30), debit (35), (36) și cantitatea de material de cernut aflată pe toată lungimea sitei (32). În general, autorii citați propun unele relații de calcul semiempirice, curbele fiind trasate experimental cu excepția curbelor de separare din [14] și [15], calculate pe baza ipotezei discutate anterior. Pentru aplicarea formulelor deduse în cadrul lucrării este necesară recoltarea și analiza unui număr redus de probe, cu ajutorul cărora se calculează factorii de cernere $\varkappa_i$. Volumul acestor experiențe este mult mai mic decît cel necesar trasării unei singure curbe experimentale de separare.

Dacă se are în vedere procedeul de luare al probelor, de prelucrare a probelor și de analiză granulometrică cuprins în propunerea I.S.O. [26], după care s-au efectuat determinările experimentale, economia de timp este evidentă.

Experiențele efectuate la Uzinele sodice Ocna-Mureș au avut ca scop determinarea valorilor curbelor experimentale de separare și concentrație pentru mai multe puncte de-a lungul sitei, precum și determinarea valorilor ce intră în calculul factorilor de cernere $\varkappa_i$. Deoarece în literatură nu se precizează metoda efectivă de lucru [19], [9], am adopl-

tat și am aplicat metoda statistică a sondajului simplu repetat de o singură caracteristică.

Comparînd curbele rezultate din calcul cu valorile determinate experimental, rezultă o foarte mare apropiere între ele (fig. 6, 7, 8, 9, 10, 11), în raport cu abaterile de 20%—30% ce se înregistrează curent la evaluarea unor asemenea procese industriale. Trebuie remarcat că acest caz a fost favorizat de o serie de factori ce au contribuit la o foarte bună separare, ca, granule uniforme sferoidale, vibrări periodice puternice, scurte intervale de timp pentru curățirea pînzei, regim favorabil de mișcare a granulelor etc.

Posibilitatea evaluării erorilor principale ne poate da o imagine asupra gradului preciziei pentru orice caz particular.

Nu a fost tratată separarea granulometrică pentru cazul distribuției granulometrice neomogene după înălțimea stratului de material. Acesta este cazul straturilor groase de material de anumite compoziții și forme ale granulelor ce nu se omogenizează datorită vibrațiilor. Problema nu prezintă interes practic, deoarece în asemenea situații se utilizează site suprapuse sau mai multe treceri ale materialului, ceea ce duce tot la cazul analizat.

În încheiere trebuie arătat că sitele vibratoare se utilizează în multe ramuri industriale și apar îndeosebi în anumite puncte ale unor linii tehnologice cu flux continuu. O problemă esențială constă în posibilitatea evaluării cu suficientă exactitate a parametrilor tehnologici ai sitelor și eventual chiar a modificării lor cînd este necesar. Lucrarea de față a avut ca scop să contribuie la îndeplinirea acestui deziderat.

Primită la redacție la 18 ianuarie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. W. Klochaus, *Fordergeschwindigkeit von Schwingsieben*, Erdöl und Kohle, 1952, H 8.
2. A. Schraud, *Der Leistungsbedarf von Schwingforderanlagen*, Erdöl und Kohle, 1958.
3. S. Bötcher, *Beitrag zur Klärung der Gutbewegung auf Schwingrinnen (I)*, Fördern und Heben, 1958, H 3.
4. S. Bötcher, *Beitrag zur Klärung der Gutbewegung auf Schwingrennen (II)*, Fördern und Heben, 1958, H 4.
5. I. Blehmann, Iu. Djanelidze, *Vibraționnoe Peremeșcenie*, Iz. Nauka Moskva, 1965.
6. I. M. Dallavalle, *Micromeritics — The technology of fine particles*, New York, 1947.
7. F. Iu. Iakimenko, *Scorost dvijenia materiala pri transportirovanii na vibraționnîh*, Obogașcenie rud *6* (1963).
8. A. O. Spivakovskii, I. F. Gonciarevici, *Gornotransportnie vibraționnie mașinî*, Izletehizdat 1959.
9. I. Wessel, *Grundlagen des Siebens und Sichtens (II)*, *Das Siebklassieren*, Aufbereitungs-Technik 1967, H 4.
10. W. Batel, *Neue Erkeuntniss über Siebvorgänge*, W.D.I. Zeitschrift, 1955, S 417.
11. Charalambes Ephremides, *Considerații asupra calculului sitelor vibratoare*, Fördern und Heben, *11* (1966).
12. Iakub Bodziony, *Matematische Erfassung des Siebvorganges*, Bergakademie, *2* (1961).
13. Fagerholt, *Particle size distribution of products ground in tube mill*, Copenhagen : G.E.C. Gods Forlag, 1945.
14. F. Michelin, *La theorie du rendement du criblage*, Revue de l'industre minerale, 1945.
15. F. Michelin, *La courbe de partage dans la criblage*, Revue de l'industrie minerale, 1951.
16. I. Turpin, A. Pinçon, *La separation granulometrique*, Revue de l'industrie minerale, 1951.
17. E. A. Nepomniașcii, *Rasciot pokazatelei proțesa groțocceniia otcadki*, Obogascenie rud, *6*, 1963).

18. I. Dietrich, *Indicele principal al sitelor mecanice*, Przeglad Mechaniczny, *12* (1954), I.D.T. 1956.
19. Langton Baldwin, *The continous separation of solid Particles by Flat Deck Screens*, Trans. Institut Chem. Engrs., 1963, 255—263.
20. A. F. Taggart, *Handbook of Mineral Dressing Ores and Industrial Minerals*, John Willey and Sons, New York, 1948.
21. Munteanu Marius, *Dimensionarea arcurilor elicoidale la sitele vibratoare cu volant de inerție* Construcția de mașini **17** *3* (1965).
22. — *Unele probleme ale dinamicii sitelor vibratoare monomasice acționate prin volant cu excentric*, Construcția de mașini **21**, *1* (1969).
23. — *Influența vibrațiilor pînzei sitei asupra productivității sitelor vibratoare*. Construcția de mașini, **21**, *11* (1969).
24. — *Contributii în problema studiului separării granulometrice cu ajutorul sitelor vibratoare*, Teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1971.
25. G. Mihoc, V. Urseanu, *Matematici aplicate în statistică*, Edit. Academiei R.P.R., 1962.
26. * * * ISO TV 24—75E (1969) Test Sieving.

STUDIUL PARAMETRILOR CINEMATICI AI MECANISMELOR PLANE CU AJUTORUL UNUI TRADUCTOR MECANOELECTRIC ORTOGONAL*)

de I. SIMIONESCU, C. DUCA, O. MUNTEANU și C. DRĂGAN
Institutul politehnic Iași

Se prezintă un traductor mecanoelectric ortogonal pentru cercetarea mișcării diferitelor puncte ale unui mecanism plan.
Partea mecanică se compune dintr-o diadă de aspectul 5 cu ghidajele perpendiculare, materializînd cele două axe de coordonate.
Cu ajutorul unor traductoare rezistive se obțin traiectoriile punctelor, hodografele vitezelor și ale acceleraților, obținîndu-se cu ajutorul a două traductoare inductive de tip rotativ.
Semnalul obținut se înscrie direct pe ecranul osciloscopului catodic pentru viteze și prin derivare electrică pentru acceleraţii. Erorile măsurătorilor nu depășesc limitele admisibile.

BIBLIOTECA MUZEULUI EGIPTEAN 1848

În lucrările cu caracter experimental privind analiza cinematică și dinamică a mecanismelor s-au studiat pe cale mecanoelectrică o parte din parametrii cinematici ai punctelor mecanismelor plane (traiectorii și viteze) [1]—[3].

Pentru extinderea studiului cinematic și dinamic la acceleraţii și forțe de inerție, în cadrul Laboratorului de teoria mecanismelor și dinamica mașinilor de la Institutul politehnic Iași s-a realizat un traductor mecanoelectric ortogonal. Cu ajutorul acestuia se studiază atît deplasările, vitezele și acceleraţiile punctelor, cît și forțele de inerție ale elementelor în mișcare plană, prin înscrierea diagramelor de variație ale acestora pe ecranul osciloscopului catodic.

1. Traductorul ortogonal se compune dintr-o diadă de aspectul 5 (fig. 1) avînd ghidajele cuplelor de translație perpendiculare, iar ghidajul

*) Lucrarea a fost prezentată la Sesiunea de comunicări științifice a Centrului de mecanică a solidelor, 22—23 februarie 1971, București.

cuplei exterioare XX' fix. Diada se leagă prin cupla ei de rotaţie de un element al mecanismului în punctul P, a cărui mişcare se studiază.

Deplasările elementului *2* pe ghidajul *1* (XX') şi a patinei *3* pe ghidajul *2* (YY') urmăresc aceleaşi legi de mişcare ca şi proiecţiile punctului P, într-un sistem de axe de coordonate paralele cu direcţiile de glisare ale diadei.

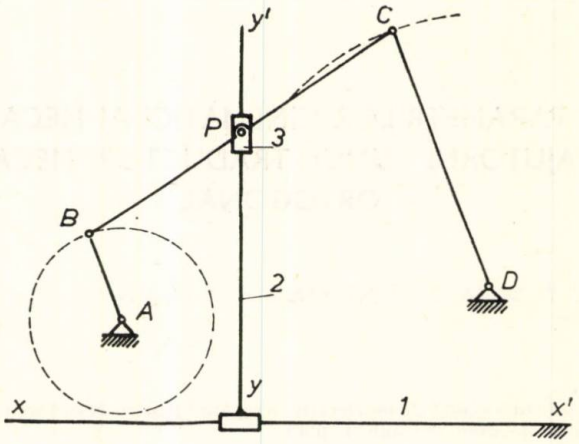


Fig. 1

Variaţia proiecţiilor deplasării punctului P pe axele de coordonate materializate prin ghidajele XX', YY' se transformă, cu ajutorul a doi traductori rezistivi, în variaţia unor tensiuni alternative, proporţionale cu deplasările. Tensiunile alternative sînt amplificate, detectate şi filtrate, după cum rezultă din schema-bloc din figura 2.

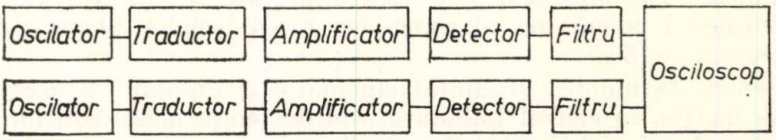


Fig. 2

Traiectoria T_p a punctului P se obţine pe ecranul osciloscopului, prin introducerea acestor tensiuni variabile în sistemul de baleaj cartezian al acestuia.

2. Pentru studiul vitezelor punctului P, se utilizează două traductoare inductive de tip rotativ, sub forma unor microgeneratoare de curent continuu, montate pe patinele diadei şi acţionate prin fricţiune de cîte un fir flexibil, paralel cu ghidajul. Tensiunile date de fiecare din cele două microgeneratoare sînt proporţionale cu proiecţiile vitezelor $V_{px}(t)$,

respectiv, $V^1_{py}(t)$ şi reprezintă pe ecranul osciloscopului diagramele de variaţie ale acestora. Prin compunerea acestor două tensiuni, conform schemei-bloc din figura 3, se înscrie hodograful V_p al vitezelor punctului P.

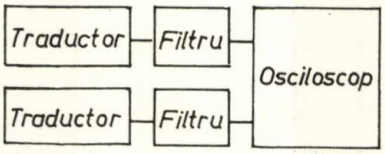


Fig. 3

3. Diagramele de variaţie ale proiecţiilor acceleraţiilor $a_{px}(t)$, respectiv, $a_{py}(t)$, precum şi hodograful acceleraţiilor a_p se obţin în urma derivării electrice a tensiunilor furnizate de cele două microgeneratoare, aşa cum rezultă din schema-bloc din figura 4.

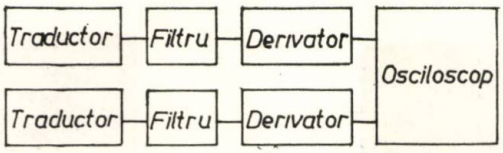


Fig. 4

4. Hodograful acceleraţiei centrului de masă al unui element oarecare, la scara $K_{Fi} = m(-k_a)$, reprezintă hodograful forţei de inerţie rezultante.

5. Cu ajutorul traductorului realizat în laborator s-a studiat mecanismul patrulater manivelă balansier cu dimensiunile: $AB = 0{,}1$ m, $BC = 0{,}4$ m, $CD = 0{,}3$ m, $DA = 0{,}4$ m.

S-au fotografiat (fig. 5) traiectoria (a), hodograful vitezelor (b) şi hodograful acceleraţiilor (c), pentru extremitatea B a elementului conducător.

În figurile 6a, 7a, 8a sînt reprezentate traiectoriile unor puncte de pe biela BC, situate la 1/4, 1/2 şi 3/4 din lungimea ei, în sensul BC.

În figura 9a se dă traiectoria extremităţii C a balansierului.

În figurile 6b, 7b, 8b, 9b se prezintă hodografele vitezelor punctelor amintite, iar în figurile 6c, 7c, 8c, 9c hodografele acceleraţiilor acelorași puncte.

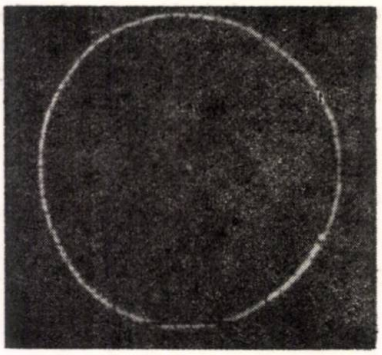
S-au mai înregistrat: traiectoria (fig. 10a), hodograful vitezelor (fig. 10b) şi hodograful acceleraţiilor (fig. 10c) a punctului E al bielei mecanismului patrulater din figura 11.

Oscilogramele au fost înregistrate fotografic folosindu-se scările:

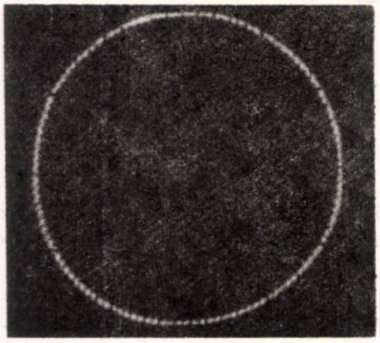
a) pentru traiectorii $K_1 = 0{,}005$ m/mm,

b) pentru viteze $K_v = 0{,}015$ m.s^{-1}/mm,

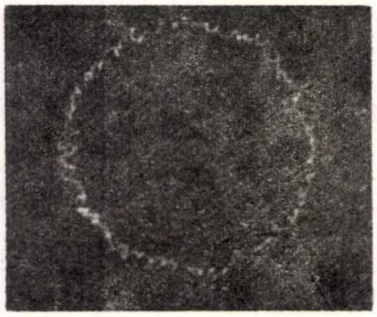
c) pentru acceleraţii $K_a = 0{,}04$ m.s^{-2}/mm.



a

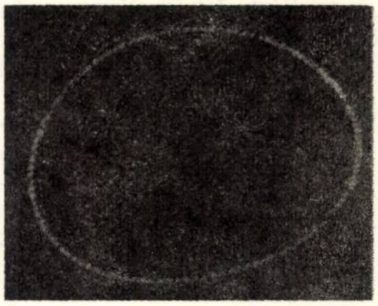


b

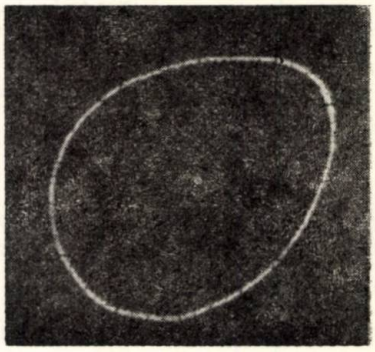


c

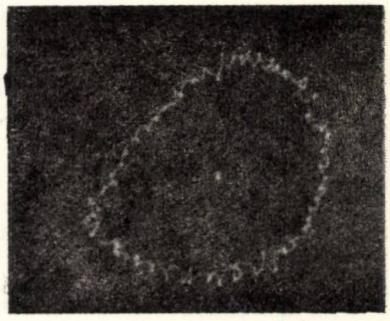
Fig. 5



a

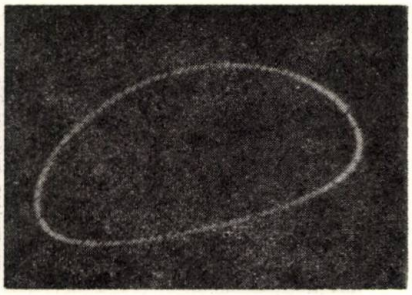


b

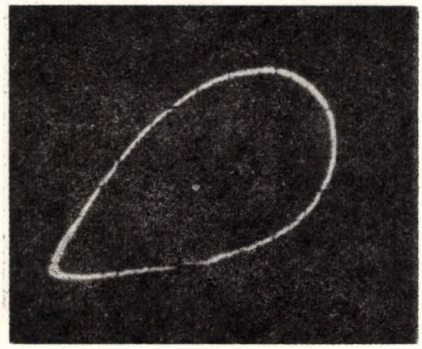


c

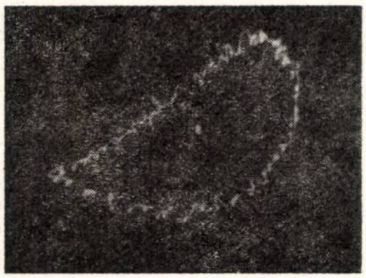
Fig. 6



a

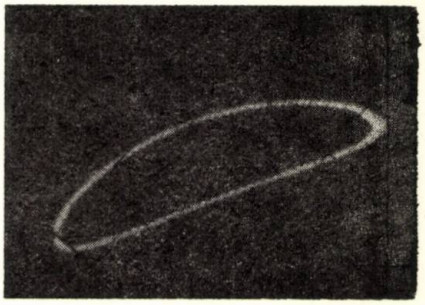


b

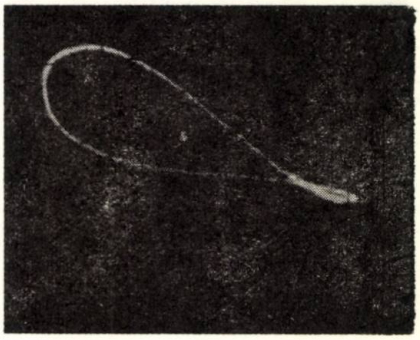


c

Fig. 7



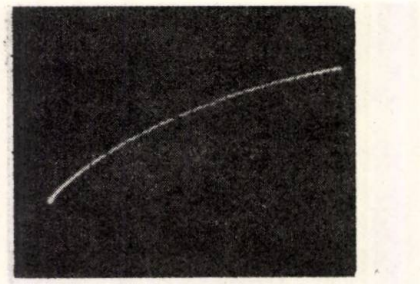
a



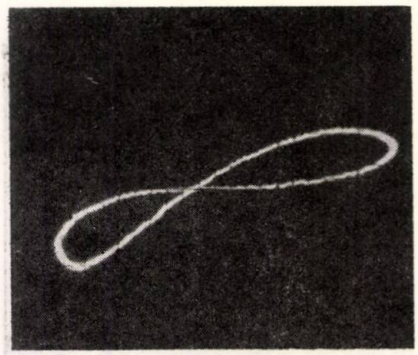
b

c

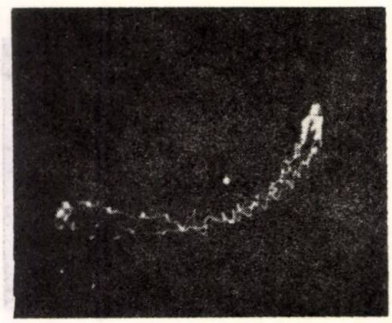
Fig. 8



a

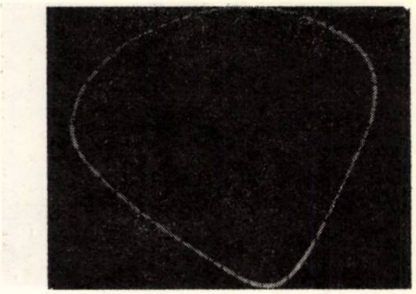


b

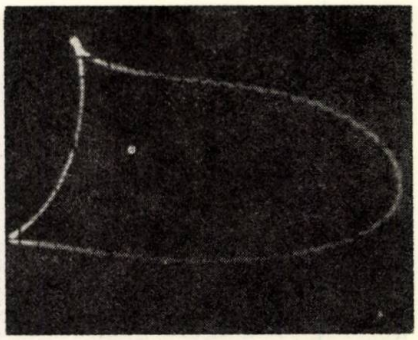


c

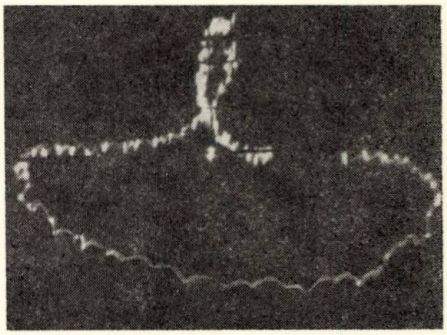
Fig. 9



a



b



c

Fig. 10

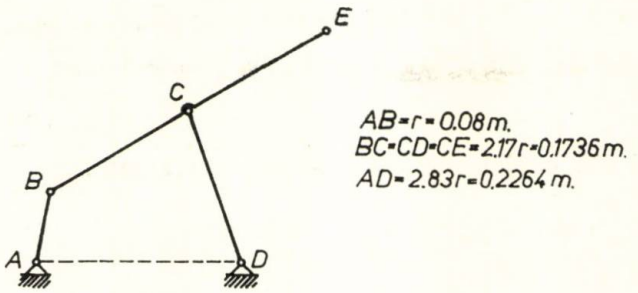


Fig. 11

6. Instalaţia realizată de colectiv este simplă şi compactă, în compunerea ei intră două cuple de translaţie. Pentru o vedere de ansamblu, redăm fotografia instalaţiei în stare de funcţionare.

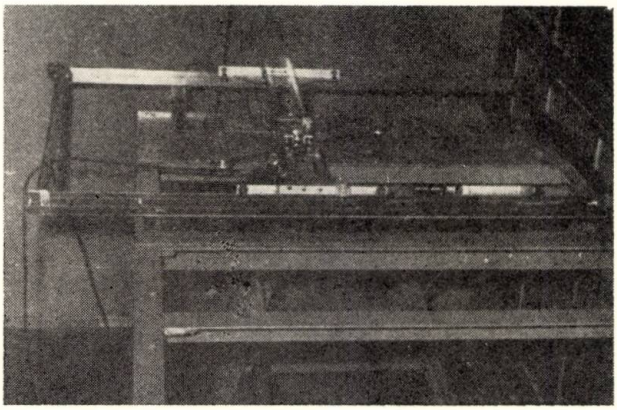


Fig. 12

Tensiunile culese de la traductoarele rezistive, după amplificare, detectare şi filtrare, se introduc direct în osciloscop.

Introducerea traductoarelor inductive de tip rotativ permite obţinerea directă a diagramelor vitezelor.

O singură derivare electrică permite obţinerea diagramelor acceleraţiilor şi a forţelor de inerţie.

7. Traductorul mecanoelectric ortogonal introduce erori mecanice şi electrice care se datoresc următoarelor cauze:

a) deformarea ghidajelor:

$$\Delta X_{max} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I},$$

$F = 2{,}5$ N., $l = 0{,}8$ m., $E = 7.10\ ^{10}\text{N/m}^2$, $I = 0{,}39 \cdot 10^{-8}$ m^4,

$$|\Delta x| \leqslant 0{,}098 \text{ mm},$$

b) abaterea de la perpendicularitatea ghidajelor : $\Delta\alpha = 10^1$;

$$\Delta X = y \operatorname{tg} \Delta\alpha,\ \Delta X \leqslant y_{max} \cdot \operatorname{tg} \Delta\alpha,\ y_{max} = 600 \text{ mm},$$

$$|\Delta x| \leqslant 1{,}8 \text{ mm},$$

c) jocul din cuplele de translaţie : $j = 0{,}1$ mm,

$$\Delta x = y \frac{j}{l_p},\ \Delta x \leqslant y_{max} \frac{j}{l_p},\ l_p = 280 \text{ mm},$$

$$|\Delta x| \leqslant 0{,}21 \text{ mm},$$

d) jocul din cupla de rotaţie : $j = 0{,}1$ mm,

$$\Delta x \leqslant j, \qquad |\Delta x| \leqslant 0{,}1 \text{ mm},$$

e) abaterea poziţiei punctului P în raport cu centrul cuplei de rotaţie : $\Delta a = 0{,}2$ mm,

$$\Delta x \leqslant \Delta a, \qquad |\Delta x| \leqslant 0{,}2 \text{ mm},$$

f) deformarea firului rezistiv :

$$\Delta x = l - l \cdot \cos \varphi \cong \frac{l}{2} \varphi^2,\quad \Delta x \leqslant \frac{l}{2} \varphi_{max}^2 \varphi_{max} = 0{,}01,$$

$$|\Delta x| \leqslant 0{,}05 \text{ mm},$$

g) neomogenitatea firului rezistiv :

$$\Delta x = -\frac{\Delta k}{k} \cdot x,\quad \frac{\Delta k}{k} = 0{,}1\%,\quad |\Delta x| \leqslant \frac{\Delta k}{k} \cdot x_{max},$$

$$|\Delta x| \leqslant 0{,}6 \text{ mm}.$$

f) contact nepunctual : $e = 0{,}3$ mm,

$$\Delta x \leqslant e, \qquad |\Delta x| \leqslant 0{,}3 \text{ mm}.$$

Cu ajutorul traductorului ortogonal studiat se pot explora curbe situate într-un sector pătrat cu latura de 600 mm.

Eroarea relativă a traductorului ortogonal rezultă aproximativ 0,7 %, care se consideră acceptabilă pentru astfel de măsurători, eroarea totală a aparaturii electronice anexe fiind de circa 2—3 %.

Lucrarea a fost realizată în laboratorul de teoria mecanismelor şi dinamica maşinilor de la Institutul Politehnic Iaşi, în cadrul convenţiei de colaborare cu Centrul de mecanică a solidelor al Ministerului Învăţământului Bucureşti.

Primită la redacţie la 23 februarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. R. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calmaciuc şi G. Antonescu, *Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., **X**, *3* (1959).
2. — *Studiul vitezelor în mecanismele plane pe baze mecanoelectrice*, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4*, (1962).
3. R. Bogdan, D. Larionescu, *Analiza armonică complexă şi mecanoelectrică a mecanismelor plane*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1968.
4. Oct. Munteanu, Gh. Iliescu, C. Drăgan, I. Simionescu, C. Duca, *Consideraţii asupra utilizării unui traductor de inducţie, de tip rotativ, pentru înscrierea diagramelor de variaţie a vitezelor şi acceleraţiilor pe ecranul osciloscopului catodic*, Bul. Inst. politehnic Iaşi, **XVII (XXI)**, *1—2*, secţia 4 (1971).
5. A. M. Turicin, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*, Trad. din limba rusă, Bucureşti, Edit. tehnică, 1957.
6. H. F. Grave, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*, Trad. din limba germană Bucureşti, Edit. tehnică, 1966.

UNELE ASPECTE PRIVIND UZURA SAPELOR CU INSERȚII DIN ALIAJE DURE SINTERIZATE

de D. RAȘEEV și D. CONSTANTINESCU
Institutul de petrol Ploiești,
Institutul de proiectări și cercetări pentru utilaj petrolier

Se studiază dinamica uzurii aliajelor dure sinterizate, utilizate în construcția sapelor de foraj cu tăiș fix. Se stabilește influența factorilor funcționali specifici tehnologiei curente de foraj : apăsarea pe sapă, viteza și caracteristicile fluidului de circulație asupra rezistenței la uzură a inserțiilor din aliaje dure. Se trag concluzii privind tipurile de uzură, se stabilesc și se discută legitățile acestora și se determină relații de calcul ce descriu, cu suficientă precizie, fenomenele studiate. Cercetările efectuate vor contribui la dimensionarea corectă a sapelor cu tăiș fix, precum și la utilizarea lor rațională, ceea ce deschide noi perspective în foraj.

INTRODUCERE

În lucrare se studiază dinamica uzurii inserțiilor din aliaje dure sinterizate utilizate în construcția sapelor de foraj cu tăiș fix. Se iau în considerație datele cunoscute privind procesele de frecare și uzură la contactul suprafețelor cu mișcare relativă de alunecare, ca și observațiile făcute din practica de foraj cu acest tip de sapă [1]—[9].

În cadrul încercărilor experimentale realizate în vederea determinării cantitative a dinamicii uzurii, s-a aplicat metoda gravimetrică de cercetare a procesului uzurii, recomandată în cazul abraziunii, uzură specifică elementelor active ale sapelor cu tăiș fix [8], [9].

Folosind această metodă, s-a cercetat influența factorilor tehnologici (presiunea specifică, viteza, caracteristicile materialelor și ale fluidului de foraj) asupra procesului de uzură. Luîndu-se în considerație unele aspecte teoretice, pe baza prelucrării matematice a rezultatelor experimentale, se stabilesc relații cantitative ce descriu procesele specifice de uzură. Discutarea rezultatelor experimentale și a relației stabilite permite să se tragă concluzii originale.

În final, se prezintă principalele aplicații practice ale rezultatelor cercetărilor experimentale întreprinse, pe baza cărora se pot proiecta, construi și utiliza sape de foraj de înaltă eficiență.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 927—953

METODOLOGIA APLICATĂ ÎN CERCETĂRILE EXPERIMENTALE

În vederea determinării unei relații analitice concludente, de tip experimental, pentru viteza de uzură a inserțiilor din aliaje dure sinterizate, s-au stabilit rapoarte precise de similitudine între condițiile reale din exploatarea sapelor și cele de utilizat în încercările experimentale, rezultînd astfel metodologia de cercetare aplicată [8], [9].

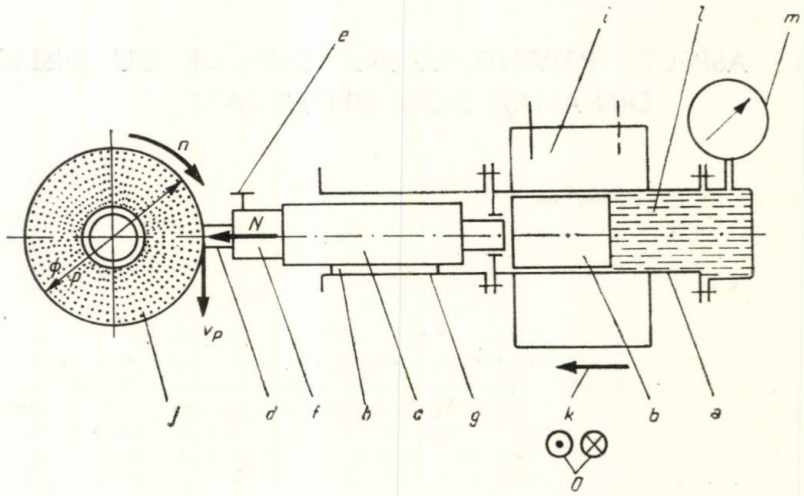


Fig. 1. — Schema dispozitivului utilizat în experimentări.

S-a folosit un dispozitiv hidraulic, montat în dispozitivul portcuțit al căruciorului unui strung normal (fig. 1). Inserția dură *d* a fost apăsată pe proba pe rocă *j* cu o presiune de contact corespunzătoare celei indicate de manometrul *m* și realizată cu ajutorul pistonului *b*, acționînd asupra fluidului (ulei) *l* din cilindrul *a*. Cinematica necesară încercărilor de uzură s-a obținut prin intermediul dispozitivelor mașinii-unelte.

În încercările de uzare abrazivă au fost utilizate știfturi-etalon (inserții), din aliaje dure sinterizate folosite în mod curent la sapele cu tăiș fix, în contact cu probe de rocă (corpuri abrazive, respectiv probe de rocă naturală provenite din carote cilindrice), ale căror simboluri, forme, dimensiuni și caracteristici generale sînt date în figurile 2—4 și în tabelele 1—3.

Pe lîngă probele de rocă naturală s-au utilizat și abrazive sintetice, ceea ce este justificat prin faptul că, așa cum s-a apreciat inițial și s-a demonstrat prin încercările efectuate, în ambele cazuri procesele de uzură se supun acelorași legități. Într-adevăr, între structurile corpurilor abrazive artificiale și a marei majorități a rocilor întîlnite în practica de foraj există o similitudine perfectă, ambele fiind constituite din granule de natură și de dimensiuni variabile, solidarizate printr-un liant [8]. În al doilea rînd, efectele uzurii abrazive sînt identice din punct de vedere calitativ, indiferent de natura sau de proveniența materialului abraziv, diferențele fiind numai cantitative, determinate de proprietățile fizice-me-

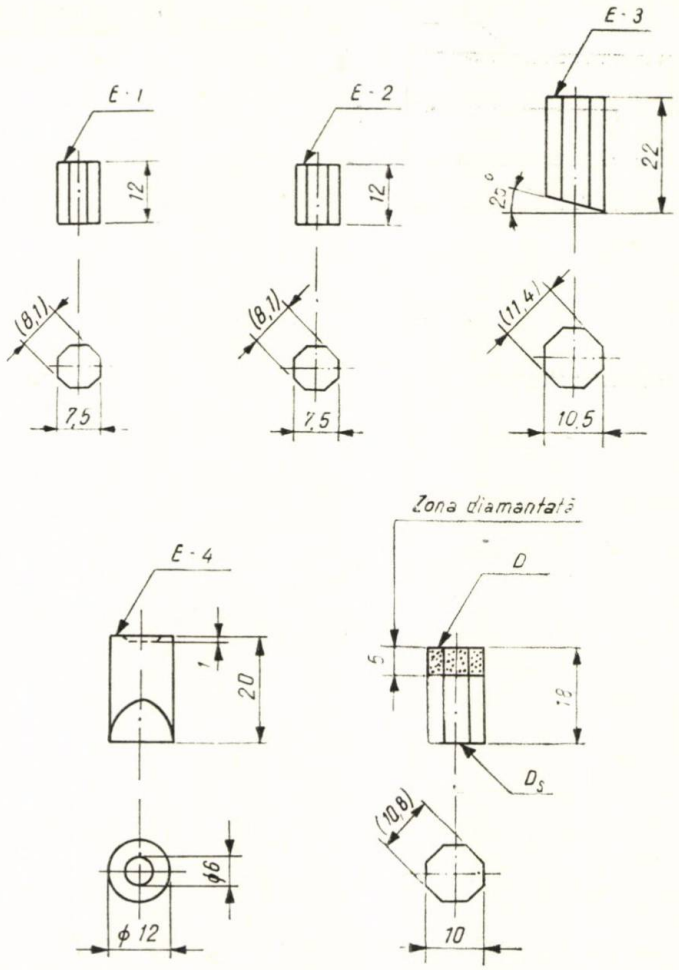
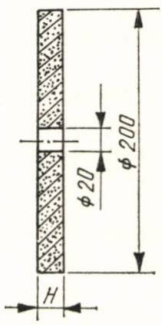


Fig. 2. — Tipodimensiunile inserțiilor din aliaje dure sinterizate.



Proba	H
PR - 1	20
PR - 2	15
PR - 3	

Fig. 3. — Corpurile abrazive.

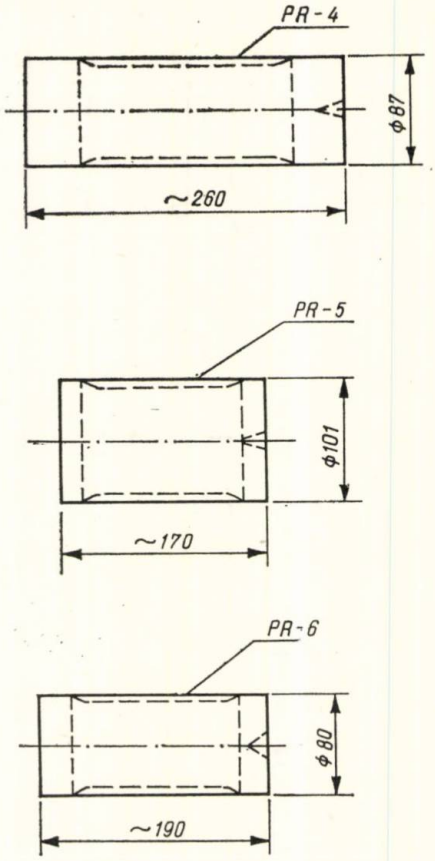


Fig. 4. — Probele de rocă naturală.

canice, forma și mărimea rugozității suprafețelor (așa-numita „rugozitate activă", stabilă în timpul procesului), precum și de rezistența suprafeței de uzat și parametrii regimului de lucru [8]. Această problemă, considerată inițial ca ipoteză, a fost confirmată printr-un număr suficient de rezultate experimentale, modul de variație a vitezelor de uzură a inserțiilor dure fiind identic în cazul tuturor probelor de rocă utilizate, indiferent de proveniența lor. Pe de altă parte, pentru elucidarea cu mai multă finețe a legităților proceselor de uzură, folosirea corpurilor abrazive, în comparație cu probele de rocă naturală, prezintă următoarele avantaje:

— mărirea gradului de precizie a determinărilor experimentale, avînd în vedere omogenitatea structurală a corpurilor abrazive sintetice;

— asigurarea reproducerii perfecte a rezultatelor cecetării, avînd în vedere posibilitatea achiziționării curente de tipodimensiuni identice de corpuri abrazive sintetice;

— posibilitatea obținerii fără dificultăți a materialelor abrazive artificiale, într-o gamă largă de caracteristici fizice-mecanice (duritate, granulație, abrazivitate etc.);

— scurtarea ciclului încercărilor datorită reducerii timpului de pregătire.

Tabela 1

Nr. crt. al ştiftului etalon		1	2	3	4	5	
Simbolul ştiftului etalon		*E*—1	*E*—2	*E*—3	*E*—4	*D*	*Ds*
Tipul ştiftului		*G1B*	*VK8*	G_1	Model experimental	widamant	Suportul widamantului
Fabricaţia		Tizit, Austria	URSS	CSSR	ICEM, RSR	Diamant—Boart, Belgia	
Forma		octogonală	octogonală	octogonală (cu cap teşit 25°)	cilindrică (cu cap „daltă")	octogonală	
Dimensiunile nominale, mm		7,5 × 12	7,5 × 12	10,5×22	∅12×20	10×18	
Compoziţia chimică, %	WC	94	92	94	88		
	Co	6	8	6	12		
Duritatea	HRA	90...90,5	87	89...90	87,5		89...89,5
	HV, kgf/mm²	1478 (1500, catalog)	1081		1160		1187
Greutatea specifică, gf/cm³		14,9	14,6	14,8	14,2	13,2	
Dimensiunea granulelor de WC, μm		aprox. 1,1	4...10	2...5	1...1,5	Dimensiunea granulelor de diamant : 0,2 ... 1,2 μm	2...3
Porozitatea aparentă cf. STAS 8264—68		A_2 (cu pori sub 10 μm)	A_4 (cu pori sub 10 μm)	A_1 (cu pori sub 10 μm)	A_3 (cu pori sub 10 μm)	C_5 (cu pori de peste 40 μm)	
Mărimea supraf. nominale de uzură, mm²		46,57	46,57	91,29	84,78	82,80	
Masa informativă, g		8,5	8,2	26,9	27,7	19,5	

Tabela 2

Simbolul probei de rocă (corp abraziv) / Caracteristici	*PR*—1	*PR*—2	*PR*—3
Tipul	29C—180—JK—5—VC20	Cn—C—40—K	Cn—C—32—P
Fabricaţia	Saipa—Italia	Carbochim-Cluj—R.S.R.	
Dimensiunile, mm	$\varnothing 200 \times 20 \times 20$	$\varnothing 200 \times 15 \times 20$	
Natura abrazivului	SiC verde	Si C neagră	
Tipul liantului	Ceramic		
Granulaţia abrazivului, 10 μm	6 (pulbere)	40 (granule)	32 (granule)
Duritatea	*J*—*K* (moale)	*K* (moale)	*P* (tare)

Tabela 3

Simbolul probei de rocă (naturală) / Caracteristici	*PR*—4	*PR*—5	*PR*—6
Denumirea rocii	Bazalt-andezit	Bazalt	Riolit
Duritatea (Schreiner), kgf/mm²	366	178	129
Modulul de elasticitate, kgf/cm²	158 890	102 844	87 724
Coeficient energetic de plasticitate, *K*	1,186	1,000	1,195

Pentru a se studia diferitele influenţe ce intervin în procesul de uzură abrazivă, în încercările experimentale de laborator s-au variat parametrii regimului de lucru, corespunzători regimului de foraj (tabelele 4—6), şi anume:

— presiunea de contact p (kgf/cm²) dintre inserţie şi proba de rocă;

— viteza de alunecare v(m/s) a mişcării relative şi

— caracteristica mediului fluid de circulaţie K_1, cu rol de „spălare" (de îndepărtare a rocii sfărîmate) şi de răcire, cît şi factorii ce înfăţişează suprafeţele de contact, adică:

— tipul (abrazivitatea) rocii K_a şi

— rezistenţa la uzură a inserţiei dure K_u.

Tabela 4

Presiunea la manometru, P_M, kgf/cm²	Forța normală de contact N, kgf	Presiunea de contact p (kgf/cm²), corespunzătoare știfturilor-etalon cu simbolul :			
		$E-1$, $E-2$	$E-3$	$E-4$	D, Ss
4	19,6	42,1	21,5	23,1	23,7
6	29,4	63,1	32,2	34,7	35,5
8	39,2	84,2	42,9	46,2	47,3
10	49,1	105,4	53,8	57,9	59,3
12	58,9	126,5	64,5	69,5	71,7
15	73,6	158,0	80,6	86,8	88,9
18	88,3	189,6	96,7	104,2	106,6
20	98,1	210,7	107,5	115,7	118,5
22	107,9	231,7	118,2	127,3	130,3
25	122,7	263,2	134,4	144,7	148,2

Tabela 5

Turația probei de rocă n, rot/min	Viteza relativă (periferică) de alunecare v (m/s), corespunzătoare diametrelor nominale ale probelor de rocă :			
	$PR-1 \ldots PR-3$	$PR-4$	$PR-5$	$PR-6$
12	0,126			
19	0,199			
30	0,314			
38	0,398			
48	0,502			
96	1,005	0,437	0,507	0,402
150	1,570			
187		0,851	0,988	0,783
190	1,969			
275		1,252	1,454	1,151
300	3,138			
380	3,997			
390		1,776	2,061	1,633

Tabela 6

Simbolul lichidului de spălare / Caracteristici	$L-1$	$L-2$	$L-3$
Natura	Emulsie STAS 2598–51	Apă	Noroi de foraj (barită şi nisip)
Viscozitatea dinamică cP	1,450	1,0	13,0
Greutatea specifică, gf/cm³	0,984	1,0	1,345

INTERPRETAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Se propune ca dependenţa dintre caracteristicile suprafeţelor în contact şi mediul fluid, prezent la contactul cu frecare, să se facă prin intermediul valorii *constantei de abrazivitate relativă*, conform relaţiei

$$K = \frac{K_a \cdot K_1}{K_u}, \tag{1}$$

definindu-se „încercarea tip", ca aceea la care sînt menţinute constante: inserţia-etalon, proba de rocă şi fluidul de spălare. Rezultatele cercetărilor experimentale efectuate se referă la 22 de tipuri de încercări, cuprinzînd un total de 360 ce încercări propriu-zise de uzură abrazivă [9].

Pentru un „tip de încercare", *viteza de uzură* (volumul uzat în unitatea de timp) poate fi exprimată analitic ca o funcţie de trei factori de influenţă, adică

$$Y(\text{mm}^3/\text{min}) = \mathbf{Y}(K,\ p,\ v), \tag{2}$$

iar *uzura specifică*, corespunzătoare unităţii de drum parcurse în mişcarea relativă de alunecare, va fi exprimată de relaţia

$$y(\text{mm}^3/\text{m}) = \frac{\mathbf{Y}}{60v}. \tag{3}$$

Pentru determinarea formei relaţiei vitezei de uzură s-au studiat, în mod separat, pentru principalul tip de încercare, simbolizat cu $E-1\ldots/PR-1\ldots/L-1\ldots$, variaţiile parţiale

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(p) \qquad \text{şi} \tag{4}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(v), \tag{5}$$

rezultatele obţinute fiind apoi verificate şi pentru celelalte tipuri de încercare [9]. Variaţiile vitezei de uzură $\mathbf{Y}(\text{mm}^3/\text{min})$, în funcţie de parametrii tehnologici, presiunea de contact p, respectiv viteza de alunecare v, sînt date, pentru o parte din rezultatele încercărilor efectuate, în figurile 5 şi 6. Aşa cum rezultă, datorită condiţiilor concrete posibile de realizat

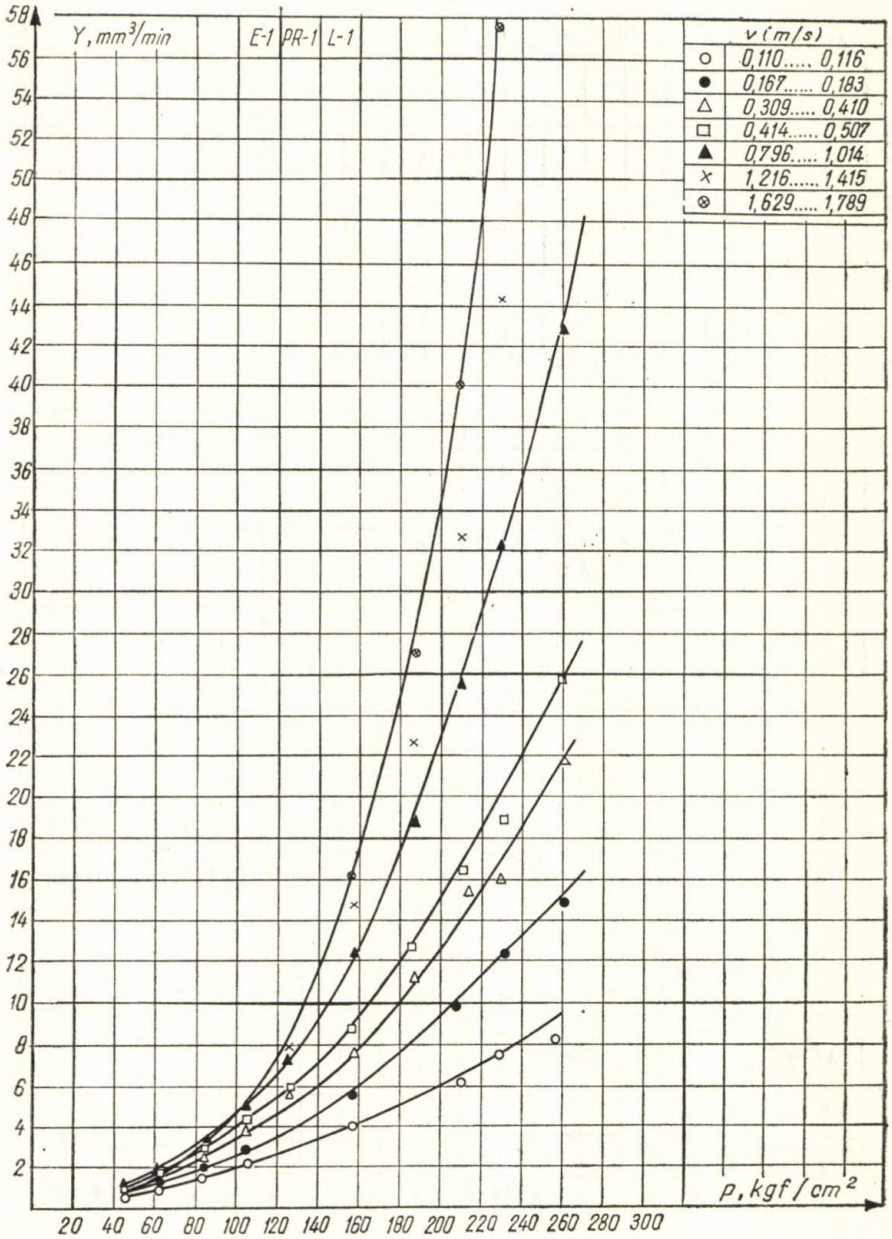


Fig. 5. — Variația vitezei de uzură, în funcție de presiunea de contact.

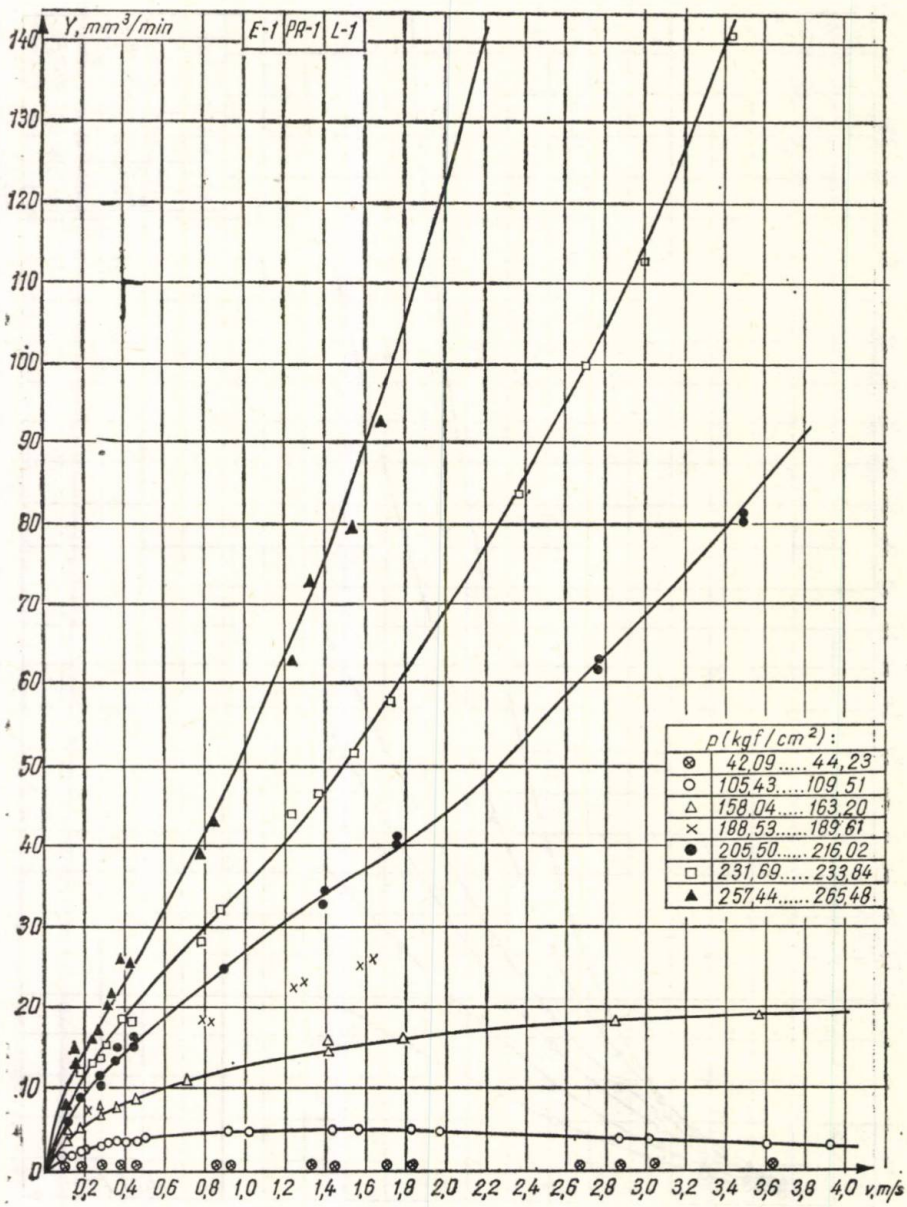


Fig. 6. — Variaţia vitezei de uzură, în funcţie de viteza de alunecare.

în încercări, parametrii tehnologici nu au putut fi menținuți riguros constanți; cu toate acestea, se constată, cu suficientă precizie, că $Y(p)$ variază monoton crescător, curbele corespunzătoare avînd concavitățile îndreptate către valorile pozitive ale ordonatelor. $Y(v)$ prezintă de asemenea o variație continuă, curbele au un maxim în cazul valorilor mici ale presiunii de contact, devenind continuu crescătoare pentru valorile mari ale presiunii. În figura 7 au fost reprezentate date rezultate pentru valorile uzurii specifice $Y(v)$, constatîndu-se variații continue, monoton descrescătoare în cazul presiunilor mici de contact, respectiv variații cu minim pentru valorile mari ale presiunii.

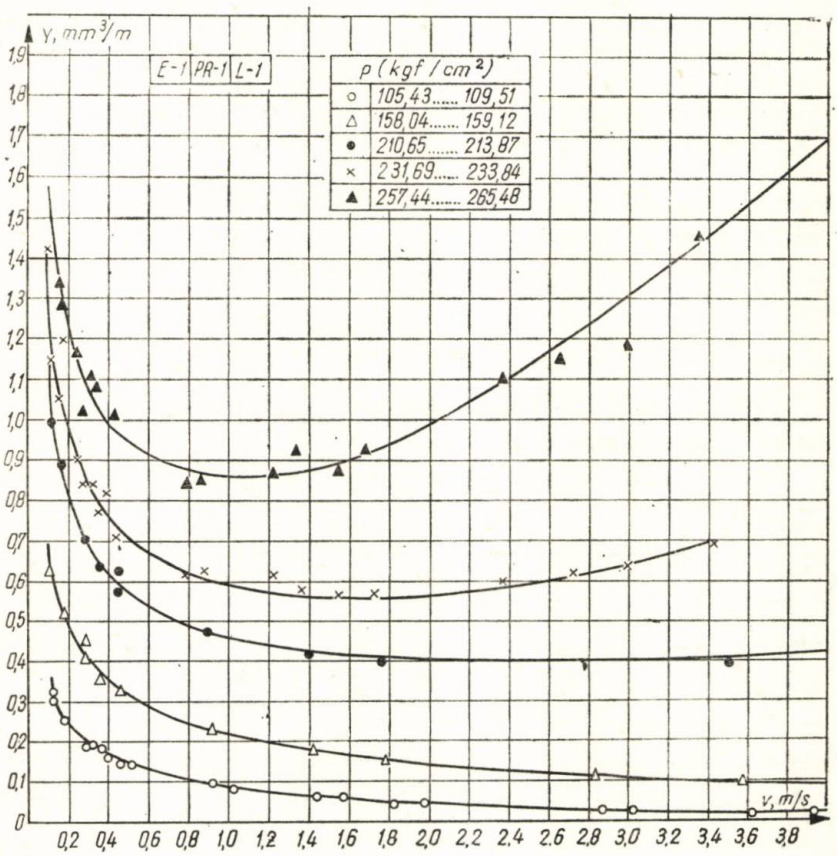


Fig. 7. — Variația uzurii specifice, în funcție de viteza de alunecare.

STABILIREA RELAȚIEI DE CALCUL ȘI DISCUTAREA REZULTATELOR

Pentru a stabili relația cantitativă ce descrie fenomenul studiat s-a făcut un studiu detaliat [9], realizat pe bază de încercări și corecții, aplicîndu-se criteriile de concordanță („grafic general", „grafic al liniei drepte" și „tabelar"), precum și metodele de evaluare a constantelor ar-

bitrare, unele determinări necesitînd rezolvări prin iteraţie. Cercetîndu-se un număr mare de funcţii analitice, s-a determinat în final relaţia de bază pentru viteza de uzură a inserţiilor din aliaje dure sinterizate, ca fiind de forma :

$$Y(\mathrm{mm^3/min}) = 10^{-2} \cdot K \cdot p^{k+1} \cdot v^k \cdot e(10^{-2} \cdot Kp - 1)\, v. \qquad (6)$$

Stabilirea şi verificarea relaţiei experimentale (6), constînd din corecţiile făcute pentru principalul tip de încercare, ca şi calculele finale în vederea determinării constantelor abrazivităţii relative K pentru toate tipurile de încercări folosite în cercetări, s-au realizat la un calculator electronic universal, în limbaj Fortran IV. În baza acestor rezultate de calcul, în figurile 8—19 sînt reprezentate grafic unele valori pentru $Y(v)$ şi, respectiv, $Y(p)$, alături de datele obţinute din cercetările experimentale întreprinse, constatîndu-se buna lor concordanţă. Rezultă deci că funcţia generală (6) a vitezei de uzură descrie cu suficientă precizie fenomenele studiate [9].

Pentru a putea compara ponderea influenţelor factorilor ce definesc tipul de încercare se consideră

— constanta de rezistenţă la uzură abrazivă a ştiftului-etalon principal $E-1$

$$K_{u_{E-1}} = 1 \quad \text{şi}$$

— constanta lichidului de circulaţie pentru apă, simbol $L-2$, luată, de asemenea, ca etalon,

$$K_{l_{L-2}} = 1;$$

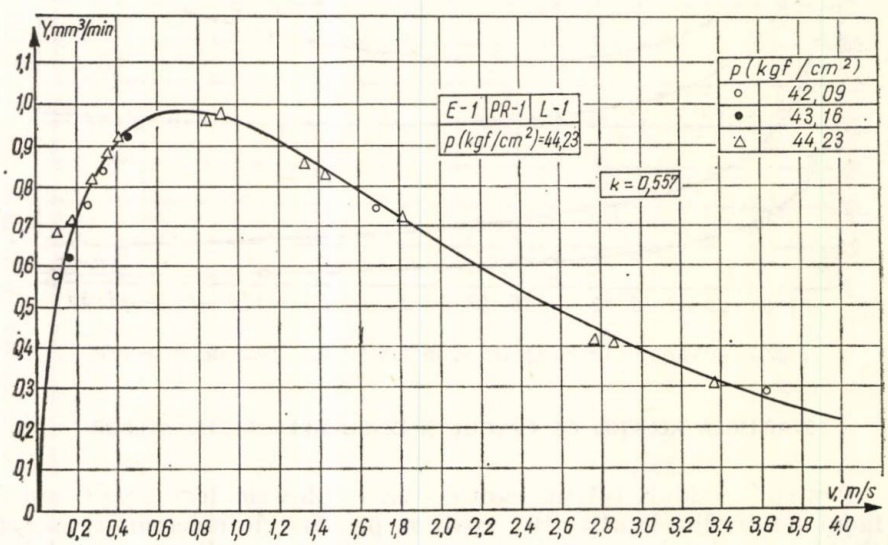


Fig. 8. — $Y(v)$, pentru $p = 44{,}23$ kgf/cm² ($E - 1/PR - 1/L - 1$.

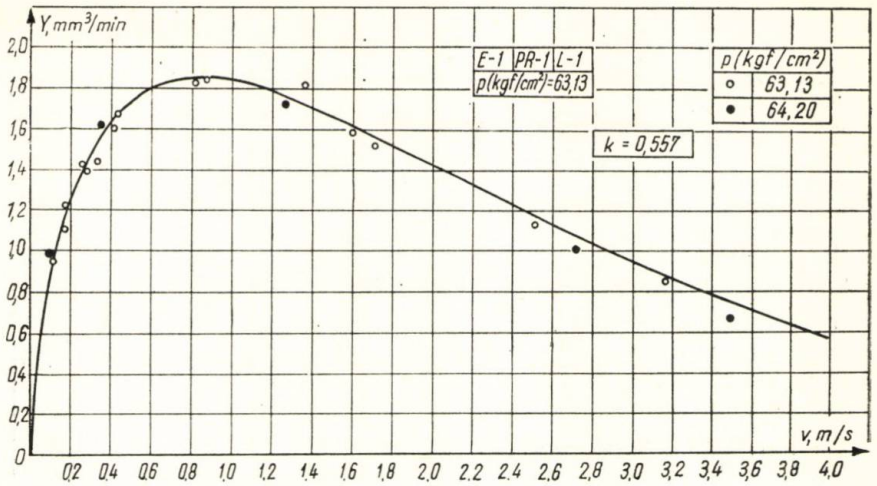


Fig. 9. — $Y(v)$, pentru $p = 63{,}13$ kgf/cm²$(E-1/PR-1/L-1$.

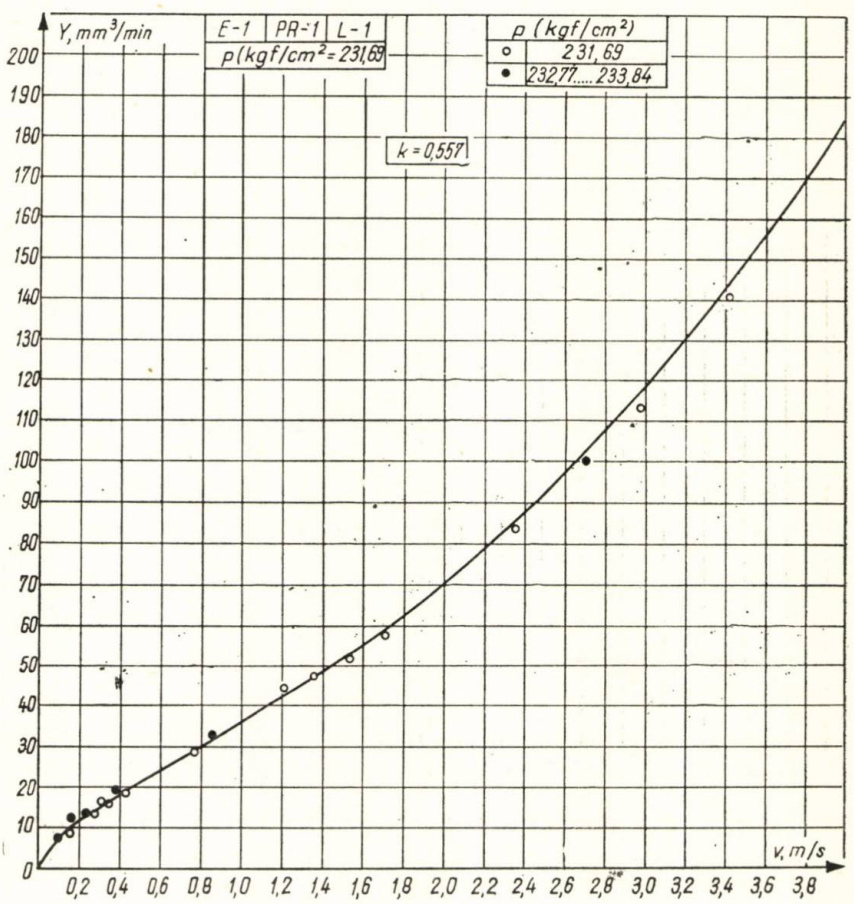


Fig. 10. — $Y(v)$, pentru $p = 231{,}69$ kgf/cm²$(E-1/PR-1/L-1)$.

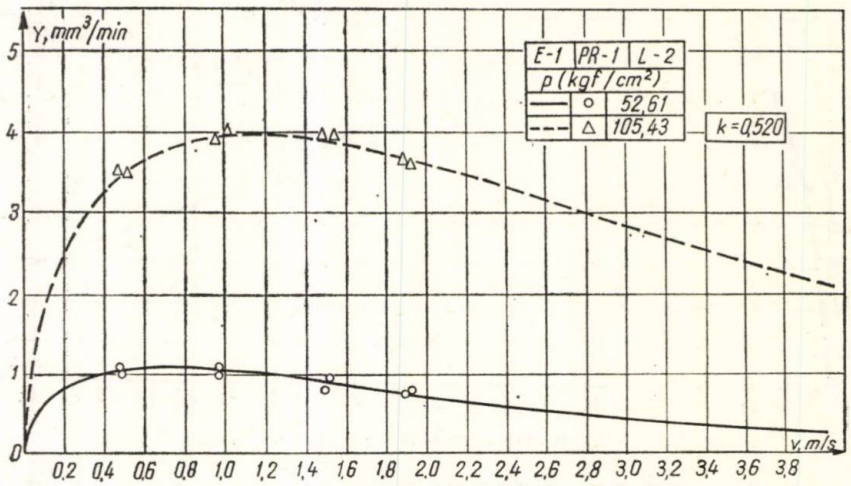


Fig. 11. — $Y(v)$, pentru $p = 52{,}61$ și $105{,}43$ kgf/cm² $(E-1/PR-1/L-2)$.

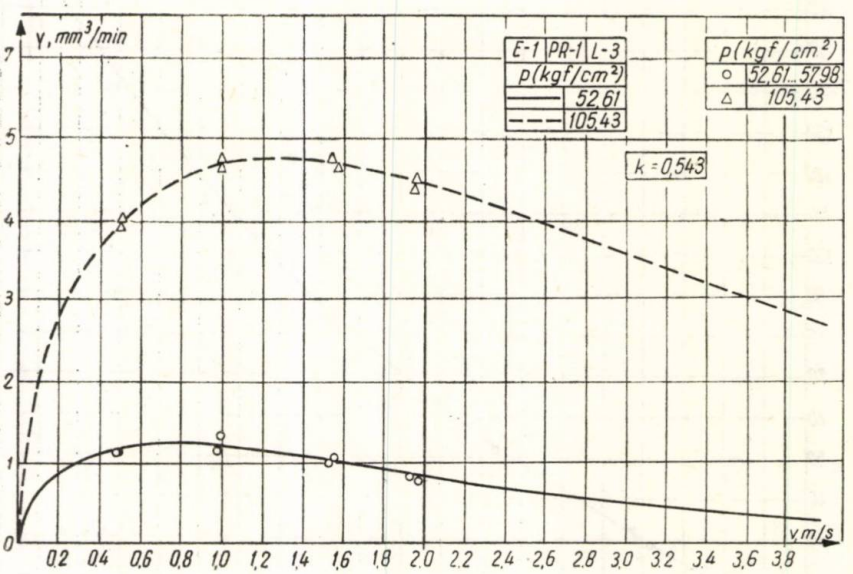


Fig. 12. — $Y(v)$, pentru $p = 52{,}61$ și $105{,}43$ kgf/cm² $(E-1/PR-1/L-3)$.

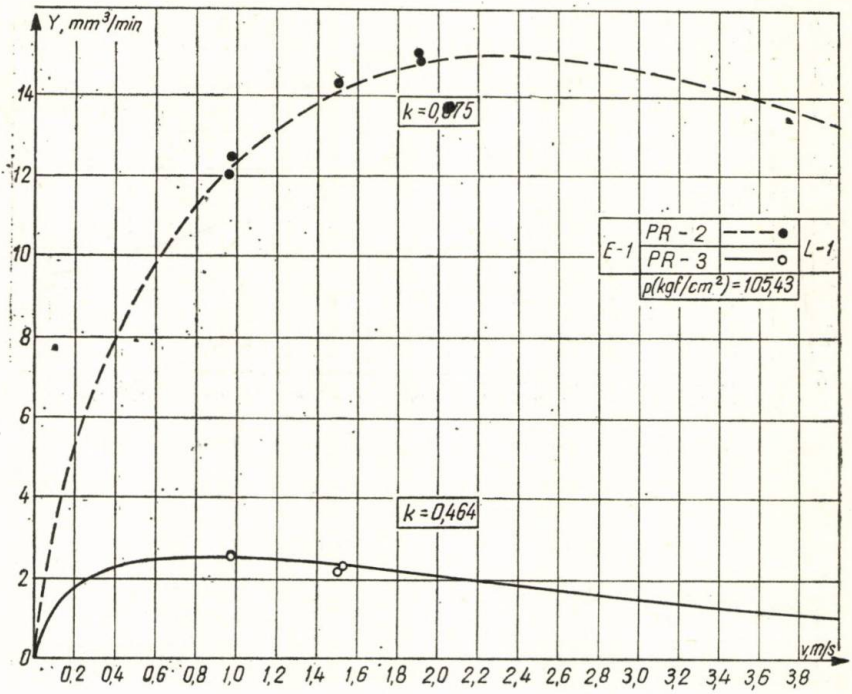


Fig. 13. — $Y(v)$, pentru $p = 105{,}43$ kgf/cm² ($E-1/PR-2$ și $PR-3/L-1$).

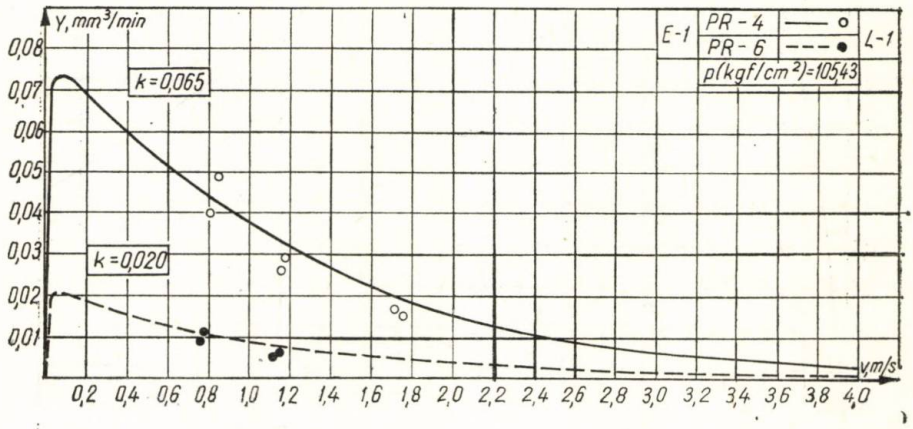


Fig. 14. — $Y(v)$, pentru $p = 105{,}43$ kgf/cm² ($E-1/PR-4$ și $PR-6/L-1$).

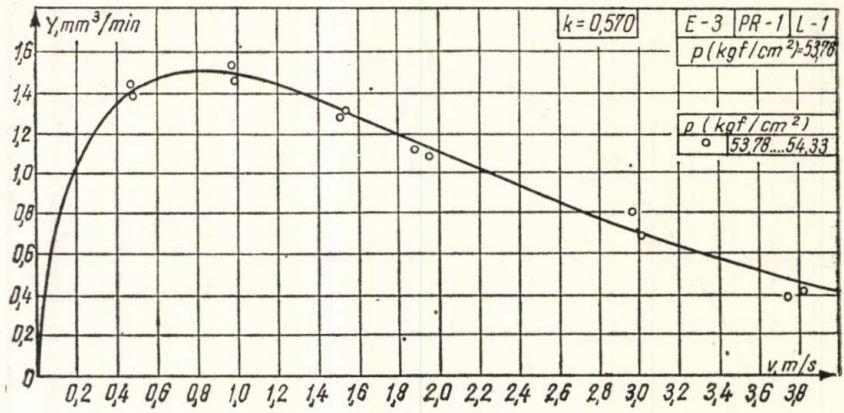


Fig. 15. — $Y(v)$, pentru $p = 53{,}78$ kgf/cm² $(E-3/PR-1/L-1)$.

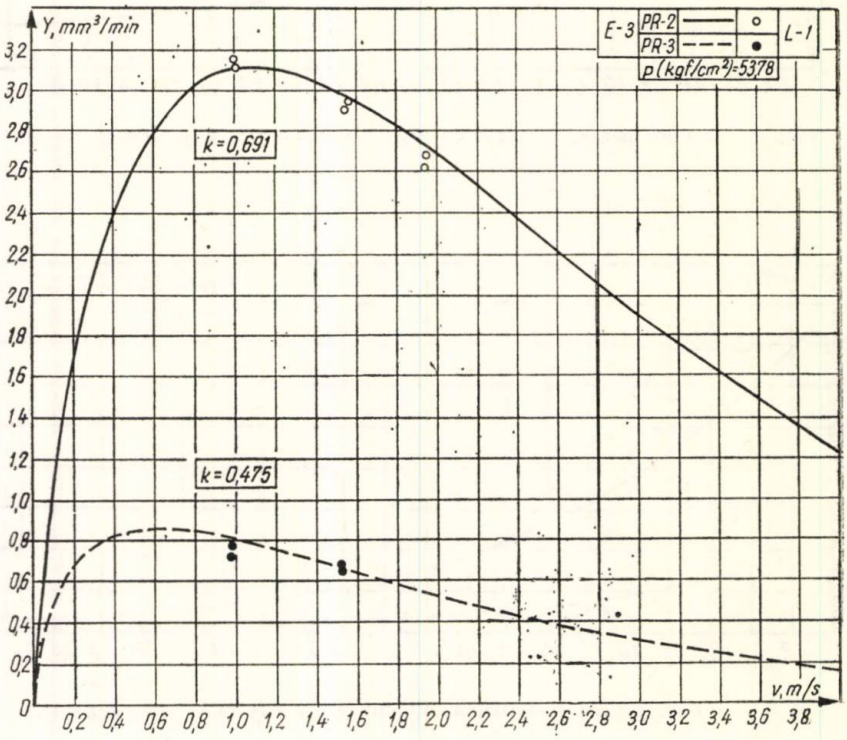


Fig. 16. — $Y(v)$, pentru $p = 53{,}78$ kgf/cm² $(E-3/PR-2$ și $PR-3/L-1)$.

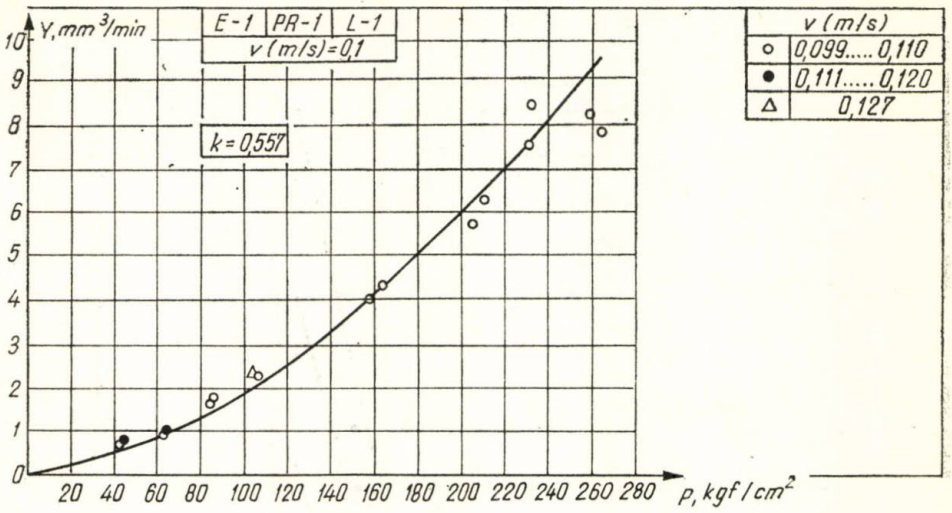


Fig. 17. — $Y(p)$, pentru $v = 0{,}1$ m/s $(E-1/PR-1/L-1)$.

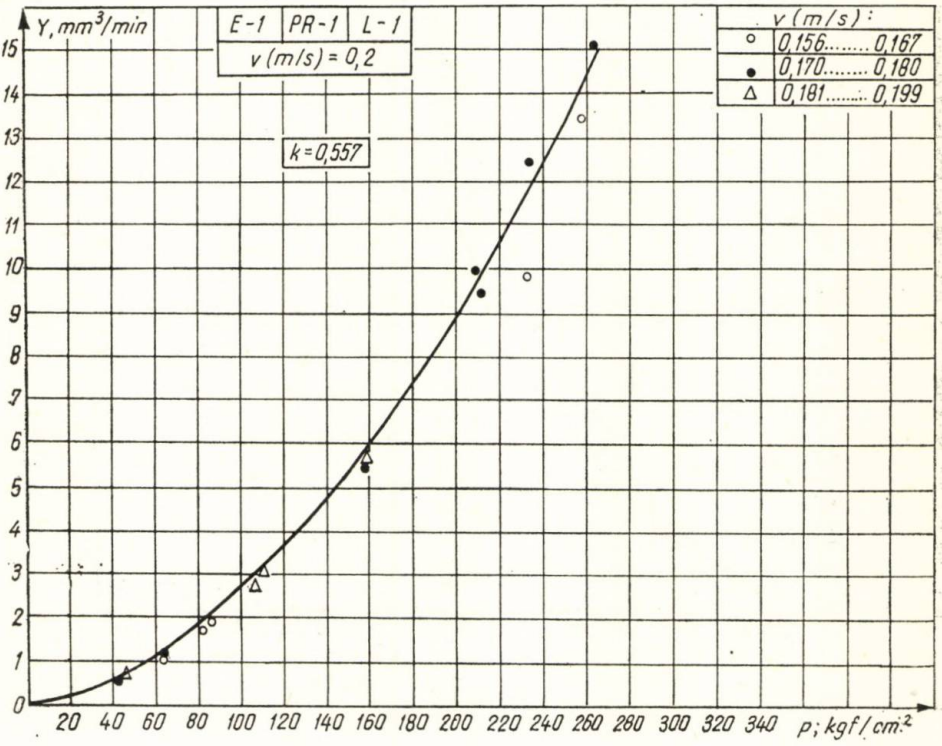


Fig. 18. — $Y(p)$, pentru $v = 0{,}2$ m/s $(E-1/PR-1/L-1)$.

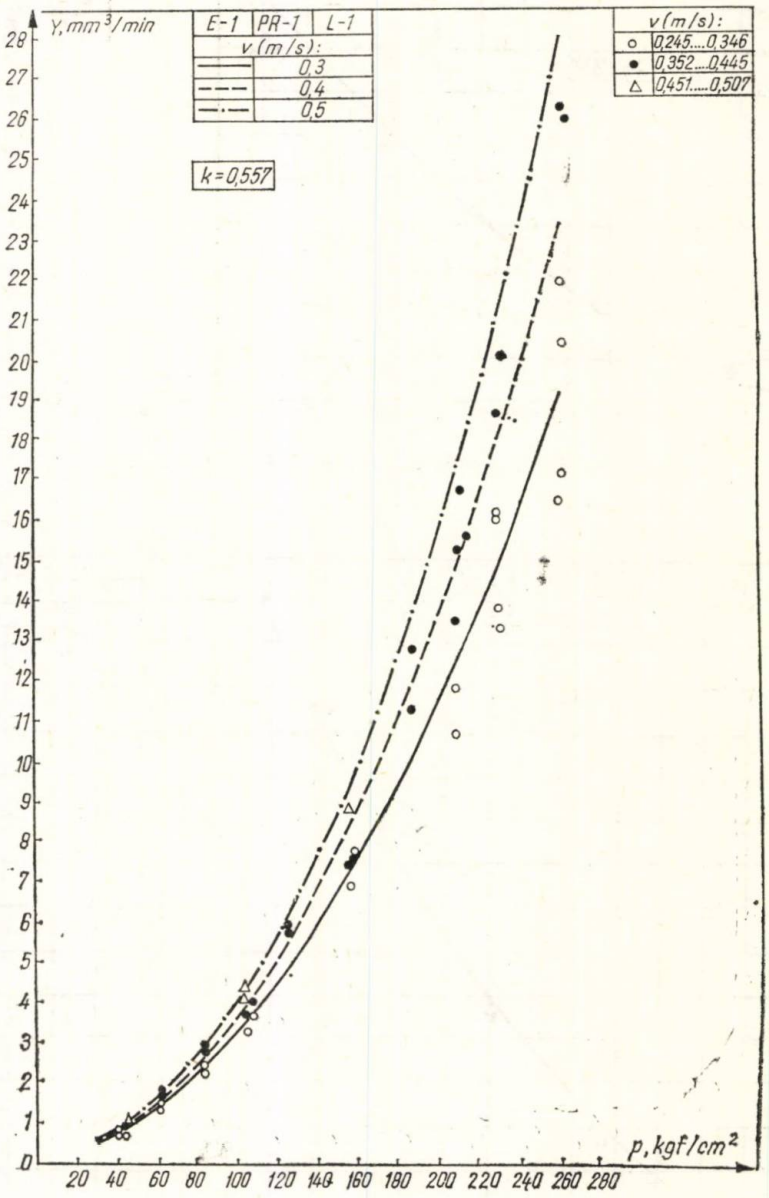


Fig. 19. — $Y(p)$, pentru $v = 0{,}3/0{,}4$ şi 0,5 m/s $(E-1/PR-1/L-1)$.

rezultă, aplicînd relația (1), valorile calculate pentru constantele K_u, K_a și K_1, conform rezultatelor cercetărilor experimentale, în tabelele 7—9.

Tabela 7

Știftul-etalon	$E-1$	$E-2$	$E-3$	$E-4$	D_s	D
K_u	1	0,938	0,977	0,719	0,592	$\approx$ 1,791

Tabela 8

Proba de rocă	$PR-1$	$PR-2$	$PR-3$	$PR-4$	$PR-5$	$PR-6$
K_a	0,520	0,630	0,433	0,061	0,054	0,018

Tabela 9

Lichidul	$L-1$	$L-2$	$L-3$
K_1	1,071	1	1,044

Față de acestea, se pot face următoarele observații [9]:

— știfturile-etalon pe bază de carbură de wolfram (avînd ca liant cobaltul), notate cu E, cu o utilizare curentă în forajul sondelor, prezintă o rezistență la uzură ce variază în funcție de compoziția chimică, fiind

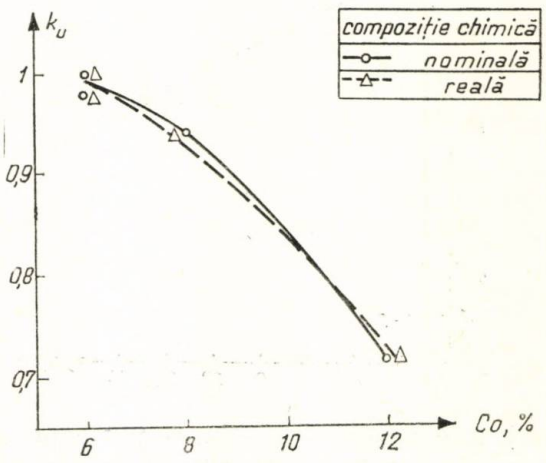


Fig. 20. — Variația rezistenței la uzură a inserțiilor dure, în raport cu conținutul în cobalt.

proporțională cu conținutul de carbură (fig. 20); duritatea știfturilor folosite, cu compoziții chimice și provenience diferite, nu a putut caracteriza rezistența lor la uzură. Dacă se iau ca bază de comparație știfturile cu 94% carbură; simbol $E-1$, și $E-3$, se constată că știftul-inserție $E-2$,

cu 92% carbură, are o rezistență la uzură cu 4—6% mai mică, iar știftul-etalon E—4, deși cu o duritate practic egală cu cea a inserției E—2, prezintă o rezistență la uzură cu 26—28% mai mică. Știftul tip widamant, din aliaj dur conținînd granule de diamant, simbol D, încercat cu caracter informativ, are o rezistență la uzură foarte mare (valoarea $K_u = 1{,}8$ este aproximativă, măsurarea suprafeței de contact neputîndu-se face cu suficientă precizie). Suportul acestei inserții, simbol D_s, prezintă o rezistență la uzură mică, fapt datorit, probabil, unui conținut redus în carburi;

— probele de rocă artificială utilizate au o capacitate abrazivă foarte mare în comparație cu cele naturale. Cea mai mare abrazivitate o are proba de rocă PR-2, pe bază de carbură neagră cu granulație medie de 0,4—0,5 mm și cu duritatea K (moale). Dintre probele de rocă naturală, care, în conformitate cu clasificarea Schreiner, se încadrează aproximativ între valorile 20—40 ale abrazivității relative *), abrazivitatea maximă corespunde probei de rocă cu simbolul PR-4, un bazalt-andezit, iar cea minimă, probei de rocă PR-6, un riolit (rocă din familia granitelor). Se constată deci că abrazivitatea probelor de rocă naturală reprezintă doar 3—14% din cea a probelor de rocă artificială, folosite.

— în ceea ce privește influența lichidelor de spălare utilizate în încercări, se constată, că emulsia simbol L—1 (pe bază de ulei, cu 5—10% apă, conform STAS 2598—51, recomandată pentru prelucrarea prin așchiere a metalelor) a favorizat în măsura cea mai mare uzura abrazivă, în comparație cu noroiul de foraj, notat cu L—3 și, respectiv, apa, simbol L—2. Vitezele de uzură mai mari rezultate în cazul folosirii noroiului de

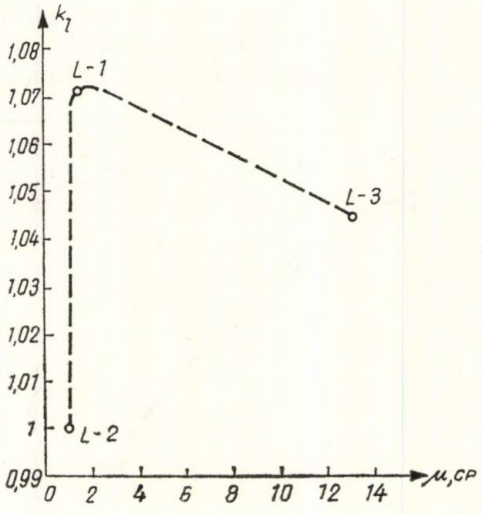


Fig. 21. — Variația valorilor constantei lichidului, în funcție de viscozitate.

foraj, în comparație cu apa, se pot explica prin prezența particulelor de nisip (silice) în suspensie, care au un evident caracter abraziv. În orice caz, influența lichidelor de spălare este relativ mică. În figura 21 au fost re-

*) În funcție de compoziția mineralogică, în primul sistem de clasificare Schreiner, abrazivitatea relativă este consolidată în raport cu rocile sulfatice, avînd la bază uzura unitară a etaloanelor din carburi sinterizate [1], [6], [8], [9].

prezentate grafic valorile constantei lichidelor K_l, în funcție de coeficientul corespunzător de viscozitate dinamică, rezultînd lipsa unei dependențe clare.

Pe baza analizei relației generale (6) propuse, se poate stabili influența factorilor tehnologici asupra uzurii inserțiilor din aliajele dure [9].

Dacă se consideră $v = \text{const}$ și $K = \text{const}$, funcția $Y(p)$ este reprezentată grafic printr-o curbă cu o variație monoton crescătoare, cu concavitatea îndreptată către valorile pozitive ale ordonatelor (fig. 22), întrucît $\frac{dY}{dp} > 0$ și $\frac{d^2Y}{dp^2} > 0$. Variind și viteza de alunecare v, de exemplu de la v_1 la v_2 ($v_2 > v_1$), curbele corespunzătoare se întîlnesc în punctul cu abscisa:

$$p_0 = \frac{1}{10^{-2}K}\left(1 - \frac{K}{\lg e}\,\frac{\lg v_2 - \lg v_1}{v_2 - v_1}\right). \tag{7}$$

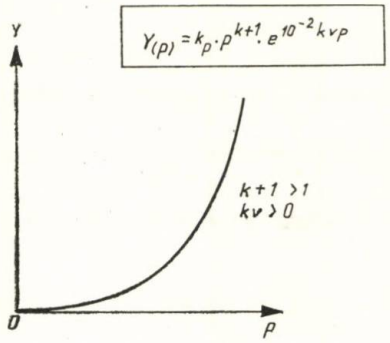


Fig. 22. — Variația generală $Y(p)$.

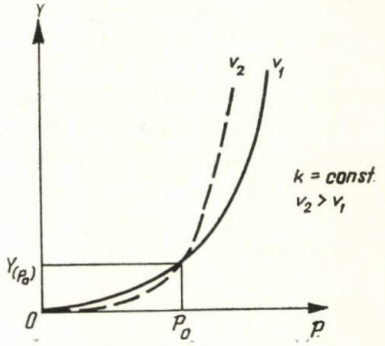


Fig. 23. — $Y(p)$, pentru $v_2 > v_1$.

Pentru $p < p_0$, viteza de alunecare cu valoare mai mică, v_1, dă uzuri mai mari și invers. Dacă se mărește în continuare viteza de alunecare, de exemplu pînă la v_3, punctul de intersecție se deplasează către valorile mari ale presiunii de contact p, fig. 24.

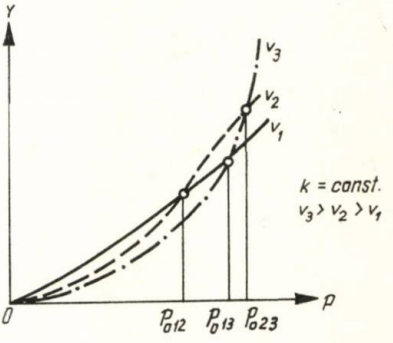


Fig. 24. — $Y(p)$, pentru $v_3 > v_2 > v_1$.

Menținînd $v = \text{const}$ și variind valorile abrazivității relative K, rezultă viteze de uzură mai mari odată cu creșterea valorii constantei K, așa cum este arătat în figura 25. În apropierea originii, adică pentru valori foarte mici ale presiunii de contact (practic neaplicabile), curbele $Y(p)$, pentru diferite abrazivități relative, se pot de asemenea intersecta.

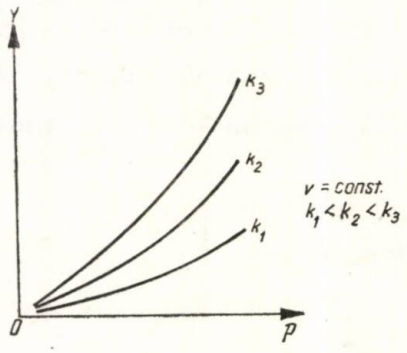


Fig. 25. — $Y(p)$, pentru $K_3 > K_2 > K_1$.

Considerînd funcția parțială $Y(v)$, rezultă două cazuri pentru alura curbei reprezentate grafic (fig. 26):

a) pentru $K_p < 100$, curba reprezintă un maxim (M) și un punct de inflexiune (I);

b) pentru $K_p > 100$, curba este continuu crescătoare, de asemenea cu dublă concavitate.

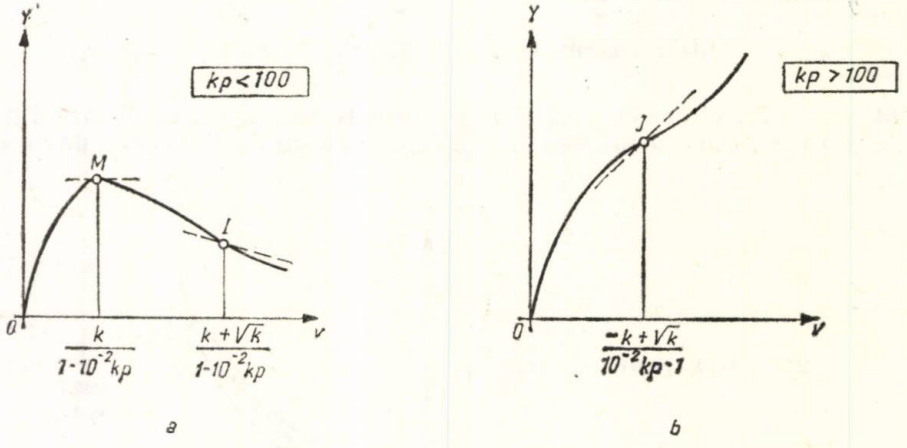


Fig. 26. — Variația generală $Y(v)$.

Față de cele de mai sus, dacă $K = \text{const}$ și se variază valorile presiunii de contact p, sau, invers, dacă $p = \text{const}$ și sînt variate valorile abrazivității relative K, alura curbelor este ca în schemele din figurile 27 și 28.

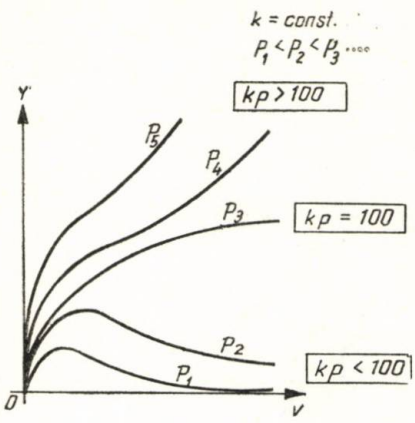


Fig. 27. — $Y(v)$, pentru $p_1 < p_2 < p_3 \ldots$

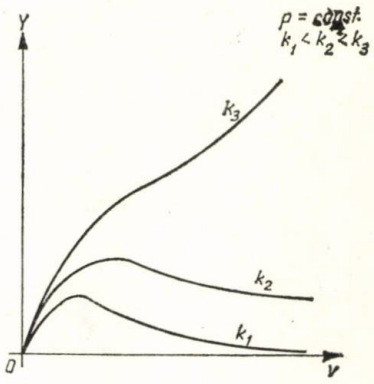


Fig. 28. — $Y(v)$, pentru $K_1 < K_2 < K_3$.

CONCLUZII

Aplicațiile practice ale relației experimentale (6), pentru viteza de uzură a inserțiilor din aliaje dure sinterizate folosite la sapele cu tăiș fix, se referă la [9]:

— proiectarea corespunzătoare a elementelor active ale sapei printr-o repartizare judicioasă a inserțiilor, în funcție de condițiile concrete de foraj, în scopul asigurării unei rezistențe uniforme a întregii suprafețe în contact funcționale cu roca. Astfel, în cazul forajului în roci greu forabile și abrazive, pentru care $K_p > 100$, la repartizarea inserțiilor dure se va avea în vedere întărirea zonelor periferice ale sapei, care, datorită vitezelor de alunecare mari, au tendința de a se uza mai repede, (fig. 29). Invers, pentru cazurile cînd forabilitatea rocii este ridicată, iar abrazivitatea lor scăzută, adică dacă $K_p < 100$, este necesară mărirea densității inserțiilor dure către centrul sapei, în direcție radială, întrucît în această zonă vitezele de alunecare mici conduc la apariția de uzuri mari în unitatea de timp; (fig. 30).

— exploatarea sapelor, prin:

a) delimitarea domeniului de utilizare, în raport cu celelalte construcții de sape, în funcție de natura rocilor de forat. În principiu, sapele cu tăiș fix și inserții sînt destinate a lucra în rocile cu forabilitate mare și abrazivitate redusă, funcția

$$K = \frac{100}{p} \tag{8}$$

delimitînd domeniul lor normal de utilizare (fig. 31);

b) urmărirea curentă și optimizarea performanțelor, folosindu-se relația duratei de funcționare, provenite prin integrarea definită a diferențialei duratei de funcționare dT_q, determinată analitic, plecîndu-se de la

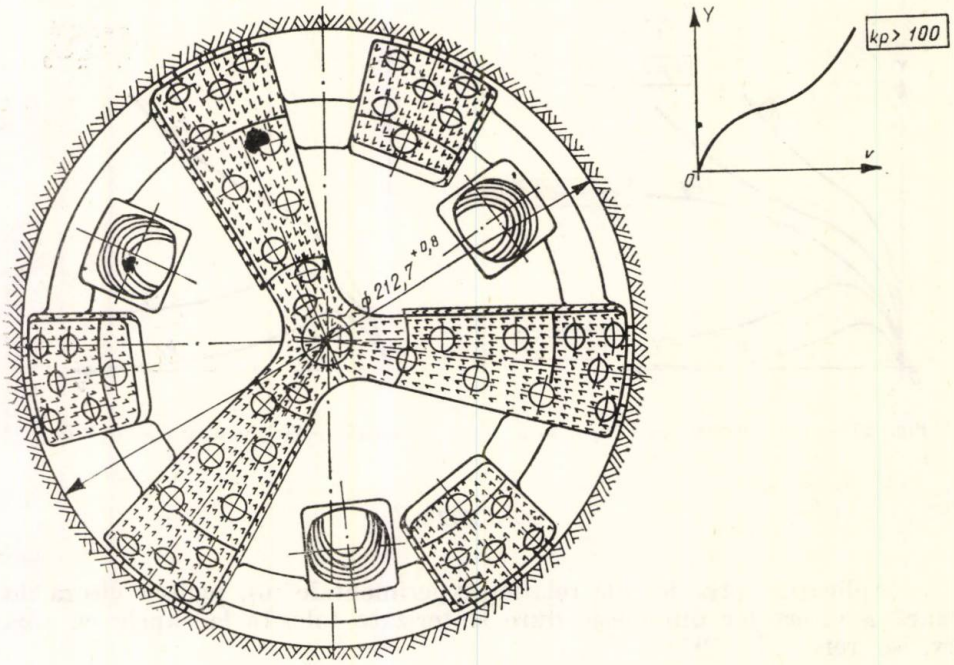


Fig. 29. — Repartizarea inserţiilor recomandată pentru cazul $K_p > 100$.

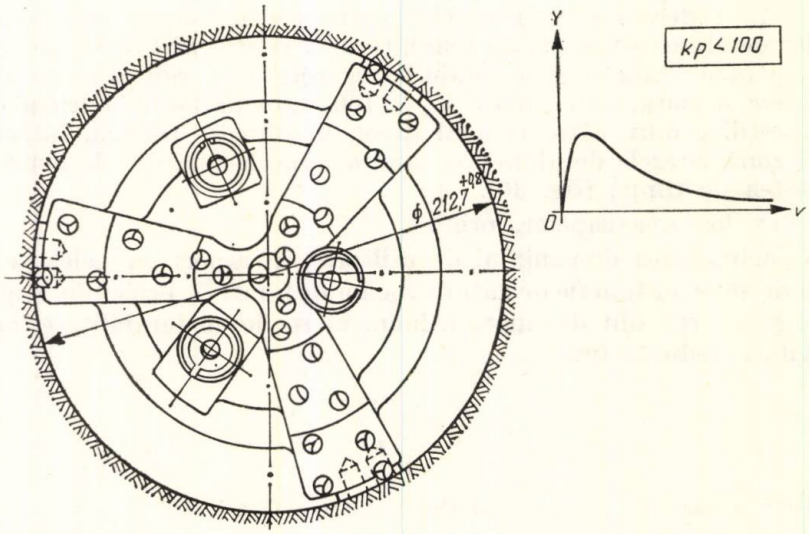


Fig. 30. — Repartizarea inserţiilor recomandată pentru cazul $K_p < 100$.

relația de bază (6). Astfel, spre exemplu, pentru inserțiile în formă cilindrică, durata de funcționare a sapei poate fi exprimată prin

$$T_q(h) = \frac{1}{K_6 \cdot K} \frac{e^{(1-K_7 \cdot K, G) K_8 \cdot n}}{G^{K+1} \cdot n^K} q, \tag{9}$$

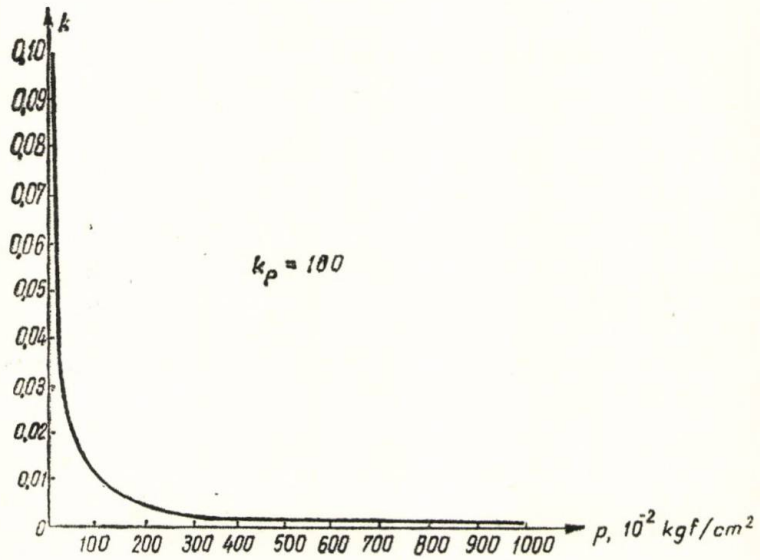


Fig. 31. — Domeniul de utilizare al sapelor cu tăiș fix, cu inserții.

în care

G(tf/in) este apăsarea pe sapă;

n(rot/min) — turația sapei;

q(%/100) — gradul de uzură al inserțiilor, în fracțiuni din înălțimea lor inițială, iar

$K_6 \ldots K_8$ — constantele caracteristice tipodimensiunii respective de sapă.

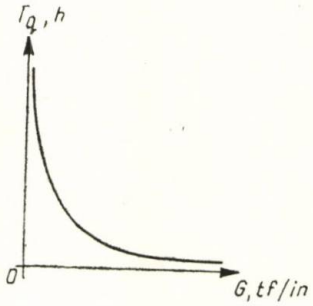


Fig. 32. — Variația duratei de funcționare a sapei, în raport cu sarcina.

În figurile 32 și 33 sînt reprezentate grafic, schematic, influențele parametrilor regimului de foraj asupra duratei de funcționare: se observă scăderea rapidă a duratei odată cu intensificarea regimului, adică la creș-

terea apăsării pe sapă și a turației, aceasta din urmă în cazul corespunzător $K_p > 100$. În cazul $K_p < 100$, $T_q(n)$ prezintă o variație cu minim, rezultînd că regimul de foraj recomandabil trebuie să aibă în vedere valori mici pentru apăsările pe sapă și mari pentru turații. Pentru fiecare situație concretă de foraj valorile regimului de lucru pot fi determinate cu ajutorul unor abace sau al calculatorului electronic, avînd la bază relații de tipul (9);

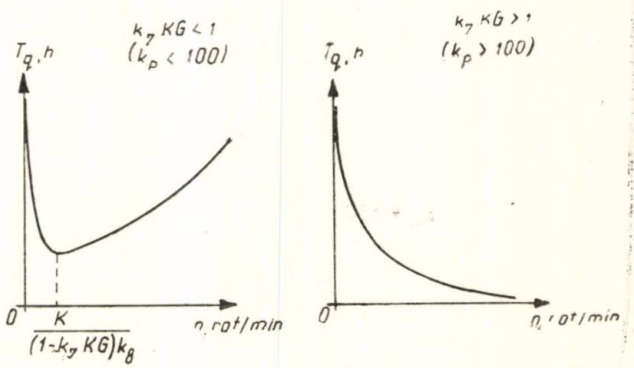


Fig. 33. — Variațiile duratei de funcționare a sapei, în raport cu viteza de alunecare.

— cercetarea abrazivității rocilor (în vederea clasificării lor sau a optimizării forajului), a rezistenței la uzură a diferitelor materiale posibil de utilizat la armarea sapelor (sau chiar cu alt specific) și influența diferitelor tipuri de fluide de circulație, prin aplicarea metodei și metodologiei de cercetare ce au stat la baza încercărilor experimentale de uzură. În acest scop, coeficientul de abrazivitate relativă K rezultă efectuînd o singură încercare de stand și rezolvînd ecuația logaritmică

$$\lg(100Y) = \lg K + [\lg(pv) + 10^{-2} \cdot pv(\lg e)]K + \lg p - v\lg e. \quad (10)$$

Primită la redacție la 1 octombrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. L. A. Schreiner și colab., *Mehaniceskie i abrazirnie svoistva gornih parod (proprietățile mecanice și abrazive ale rocilor minerale)*, Gostoptehizdat, Moskva, 1958.
2. M. H. Hrasciov, A. M. Babicev, *Issledovanie abrazivnovo iznașivania metallov, splavov i mineralov (cercetarea uzurii abrazive a metalelor, aliajelor și mineralelor)*, Sb. Trenie i iznos v mașinah, **IX** (1954). Soprotivlenie abrazinomu iznașivaniu metallov i mineralov, v tom cisle obladiuscih vîsocoi tverdastiu. DAN U.R.S.S., 107, *1* (1956).
3. Gh. Vasilva, O. Biță, *Procese de lubrificație, frecare și uzură la suprafețele metalice*, București, Edit. Academiei, 1967.
4. N. I. Șațov și colab., *Forajul sondelor de țiței și gaze* (trad. din l. rusă), București, Edit. tehnică, 1963.
5. E. F. Epstein, *Iznos tverdih splavov pritrenii po gornîm porodam pri coloncovom razvedocinom burenii (uzarea metalelor dure la presarea de roci în timpul forajului de exploatare cu carotaj mecanic continuu* — trad. I.D.T.), Gostoptehizdat, Moskva, 1952.

6. L. Brison, J. Brych, *L'abrasivité des roches* (*abrazivitatea rocilor*). Rev. de l'Industrie minérale, nr. 1, St. Etienne, Franța, 1970.

7. D. Constantinescu, *Considerații privind sapele cu tăiș fix, tipuri și caracteristici generale* (referat de doctorantură), Institutul de petrol Ploiești (IPP) Catedra Tehnologiei construcției de utilaj petrolier (TCUP) 1970.

8. — *Influența abrazivității rocii asupra uzurii metalelor dure sinterizate* (referat de doctorantură), Institutul de petrol Ploiești (IPP) Catedra Tehnologia construcției de utilaj petrolier (TCUP) 1970.

9. — *Considerații privind rezistența la uzură a sapelor cu tăiș fix, cu inserții din metal dur sinterizat* (referat de doctorantură), Institutul de petrol Ploiești (IPP) Catedra Tehnologia construcției de utilaj petrolier (TCUP) 1971.

CONSIDERAȚII TEORETICE PRIVIND AMBUTISAREA ADÎNCĂ A PIESELOR CILINDRICE

de GH. ZGURĂ
Institutul politehnic București

Lucrarea constituie un studiu teoretic asupra comportării la deformare a tablelor subțiri supuse prelucrării prin ambutisare în matrițe conice. Se studiază starea de eforturi unitare, pe baza căreia se apreciază posibilitățile de creștere a gradului de deformare.
Concluziile acestui studiu folosesc deopotrivă cercetătorilor din domeniul prelucrării prin deformare, precum și proiectanților de matrițe și procese tehnologice.

Mărirea gradului de deformare la obținerea pieselor prin ambutisare constituie o preocupare continuă a inginerilor și cercetătorilor din domeniul tehnologiei prelucrării prin deformare la rece. Astfel, în acest sens s-au elaborat procedee tehnologice și dispozitive speciale care realizează o creștere a gradului de deformare în raport cu procedeele clasice cunoscute. Un grad de deformare mai mare conduce la micșorarea ciclului de fabricație, pe de o parte, și la micșorarea cheltuielilor necesitate de construirea matrițelor, pe de altă parte.

Printre aceste metode amintim ambutisarea pieselor cilindrice fără flanșă, pornind de la semifabricat plan, în matrițe cu parte de angajare conică.

În general aceste matrițe sînt cunoscute în literatura de specialitate, însă ele sînt recomandate pentru operațiile ulterioare de ambutisare, la care nu se tratează problema apăsării asupra semifabricatului.

Pe lîngă utilizarea matrițelor conice la operațiile ulterioare, s-a dovedit că ele dau rezultate foarte bune și la prima operație de ambutisare, pornind de la semifabricatul plan. Eficiența primei operații de ambutisare în matrițe conice este însă condiționată de o serie de factori pe care ne propunem să-i analizăm în cele ce urmează. Menționăm că ambutisarea semifabricatelor plane în matrițe cu parte de angajare conică cu exercitarea unei apăsări pentru prevenirea cutelor nu este tratată în literatura de specialitate.

Pentru a evidenția factorii mai importanți care caracterizează procesul de deformare plastică se consideră o fază intermediară în deformarea

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 955–960

semifabricatului (fig. 1). Piesa astfel imaginată este similară cu un vas de rotaţie cu pereţi subţiri, pentru studierea căreia se aplică teoria fără momente cunoscută din rezistenţa materialelor.

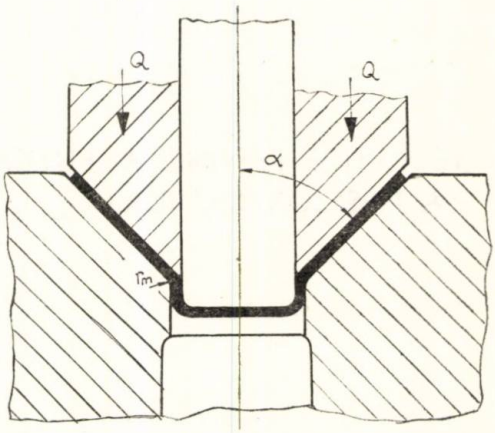


Fig. 1

Din piesa aflată în procesul de deformare (fig. 1) se separă un element pentru care se scrie ecuaţia de echilibru în coordonate polare sub forma

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{\mu\rho}{\sin\alpha}\left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta}\right) = 0, \tag{1}$$

în care

ρ este distanţa de la elementul considerat la axa de simetrie;
α — unghiul format de tangenta dusă la elementul considerat în sens meridional şi axa de simetrie;
μ — coeficientul de frecare;
R_ρ — raza de curbură trasată la elementul considerat în sens meridional;
R_θ — raza de curbură trasată după o paralelă;
σ_ρ — efortul unitar meridional (radial);
σ_θ — efortul unitar tangenţial.

Pentru cazul studiat ecuaţia de echilibru (1) se poate particulariza avînd în vedere că

$$R_\rho = \infty; \quad R_\theta = \frac{\rho}{\cos\alpha},$$

ajungînd la forma

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \gamma_\theta - \frac{\mu\sigma_\rho}{\operatorname{tg}\alpha} = 0. \tag{2}$$

Comportarea materialului în timpul procesului de deformare plastică se poate studia prin rezolvarea laolaltă a ecuației de echilibru (2) cu una din condițiile de plasticitate. Pentru aceasta se consideră ipoteza constanței eforturilor unitare tangențiale maxime:

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_c \tag{3}$$

Prin eliminarea efortului σ_θ din expresiile (2) și (3) se ajunge la relația

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_c \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - \frac{\mu \sigma_\rho}{\operatorname{tg}\alpha} = 0. \tag{4}$$

Ecuația diferențială (4) care exprimă condițiile în care se produce deformarea plastică a elementului considerat poate fi aranjată într-o formă convenabilă pentru a fi ușor integrată:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\sigma_\rho}{\sigma_c \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - \sigma_\rho \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}} = 0. \tag{5}$$

Ecuația (5) se integrează fără dificultăți rezultînd sub forma

$$\ln \rho = \ln \left[\sigma_c \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - \sigma_\rho \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}} + \ln c. \tag{6}$$

Pentru comoditatea aranjării ulterioare a ecuației se preferă introducerea unei constante de integrare sub forma unui logaritm. Cu această observație ecuația (6) devine

$$\ln \rho = \ln C \left[\sigma_c \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - \sigma_\rho \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}}, \tag{7}$$

de unde rezultă că

$$\rho = C \left[\sigma_c \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - \sigma_\rho \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}}. \tag{8}$$

Determinarea constantei de integrare se face folosind anumite condiții la limită, pornind de la particularitățile problemei studiate. Astfel, fiind vorba de ambutisarea unui semifabricat plan, rezultă că pentru o rază $\rho = R$ efortul $\sigma_\rho = 0$.

Această observație permite determinarea imediată a constantei de integrare sub forma

$$C = \frac{R}{\left[\sigma_c \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}}}. \tag{9}$$

Cu aceasta ecuaţia (8), care descrie procesul de deformare plastică, se poate transcrie sub forma

$$\frac{\rho}{R} = \left[-1 \frac{\sigma_\rho}{\sigma_c} \cdot \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha + \mu} \right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}}. \tag{10}$$

Din ecuaţia (10) se poate determina valoarea efortului unitar radial σ_ρ la deformarea elementului considerat pe partea conică a matriţei. Acest efort capătă valoarea cea mai mare atunci cînd raza ρ considerată ajunge egală cu raza r a piesei ambutisate. Aşa că expresia (10) devine :

$$\frac{r}{R} = \left[1 - \frac{\sigma_\eta}{\sigma_c} \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha + \mu} \right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}}. \tag{11}$$

Partea a doua a expresiei (11) se poate simplifica luînd în considerare primii termeni din dezvoltarea în serie a acesteia :

$$\left[1 - \frac{\sigma_\rho}{\sigma_c} \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha + \mu} \right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}} \simeq 1 - \frac{\sigma_\rho}{\sigma_c} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \mu}. \tag{12}$$

Exprimînd în continuare valoarea efortului unitar σ_ρ, se ajunge la

$$\sigma_\rho = \sigma_c \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(\frac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} \right). \tag{13}$$

Procesul de deformare plastică a elementului considerat include atît comportarea acestuia în cazul cînd se află pe porţiunea conică, cît şi la trecerea peste racordarea plăcii active. Trecerea peste racordarea plăcii active îmbracă două aspecte. Un aspect legat de îndoirea materialului atunci cînd elementul intră pe partea racordată cu raza r_m şi, respectiv, de dezdoire la ieşirea de pe partea racordată pe peretele drept al piesei ambutisate. Al doilea aspect se leagă de frecarea materialului pe porţiunea curbă.

Aceste două efecte au ca urmare o creştere a efortului unitar radial σ_ρ

Efectul de încovoiere la trecerea peste muchia plăcii de ambutisare se ia în seamă pe baza momentului care produce îndoirea materialului în domeniul plastic, iar frecarea pe partea racordată se consideră similară fenomenului care are loc la frecarea ce se produce la înfăşurarea unei curele pe o roată.

Pe lîngă aceste aspecte semnalate, efortul unitar σ_ρ va mai fi influenţat şi de presiunea exercitată cu forţa Q prin intermediul elementului de apăsare.

Toate aceste aspecte luate în considerare la determinarea efortului unitar radial σ_ρ conduc la valoarea maximă a acestuia $\sigma_{\rho_{max}}$ care poate fi reprezentată sub forma

$$\sigma_{\rho_{max}} = \sigma_c \left[\frac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} \left(1 - \frac{r}{R} \right) + \frac{\mu Q \sin\alpha}{\pi R s \sigma_c} + \frac{s}{2r_m + s} \right] e^{\mu\alpha}. \tag{14}$$

Punînd problema alegerii avantajoase a unghiului α cu care ar trebui construită placa de ambutisare va trebui să se urmărească acele condiții de deformare plastică care conduc la un efort unitar $\sigma_{\rho_{max}}$ de valoare cît mai mică.

Acest lucru se rezolvă prin anularea derivatei întîia a efortului unitar $\sigma_{\rho_{max}}$ din expresia (14), în raport cu unghiul α.

$$\frac{d\sigma_{\rho_{max}}}{d\alpha} = 0. \tag{15}$$

Expresia (15) se poate scrie după unele mici transformări sub forma

$$\left(1 - \frac{r}{R}\right)\left(1 - \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + \frac{Q}{\pi R s \sigma_c}(\mu \sin\alpha + \cos\alpha) + \frac{s}{2r_m + s} = 0. \tag{16}$$

Pentru utilizarea în practică a studiului efectuat asupra comportării materialului în procesul de deformare plastică este necesar ca rezultatele să fie prezentate sub forma coeficientului de ambutisare (cu care se operează în mod curent), exprimat în funcție de elementele cele mai caracteristice de care acesta depinde, și anume rapoartele $\frac{S}{D}$, $\frac{r_m}{S}$ etc.

Avînd în vedere faptul că raza exterioară a materialului la începutul fazei de angajare a acestuia în cavitatea propriu-zisă a plăcii de ambutisare nu diferă esențial de raza inițială a semifabricatului, vom considera coeficientul de ambutisare $m = \frac{r}{R}$.

Pentru a exprima mai clar influența elementelor principale asupra coeficientului de ambutisare, se vor înmulți toți termenii expresiei (16) cu raportul $\frac{S}{D}$ (D fiind diametrul inițial al semifabricatului plan; S — grosimea materialului).

În expresia obținută prin aplicarea artificiului de calcul amintit, vom conveni să considerăm raportul $\frac{Q}{2\pi R^2} = p$ egal cu presiunea cu care este apăsat materialul în timpul operației de ambutisare, avînd în vedere că raza r a piesei ambutisate este mică în cazul utilizării acestui procedeu destinat operațiilor de ambutisare adîncă.

În acest mod din expresia (16), cu artificiul menționat și notația de mai sus, se poate exprima valoarea coeficientului de ambutisare m

$$m = \frac{r}{R} = 1 - \frac{\frac{p}{\sigma_c}(\mu \sin\alpha + \cos\alpha) + \frac{S}{D} \cdot \frac{1}{\frac{2r_m}{s} + 1}}{\frac{S}{D}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} - 1\right)} \tag{17}$$

Expresia (17) permite determinarea raţională a parametrilor $\frac{p}{\sigma_s}$, μ, α, $\frac{S}{D}$, $\frac{r_m}{S}$, care conduc la un coeficient de ambutisare m de valoare convenabilă.

Pe baza acestei expresii se pot întocmi grafice, tabele etc., din care, pornind de la condiţii concrete date, exprimate de raportul $\frac{r}{R}$, $\frac{S}{D}$, cerute prin desenul de execuţie al piesei şi a mărimii σ_c impusă de materialul semifabricatului să se stabilească coeficientul de frecare μ, presiunea de apăsare p, unghiul α al plăcii de ambutisare şi raza de racordare r_m, elemente absolut indispensabile în proiectarea tehnologiei şi a sculelor necesare în vederea realizării piesei date.

Problema se poate rezolva comod folosind un calculator electronic care poate furniza datele necesare pentru determinarea parametrilor amintiţi pentru o gamă largă de valori, recomandate curent în literatura de specialitate, astfel încît să se poată determina acei coeficienţi de ambutisare care asigură obţinerea piesei într-o operaţie sau într-un număr minim de deformări.

Studiul teoretic elaborat creează posibilitatea proiectării raţionale a proceselor tehnologice de deformare plastică, precum şi a elementelor active folosite la construcţia matriţelor de ambutisare.

Primită la redacţie la 8 noiembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. A. N. Malov, *Tehnologhia holodnoi ştampovki*, Maşinostroenie, Moscova, 1969.
2. E. A. Popov, *Osnovî teorii listovoi ştampovki*, Maşinostroenie, Moscova, 1968.
3. A. Nadai, *Theory of flow and fracture of solids*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
4. L. A. Sofman, *Teoria i rasciotî profesov holodnoi ştampovki*, Maşinostroenie, Moscova, 1964.
5. P. Feltham, *Deformation and strenght of materials*, Butterworths, London, 1966.
6. Gh. Buzdugan, *Rezistenţa materialelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1970.

CONSIDERAȚII ASUPRA UNOR FUNCȚII ORIGINAL CARE PERMIT UTILIZAREA CALCULATOARELOR ÎN CONTROLUL AUTOMAT AL FILETELOR

de V. TABĂRĂ și H. VERTAN
Institutul politehnic București
M.I.C.M. – C.I.M.F.A.

Lucrarea elaborată se referă la studiul teoretic al conturului secțiunilor transversale și axiale prin piese prevăzute cu canale elicoidale sau spirale (șuruburi, țevi ghintuite, plăci cu canale spirale etc.).
Relațiile stabilite au scopul să asigure baza teoretică pentru automatizarea operației de control și pentru ridicarea preciziei de măsurare.

Din punct de vedere tehnic, filetele se utilizează fie la realizarea diferitelor asamblări demontabile, fie la transmiterea mișcării sau forței într-un ansamblu cinematic. Forma și dimensiunea filetului diferă funcție de o serie de parametrii, dintre care un rol determinant îl are aspectul funcțional sau destinația acestuia.

Luînd în considerare formele caracteristice ale filetelor, se remarcă faptul că pentru fixare se folosesc filete cu profil triunghiular, avînd în genere un pas redus ; pentru mișcare profilul pătrat, rotund, dreptunghiular sau trapezoidal, iar pentru forță filete cu profil rotund sau trapezoidal (dinți de fierăstrău).

Pentru o bună comportare în exploatare, filetele trebuie să îndeplinească o serie de condiții tehnice, dintre care o importanță primordială o au precizia pasului, forma și dimensiunile spirelor, ca și calitatea suprafeței prelucrate.

În funcție de rolul filetului se impun condiții de precizie în realizarea (execuție) mai mult sau mai puțin riguroase și, în consecință, se impune controlul corespunzător al pieselor filetate. În acest sens este edificatoare importanța controlului șuruburilor conducătoare ale mașinilor-unelte și îndeosebi ale mașinilor-unelte de precizie, ca și a diferitelor piese filetate, componente ale aparatelor și instrumentelor de măsură.

Întrucît efectuarea controlului filetului prin metode clasice necesită utilizarea unor muncitori cu calificare înaltă și un timp relativ mare,

studiul prezentat în această lucrare își propune să ofere o bază teoretică pentru automatizarea acestei operații.

În elaborarea lucrării s-a avut în vedere și faptul că automatizarea operațiilor de control înlătură elementul subiectiv, bazat pe diferențierea calității controlului funcție de gradul de calificare sau de oboseală al muncitorilor, starea aparatelor de măsură folosite etc. Această preocupare este reflectată în faptul că s-a căutat o soluționare a problemei, bazată pe exprimarea analitică a formei filetului, în așa fel încît folosind calculatoare numerice să se determine coordonatele corespunzătoare dimensiunilor pieselor filetate în oricare punct al acestora.

Pentru obținerea unei relații analitice care să exprime într-o formă unitară întregul profil al diferitelor forme de filete s-au luat în considerare funcțiile original de forma

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z} dz, \tag{1}$$

care, pe baza teoremei întîrzierii, permite să se obțină expresia

$$T(t, \tau_{2j+1}, \tau_{2j+2}) = \sum_{j=0}^{j=k} [\eta(t - \tau_{2j+1}) - \eta(t - \tau_{2j+2})] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{j=k} \left[\int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} \frac{e^{(t-\tau_{2j+1})z}}{z} dz - \int_{a_2-i\infty}^{a_2+i\infty} \frac{e^{(t-\tau_{2j+2})z}}{z} dz \right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < \tau_1, \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } t = \tau_{2j+1}, \\ 1 & \text{pentru } \tau_{2j+1} < t < \tau_{2j+2}, \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } t = \tau_{2j+2}, \\ 0 & \text{pentru } \tau_{2j+2} < t < \tau_{2j+3}. \end{cases} \tag{2}$$

Se constată că expresia (2) determină într-un sistem de coordonate $T(t, \tau_{2j+1}, \tau_{2j+2})$; t o variație corespunzătoare repetării de k ori a funcției treaptă unitară. Aceasta reprezintă de fapt o funcție periodică cu o succesiune determinată de trepte.

În cazul în care pentru relația (2) sînt respectate condițiile

$$\begin{aligned} \tau_{2j} - \tau_{2j} - 1 &= \text{const}, \\ \tau_{2j+1} - \tau_{2j} &= \text{const}, \end{aligned} \tag{3}$$

se obține o succesiune cu întîrziere constantă a treptelor, ceea ce ar corespunde profilelor cu pas constant.

Pentru profilele periodice cu pas variabil condițiile de mai sus vor lua forma

$$\begin{aligned} \tau_{2j+1} - \tau_{2j} &= \text{const}, \\ \tau_{2j+2} - \tau_{2j+1} &= \tau_{2j} - \tau_{2j-1} \pm \Delta\tau, \end{aligned} \tag{4}$$

în care

$$\pm\Delta\tau = \tau_{2j+2} - [\tau_{2j+1} + (\tau_{2j} - \tau_{2j-1})] = \text{const}, \tag{5}$$

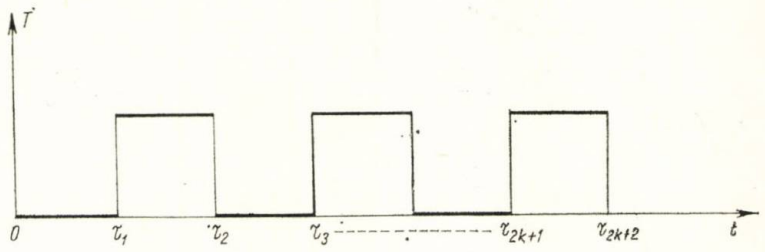


Fig. 1

dacă între perioade se prevede o creștere (descreștere) uniformă a pasului.

În alte situații, legea de variație a pasului va determina relațiile corespunzătoare întîrzierilor specifice profilului.

Astfel, în cazul unor canale realizate după o spirală logaritmică

$$r = ae^{m\varphi},$$

condițiile prin care se va asigura exprimarea profilului vor lua forma

$$\begin{aligned} \tau_{2j+1} - \tau_{2j} &= \text{const}, \\ \tau_{2j+2} - \tau_{2j+1} &= ae^{2\pi(j-1)m}(e^{2\pi m} - 1). \end{aligned} \tag{6}$$

Luînd în considerare cele menționate mai sus și aplicînd relațiile determinate în cazul unor profile periodice pentru diferite piese filetate, se disting trei variante caracteristice, și anume:

a) piese filetate cu pas mare și mai multe începuturi;

b) piese filetate cu pas normal;

c) piese cu canale elicoidale avînd pas variabil.

Profilul primei categorii de piese va putea fi exprimat mai simplu în secțiune transversală (fig. 2). În acest scop se vor lua în considerare elementele geometrice care compun profilul nervurii, și anume:

— segmentul de dreaptă A_0B_0;

— arcul de cerc B_0C_0;

— segmentul de dreaptă C_0D_0;

— arcul de cerc D_0A_1.

Profilul în secțiune al șuruburilor din această categorie fiind format din repetarea periodică a nervurii va fi determinat de numărul de începuturi, deoarece acesta este egal cu numărul spirelor.

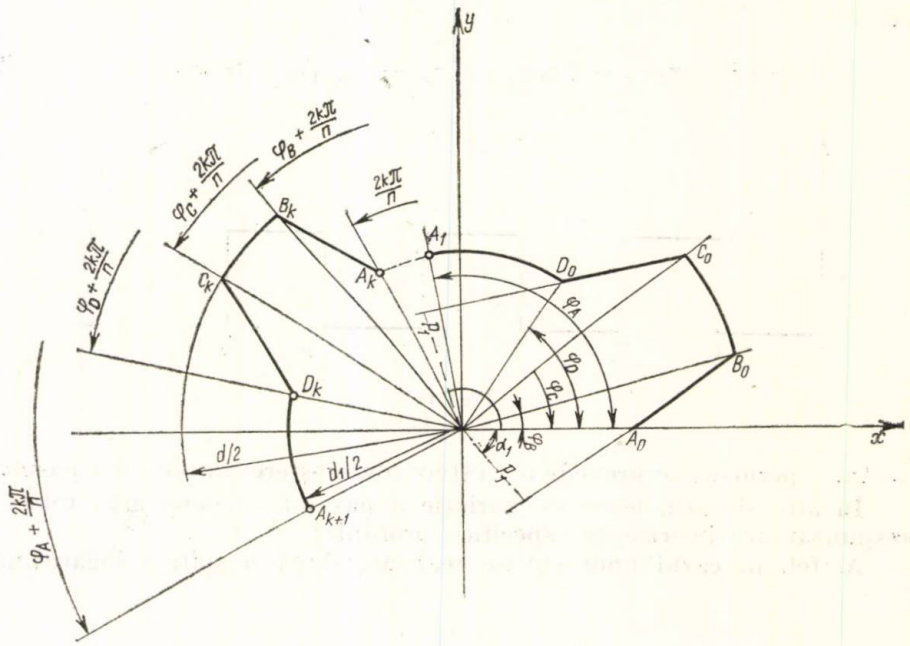


Fig. 2.

În consecință, folosind ecuațiile pentru dreptele care conțin elementele de profil,

$$n_{t_k} = \frac{p_1}{\cos\left[\varphi - \left(\alpha_1 + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]}, \tag{7}$$

și pentru cercurile pe care sînt situate arcele de cerc ale profilului considerat,

$$n = \frac{d_{1.2}}{2} \tag{8}$$

se poate obține cu ușurință ecuația generală a conturului secțiunii.

Pentru aceasta se vor lua în considerare relațiile determinate de suma produselor:

$$r_{\text{I}} = \sum_{k=0}^{k=n-1} r_{1k} \cdot T\left(\varphi, \frac{2k\pi}{n}, \varphi_B + \frac{2k\pi}{n}\right) \tag{9}$$

reprezentînd ecuația tuturor elementelor de profil formate din segmentele notate prin A_kB_k,

$$r_{II} = \sum_{k=0}^{k=n-1} r_2 \cdot T\left(\varphi,\ \varphi_B + \frac{2k\pi}{n},\ \varphi_C + \frac{2k\pi}{n}\right) \tag{10}$$

exprimînd totalitatea arcelor $B_k\,C_k$ situate pe cercul exterior,

$$r_{III} = \sum_{k=0}^{k=n-1} r_{3k} \cdot T\left(\varphi,\ \varphi_C + \frac{2k\pi}{n},\ \varphi_D + \frac{2k\pi}{n}\right) \tag{11}$$

corespunzător segmentelor $C_k\,D_k$, și

$$r_{IV} = \sum_{k=0}^{k=n-1} r_4 \cdot T\left(\varphi,\ \varphi_D + \frac{2k\pi}{n},\ \varphi_A + \frac{2k\pi}{n}\right) \tag{12}$$

pentru arcele D_kA_{k+1} conținute de cercul interior al profilului.

Suma elementelor de profil exprimate sub forma

$$R = \sum_{k=1}^{k=4} r_k \tag{13}$$

va reprezenta ecuația întregului contur al secțiunii considerate. Se constată că pentru punctele-limită (de frontieră), caracterizate prin valorile $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$; $\varphi = \varphi_B + \frac{2k\pi}{n}$; $\varphi = \varphi_C + \frac{2k\pi}{n}$; $\varphi = \varphi_D + \frac{2k\pi}{n}$; $\varphi = \varphi_A + \frac{2k\pi}{n}$, se obțin valorile $R_1' = \frac{1}{2} r_{1k}$, $R_2' = \frac{1}{2} r_2$, $R_3' = \frac{1}{2} r_{3k}$; $R_4' = \frac{1}{2} r_4$, conform particularităților funcției treaptă unitară utilizate.

Cum însă în aceleași puncte, razele corespunzătoare elementelor de profil învecinate vor avea aceleași valori, și anume:

$$R_1'' = \frac{1}{2} r_{1k};\quad R_2'' = \frac{1}{2} r_{2k};\quad R_3'' = \frac{1}{2} r_{3k} \text{ și } R_4'' = \frac{1}{2} r_{4k},$$

rezultă din suma lor, conform relației generale, că în aceste puncte profilul este caracterizat prin razele $R_1 = r_{1k} \cdots R_4 = r_{4k}$.

Trebuie luat în considerare faptul că utilizarea formulei în cazul secțiunilor transversale necesită efectuarea controlului în mai multe secțiuni succesive.

Pentru ușurința controlului este recomandabil să se efectueze verificarea piesei în secțiuni situate la distanțe egale cu pasul filetului, urmărindu-se precizia de repetare a valorilor. Dacă pasul filetului este mai mare decît lungimea piesei, se va face verificarea în secțiuni succesive situate la o distanță $\Delta I = \frac{p}{m}$ = număr întreg (m fiind și el număr întreg).

În acest caz între întîrzierele corespunzătoare secţiunilor în care se efectuează verificarea se impune relaţia

$$\varphi_j = \varphi_{j-1} + \frac{2\pi}{m}. \tag{14}$$

În cazul pieselor avînd pasul normal, pentru exprimarea profilului filetului se va lua în considerare secţiunea axială, pentru care se vor scrie ecuaţiile geometrice ale elementelor de profil.

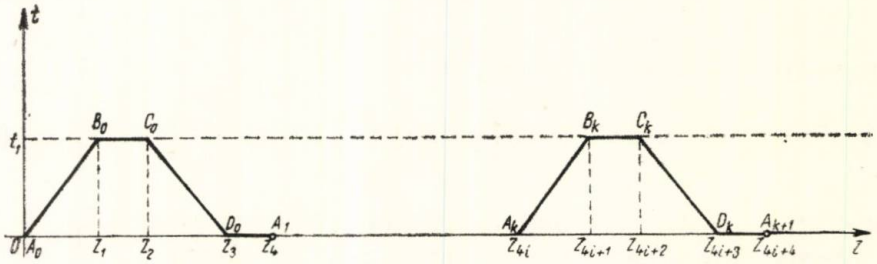


Fig. 3

Astfel, de exemplu, în cazul unui filet trapezoidal (fig. 3), funcţiile corespunzătoare ecuaţiilor geometrice a elementelor de profil în secţiunea axială vor fi :

$y = mz + n_k$ pentru dreapta conţinînd segmentul A_kB_k;
$y = t_1$ pentru dreapta conţinînd segmentul B_kC_k;
$y = mz + n'_k$ pentru dreapta conţinînd segmentul C_kD_k;
şi $y = 0$ pentru dreapta conţinînd segmentul D_kA_{k+1}.

Pe baza acestor ecuaţii se vor obţine expresiile elementelor de profil prin produsul lor cu funcţia original de formă (2).

Se obţin astfel relaţiile :

$$y_{\mathrm{I}} = \sum_{k=0}^{k=U-1} (mx + n_k) \cdot T(t,\ Z_{4i},\ Z_{4i+1}), \tag{15}$$

cu condiţia

$$Z \in (Z_{4i},\ Z_{4i+1}), \tag{16}$$

unde u este numărul de paşi ai filetului pentru elementele de profil determinate de segmentele A_kB_k;

$$y_{\mathrm{II}} = \sum_{k=0}^{k=U-1} t_1 \cdot T(t,\ z_{4i+1},\ Z_{4i+2}) \tag{17}$$

pentru elementele de profil situate pe diametrul exterior;

$$y_{\mathrm{III}} = \sum_{k=0}^{k=U-1} (mx + n'_k)\ T(t,\ Z_{4i+2},\ Z_{4i+3}) \tag{18}$$

pentru elementele de profil reprezentate prin segmentele C_kD_k;

$$y_{\mathrm{IV}} = 0 \tag{19}$$

pentru elementele de profil situate pe diametrul interior.

Suma acestor relaţii va exprima integral şi exclusiv conturul secţiunii considerate sub forma

$$y = \sum_{k=I}^{k=IV} y_k. \tag{20}$$

Pentru a fi mai riguroşi din punct de vedere matematic, se va căuta evitarea condiţiei (16), întrucît interesează valoarea teoretică obţinută cu ajutorul relaţiei generale şi în punctele extreme (începutul şi sfîrşitul profilului discutat).

Pentru realizarea acestui deziderat se va introduce o altă funcţie original, asemănătoare cu o funcţie Dirac $\delta(t) = \eta'(t)$.

Proprietăţile funcţiei $\delta(t)$ ne arată că aceasta nu reprezintă o funcţie obişnuită, din punctul de vedere al analizei clasice, neexistînd o astfel de funcţie. Cu tot formalismul privind utilizarea funcţiei „delta", se simplifică şi se pot justifica diferite rezultate, atît din domeniul fizicii, cît şi din domeniul matematicii aplicate în diverse ramuri ale tehnicii.

Funcţia care se introduce are valoare diferită de funcţia „delta" a lui Dirac într-un singur punct $t = \tau_1$, în care funcţia lui Dirac tinde la infinit, iar valoarea funcţiei considerată este egală cu unitatea. Această funcţie, pe care o notăm cu $V(t\,;\,\tau_1)$, se obţine utilizînd produsul a doi factori de forma următoare :

$$\eta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-j\infty}^{a+t\infty} \frac{e^{(t-\tau)z}}{z}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < \tau, \\ \dfrac{1}{2} & \text{pentru } t = \tau, \\ 1 & \text{pentru } t > \tau, \end{cases} \tag{21}$$

obţinîndu-se :

$$V(t\,;\,\tau_1) = \eta(t-\tau_1)\cdot\eta(-t+\tau_1) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \neq \tau_1, \\ 1 & \text{pentru } t = \tau_1. \end{cases} \tag{22}$$

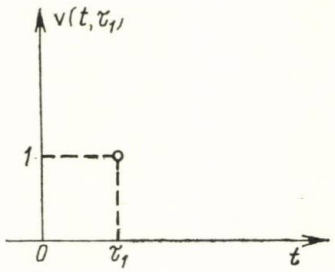


Fig. 4

Făcînd o combinaţie de funcţii de forma (2) cu condiţia ca $J = 0$ şi (22), se introduce funcţia

$$E_{|\,t\in[\tau_1;\,\tau_2]\,|} = \frac{1}{2}V(t\,;\,\tau_1) + T(t\,;\,\tau_1\,;\,\tau_2) + \frac{1}{2}V(t\,;\,\tau_2) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } t \in [\tau_1\,;\,\tau_2] \\ 0 \text{ pentru } t \in [\tau_1\,;\,\tau_2] \end{cases} \tag{23}$$

Înlocuind în mod corespunzător funcţiile original T folosite în relaţia (20) cu funcţia E, rezultă că obţinem o relaţie care descrie în totalitate întregul profil axial al filetului, neexistînd nici un punct care să rămînă în afară.

CONCLUZII

Studiul efectuat asupra posibilităţilor de reprezentare analitică a profilului filetelor, evidenţiază faptul că utilizarea funcţiilor original oferă condiţii pentru exprimarea relativ simplă a întregului contur al secţiunii axiale sau transversale corespunzătoare diferitelor forme de piese filetate.

În consecinţă, folosind una din relaţiile [13]; [20] sau (23) se poate determina cu uşurinţă coordonatele profilului secţiunii prin piesa filetată în oricare punct dorim.

Pentru aceasta se pot utiliza calculatoare, obţinînd astfel programul operaţiei de control pe care v-a trebui să-l realizeze aparatul cu traductorul pentru indicarea sau înregistrarea valorilor măsurate.

De menţionat că întîrzierile τ_j, τ_{j+1} etc. vor reprezenta puncte-limită şi, în consecinţă, ele constituie valori de bază pentru elaborarea programului de control automat. Între aceste valori traductorul va trebui să efectueze deplasări după traiectorii determinate de elementele geometrice simple, constituite din segmente de dreaptă şi arce de cerc. Aceste deplasări vor putea fi efectuate mai simplu dacă se realizează o combinaţie de mişcări ale traductorului şi ale piesei. Utilizarea unei asemenea combinări de mişcări este recomandabilă cu precădere în cazul pieselor al căror control se efectuează în secţiune transversală şi la care piesa va putea realiza mişcarea de rotaţie, iar traductorul deplasările rectilinii.

Automatizarea operaţiei de control pe baza relaţiilor stabilite în această lucrare prezintă avantajul unei precizii ridicate şi a simplificării acesteia. Este demn de relevat şi faptul că studiul elaborat oferă posibilitatea utilizării relaţiilor de calcul pentru mărirea preciziei de lucru a maşinilor-unelte de prelucrat filete. În acest scop abaterile de profil determinate de un traductor vor trebui să corecteze deplasările suportului sculei.

Primită la redacţie la 31 mai 1971

BIBLIOGRAFIE

1. R. BĂDESCU, C. MAICAN, *Integrale utilizate în mecanică, fizică, tehnică şi calculul lor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1968.
2. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1970.
3. I. GH. SABAC, *Curs de matematică superioară*, vol. II, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1965.
4. V. TABĂRĂ, H. VERTAN, *Metodă de control automat al roţilor dinţate*, Comunicare la a XIV-a sesiune ştiinţifică a Institutului politehnic din Bucureşti, 1971.
5. — *Metodă de control automat al pieselor cu profil complex*, Comunicare la a XIV-a sesiune ştiinţifică a Institutului politehnic Bucureşti, 1971.

PERSPECTIVE ŞI PREOCUPĂRI ÎN CONSTRUCŢIA DE AVIOANE MODERNE

de ŞTEFAN ISPAS
Ministerul industriei construcţiei de maşini

Se analizează sub diverse aspecte tendinţele de dezvoltare a avioanelor moderne, cu evidenţierea preocupărilor ştiinţifice şi soluţiilor tehnice adoptate pentru satisfacerea cerinţelor impuse aviaţiei militare. Se prezintă în continuare unele consideraţii economice privind organizarea cercetării, proiectării şi fabricaţiei acestor categorii de avioane.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

De-a lungul tuturor etapelor de dezvoltare a aeronauticii multe rezultate ştiinţifice noi, cît şi soluţiile tehnice cele mai avansate şi-au găsit aplicaţii în primul rînd în aviaţia militară. Construcţia acestor tipuri de avioane a fost marcată în ultimii 15—20 ani de tendinţe contradictorii determinate de apariţia, dezvoltarea şi înzestrarea armatelor cu rachete terestre şi antiaeriene. Deşi inventate şi cunoscute din timpuri străvechi, de-abia în pragul erei cosmice, rachetele au devenit cu adevărat o armă de luptă dintre cele mai eficace şi au impus, de altfel ca orice realizare tehnică în domeniul militar, modificarea doctrinei militare a statelor, în ceea ce priveşte organizarea armatelor şi desfăşurarea acţiunilor militare. Aceste schimbări au influenţat modul de întrebuinţare în luptă al aviaţiei, avînd o serie de consecinţe imediate asupra dezvoltării ulterioare a acesteia în tot ansamblul ei.

Principalele consecinţe s-au înscris pe următoarele direcţii:

— restrîngerea rolului şi a domeniilor de folosire a aviaţiei şi în special a avioanelor de bombardament strategic;

— schimbarea orientării programelor de studii şi dezvoltare a avioanelor de luptă punîndu-se accentul pe avioane polivalente, în dauna avioanelor specifice fiecărei misiuni de luptă; ca urmare au apărut avioane cu greutate mărită la decolare, de la 6—8 tf la 15—20 tf;

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 969—988

— limitarea și stagnarea pentru o perioadă destul de lungă a vitezelor maxime de zbor la valori ale numărului M în jur de 2. Au fost chiar abandonate pe rînd unele tipuri de avioane din domeniul de performanțe $M = 2$ care, după unele concepții nu puteau fi corespunzătoare luptei la joasă înălțime. Trebuie menționat aici, că o anumită reducere a ritmului de dezvoltare a avioanelor militare, în această perioadă a fost influențată în mod obiectiv și de dificultățile tehnico-științifice create de zborul la viteze supersonice (unde de șoc, încălzire aerodinamică, strat limită etc.);

— anularea succesivă a unor programe de studii și realizare a unor avioane de luptă a condus la transferarea unei părți a potențialului științific și industrial din domeniul aviației în cel al rachetelor, tehnicii spațiale sau al avioanelor civile. În industriile de aviație foarte dezvoltate, transferul s-a făcut și în domeniul activităților industriale obișnuite;

— creșterea considerabilă a ponderii echipamentelor electronice, de comunicație, navigație și de automatizare, a descoperirii, urmăririi și tragerii asupra țintelor, atît ca număr la bordul avionului, cît și ca preț în costul total al acestuia;

— crearea unor condiții tot mai complexe de conducere și deservire a avioanelor de către personalul navigant și tehnic și dezvoltarea rapidă a mijloacelor de radiolocație pentru dirijarea și conducerea în luptă a aviației.

Analiza posibilităților și limitelor avioanelor și rachetelor pe cîmpul de luptă modern, avînd ca suport științific rezultatele concrete obținute în utilizarea acestora în ultimii 5—6 ani, evidențiază reconsiderarea conceptelor inițiale și readaptarea doctrinelor de folosire în luptă a aviației.

În baza rezultatelor practice obținute, vulnerabilitatea ridicată a avionului care-l condamna — după unele păreri — la pieire, a fost substanțial micșorată la avionul cu reacție modern, datorită performanțelor superioare ale acestuia: de la nouă pierderi la 1000 de zboruri, cît era media în cursul celui de al doilea război mondial, s-a ajuns doar la trei pierderi la 1000 de zboruri, cîte s-au înregistrat în războaiele locale din ultimul deceniu, cu toate că acum există mijloace moderne de radiolocație pentru descoperire, precum și rachetele aer-aer sau sol-aer pentru distrugere.

S-a ajuns astfel la o utilizare mixtă atît a avioanelor, cît și a rachetelor pe baza folosirii avantajelor pe care le are fiecare, stabilindu-se destul de precis care sînt misiunile pe care urmează să le realizeze avioanele și care să le realizeze rachetele (de sol sau de bord) atît în acțiuni de apărare, cît și în acțiuni ofensive.

Readaptarea s-a produs în cîteva direcții caracteristice care pot fi grupate astfel:

— reintroducerea limitată a conceptului de „specializare" și, ca urmare, au apărut în ultimii ani avioane pentru atac la sol, avioane pentru cercetare și luptă antisubmarină, avioane pentru contraacțiune radio etc.;

— reevaluarea posibilităților avionului reactiv ușor, subsonic sau transonic de antrenament, prin folosirea acestuia pentru misiuni de atac la sol;

— echiparea avioanelor pentru misiuni de recunoaștere cu echipament de fotografiere, înregistrare și transmitere la sol, continuu sau secvențial, a informațiilor culese;

— creșterea continuă a încărcăturii utile de luptă pînă la valori de ordinul a 8—10 tf (20—50% din greutatea totală), diversificarea armamentului de bord (bombe, rachete dirijate și nedirijate, tunuri și mitraliere fixate pe structura avionului sau în nacele speciale acroșate în exterior (pe și sub planuri, pe și sub ampenajul orizontal, pe trapele trenului de aterizare, pe fuzelaj);

— folosirea pe scară largă a formulei de echipare cu două motoare atît pentru mărirea siguranței de zbor, cît și pentru a se putea realiza zborurile la performanțele preconizate, cu încărcături utile de luptă mărite.

După parcurgerea celor două etape, influențate de concepția întrebuințării în luptă a aviației, de diversificarea tehnicii de luptă și de apariția de noi realizări tehnice, avionul de luptă reconsiderat se realizează astăzi în variante diverse în funcție de concepția de folosire în luptă, de potențialul economic și de nivelul tehnic al fiecărei țări și de capacitatea specialiștilor din cercetare, proiectare și producție. Ca urmare, în prezent se află în construcție avioane de luptă la care se remarcă o serie de tendințe dintre care menționăm ca mai importante:

— menținerea conceptului de polivalență (dar într-un sens limitat), numai pentru avioane de vînătoare (pot executa — fiind proiectate și echipate corespunzător — misiuni de interceptare și atac la sol, interceptare și recunoaștere);

— dispariția treptată a avionului proiectat numai pentru misiuni de interceptare (au rămas ca avioane de perspectivă puține tipuri care să execute numai astfel de misiuni);

— conceptul de specializare este întîlnit limitat la avioanele de atac la sol, dar și cu un anumit grad de polivalență, putînd lua la bord, în afara armamentului ofensiv pentru executarea misiunilor de atac la sol și armament de apărare (rachete aer-aer sau tunuri de bord).

2. DIVERSIFICAREA CONSTRUCȚIILOR DE AVIOANE MILITARE

După cum este cunoscut, principalii factori care au favorizat dezvoltarea aviației militare au fost, pe de o parte, necesitățile în continuă schimbare ale cîmpului de luptă modern, iar pe de altă parte posibilitățile tehnologice în continuu progres.

Necesitățile în avioane și posibilitățile de construcție sînt susținute și reflectate de diversitatea mare de avioane de luptă construite și utilizate.

2.1. CLASIFICAREA AVIOANELOR DE LUPTĂ

O clasificare riguroasă a avioanelor de luptă în serviciu în momentul de față este dificil de stabilit, datorită existenței unui număr mare de aparate realizate pentru a îndeplini misiuni dintre cele mai diverse. Se conturează totuși cîteva grupe care pot fi prezentate ca atare, fără a considera între acestea frontiere rigide.

Astfel, în aviaţia de luptă a diverselor state se găsesc, în linii generale, următoarele categorii de avioane :

— avioane de antrenament ;
— avioane de luptă uşoare şi de antrenament avansat ;
— avioane de luptă şi interceptare, perfecţionate, de mărime medie ;
— avioane grele de luptă ;
— avioane de transport.

Cu aceste categorii de avioane se pot executa : antrenarea piloţilor, misiuni de sprijin tactic al trupelor terestre (atac la sol), misiuni de vînătoare — interceptare, misiuni de cercetare, de bombardament şi de transport.

Legat de aceasta trebuie avut în vedere şi faptul că în ultimii ani capătă o importanţă tot mai mare folosirea elicopterelor în sprijinirea trupelor terestre, în special pentru misiuni de legătură, cercetarea de informare, atacul împotriva mijloacelor terestre de luptă şi a forţei vii, transportul de desant, transportul sanitar.

În armata franceză — care beneficiază şi de existenţa în Franţa a unei industrii de elicoptere de prim rang — avioanele uşoare de observare şi de legătură sînt deja înlocuite pînă în prezent de aproape 7% cu elicoptere, iar planul de înzestrare prevede pentru următorii doi ani creşterea pînă la 80%. Cazurile de accidente foarte reduse (1,05 aparate la 10.000 de ore de zbor) a conferit supremaţia elicopterului în acţiunea de dotare, ca mijloc aeromobil al armatelor terestre.

2.2. CERINŢELE PRINCIPALE IMPUSE AVIOANELOR MODERNE

Există firesc, dorinţa şi necesitatea de a crea un avion care, prin acţiuni simple, de transformare şi de deservire la sol să poată fi echipat pentru a executa toată gama de misiuni aeriene.

Tot aşa de firesc este ca acest lucru să nu se poată realiza cu mijloacele tehnice actuale, decît sacrificînd performanţele de zbor, complicînd foarte mult construcţia, ridicînd inadmisibil costurile şi creînd pentru pilot o maşină foarte complexă, greu de manevrat în lupta aeriană.

De aceea, există o lege în construcţia de avioane, cunoscută şi respectată de toţi constructorii şi anume, aceea de a defini iniţial misiunile pe care le are de executat avionul şi apoi prin calcule şi experimentări să se stabilească soluţia constructivă care să corespundă cel mai bine misiunilor propuse.

Din multitudinea cerinţelor care se impun a fi îndeplinite de constructori, pentru avioanele moderne militare actuale şi viitoare, se studiază cu precădere şi se caută rezolvări pentru :

2.2.1. *Viteză maximă ridicată în zborul de altitudine şi viteză redusă în zborul la mică înălţime, la decolare şi aterizare.* Acest mare şi permanent deziderat al aviaţiei se rezolvă în principal prin studierea şi găsirea unei forme aerodinamice cît mai bune şi prin echiparea cu instalaţii de propulsie puternice şi de gabarite reduse. Avioanele militare de mare viteză (realizate sau în proiect) susţin soluţia „geometrie variabilă" şi „motoare

din generația a doua și a treia" (turboreactoare cu dublu flux, cu dublu sau triplu ansamblu compresor-turbină, cu simplă sau dublă post-combustie) sau chiar a motoarelor rachetă.

Avantajul aripii cu geometrie variabilă constă în posibilitatea realizării unei game largi de viteze — de la 250 km/h la $M = 2{,}5$ — și prin aceasta a unor performanțe maxime pentru fiecare tip de misiune. Trebuie menționat că geometria variabilă aduce un supliment de greutate de circa 10%, care reduce fie încărcătura de luptă, fie autonomia de zbor prin reducerea cantității de combustibil de la bord. Studiile comparative, realizate de firmele specializate, pentru stabilirea variantei optime de avion cu geometrie variabilă au condus la concluzia că soluția „geometrie variabilă" se justifică pentru avioane a căror greutate la decolare este mai mare de 17—18 tf. De asemenea, costurile de realizare ale unui avion cu geometrie variabilă, în comparație cu cele ale unui tip de avion din aceeași categorie dar cu aripa fixă sînt mai mari cu 15%.

O preocupare deosebită există în prezent pentru ameliorarea calităților avioanelor la decolare și aterizare. Mijloacele folosite în acest scop pînă acum, ca forțarea tracțiunii motoarelor, întrebuințarea acceleratoarelor de pornire, dispozitive de hipersustentație bine studiate — ultima realizare în acest domeniu fiind voleții amplasați lateral la partea din față a fuzelajului, care se scot la aterizare pentru mărirea portanței avionului, practicate la avionul francez „Milan V" — au adus serioase îmbunătățiri, dar soluția radicală o va da decolarea și aterizarea verticală, soluție care a ieșit din domeniul studiilor teoretice și se află în cel al experimentelor și chiar al fabricației.

Avionul Harrier al firmei Hawker Siddeley Aviation—Anglia, precum și alte tipuri realizate în URSS și Franța dovedesc pe deplin posibilitățile de care dispun în acest sens aerodinamica, tehnica propulsiei precum și industria aeronautică contemporană.

În afara considerațiilor tactice și economice, problema decolării și aterizării trebuie soluționată și pentru a crește siguranța zborului în aceste evoluții „anormale" ale regimului de zbor. Conform statisticilor recente, numărul accidentelor la aterizare crește cu patratul vitezei de aterizare la avioanele civile și cu cubul acestei viteze la avioanele militare. Ca urmare, aproximativ jumătate din numărul total al accidentelor de zbor se produc la aterizare. Logic este deci că pentru a reduce accidentele trebuie să reducem viteza de aterizare.

2.2.2. *Polivalență ridicată*, adică posibilitatea de a folosi același tip de avion pentru îndeplinirea unui mare număr de misiuni.

Principalele avantaje pe care le oferă polivalența sînt:

— suplețe tactică prin posibilitatea folosirii aceluiași tip de avion pentru atacul țintelor terestre și aeriene;

— formarea multilaterală a personalului navigant și folosirea acestuia în scopuri tactice diverse, cu minimum de instrucție suplimentară;

— formarea multilaterală a personalului tehnic și de deservire la sol;

— micșorarea cheltuielilor necesare pentru cercetare, studii, proiectare, realizarea prototipului, pregătirea fabricației în serie etc.;

Literatura de specialitate stabileşte existenţa a două tipuri principale de polivalenţă, şi anume:

a) *Polivalenţa fizică.* Se obţine prin realizarea unui avion în mai multe variante distincte, cu un număr minim de modificări constructive, la celulă sau motor, în combinaţie cu modificarea echipării avionului cu aparatură specializată, ca de exemplu:

— modificarea celulei pentru transformarea avionului în dublă comandă pentru instrucţie şi antrenament sau montarea unui al doilea loc necesar pentru interceptare, cercetare sau atac la sol;

— modificări la prizele de aer pentru asigurarea funcţionării optime a motorului la viteze şi înălţimi mari, caracteristice avionului de interceptare;

— modificarea lungimii fuzelajului, a suprafeţei aripii, a dispozitivelor de hipersustentaţie şi a trenului de aterizare, pentru transformarea avionului în varianta ambarcată.

b) *Polivalenţa funcţională de exploatare.* Se realizează prin modificarea dotării avionului cu aparatură şi armament. Aceasta presupune interşanjabilitatea anumitor instalaţii, conţinînd aparatură şi armament, ce se pot monta în interiorul celulei sau în puncte de acroşare exterioare. În acest caz se presupune că avionul are performanţele necesare îndeplinirii diverselor misiuni.

Practic este greu să se asigure unui avion calităţi care să-i ofere un înalt grad de polivalenţă, mai ales că, de mai multe ori, aceste calităţi sînt contradictorii. Problema se decide în funcţie de necesităţi şi în măsura în care acţiunea este tactic dezirabilă şi tehnic posibilă.

Tratată numai din punct de vedere tactic şi tehnic, problema polivalenţei nu este complet elucidată şi este interesant şi util să se cunoască şi implicaţiile economice, de loc neglijabile. Costul unui avion polivalent este mai mare decît al unui avion specializat din aceeaşi categorie, cu circa 10—25%, creşterea preţului fiind determinată, în general, de echipamentele şi aparatele electronice suplimentare la bord.

La o evaluare sumară se constată că numărul de avioane polivalente necesare este mai mic ţinînd seama de faptul că acesta poate îndeplini mai multe tipuri de misiuni. În plus, deşi costul unui avion polivalent este mai mare decît al unui avion specializat ţinînd seama de faptul că la acesta din urmă seriile sînt mai scurte costurile generale de realizare a avioanelor polivalente în condiţiile date sînt mai mici. Calculele făcute de specialişti au stabilit că la buget egal se pot construi avioane de 15 tone, în număr de 353 bucăţi, dacă se fabrică un avion polivalent pentru trei tipuri de misiuni şi numai 300 aparate, dacă se fabrică trei avioane specializate pentru misiuni diferite.

Pe baza consideraţiilor de mai sus apare clar un alt avantaj, şi anume acela că producţia de avioane polivalente este mai economică, ţinînd seama în cazul amintit de faptul că în loc de trei serii de cîte 100 aparate se realizează o singură serie de 353 bucăţi.

2.2.3. *Încărcătură utilă de luptă ridicată.* Scopul declarat al unui avion militar este executarea misiunilor de luptă şi de aceea, constructorii unor asemenea avioane îşi propun, încă de la tema de proiectare, sarcina

elaborării unui proiect în care factorii contradictorii să fie astfel aleși încît să asigure realizarea unui avion care să permită ducerea luptei aeriene în condițiile preconizate.

Utilizarea unor forme aerodinamice perfecționate și a unor instalații de propulsie de puteri mari au dus la ameliorarea substanțială a performanțelor tehnice de zbor și au creat în același timp și premizele necesare pentru îmbunătățirea și diversificarea înarmării avioanelor de luptă. Drept consecință, avioanele actuale și în special cele ce se vor construi în viitorii 3—5 ani, au sau vor avea o încărcătură de luptă variind între 20—50% din greutatea totală. Adăugînd la aceasta și alți factori, ca perfecționarea și creșterea continuă a puterii de distrugere a armamentului modern utilizat în aviație, folosirea unor mijloace electronice de observare, calcul, ochire și tragere, precum și nivelul foarte înalt de pregătire și de antrenament al piloților, rezultă că avioanele de luptă actuale reprezintă o armă puternică ce poate interveni rapid, oportun și eficace pe teatrul de operații militare.

Preocuparea constructorilor de avioane de lutpă și a constructorilor de sisteme de armament și muniție este orientată către următoarele scopuri principale:

a) *Îmbunătățirea schemelor de înarmare.* Evoluția avioanelor de luptă din ultimii ani reliefează tendința de adaptare a unor scheme de înarmare menite să faciliteze utilizarea avionului în misiuni multiple. Gradul de polivalență al avionului depinde printre altele și de modul de amplasare a armamentului pe avion, astfel încît să se folosească la maximum atît capacitatea de transport, cît și eficacitatea mijloacelor de luptă.

Avioanele moderne dispun de numeroase posibilități de adaptare a diverse variante de înarmare, în funcție de misiunile avionului.

Adaptarea pe avioane a armamentului fix este din ce în ce mai puțin folosită, noile avioane fiind înarmate după așa zisa schemă „totul în afară" sau chiar dacă au locașuri interioare special amenajate pentru armament, se urmărește ca acestea să poată fi echipate cu diferite categorii de armament sau rezervoare de combustibil cu posibilități de interschimbabilitate, în funcție de misiuni.

Realizarea unei cît mai mari diversificări a armamentului acroșat se obține prin mărirea numărului punctelor de acroșare. Acestea se dispun pe avion astfel încît să asigure pe de o parte acroșarea unor cantități cît mai mari de armament, iar pe de altă parte preluarea unor sarcini concentrate mari (pînă la 2000 kgf).

Pentru a se varia încărcăturile, aceeași consolă de acroșare este dotată cu dispozitive care pot îndeplini mai multe funcțiuni: fixarea bombelor, rezervoarelor de combustibil, rachetelor dirijate sau nedirijate, armamentului artileristic, aparatura de recunoaștere sau alte echipamente speciale.

Se observă, de asemenea, tendința unei creșteri continue a greutății armamentului în raport cu greutatea avionului. La avioanele destinate misiunilor de atac la sol, greutatea armamentului și muniției ajunge aproape la 50% din greutatea avionului la decolare.

În ceea ce privește echiparea cu armament a avioanelor, specialiștii militari acordă o importanță egală înarmării acestora, atît cu armament de tip clasic (tunuri, mitraliere, bombe clasice), cît și cu armament modern (rachete dirijate, bombe cu încărcătură nucleară sau termonucleară etc).

Cît privește dispunerea armamentului pe avion, este de remarcat că predomină acroșarea lui sub aripi, inclusiv la avioanele cu geometrie variabilă deoarece aripile oferă un spațiu suficient pentru satisfacerea condiției de diversificare a armamentului, fără a se renunța la dispunerea în locașuri fixe, în interiorul fuzelajului, pe console sau în părțile laterale ale fuzelajului.

Ca o apreciere generală se poate spune că specialiștii se preocupă să folosească toate spațiile posibile, acordînd în același timp grija necesară pentru calitățile aerodinamice ale avioanelor, în limitele necesare scopurilor în care au fost create.

b) *Creșterea eficacității armamentului.* Deși în ultimele conflicte armate la care a participat aviația s-a dovedit că folosirea rachetelor de bord nu poate avea un caracter universal, totuși acestea rămîn în continuare armamentul principal, în special pentru misiuni de interceptare. Admițînd această situație, în prezent se fac eforturi deosebite pentru mărirea eficienței acestora, orientate în următoarele direcții:

— asigurarea unei trageri eficace cu rachete autodirijate, din orice direcție. Se urmărește în special îmbunătățirea dirijării în tragerile din semisfera situată în fața țintei;

— asigurarea nimicirii țintelor cu viteze de zbor supersonice, în în orice condiții meteorologice, ziua și noaptea;

— mărirea capacității de distrugere a țintelor, la o greutate dată a rachetelor;

— micșorarea variațiilor de viteză pe traiectorie a rachetelor;

— mărirea protecției capetelor de dirijare împotriva paraziților și asigurarea dirijării în condiții de bruiaj;

— folosirea mai multor metode de dirijare, în funcție de situațiile concrete ale ducerii luptei și combinarea metodelor de teledirijare și autodirijare a aceleiași rachete;

— realizarea de două sau mai multe capete de dirijare, cu posibilități de interschimbabilitate în funcție de starea timpului și de acțiunea probabilă a avionului;

— crearea de sisteme de dirijare cu mare stabilitate, protejate împotriva paraziților exteriori și cu posibilități de autodirijare după semnalele de bruiaj;

— folosirea unor combustibili cu caracteristici superioare, pentru mărirea tracțiunii motoarelor:

— utilizarea mai multor trepte pentru rachete aer-aer sau aer-sol (în general există tendința folosirii a două motoare: unul mai puternic pentru lansare și altul cu posibilități de funcționare mai îndelungată pentru asigurarea menținerii vitezei de zbor pe traiectorie). Se menționează că se fac studii și chiar experiențe pentru folosirea statoreactoarelor, ca motoare de propulsie pe traiectorie a rachetelor;

— adaptarea de încărcături nucleare și pentru rachete din clasa aer-aer.

În ceea ce privește armamentul artileristic, posibilitățile de modernizare a acestuia nu sînt epuizate. Preocupările actuale pe această linie se referă în special la mărirea în continuare a cadenței de tragere, la sporirea vitezei a proiectilului și, implicit, a bătăii maxime și la realizarea unor sisteme de armament cu mai multe guri de foc.

Se remarcă din acest punct de vedere realizarea din ultimii ani a tunului cu șase țevi rotative, de calibru 20 mm — cu bătaie maximă eficace de 3000 m, care realizează o cadență de tragere de 6000 lovituri/minut, față de 1000 lovituri de minut (valoarea cadenței medii realizată de tunurile cu o singură țeavă). Acest tun a fost construit inițial pentru avioane de interceptare supersonice, dar este folosit cu succes și pe elicoptere, ca armament mobil sau fix.

Experiența războaielor locale din ultimii ani a menținut în actualitate și preocupările pentru modernizarea armamentului destinat pentru atacul obiectivelor terestre de diferite categorii. Au apărut astfel modele noi de bombe și mine de aviație cu eficacitate sporită împotriva forței vii (bombe cu bile, casete cu microbombe, bombe toxice etc.) sau pentru distrugerea construcțiilor din beton și în special a pistelor de decolare și aterizare.

c) *Perfecționarea continuă a sistemelor de conducere a focului.* În realizarea sistemelor de conducere a focului își găsesc aplicații majoritatea noilor perfecționări și descoperiri în domeniul electronicii. Crearea unui nou avion de luptă sau modernizarea altuia mai vechi înseamnă aproape totdeauna un pas înainte în acest domeniu.

Există tendința automatizării complete a tuturor operațiilor de descoperire a obiectivelor, urmărirea lor, ochirea și deschiderea focului. În aceste scopuri s-au realizat deja stații puternice de radiolocație pentru descoperire, urmărire și telemetrare, mașini de calcul rapide pentru prezentarea datelor necesare ochirii și tragerii, aparatură de vizare și calculul corecțiilor, utilizînd tehnica laserilor și altele.

Perfecționările în continuare în acest domeniu vizează în special:

— crearea de stații de radiolocație cu bătaie mult mai mare decît cele actuale pentru a fi folosite în misiunile de interceptare la mari distanțe, pe aliniamente îndepărtate, care să corespundă vitezelor mari ale avioanelor și distanțelor crescute ale secțiunilor rachetelor dirijate aer-aer. De exemplu, pentru echiparea avioanelor moderne ale deceniului următor se prevede realizarea de stații de radiolocație cu distanța maximă de acțiune de 200 km;

— extinderea folosirii laserilor în instalațiile de ochire pentru tragerile cu rachete, tunuri și lansările de bombe (în prezent folosirea laserilor este limitată la telemetrare în cazul tragerilor aer-sol);

— realizarea de stații de bord pentru dirijarea rachetelor aer-aer, capabile să conducă simultan două sau mai multe rachete împotriva mai multor ținte;

— tranzistorizarea și microminiaturizarea completă a instalațiilor electronice de bord;

— crearea de sisteme complexe cu mai multe dunciuni pentru a putea fi utilizate pe avioanele polivalente, în mai multe genuri de misiuni sau compartimentarea și compactizarea aparaturii, pentru a se crea posi-

bilitatea schimbării ei în scurt timp, în funcţie de misiunea de luptă a avionului;

d) *crearea de dispozitive noi pentru exploatarea la sol şi în luptă a armamentului.* Este cunoscut că eficacitatea întrebuinţării în luptă depinde într-o mare măsură de timpul consumat pentru pregătirea acestora în vederea executării unei misiuni şi pentru verificarea şi realimentarea între două ieşiri.

În scopul micşorării acestui timp există preocupări permanente pentru:

— eliminarea sau reducerea timpilor folosiţi pentru urgentarea reglajelor armamentului înainte de înarmarea avionului;

— folosirea unor combustibili pentru motoarele rachetă, cu grad înalt de conservare, pentru a nu fi necesară alimentarea înainte de acroşare;

— mecanizarea operaţiilor de prindere a armamentului acroşat;

— folosirea unor lansatoare cu şine de ghidare sau tuburi, care să asigure desprinderea rachetei de sub planul avionului şi accelerarea ei progresivă, pînă la o viteză superioară celei a avionului, înainte de intrarea în funcţiune a motorului de start al rachetei;

— studierea şi realizarea unor sisteme de bombardament şi atac la sol, care să asigure concomitent precizia şi eficienţa acţiunilor, precum şi securitatea avionului şi echipelor. Soluţiile clasice, bombardament din resursă sau lansarea de bombe cu acţiune întîrziată nu sînt pe deplin satisfăcătoare privind precizia şi pentru viitor se preconizează:

— folosirea unor bombe echipate cu frîne aerodinamice, care să acţioneze pe traiectorie;

— folosirea unor bombe echipate cu paraşute cu focos percutant care asigură explozia la impact (s-a emis ideea că acest sistem asigură bombardamentul precis în zbor orizontal de la înălţimea de 50 m la o viteză a avionului de peste 1000 km/h);

— folosirea unor bombe echipate cu motoare rachetă, de dimensiuni mici, care în prima parte a traiectoriei execută frînare, iar pe ultima porţiune accelerează zborul, pentru a asigura energia necesară la impact;

— lansarea bombelor de pe platforme speciale, prin catapultare.

Din cele prezentate mai sus rezultă că înarmarea avioanelor de luptă este strîns legată de dezvoltarea tehnicii la un moment dat şi de concepţiile tactice ale întrebuinţării în luptă a aviaţiei;

2.2.4. *Perfecţionarea echipamentelor.* Instalaţiile speciale şi echipamentele de bord au devenit compartimentele purtătoare a celor mai noi realizări din domeniul mecanicii fine, al electronicii şi automaticii.

Succesele tehnologice în producţia de componente electronice au permis — prin reducerea volumelor şi prin compactare — să se realizeze aparate electronice cu dimensiuni foarte mici care pot fi montate la bordul avioanelor moderne fără să ocupe un spaţiu prea mare. Diagrama prezentată în figura 1 demonstrează progresul tehnologic şi justifică prezenţa la bordul avioanelor a unor calculatoare destul de complexe şi cu performanţe înalte.

Prezența acestora la bordul avioanelor moderne de luptă este remarcată în procente care depășesc 30% din ansamblele avionului. În linii foarte generale, tendințele în echiparea avioanelor de luptă sînt caracterizate prin :

— întrebuințarea scaunelor de catapultare de tip „zero-zero*) și uneori chiar module întregi de același tip. Aceste scaune folosesc în locul

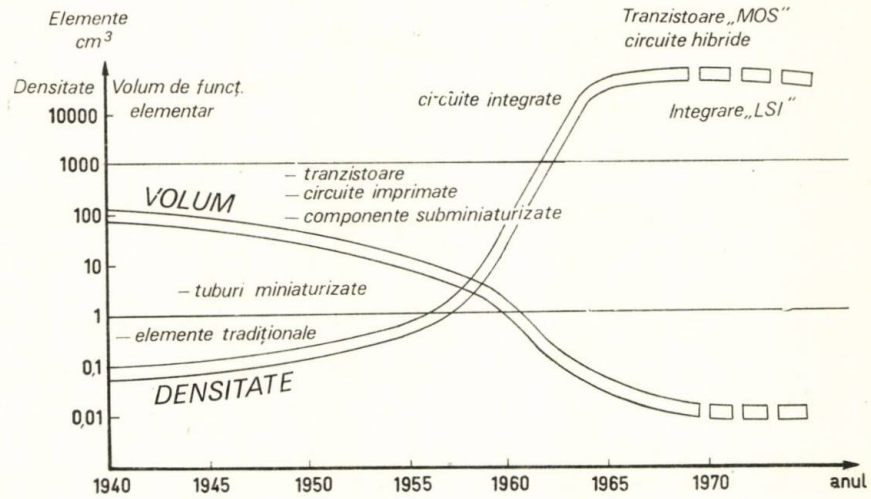


Fig. 1

cartușelor de catapultare obișnuite, rachete cu pulbere care realizează suprasarcini mai mici în momentul catapultării ;

— întrebuințarea generatoarelor de curent alternativ, cuplate de obicei la motor printr-un regulator automat de turație, la toate avioanele de construcție recentă. Avantajele față de generatorul de curent continuu sînt robustețea și siguranța în funcționare ;

— folosirea generalizată a echipamentelor hidraulice funcționînd la presiunea de 210 kgf/cm² ;

— folosirea pe scară largă a motoarelor hidraulice pentru acționarea dispozitivelor de hipersustentație ;

— folosirea recipientelor cu oxigen lichid în locul buteliilor cu gaz comprimat. Înmagazinînd o cantitate de oxigen foarte mare, recipientul are o greutate mult mai mică decît buteliile necesare pentru înmagazinarea gazului comprimat.

În afara aparaturii de bord obișnuită, avioanele de luptă sînt înzestrate în mod curent cu aparatură electronică complexă și anume :

— calculatoare complexe pentru navigație și conducerea tragerilor (s-a extins introducerea calculatoarelor al căror program poate fi modificat în funcție de misiune) ;

— stații de radiolocație perfecționate servind atît pentru interceptare sau cercetare, cît și pentru navigație și urmărirea terenului la mică înălțime ;

*) funcționează la $H = 0$ și $V = 0$.

— sistem de afişare a datelor la înălţimea capului pilotului. Acest aparat serveşte pentru prezentarea datelor necesare tragerilor sau bombardamentului şi de asemena a diverselor date de navigaţie necesare zborului, în aşa fel încît pilotul, urmărind un anumit reper exterior să nu fie nevoit să-şi mute privirea de pe reper pe tabloul de bord cînd vrea să urmărească anumite indicaţii ale aparatelor de bord. Sistemul comportă o unitate electronică ce realizează adaptarea la aparatele de bord şi un sistem de proiecţie optică a datelor pe un geam cu strat reflectorizant.

2.2.5. *Instalaţii de propulsie moderne.* Motoarele de aviaţie în general şi cele cu reacţie în special au înregistrat în ultimii 15 ani un salt şi o diversificare însemnată, ceea ce a permis realizarea unor avioane cu performanţe ridicate.

Este semnificativă pentru progresul înregistrat de construcţia de motoare, comparaţia din tabela 1 între trei tipuri de avioane, capabile să traverseze Oceanul Atlantic.

Tabela 1

Tip avion / Caracteristică	Vimy *)	VC—10	Concorde
Puterea motorului	2 motoare cu piston Rolls—Royce Eagle VIII de 365 CP fiecare	4 motoare turboreactoare cu dublu flux Rolls—Royce Conway 43 de LO 200 kgf fiecare	4 turboreactoare Rolls—Royce Olympus 593 de 17 200 kgf fiecare
Viteza de zbor	160 km/h	960 km/h	2320 km/h
Durata traversării Oceanului Atlantic	16,5 h	7,75 h	3,5 h

*) Vimy este primul avion care a executat fără escală prima traversare a Oceanului Atlantic în zilele de 14—15 iunie 1919.

Faţă de evoluţia generală în construcţiile de aviaţie, unde progresele cel mai importante se realizează în domeniul militar (fig. 2), în construcţia de motoare, noutăţile din ultimii ani au apărut în domeniul aviaţiei civile, de unde au fost preluate şi adaptate pentru necesităţile militare,

Într-un interval de timp relativ scurt (1900—1970) motoarele s-au perfecţionat foarte mult înregistrînd caracteristici superioare; astfel, puterea a crescut de 15 000 de ori, greutatea specifică de 100 ori, iar viteza de zbor a avioanelor, la realizarea căreia motoarele au rolul principal, a crescut de 45 de ori.

Salturile cele mai mari au fost realizate de motoarele cu reacţie, a căror evoluţie a fost foarte rapidă şi care, de la generaţie la generaţie, înregistrează — prin formule constructive noi şi ingenioase — creşteri foarte mari ale traficului.

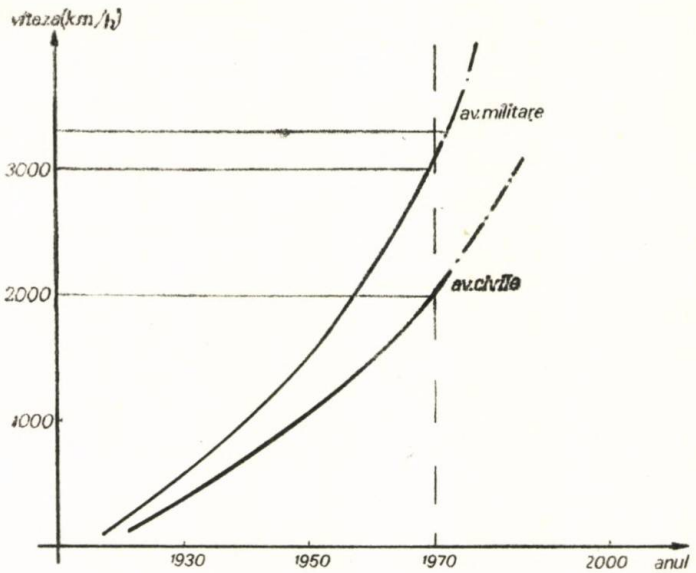


Fig. 2

În figura 3 este prezentat saltul de creştere a tracţiunii, în raport cu viteza de zbor, pentru cîteva tipuri de avioane care au aceeaşi greutate totală.

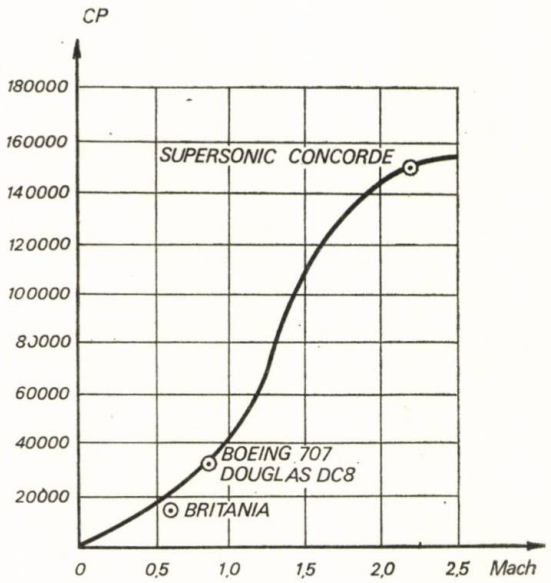
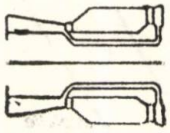


Fig. 3

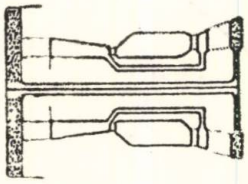
Drumul parcurs de construcţia de motoare cu reacţie este marcat de etape distincte, determinate de concepţia generală constructivă, de

tehnologia de prelucrare și de materialele întrebuințate. În figura 4 sînt prezentate simplificat, cele patru generații de motoare cu reacție existente astăzi în lume.

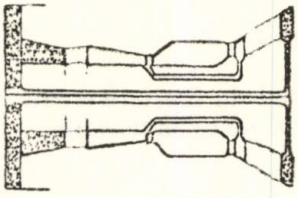
A) Prima generație cuprinde motoare cu curgere interioară unică, compuse din compresor, camere de ardere și o turbină cu o treaptă. Aceste



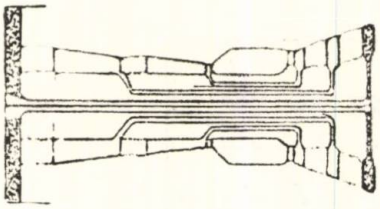
Generația I-a
Turboreactor cu simplu flux



Generația a II-a
Turboreactor cu dublu flux simplu



Generația a III-a
Turboreactor cu dublu flux cu raport mare de compresie



Generația a IV-a
Turboreactor cu dublu flux cu raport mare de compresie și trei arbori

Fig. 4

motoare, deși simple, ușoare și ieftine, nu realizează un randament mare de propulsie, fiind limitate în ceea ce privește raportul de comprimare și randamentul termic. De asemenea, din cauza vitezei ridicate a jetului ele produc un zgomot mare. Păstrînd această schemă generală, dar urmărind creșterea puterii, constructorii au realizat compresorul cu două trepte. Acestei formule constructive aparțin și motoarele R 11 F 300 sovietic și Olympus — ce echipează avionul Concorde — de producție anglo-franceză.

B) A doua generație o constituie motorul cu jet simplu, dar cu ventilator. În această formulă constructivă se realizează un raport de comprimare mai mare, un randament termic mai ridicat, un randament de propulsie mai bun și un zgomot mai mic datorită debitului de aer mărit

și vitezelor mai scăzute ale jetului. Sistemul de antrenare este schimbat, compresorul și ventilatorul, fiind antrenate de turbine independente prin doi arbori concentrici. În această categorie intră și motorul „Pegasus" care echipează avionul Harier.

Acest tip de motor are dezavantajul folosirii limitate pe avioanele supersonice, datorită tracțiunii specifice scăzute.

C) A treia generație o constituie turboreactorul cu dublu flux, cu raport mare de compresie, la care ventilatorul a fost combinat cu un compresor intermediar. În acest caz, antrenarea ventilatorului și a compresorului principal se face de trepte ale turbinei prin doi arbori concentrici. Motoarele Spey și Conway sînt realizate în această formulă constructivă. Sistemul prezentat, pe lîngă avantajele cunoscute, are dezavantajul că ventilatorul și compresorul intermediar fiind în același ansamblu, viteza de vîrf a paletelor compresorului intermediat, la aceeași turație este mult mai mică decît viteza de vîrf a paletelor ventilatorului și, în consecință, capacitatea de comprimare este mai mică.

D) A patra generație cuprinde motoarele cu trei arbori. La acest tip, ventilatorul, compresorul intermediar și compresorul de înaltă presiune sînt acționate fiecare independent de cîte o treaptă a turbinei, putînd fi calculate și realizate, fiecare la un grad optim de comprimare și la un randament optim de funcționare.

Motoarele viitorului apropiat, care vor echipa avioanele civile și militare, au ca model realizat recent pe RB 211, care va echipa aerobuzele BAC 3—11 și Lockheed 1011.

În linii generale, cele patru categorii de motoare prezentate pot realiza :

— rapoarte de comprimare 6 :1, 14 :1, 20 :1 și 27 :1 ;

— rapoarte de diluție 0 ; 1,5 ; 3,0 ; 5,0 ;

— tracțiuni între 5 000 și 30 000 kgf ;

— consumuri specifice în scădere de la aproximativ 1 kgf/kgf tracțiune la primul tip, pînă la aproximativ 0,3 — 0,4 kgf/kgf tracțiune la motorul turboreactor, cu trei arbori ;

— nivele generale de zgomot mai reduse la cele de tipul 2, 3, 4.

Pentru viitor, constructorii de motoare se gîndesc la noi îmbunătățiri, care să permită realizarea unor motoare mai puternice, mai sigure și mai economice. Direcțiile de investigație se referă la trei factori principali și anume :

a) cercetări aerodinamice și cinematice care să conducă la formule constructive, pentru care vitezele la vîrful paletelor să fie supersonice fără pierderi apreciabile de randament, iar realizarea mecanică a arborilor concentrici să se facă simplu, economic și să aibă fiabilitate ridicată ;

b) realizarea de noi materiale și folosirea unor sisteme de răcire care să permită funcționarea paletelor rotoarelor și statoarelor de turbine la temperaturi ridicate ;

c) folosirea pe scară largă și cu randament ridicat a unor tehnologii moderne (sudura cu fascicol de electronic, prelucrarea electrochimică, îmbinarea prin fuziune etc.).

3. CONSIDERAȚII ECONOMICE ASUPRA AVIAȚIEI MILITARE

Performanțele ridicate de zbor, caracteristicile tehnice de luptă superioare, gradul ridicat de fiabilitate, sînt factorii cei mai doriți de constructorii de avioane și de aviatori, dar sînt totdeauna însoțiți de un volum de muncă intelectuală și fizică foarte mare, de un consum de mijloace materiale foarte ridicat și de costuri comparabile de multe ori doar cu costul metalelor prețioase.

Cunoscînd aceste elemente, cu toată dorința de a avea avioane moderne, statele fac serioase analize asupra implicațiilor economico-sociale, înainte de a trece la cumpărarea sau fabricarea unor asemenea aparate.

Din aceste considerente majore, cererea de avioane și înzestrarea propriu-zisă sînt în strînsă și directă concordanță cu potențialul economic și industrial și cu orientarea politică a statelor respective.

Distribuția cererilor de avioane, pe plan mondial (mai puțin țările socialiste și SUA), conform aprecierilor firmei British Aircraft Corporation, pentru perioada 1970 — 1980 este reprezentată în tabela 2.

Tabela 2

Tipul de avion	Volumul cererilor (mil. lire sterline)
Avioane de antrenament de bază și avioane ușoare de luptă (pînă la o greutate totală de cca. 7,5 tf)	350
Avioane ușoare de luptă și de antrenament avansat (cu o greutate totală cuprinsă între 7,5...15 tf)	2180
Avioane de interceptare și avioane de luptă de greutate medie (cu greutăți de 15.. 22,5 tf)	1320
Avioane grele de luptă (greutate peste 22,5 tf)	700
Avioane de transport	1400

Se observă că volumul cererilor este cel mai mare pentru avioanele ușoare de luptă și antrenament; această categorie, împreună cu avioanele de interceptare și luptă de mărime medie, va reprezenta mai mult de jumătate din totalul cererilor. Piața pentru avioanele de antrenament de bază, deși ca cifră mare, valoric va reprezenta circa 5% din volumul total al cererilor.

Ca și în alte acțiuni comerciale, după evaluarea chiar aproximativă a necesarului de avioane, constructorii și-au pus problema de studiu pentru a stabili proiectul potrivit, la timpul potrivit și la un preț accesibil, competitiv.

Dacă în urmă cu 20 de ani, cheltuielile legate de fabricația sau achiziționarea unui tip de avion de luptă, erau accesibile și statelor mici, datorită complexității și diversității reduse a instalațiilor și tipurilor, în zilele noastre, creșterea rapidă a progresului tehnologic folosit în construcțiile de aviație, a schimbat radical situația.

Ca urmare au crescut cheltuielile necesare dezvoltării proiectelor de aviație. Din acest motiv, țările occidentale din Europa cu o bogată tradiție în aviație dar cu resurse mai mici, pentru a putea face față competiției actuale cu S.U.A., au recurs la acțiuni de cooperare tot mai largi. Pentru a ilustra necesitatea unirii eforturilor prin cooperare, în scopul ținerii în pas cu S.U.A. a construcției de avioane în Europa, menționăm că pentru anul 1964, volumul cheltuielilor de cercetare și dezvoltare a atins suma de 5 100 milioane dolari în S.U.A., în timp ce aceste cheltuieli s-au ridicat la 388 milioane dolari în Anglia, 164 milioane dolari în Franța și 100 milioane dolari în R. F. a Germaniei.

Pentru anul 1970, situația păstrează în general aceleași proporții, cu unele dezvoltări în favoarea spațiului cosmic. În aceste condiții se pun probleme serioase și apare ca o condiție esențială seria de fabricație care trebuie să fie suficient de mare, pentru a justifica cheltuielile ridicate ce urmează a se face.

În diagrama din figura 5 este prezentată evoluția costurilor de producție pentru un avion, în funcție de mărimea seriei (cifrele au la bază costurile avionului Mirage 71).

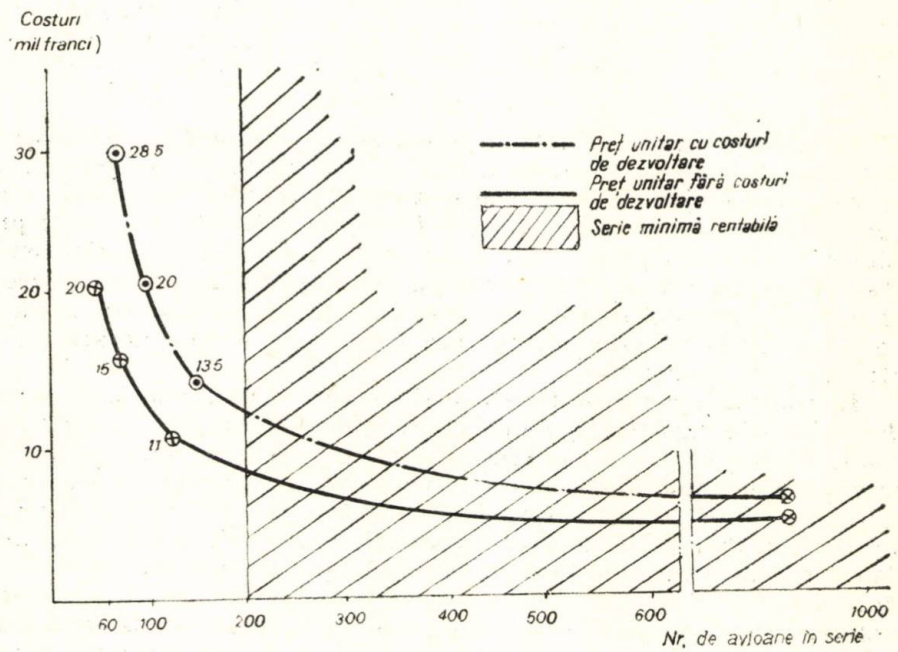


Fig. 5

Cooperarea între două sau mai multe țări la realizarea programelor tehnice importante constituie o caracteristică a etapei actuale, mai ales în domeniul aeronautic, condiționînd deseori pentru succesul lor. Motivul principal al cooperării în domeniul aeronautic este în primul rînd cel eco-

nomic. Prin cooperare se divizează cheltuielile impuse de dezvoltare şi producţia de avioane, se lărgesc posibilităţile de desfacere — creşte piaţa — şi se realizează economii în producţia organizată pe scară largă.

Exemplele cunoscute, prezentate în tabela 3, nu fac decît să sublinieze încă o dată acest mare deziderat.

Tabela 3

Obiectul cooperării	Tipul	Parteneri la realizare
Avionul Concorde	Avion de transport supersonic	Anglia—Franţa (BAC/SNIAS)
Avionul Jaguar	Avion de luptă şi antrenament	Anglia—Franţa (BAC/Bréguet Aviation)
Avionul MRCA 75	Avion de luptă polivalent	Anglia—RFG—Italia (BAC/Messerschmitt—Bölkow/Fiat)
Avionul F—28	Avion de transport cu escale scurte	Anglia—Olanda (Fokker/VFM/Shorts)
Motorul Olympus 593	Motor pentru avionul Concorde	Anglia—Franţa (Rolls—Royce/SNECMA)
Motorul RB 172—Adour (cu dublu flux)	Motor pentru avionul Jaguar	Anglia—Franţa (Rolls—Royce/Turboméca)
Motorul RB 199 (turboventilator cu 3 arbori)	Motor pentru avionul MRCA—75	Anglia—R.F.G.—Italia (Rolls-Royce/M.A.N./Fiat)

Cooperarea internaţională în proiectarea şi producţia de avioane prezintă numeroase avantaje prin faptul că permite concentrarea unor specialişti de înaltă calificare şi prin aceasta dă posibilitatea realizării unor produse de nivel tehnic ridicat, asigură serii de fabricaţie mai mari prin realizarea produsului pentru mai multe state, îmbunătăţind astfel rentabilitatea, reduce în mare măsură durata de elaborare a produsului, realizînd o rată corespunzătoare a progresului tehnic, diminuează în mare proporţie cheltuielile generale pe care trebuie să le facă fiecare dintre participanţi la cooperare.

În realizarea cooperării trebuie să se ţină seama însă şi de o serie de factori foarte importanţi, cum sînt : relaţiile politice dintre statele care cooperează, nivelul tehnic al specialiştilor şi bazei materiale, concepţia relativ unitară în folosirea în luptă a avioanelor ce se produc în cooperare. În plus, trebuie să se ţină seama de greutăţile legate de cunoaşterea unei limbi de legătură, de închegarea colectivelor mixte de lucru, date fiind firile şi, în general, comportările diferite ale specialiştilor de naţionalităţi diferite şi de faptul că apar ca inerente unele cheltuieli suplimentare pentru cercetare, proiectare şi producţie în ţările ce cooperează, datorită unui paralelism premeditat. Statisticile şi experienţa arată că în cazurile cunoscute, cheltuielile suplimentare pentru cercetare şi proiectare au înregistrat creşteri de aproximativ 30%, iar cele pentru producţie, de aproximativ 5%.

În figura 6 sînt ilustrate cheltuielile comparative unitare pentru proiecte unilaterale şi proiecte în colaborare.

Un alt aspect tehnico-economic de care trebuie ţinut seama în producţia de avioane militare îl constituie necesitatea unei planificări şi finan-

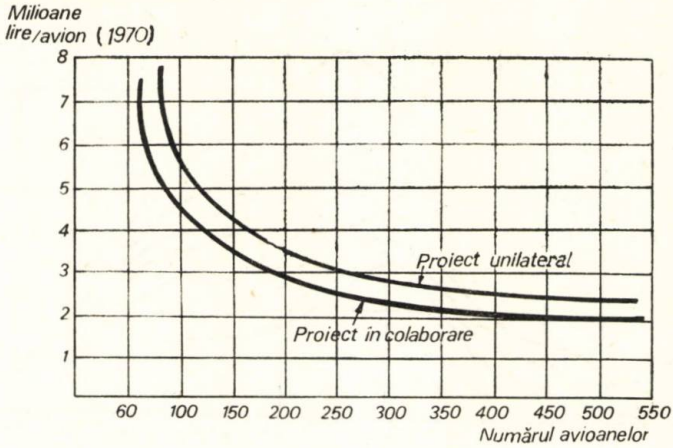


Fig. 6

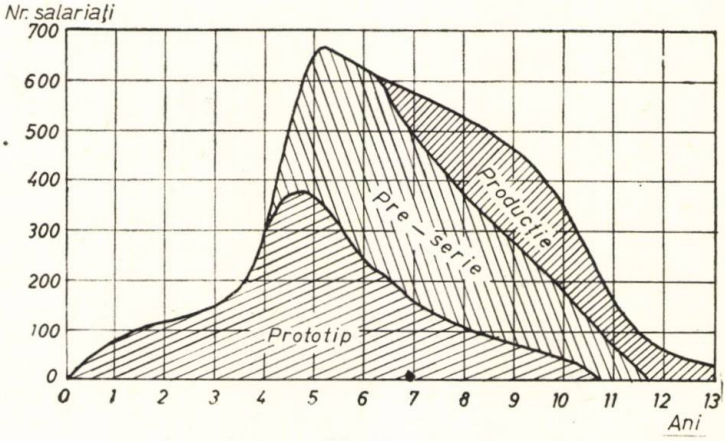


Fig. 7

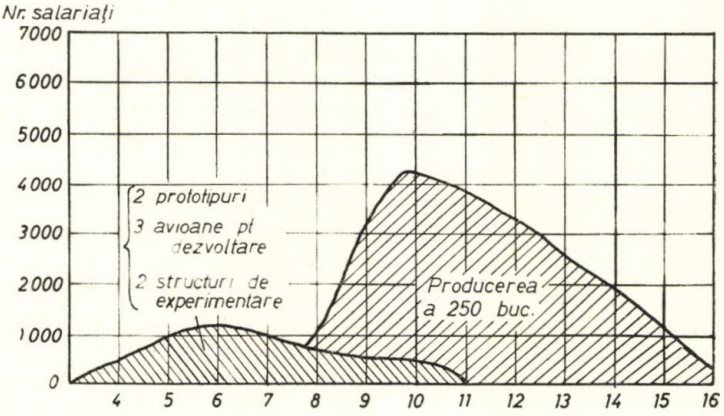


Fig. 8

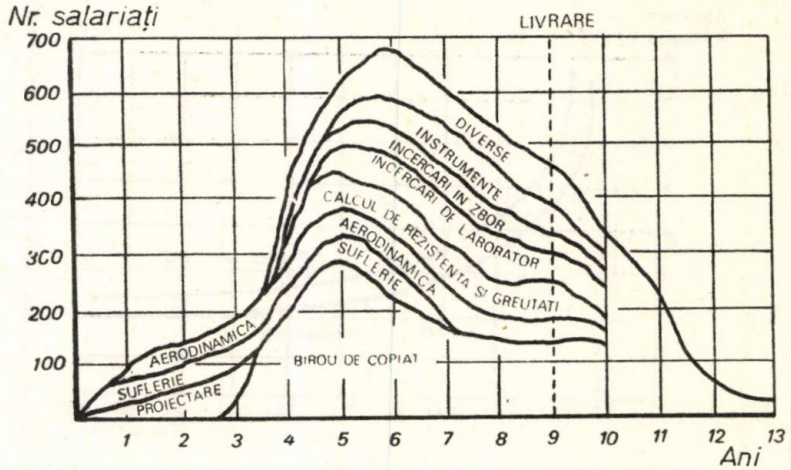


Fig. 9

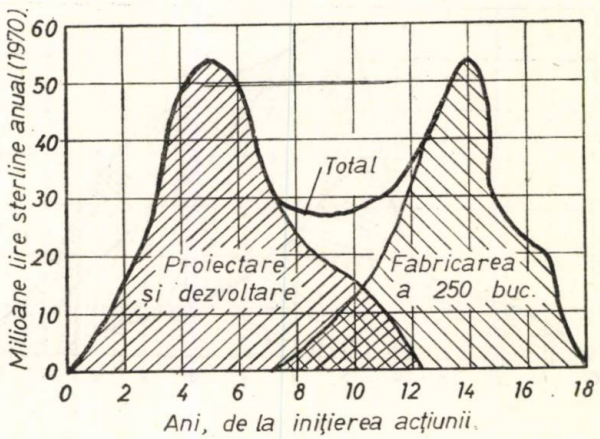


Fig. 10

ţări corespunzătoare din partea statelor respective, fără de care nu se pot realiza programe competitive. Acest imperativ este cerut de faptul că în asemenea acţiuni sînt necesare importante mijloace materiale şi forţă de muncă pe care nu le poate reglementa în spiritul intereselor generale ale naţiunii decît guvernul.

Dimensiunile acestor eforturi sînt ilustrate în figurile 7 — 10. Variaţia în timp a volumului de forţă de muncă necesar în proiectare şi în producţie, pentru un avion de mare viteză, este reprezentată în figura 7 şi, respectiv, în figura 8 şi 9 se dă angajarea diverselor specialităţi în decursul realizării aceluiaşi tip de avion. Evoluţia în timp a volumului cheltuielilor totale de cercetare, proiectare şi fabricaţie, implicate de realizarea unui avion militar de mare viteză, este reprezentată în figura 10.

Primită la redacţie la 27 decembrie 1971

UTILIZAREA ARBORELUI ELASTIC ÎN CALCULUL STRUCTURILOR DIN BARE*

de DAN COŞA

În lucrare autorul examinează posibilitatea analizării complete a calculului static al structurilor elastice de bare, urmărind adaptarea metodelor clasice de calcul în sensul posibilităţii de folosire maximă a calculatoarelor numerice.

1. INTRODUCERE

Orientarea actuală spre o cît mai completă industrializare a procesului de proiectare este de neconceput fără folosirea pe o scară din ce în ce mai largă a calculatoarelor electronice. Utilizarea unor metode adecvate de calcul, care ţin seama de specificul instrumentului folosit, constituie principala cale de sporire a eficienţei calculatoarelor în proiectare.

În aceste condiţii ne apare nu numai explicabilă, dar şi necesară larga preocupare pentru elaborarea unor programe şi metode de calcul cît mai generale, preocupare canalizată, în mare, pe trei direcţii principale, şi anume :

— adaptarea metodelor clasice generale de calcul ale structurilor (metoda eforturilor, metoda deplasărilor), adaptare care să permită o utilizare, pe cît posibil comodă, a calculatoarelor electronice. Reprezentativă pentru această direcţie este lucrarea [1];

— elaborarea unor metode de calcul noi, specifice staticii construcţiilor, caracterizate printr-o analitizare avansată a formulării şi rezolvării problemelor [2];

— dezvoltarea teoriei matematice a reţelelor la un nivel care să permită formularea problemei staticii liniare a sistemelor din bare prin

*) Ideea elaborării unei metode generale de calcul, complet analiti,că pe baza transformării unei structuri în arbore elastic aparţine prof. ing. Panait Mazilu şi a fost sugerată autorului cu ocazia unei discuţii purtată în iunie 1967 în cadrul activităţii noastre de pregătire a doctoratului (N.A.).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, 1972, P. 989–1000

particularizarea unor rezultate generale obținute cu ajutorul acestei teorii. O sinteză a preocupărilor în acest sens este conținută în [3].

Deși metodele de calcul care își vor găsi consacrarea în viitor vor fi după toate probabilitățile rezultatul ultimelor două direcții de dezvoltare, împrejurări obiective printre care enumerăm:

— noile metode de calcul nu au găsit încă rezolvări unitare satisfăcătoare pentru toate problemele ce se pot ivi;

— formulările cele mai generale implică utilizarea unor calculatoare de mare capacitate;

— metodele clasice sînt bine cunoscute de marea masă a specialiștilor, fac ca preocuparea pentru adaptarea vechilor metode de calcul să rămînă de actualitate și în continuare, ea răspunzînd într-o mare măsură necesităților și posibilităților imediate.

Lucrarea de față își propune să expună o metodă generală, complet analitică, pentru calculul structurilor din bare. Deși în lucrare este tratat cazul sistemelor plane din bare la care solicitarea predominantă o constituie încovoierea, nu există dificultăți esențiale în calea adaptării metodei la structurile spațiale sau alcătuite din bare complet deformabile.

Metoda se bazează pe transformarea unei structuri în arbore elastic, operație întotdeauna posibilă prin suprimarea și adăugarea unor legături.

2. ARBORELE ELASTIC, CONSIDERAȚII PRELIMINARE

O structură statică este un arbore dacă, interpretîndu-i barele ca arce și nodurile ca vîrfuri ale unui graf, acesta este conex, finit și fără cicluri.

Desemnînd unul din vîrfurile terminale drept vîrf de referință, orientarea arcelor arborelui se va face în baza analogiei cu sensul de scurgere al apei de la vîrfurile terminale rămase spre vîrful de referință. În raport cu orientarea aleasă, două puncte i și j se pot afla în una din următoarele poziții relative:

— punctul i se află în amonte de j ($i \rightarrow j$) dacă drumul de la i spre nodul de referință trece prin j;

— punctul i se află în aval de j ($i \leftarrow j$) dacă j este în amonte de i;

— punctul i se află în poziție neutră față de j ($i \times j$) dacă între ele nu poate fi stabilită o relație de tipul amonte-aval.

Structura topologică a arborelui nu o vom da sub forma unei matrice a nodurilor, așa cum se obișnuiește în teoria grafelor, ci sub forma unei matricea π a pozițiilor, care arată pentru fiecare vîrf în parte poziția sa relativă față de arcele arborelui.

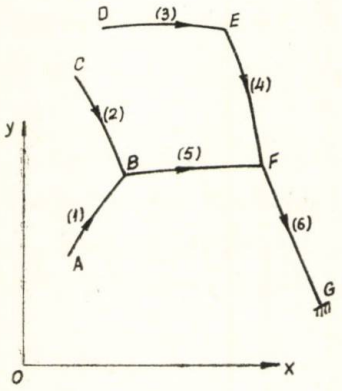
În figura 1 este reprezentat un arbore pentru care a fost construită matricea π. De exemplu, linia corespunzătoare arcului (5) ne arată că față de acest arc nodruile A, B și C se află în amonte (A, B, $C \rightarrow 5$), nodurile D și E în poziție neutră (D, $E \times 5$), iar F și G în aval (F, $G \leftarrow 5$).

Observăm că toate punctele unui arc se află în aceeași poziție față de vîrfurile arborelui.

Poziția în plan a vîrfurilor și forma arcelor ni le vom da față de un sistem ortogonal unic de axe xOy.

În nici unul din punctele interioare ale arborelui nu există defecte de continuitate, iar fixarea în plan se face prin încastrare în vîrful de referinţă.

Arborele este elastic dacă toate barele ce intră în alcătuirea sa sînt elastice (barele rigide reprezintă un caz-limită). Considerînd că deforma-



Matricea $\overline{\Pi}$ (poziţia vîrfurilor faţă de arce)

Vîrfuri (noduri)

Arce (bare)	A	B	C	D	E	F	G
1	→	←	×	×	×	←	←
2	×	→	←	×	×	←	←
3	×	×	×	→	→	→	→
4	×	×	×	→	→	→	→
5	←	←	←	×	×	←	←
6	→	→	→	→	→	→	→

Fig. 1

bilitatea arborelui se realizează în exclusivitate prin încovoiere, că barele au forma unor linii poligonale cu momentul de inerţie variind în trepte, ne dăm proprietăţile elastice ale arborelui prin matricea flexibilităţilor A, aşa cum a fost definită ea în [1].

3. CALCULUL SOLICITĂRILOR ÎN ARBORE

În sensul în care a fost definit arborele elastic, el reprezintă o structură static determinată.

Vom admite că încărcarea arborelui se face numai la noduri. Să presupunem că în arbore există n noduri i.

În nodul i, de coordonate (x_i, y_i), acţionează încărcarea $\vec{P}_i$ dată prin componentele sale H_i, V_i şi C_i, a căror semnificaţie corespunde celor din figura 2 în care cele trei componente au fost reprezentate în sensul

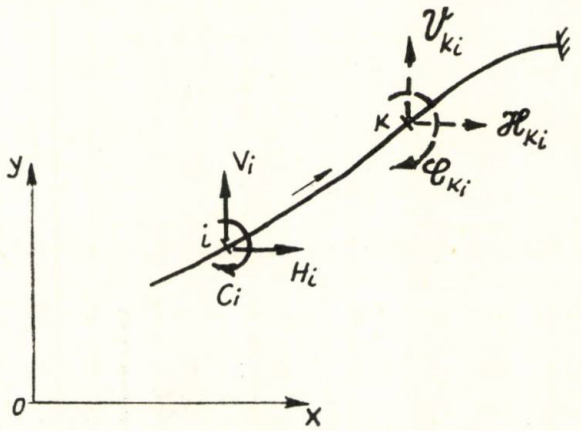


Fig. 2

pozitiv admis pentru fiecare în parte. Cu ajutorul încărcărilor la noduri $\vec{P}_i$ formăm vectorul încărcării totale $\vec{P}$.

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vdots \\ \vec{P}_i \\ \vdots \\ \vec{P}_n \end{bmatrix}, \qquad \vec{P}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ V_i \\ C_i \end{bmatrix}. \tag{1}$$

La nivelul unui punct k, de coordonate (x_k, y_k), încărcările exterioare provoacă o stare de solicitare prin torsorul efort $\vec{\mathcal{F}}_k$ de componente $\mathcal{H}_k, \mathcal{V}_k, \mathcal{C}_k$.

Fie $\vec{\mathcal{F}}_{ki}$ torsorul de reducere în raport cu punctul k a lui $\vec{P}_i$, i fiind situat în amonte de k,

$$\mathcal{H}_{ki} = H_i,$$
$$\mathcal{V}_{ki} = V_i,$$
$$\mathcal{C}_{ki} = H_i(y_i - y_k) + V_i(-x_i + x_k) + C_i,$$
$$\vec{\mathcal{F}}_{ki} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{ki} \\ \mathcal{V}_{ki} \\ \mathcal{C}_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_i - y_k & -x_i + x_k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_i \\ V_i \\ C_i \end{bmatrix}.$$

Notînd cu R_{ki} matricea prin a cărei preînmulțire se realizează reducerea lui $\vec{P}_i$ în k, avem

$$\vec{\mathcal{F}}_{ki} = R_{ki}\vec{P}_i,$$

$\vec{\mathcal{F}}_k$ rezultă prin sumarea efectelor tuturor încărcărilor aflate în amonte de k,

$$\vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{i \to k} {}_i \, R_{ki}\vec{P}_i,$$

sau sub formă matriceală

$$\mathcal{F}_k = R_k\vec{P} \tag{2}$$

unde R_k este o matrice celulară cu n celule R_{ki} dispuse în linie și avînd expresia

$$R_{\substack{ki \\ i \to k}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_i - y_k & -x_i + x_k & 1 \end{bmatrix}; \qquad R_{\substack{ki \\ i \leftarrow k \\ i \times k}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Dacă pe arbore există un număr de t puncte k și interesează $\vec{\mathcal{F}}$ ca totalitate a torsorilor $\vec{\mathcal{F}}_k$ din aceste puncte, atunci

$$\vec{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{F}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathcal{F}}_k \\ \vdots \\ \vec{\mathcal{F}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_k \\ \vdots \\ R_t \end{bmatrix} \vec{P} = R\vec{P}, \tag{4}$$

unde R este o matrice celulară cu t linii k și n coloane i, iar o celulă R_{ki} are expresia stabilită anterior.

În mod frecvent ne pot interesa solicitări în k și după alte direcții sau sub o formă mai complexă decît cele pe care le reprezintă componentele lui $\vec{\mathcal{F}}_k$. În cazul general, o astfel de solicitare F_k reprezintă o combinație liniară între $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{V}_k$ și $\mathcal{C}_k$.

$$F_k = [a_k b_k c_k]\,\vec{\mathcal{F}}_k = D_k \vec{\mathcal{F}}_k. \tag{5}$$

Matricea $D_k = [a_k b_k c_k]$ se stabilește de la caz la caz în funcție de natura solicitării pe care dorim să o scoatem în evidență. Dacă urmărim să aflăm nu una, ci două sau trei solicitări în k, atunci matricea D_k va avea două sau trei linii; de exemplu pentru două solicitări:

$$F_k = \begin{bmatrix} F_{k1} \\ F_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k1} b_{k1} c_{k1} \\ a_{k2} b_{k2} c_{k2} \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathcal{F}}_k = D_k \vec{\mathcal{F}}_k.$$

Totalitatea valorilor F_k ordonate sub forma unui vector $\vec{F}$ se calculează cu relația

$$\vec{F} = D\vec{\mathcal{F}} = DR\vec{P}, \tag{6}$$

unde D este o matrice cvasidiagonală ale cărei celule diagonale sînt matricele D_k. Observăm că celulele D_k în număr egal cu cel al punctelor în care calculăm eforturi, au o structură diversă după cum diverse sînt numărul și natura eforturilor din F_k. Dacă notăm cu q numărul total de eforturi simple din F acesta este de regulă mai mare ca t (într-un singur punct pot fi scoase, după necesități, pînă la trei eforturi simple).

Analog diagramelor de eforturi, se poate pune problema găsirii valorilor unei anumite solicitări intrinseci $\vec{S}$ în toate cele r puncte caracteristice h ale arborelui

$$\vec{S} = D^* \vec{\mathcal{F}}^* = D^* R^* \vec{P}, \tag{7}$$

D^* se deosebește de D prin faptul că toate matricele D_h^* evidențiind unul și același efort au aceeași structură în raport cu caracteristicile intrin-

seci din punctele considerate. O altă deosebire dintre D^* și D, ca și dintre R^* și R, este aceea că ele se pot referi la mulțimi diferite de puncte ale arborelui.

În cazul particular, cînd ne interesează starea de încovoiere a arborelui $\vec{S} = \vec{M}$ și $D_h^* = [0\ 0\ 1]$,

$$\vec{M} = D^* R^* \vec{P} = \mathfrak{M}\vec{P}, \tag{8}$$

$\mathfrak{M}$ este o matrice celulară cu r linii h (aici r este numărul total de puncte caracteristice ale momentului încovoietor) și n coloane i. O celulă $\mathfrak{M}_{hi}$ din linia h și coloana i are expresia

$$\underset{i\to h}{\mathfrak{M}_{hi}} = [y_i - y_h,\ -x_i + x_h,\ 1]; \quad \underset{\substack{i\leftarrow h \\ i\times h}}{\mathfrak{M}_{hi}} = [0\ 0\ 0]. \tag{9}$$

4. DEPLASĂRILE ARBORELUI ELASTIC

În prezentul paragraf ne propunem să determinăm o deplasare punctuală oarecare Δ_ν a arborelui elastic încărcat la noduri cu forțele exterioare $\vec{P}$ și cu q deplasări relative finite Δ_j în anumite puncte, deplasări date sub forma $\vec{\Delta}$.

Deplasarea Δ_ν rezultă prin sumarea a două deplasări, una elastică $\Delta_\nu^{(e)}$, consecință a lui $\vec{P}$ și a deformabilității arborelui, și alta cinematică $\Delta_\nu^{(c)}$, consecință a lui $\vec{\Delta}$

$$\Delta_\nu = \Delta_\nu^{(e)} + \Delta_\nu^{(c)}.$$

Fie $\vec{p}_\nu$ forța generalizată unitate corespunzătoare lui Δ_ν.

Admițînd că deformațiile elastice se datorează în exclusivitate încovoierii, notînd cu $\vec{m}_\nu$ și $\vec{M}$ stările de încovoiere provocate de acțiunea lui $\vec{p}_\nu$ și, respectiv, $\vec{P}$, $\Delta_\nu^{(e)}$ se calculează cu relația

$$\Delta_\nu^{(e)} = \widetilde{m}_\nu A \vec{M}, \tag{10}$$

unde A este matricea flexibilităților. Prin simbolul $\sim$ am notat operația de transpoziție a matricelor ($\vec{m}_\nu = \mathfrak{M}\vec{p}_\nu$; $\vec{M} = \mathfrak{M}\vec{P}$).

Înainte de a trece la calculul deplasării $\Delta_\nu^{(c)}$ sînt necesare cîteva precizări.

O posibilitate j de deplasare relativă între fețele unei secțiuni corespunde întotdeauna imposibilității de a transmite de la o fațetă la alta a unei anumite solicitări F_j. Fie $D_j = [a_j b_j c_j]$ matricea prin care evidențiem această solicitare acționînd pe fațeta din aval. Convenim ca deplasarea relativă Δ_j să se măsoare de la fațeta aval fixă spre fațeta amonte mobilă.

O deplasare relativă Δ_j pozitivă și egală cu unitatea are în raport cu axele de coordonate componentele: $u = a_j$; $v = b_j$; $\theta = c_j$.

În figura 3 sînt prezentate două cazuri particulare de deplasare relativă, cu ajutorul cărora putem obține toate situațiile posibile ce se pot ivi într-o secțiune (prin particularizare și prin simultaneitate).

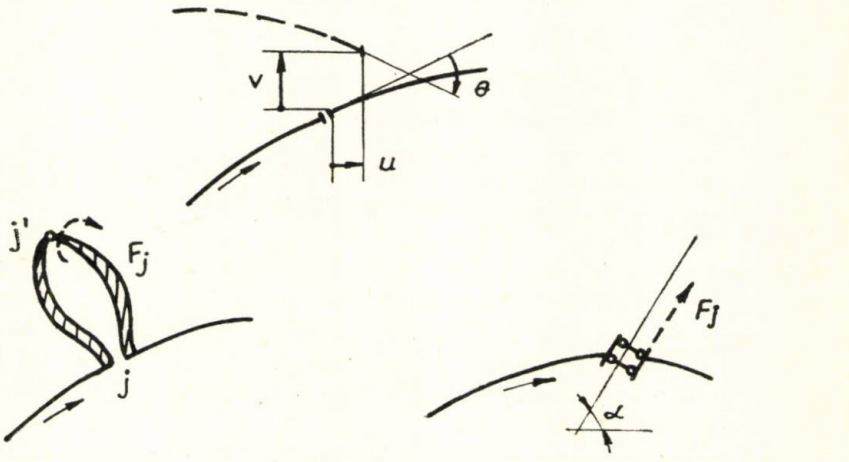


Fig. 3

Potrivit cu convenția de semne aleasă, avem

$$\delta_{vj}^{(c)} = f_{jv},$$

$\delta_{vj}^{(c)}$ reprezintă deplasarea cinematică punctuală pentru arborele încărcat cu $\Delta_j = 1$.

f_{jv} este componenta la nivelul punctului j și pentru D_j a efectului forței unitate corespunzătoare deplasării punctuale căutate.

$$\Delta_v^{(c)} = \sum_{j=1}^{q} \Delta_j \delta_{vj}^{(c)} = \sum_{j=1}^{q} \Delta_j f_{jv}.$$

Sub formă matriceală această relație se poate scrie astfel:

$$\Delta_v^{(c)} = [f_{1v} \cdots f_{jv} \cdots f_{qv}] \cdot \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_j \\ \vdots \\ \Delta_q \end{bmatrix} = \vec{f}_v \vec{\Delta}. \tag{12}$$

$$\vec{f}_v = DR\vec{p}_v$$

Sumînd cele două componente (elastică și cinematică) obținem deplasarea totală Δ_ν

$$\Delta_\nu = \tilde{m}_\nu A\vec{M} + \tilde{f}_\nu\vec{\Delta}. \tag{13}$$

5. UTILIZAREA ARBORELUI ELASTIC ÎN CALCULUL STATIC AL STRUCTURILOR DIN BARE

Fiind dată o structură statică și solicitările exterioare, ne propunem să îi determinăm starea de efort, uzînd de posibilitatea transformării oricărei structuri în arbore.

Să presupunem că ne-am ales un arbore derivat din structura inițială : această transformare presupune efectuarea a două operații, și anume :

— suprimarea a ω legături simple ν, operație ce urmărește desființarea tuturor ciclurilor existente inițial în structură și implică apariția unor noduri terminale suplimentare. Fie $X_\alpha \cdots X_\nu \cdots X_\omega$ forțele interioare corespunzătoare legăturilor suprimate,

— adăugarea a q legături simple j, operație prin care se restabilește continuitatea în punctele cu defect (la § 3 aceste puncte în număr de t au fost notate cu k). Fie $Y_1, \cdots, Y_j, \cdots, Y_q$ deplasările relative finite reale împiedicate să se producă prin introducerea noilor legături.

Notăm cu $\vec{P}_0$ vectorul încărcărilor exterioare cunoscute și cu $\vec{p}_\nu$ vectorul încărcării pentru $X_\nu = 1$.

Potrivit cu poziția în plan și în arbore a nodurilor și a celor două mulțimi de puncte („caracteristice" și „cu defect"), potrivit cu natura solicitărilor care interesează, construim matricele :

$$\mathfrak{M}\begin{bmatrix} 1, & h, & r \\ 1, & i, & n \end{bmatrix}; \qquad R\begin{bmatrix} 1, & k, & t \\ 1, & i, & n \end{bmatrix}; \qquad D\begin{bmatrix} 1, & j, & q \\ 1, & k, & t \end{bmatrix}.$$

Folosim notațiile :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_\alpha \\ \vdots \\ X_\nu \\ \vdots \\ X_\omega \end{bmatrix}; \qquad \vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_j \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix}; \qquad \vec{m}_\nu = \begin{bmatrix} m_{1\nu} \\ \vdots \\ m_{h\nu} \\ \vdots \\ m_{r\nu} \end{bmatrix}; \qquad \vec{f}_\nu = \begin{bmatrix} f_{1\nu} \\ \vdots \\ f_{j\nu} \\ \vdots \\ f_{q\nu} \end{bmatrix},$$

$$p = (\vec{p}_\alpha, \cdots, \vec{p}_\nu, \cdots, \vec{p}_\omega),$$

$$m = (\vec{m}_\alpha, \cdots, \vec{m}_\nu, \cdots, \vec{m}_\omega), \tag{14}$$

$$f = (\vec{f}_\alpha, \cdots, \vec{f}_\nu, \cdots, \vec{f}_\omega).$$

Între solicitările unitare şi efectele lor există relaţiile:

$$\vec{m}_v = \mathfrak{M}\vec{p}_v; \qquad \vec{f}_v = DR\vec{p}_v,$$
$$m = \mathfrak{M}p; \qquad f = DRp. \tag{15}$$

Solicitarea totală $\vec{P}$ se obţine prin sumarea încărcării cunoscute $\vec{P}_0$ şi a celor provenite din legăturile suprimate:

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + p\vec{X},$$

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + m\vec{X},$$

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + f\vec{X}.$$

Forţele de legătură $\vec{X}$ şi deplasările relative $\vec{Y}$ se determină din condiţia ca arborele încărcat cu forţele exterioare cunoscute, cu forţele din legăturile suprimate şi cu deplasările pe direcţia legăturilor adăugate, să aibă o comportare identică cu a structurii netransformate.

Astfel vom avea:

— q ecuaţii care vor exprima că eforturile în legăturile nou introduse sînt nule,

$$f\vec{X} + \vec{F}_0 = 0, \tag{16}$$

— ω ecuaţii care vor exprima că deplasările pe direcţia legăturilor suprimate sînt, de asemenea, nule,

$$\tilde{m}Am\vec{X} + \tilde{f}\vec{Y} + \tilde{m}A\vec{M}_0 = 0. \tag{17}$$

Sistemele (16) şi (17) pot fi scrise împreună sub forma

$$\begin{bmatrix} \tilde{m}Am & \tilde{f} \\ f & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{m}A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{M}_0 \\ \vec{F}_0 \end{bmatrix} = 0. \tag{18}$$

Aici şi în continuare matricele unitate I şi matricele 0 cu toate elementele nule vor avea dimensiunile ce se cer de la caz la caz, astfel ca operaţiile cu matricele construite cu ajutorul lor să aibă sens.

Dacă obiectivul final al calculului este determinarea stării de încovoiere $\vec{M}$, atunci folosim relația :

$$\vec{M} = [I \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \vec{M}_0 \\ \vec{F}_0 \end{bmatrix} + [m \quad 0] \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{bmatrix},$$

$$\vec{M} = \left\{ [I \quad 0] - [m \quad 0] \begin{bmatrix} \tilde{m}Am & \tilde{f} \\ f & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{m}A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \vec{M}_0 \\ \vec{F}_0 \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Discutarea separată a sistemului de ecuații (16) ne oferă o posibilitate comodă pentru aprecierea structurii din punct de vedere static.

Sistemul de ecuații (16) este alcătuit din q ecuații cu ω necunoscute ; în funcție de valoarea relativă a lui ω față de q ne putem afla în una din următoarele trei situații :

— $\omega > q$: structura este static nedeterminată, gradul de nedeterminare fiind egal cu $\omega - q$; pentru aflarea stării de efort trebuie să apelăm și la ecuațiile de deformație (17) ;

— $\omega = q$: structura este static determinată, starea de efort putînd fi găsită folosind în exclusivitate ecuațiile statice (16) ;

— $\omega < q$: structura are grade de libertate cinematică, iar echilibrul se realizează numai în cazuri particulare de încărcare, sistemul (16) fiind, în general, incompatibil.

Studiul matricei f ne poate conduce la depistarea unor moduri incorecte de alcătuire a structurii (pentru formele critice în cazul sistemelor static determinate $[f] = 0$).

Din mulțimea arborilor, în care poate fi transformată o structură, îl preferăm pe acela care necesită introducerea celui mai mic număr de legături pentru refacerea continuității, numărul necunoscutelor ce trebuie aflate efectiv pentru exprimarea stării de efort crescînd pentru fiecare legătură adăugată cu două în cazul sistemelor static nedeterminate și cu una în cazul celor static determinate.

În cazul cînd este posibilă transformarea în arbore fără adăugarea de legături, din sistemul de ecuații (18) rămîn numai ecuațiile (17), identice cu sistemul de ecuații de condiție din metoda eforturilor pentru forma de bază arbore.

Pentru exemplificare, în anexă sînt stabilite expresiile matricelor $\mathfrak{M}$, R, D, $\vec{P}_0$ și p în cazul concret al unui arbore elastic ce reprezintă transformata unei structuri date. Cititorul va înțelege desigur că prin structura aleasă — mai puțin obișnuită prin legăturile sale interioare și exterioare, ca și prin arborele în care am transformat-o — transformare nu cea mai avantajoasă, autorul nu a urmărit altceva decît posibilitatea de a exemplifica elementele de bază ale metodei pe un caz ceva mai complex.

Deşi matricele $\mathfrak{M}$, R, D, $\vec{P}_0$, p au, în general, o structură neomogenă, la scrierea lor s-a făcut abstracţie de factori dimensionali. Ca şi în cazul altor metode de calcul, prezenţa factorului dimensional nu este necesară pe parcursul rezolvării; el va fi însă adăugat în final coeficienţilor numerici, potrivit cu semnificaţia fizică a fiecărui rezultat.

★

În încheiere, sînt necesare cîteva consideraţii privind metoda prezentată, precum şi încadrarea ei în contextul metodelor de calcul existente şi al direcţiilor de dezvoltare enunţate la §1.

În forma în care a fost expus, procedeul reprezintă o metodă de calcul generală, complet analitică, pentru calculul structurilor plane încărcate în planul lor cu forţe, structuri la care solicitarea predominantă o constituie încovoierea (nu a fost analizată alegerea arborelui de bază deoarece se face fără nici un fel de dificultate).

Toate matricele care intervin în formularea şi rezolvarea problemei au expresii simple şi pot fi scrise direct.

După cum am mai afirmat, nu există dificultăţi esenţiale care să împiedice adaptarea metodei pentru rezolvarea unor cazuri mai complexe, cum ar fi cel al structurilor spaţiale, alcătuite din bare cu deformabilitate completă sau încărcate cu deplasări.

Exprimarea soluţiei sub forma (18) sau (19) face ca ea să fie uşor de obţinut cu ajutorul calculatoarelor electronice numerice. Dacă dispunem de un calculator care are în biblioteca sa programe pentru operaţiile fundamentale cu matrice (adunare, înmulţire, inversare, compunere), schema logică a operaţiilor ce se execută de către maşină constă în indicarea unei succesiuni de operaţii algebrice elementare uşor de retranscris în oricare limbaj algoritmic.

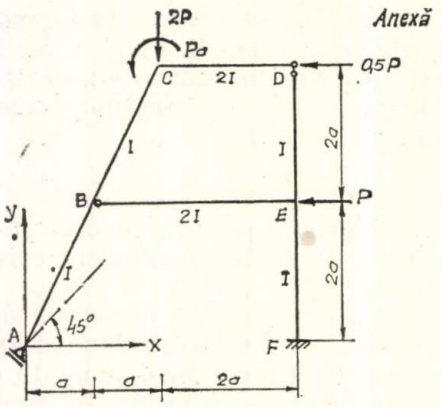
Prin natura necunoscutelor problemei şi a specificului ecuaţiilor din sistemul de condiţie, metoda expusă este mixtă, iar prin felul de abordare, directă (amintim că varianta clasică consacrată în statica construcţiilor drept metoda mixtă este o metodă semidirectă, porţiuni din sistemul de bază fiind static nedeterminat).

În raport cu direcţiile de dezvoltare, metoda arborelui elastic are puncte comune atît cu prima direcţie (rezolvarea problemei se face în maniera tradiţională operînd pe un sistem de bază — arborele elastic), cît şi cu cea de-a doua direcţie de dezvoltare (prin înaltul grad de analitizare pe care îl realizează). Acestea sînt motivele care ne fac să presupunem că metoda propusă este în egală măsură uşor asimilabilă şi eficace.

Primită la redacţie la 15 mai 1969

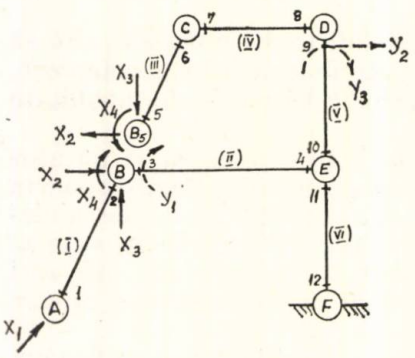
BIBLIOGRAFIE

1. S. Răutu, V. Bănuţ, *Utilizarea calculatoarelor electronice în statică*, St. cerc. mec. apl., 4 (1968).
2. L. Dogaru, *Calculul structurilor plane şi spaţiale din bare*, Referat prezentat în cadrul Catedrei de rezist. mater. din I.C.B., 1967 martie.
3. D. Constantinescu, *Folosirea C.E.N. în statica structurilor din bare*, Buletinul I.C.B. 1969.
4. P. Mazilu, *Statica construcţiilor* vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.
5. A. Gheorghiu, *Statica construcţiilor* vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.



II

	A	B	E	F	B_5	C	D
I	→	→	→	→	→	→	→
II	→	→	→	→	↗	↗	↗
III	↗	↗	→	→	→	→	→
IV	↗	↗	→	→	→	→	→
V	↗	↗	→	→	→	→	→
VI	→	→	→	→	→	→	→



$\vec{P}_0$

A	0	
	0	
	0	
B	0	
	0	
	0	
E	-1	
	0	
	0	
F	0	
	0	
	0	
B_5	0	
	0	
	0	
C	0	
	-2	
	-1	
D	-0,5	
	0	
	0	

P

$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$
0,707	0	0	0
0,707	0	0	0
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	-1	0	0
0	0	-1	0
0	0	0	-1
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Ж

	(x, y)	A (0, 0)	B (1, 2)	E (4, 2)	F (4, 0)	B_5 (1, 2)	C (2, 4)	D (4, 4)
I	1 (0,0)	0 0 1						
	2 (1, 2)	-2 1 1						
II	3 (1, 2)	-2 1 1	0 0 1					
	4 (4, 2)	-2 4 1	0 3 1					
III	5 (1, 2)					0 0 1		
	6 (2, 4)					-2 1 1		
IV	7 (2, 4)					-2 1 1	0 0 1	
	8 (4, 4)					-2 3 1	0 2 1	
V	9 (4, 4)					-2 3 1	0 2 1	0 0 1
	10 (4, 2)					0 3 1	2 2 1	2 0 1
VI	11 (4, 2)	-2 4 1	0 3 1	0 0 1		0 3 1	2 2 1	2 0 1
	12 (4, 0)	0 4 1	2 3 1	2 0 1		2 3 1	4 2 1	4 0 1

R

	3	9
3	1 0 0 0 1 0 -2 1 1	1 0 0 0 1 0 0 0 1
9		1 0 0 0 1 0 -2 3 1

D

	3	9
y_1	0 0 1	
y_2		1 0 0
y_3		0 0 1

STUDIU ASUPRA CURGERII LICHIDELOR VÎSCOASE PRIN FANTE MICI

de C. MITOŞERIU
Institutul politehnic Galaţi

În lucrare se discută valorile şi curbele de variaţie ale coeficientului de debit în funcţie de diferiţi parametri : forma şi dimensiunile fantei, vîscozitatea lichidului, viteza de curgere. Se prezintă curbele $\mu = f(\mathcal{R}e)$ la curgerea prin orificii circulare avînd diametrul $d < 1$ mm.

1. INTRODUCERE

Fenomenele ce se manifestă şi relaţiile de legătură ce se stabilesc între diferite mărimi la curgerea lichidelor prin fante constituie una dintre problemele fundamentale ale hidrodinamicii. Majoritatea cercetărilor teoretice şi experimentale făcute în acest domeniu au ca obiectiv principal precizarea relaţiei pentru calculul debitului

$$Q = \mu S \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\Delta p}, \quad \Delta p = AQ^2 = A_1 v^2. \tag{1}$$

Aceasta este relaţia de bază folosită în toate calculele de proiectare a fantelor de la diferite dispozitive (debitmetre, drosele, ajutaje, sertare de comandă, supape, regulatoare de presiune şi debit etc.), indiferent de forma şi mărimea lor, lungimea canalului de curgere, viscozitatea lichidului, rugozitatea suprafeţelor şi starea muchiei de la intrare.

La stabilirea relaţiei (1) se consideră că pierderile de energie datorită frecărilor sînt neglijabile, ipoteză valabilă în următoarele condiţii : secţiunea transversală şi raza hidraulică mari, secţiunea longitudinală (lungimea canalului) şi viscozitatea lichidului mici, variaţia vitezei în secţiunea transversală a jetului neglijabilă. În majoritatea cazurilor, condiţiile reale de curgere diferă de cele arătate, pierderile prin frecare vîscoasă avînd o pondere mare şi variabilă în funcţie de parametrii sistemului, ceea ce

determină variația coeficientului de viteză φ (corecția vitezei teoretice datorită existenței pierderilor prin frecare $-\varphi = v_{ef}/v_{teor}$). Dacă se mai consideră și variația coeficientului de contracție ε, devine explicabilă variația în limite foarte largi a coeficientului de debit — $\mu = \varphi\varepsilon$ și existența unui mare volum de lucrări ce se ocupă cu această problemă complexă.

Valorile obișnuite ale coeficientului de debit ($\mu = 0{,}6 \cdots 0{,}8$) se referă la curgerea prin fante de dimensiuni mari, în regim turbulent stabilizat. Se vede chiar în acest domeniu intervalul de variație este totuși mare, astfel că în calcule se pot face erori de peste 30% (în foarte multe cazuri nu se dau valorile coeficientului de debit corespunzătoare la fante cu diferite forme geometrice). La fante cu lungimea canalului de curgere relativ mare sau cu raza hidraulică mică (ajutaje, drosele tip Heller cu fantă unghiulară, drosele cu fantă dreptunghiulară de lățime mică, drosele cu fantă inelară etc.) coeficientul de debit poate avea valori foarte mult diferite, dar tocmai aceasta este una dintre problemele mai puțin studiate. În plus, în cazul fantelor unghiulare cu deschidere reglabilă (drosele tip Heller), lungimea canalului se mărește odată cu micșorarea secțiunii de strangulare, ceea ce determină creșterea ponderii pierderilor prin frecare și deci scăderea coeficientului de debit.

La acționarea hidraulică a unor mașini-unelte și în alte domenii ale tehnicii sînt necesare debite tot mai mici — $Q \sim 10^2 \cdots 10^0$ cm^3/min. De exemplu, pentru mișcări de avans cu viteza de 0,5—1 mm/min (alezare și rectificare fină) și dimensiuni obișnuite ale motorului de acționare, sînt necesare debite de numai 1—2 cm^3/min, reglarea cărora se face prin fante cu secțiunea de 0,2—0,3 mm. Dacă se aplică relația (1) și în aceste cazuri, fără o corecție importantă a coeficientului de debit, se pot comite erori de 200—400% (debitul efectiv este mai mic decît cel calculat). Rezultă că la curgerea prin fante de dimensiuni mici, problema coeficientului de debit are o importanță mai mare, deoarece valorile acestuia variază în limite foarte largi, funcție de următorii factori:

— forma fantei în secțiune perpendiculară pe direcția de curgere (perimetrul udat, raza hidraulică, raza de racordare a muchiei de intrare);
— forma și dimensiunile fantei în secțiune longitudinală;
— rugozitatea suprafeței canalului de curgere;
— viscozitatea lichidului.

Cu cît secțiunea transversală a fantei și viteza de curgere sînt mai mici (numere Reynolds mici), cu atît se manifestă mai puternic influența acestor factori datorită creșterii importanței pierderilor prin frecare a straturilor de lichid. La curgerea în regim laminar și tranzitoriu aceste pierderi sînt preponderente, deci s-ar impune modificarea formei relației de calcul (1) și nu corectarea forțată a coeficientului de debit, așa cum se procedează în mod obișnuit.

2. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRILOR

Dată fiind multitudinea factorilor ce intră în discuție, cercetările făcute pînă în prezent sînt departe de a fi clarificat toate aspectele acestei probleme complexe. De remarcat că numai problema curgerii prin diafragme de diametru mic și problema fantelor sertarelor de comandă au

fost reluate de mai mulţi autori, dar cercetările acestora au generat o serie de rezultate contradictorii şi astfel încă nu s-au putut formula concluzii unitare cu privire la influenţa parametrilor de formă asupra coeficientului de debit. Referitor la alte tipuri de fante, în special cele de la aparatajul de reglare al maşinilor-unelte (drosele, supape, regulatoare), pînă în prezent nu s-au făcut studii sistematice pentru determinarea valorilor coeficientului de debit valabile în domeniul deschiderilor mici. Pentru aceste fante, literatura de specialitate nici nu precizează domeniul de valabilitate al valorilor coeficientului de debit, arătate mai sus, şi de multe ori se aplică în orice condiţii, calculele putînd fi însă total eronate.

Problemele discutate în legtură cu variaţia coeficientului de debit se pot sistematiza astfel:

2.1. *Prezentarea unor valori medii, fără a preciza domeniul lor de valabilitate sau fără a face referiri speciale la domeniul fantelor mici* (unele precizări ce se fac sînt insuficiente sau foarte discutabile aşa cum rezultă din tabelul de mai jos).

Pe baza cercetărilor făcute pînă în prezent se poate afirma că aceste valori ale coeficientului de debit nu sînt valabile şi în domeniul fantelor de dimensiuni mici, la care variaţiile sînt mult mai mari, iar valorile 0,82—0,97 prezentate pentru ajutaje cilindrice [3], [8], [23] şi 0,68—0,86 pentru fantele de droselare de la aparatajul maşinilor-unelte [2], [26] sînt foarte discutabile chiar şi la dimensiuni mari. De asemenea, nu rezultă clar (cantitativ) influenţa formei fantei şi a lungimii canalului de curgere asupra coeficientului de debit. Creşterea acestuia în cazul ajutajelor cu lungime relativ mare — $l = (3-5)\ d$ este explicabilă numai la diametre mari. Se mai vede că în unele cazuri se indică valori diferite pentru acelaşi domeniu.

2.2. *Semnalarea unor aspecte specifice la curgerea prin fante mici şi a variaţiei coeficientului de debit în aceste condiţii* (numai calitativ).

Pentru stabilirea relaţiei de bază (1) se fac o serie de ipoteze simplificatoare şi se aplică legea lui Bernoulli la întreg jetul de lichid, obţinîndu-se o valoare medie a vitezei de curgere. Lamb [18] arată că nu este corect să se procedeze la fel şi în cazul fantelor mici, deoarece jetul are o structură stratificată şi deci există pierderi importante prin frecare, dar nu se ocupă de rezolvarea efectivă a problemei. Este evident că gradientul vitezelor şi deci valoarea pierderilor prin frecare creşte odată cu micşorarea secţiunii fantei. De asemenea, trebuie să se considere pierderile ce au loc în conul de la intrare, precum şi variaţia acestora cu regimul de curgere.

În legătură cu reglarea şi menţinerea constantă a debitelor mici ($Q = 50$ cm^3/min), se recunosc o serie de dificultăţi şi aspecte specifice [14], [21]: variaţia în limite largi a coeficientului de debit în funcţie de forma geometrică a fantei (lungime, diametru echivalent), variaţia debitului cu temperatura, susceptibilitatea la înfundare a fantelor mici, necesitatea limitării scăpărilor de lichid prin jocuri pentru a asigura precizia reglării (aceste pierderi pot depăşi debitul util), necesitatea prelucrării îngrijite a fantelor mici şi filtrarea fină a uleiului. Diferite tipuri de fante sînt apreciate în baza unor criterii calitative, fără a prezenta însă şi valorile respective ale coeficientului de debit.

Bibl.	Felul fantelor şi alte precizări	Valorile coeficientului de debit	Observaţii
1	2	3	4
[20]	Pentru orice formă şi dimensiune, indiferent de viscozitatea lichidului	0,59—0,64	Precizările făcute nu sînt valabile şi pentru fante mici, la care coeficientul de debit variază în limite mai largi, funcţie de forma şi dimensiunile fantei, regimul de curgere etc.
[5]	Fante de dimensiuni mici şi de orice formă	0,68—0,70	Valorile sînt şi mai discutabile, deoarece se menţionează că sînt valabile la fante mici
[8] [23]	Diafragme cu grosime mică	0,62	Precizarea „grosime mică" este insuficientă. Nu se menţionează diametrul diafragmei şi regimul de curgere. Coeficientul de debit nu poate avea o valoare fixă chiar dacă se consideră numai diafragmele subţiri
[23]	Ajutaje cilindrice cu lungimea $l = (3-5)d$	0,82—0,97	La diametre mici, pierderile prin frecare au valori foarte mari, ceea ce determină micşorarea coeficientului de debit şi nicidecum creşterea acestuia
[11] [23]	Diafragme cu diametru mare	0,59—0,68	Nu se menţionează grosimea diafragmei şi forma muchiei la intrare
[12] [17]	Diafragme cu diferite grade de reducţie, regim de curgere turbulent	0,60—0,85	Valorile prezentate sînt valabile la diametre mari. Nu se prezintă variaţia coeficientului de debit la numere Reynolds mici
[3]	Ajutaje cilindrice cu lungimea $l = (2-3)d$	0,82	Coeficientul de debit nu poate avea o valoare fixă — tocmai la lungimi mari domeniul de variaţie este mai larg
[6] [24]	Fantele sertarelor de comandă, deschideri mari	0,60—0,65 0,62—0,75	În [6] se mai arată că prin teşirea muchiilor coeficientul de debit creşte la 0,8—0,9, ceea ce nu concordă cu alte raţionamente privind creşterea pierderilor prin frecare
[5] [15]	—"—	0,55—0,58	Valorile sînt sensibil mai mici faţă de cele prezentate în [6] şi [24]. Este greu de explicat această scădere ştiind că la fantele sertarelor lungimea de curgere este mică
[2]	Fantele dispozitivelor de droselare de la maşini-unelte. Lung. canalului $l=0{,}1-0{,}2$	0,75—0,78	Aceste valori sînt mai mari decît cele prezentate la diafragme subţiri [8], [23]
[9] [22]	Fantele dispozitivelor de droselare de la maşini-unelte. Lung. canalului $l \leqslant d$	0,64—0,74	Valorile se referă la fante de dimensiuni mari la curgere în regim turbulent
[26]	—"— Orice formă şi dimensiune	0,68—0,86	La fante de dimensiuni mici şi lungime mare a canalului nu sînt valabile aceste valori

Pentru limitarea variației debitului cu temperatura, se recomandă [2], [5], [14] micșorarea lungimii canalului de curgere la 0,1—0,2 mm. Vom arăta însă că la curgerea prin fante mici această restricție nu este suficientă, debitul avînd o variație importantă cu temperatura chiar și la curgerea prin diafragme cu grosimea de 0,05—0,1 mm.

2.3. *Studierea variației coeficientului de debit în funcție de regimul curgerii, forma și mărimea fantei.*

În majoritatea lucrărilor ce tratează această problemă, variația coeficientului de debit se consideră în funcție de numărul Reynolds $\mu = f(\mathcal{R}e)$, prezentîndu-se aceste curbe pentru fante de diferite forme și dimensiuni.

Pe baza cercetărilor făcute pînă în prezent, s-a stabilit forma tipică a curbelor $\mu = f(\mathcal{R}e)$ (fig. 1).

Alura acestor curbe variază mult cu regimul de curgere și aceasta se explică astfel:

a) Domeniul curgerii laminare.

Contracția jetului este neglijabilă (canalul de curgere este umplut complet), însă coeficientul de viteză ia valori mici, datorită influenței pierderilor prin frecare.

b) Domeniul tranzitoriu de curgere cuprins în intervalul $(\mathcal{R}e_1)_{cr} \ldots (\mathcal{R}e_2)_{cr}$.

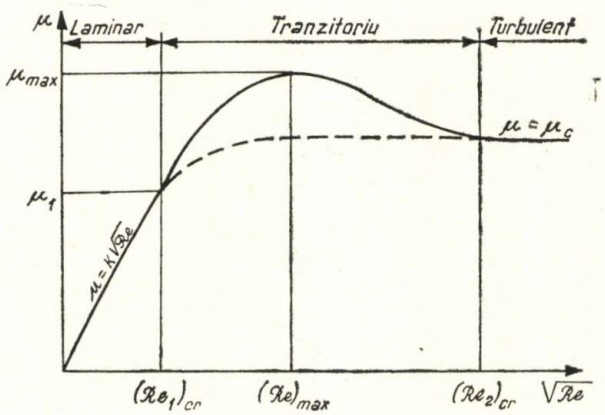


Fig. 1. — Variația coeficientului de debit în funcție de numărul Reynolds.

Variația coeficientului de debit este mai lentă decît în domeniul curgerii laminare, datorită micșorării coeficientului de contracție odată cu intensificarea curgerii (diminuarea efectului creșterii coeficientului de viteză). La egalarea celor două efecte coeficientul de debit ia valoarea maximă, după care urmează o porțiune descrescătoare ca rezultat al stabilizării coeficientului de viteză ($\varphi \to 1$) și micșorării coeficientului de contracție. La multe fante variația acestuia este neînsemnată și astfel coeficientul de debit se stabilizează de la valori inferioare, fără a trece printr-un maxim (curba tip 2).

c) Domeniul curgerii turbulente.

Contracția jetului de lichid nu poate depăși o anumită valoare (contracție desăvîrșită) și astfel coeficientul de debit se stabilizează la o valoare constantă — pentru $\mathcal{R}e > (\mathcal{R}e_2)_{cr}$ variația este neglijabilă.

Viteza de variație a coeficientului de debit în diferite domenii, precum și valorile caracteristice $(\mathcal{R}e_1)_{cr}$, $\mathcal{R}e_{max}$, $(\mathcal{R}e_2)_{cr}$, μ_1, μ_{max}, μ_c depind în mare măsură de forma geometrică a fantei : cu cît ponderea pierderilor prin frecare vîscoasă este mai mare, cu atît coeficientul de debit și viteza lui de variație sînt mai mici, iar stabilizarea se produce la valori mai mari ale numărului Reynolds.

Problemele referitoare la curgerea prin diafragme au fost reluate de mai mulți autori [3], [8], [13], [17], [23], [25], [27], fără a se obține însă pînă în prezent valori și relații de dependență unitare.

2.3.1. *Curgerea prin diafragme de diametru mare.* Cercetările cu privire la aceste diafragme sînt mai bine puse la punct, dată fiind larga lor utilizare în cadrul dispozitivelor pentru măsurarea debitului. Pentru curbele $\mu = f(\mathcal{R}e)$ se consideră ca parametru principal de formă gradul de reducție $m = d^2/D^2$ (d — diametrul diafragmei; D — diametrul conductei), așa cum se vede în figura 2 [17]. Aceste rezultate se referă numai la domeniul de trecere în regim turbulent stabilizat și diametre mari ale diafragmei ($d > 10$). Valoarea critică superioară a numărului Reynolds și coeficientul de debit stabilizat variază în limite largi funcție de m : pentru $m = 0{,}05-0{,}7$ corespund $(\mathcal{R}e_2)_{cr} = 2 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5$ și $\mu_c = 0{,}6-0{,}8$.

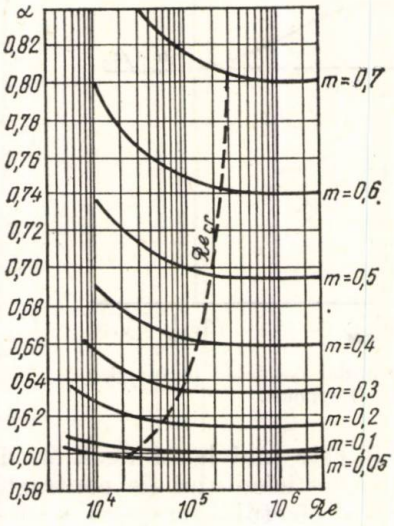


Fig. 2. — Variația coeficientului de debit în funcție de nr. Reynolds la curgerea prin diafragme pentru diferite grade de reducție [17].

După figura 2 și după alte considerații din [17] rezultă următoarele :

— coeficientul de contracție scade odată cu micșorarea coeficientului de reducție, datorită creșterii componentei radiale a vitezei de curgere ;

— la reducții foarte mari ($m < 0{,}05$) coeficientul de contracție ia valoarea constantă $\varepsilon = 0{,}60-0{,}61$, observație deosebit de importantă pentru cazul fantelor mici ($d < 1$ mm $\rightarrow m \ll 0{,}05$) ;

— apariția și stabilizarea contracției se produc cu atît mai rapid, cu cît reducția este mai mare (pentru $m = 0{,}05$ contracția apare la $\mathcal{R}e > 10$);

— la curgerea prin diafragme cu diametrul mai mic de 10 mm coeficientul de debit crește odată cu scăderea diametrului, problemă care este foarte discutabilă.

În legătură cu încercările pentru stabilirea expresiei coeficientului de debit prin considerații teoretice, menționăm rezultatele obținute de Gross [13]. Forma generală a ecuației ce descrie curgerea printr-o fantă oarecare rezultă din aplicarea teoremei π de similitudine:

$$F(\mathcal{R}e,\ \mathcal{E}_u,\ \mathcal{F}_r,\ L_1/L_c,\ L_2/L_c \ldots) = 0, \tag{2}$$

$\mathcal{R}e$, $\mathcal{E}_u$, $\mathcal{F}_r$ — criteriile de similitudine Reynolds, Euler, Froud;
L_1, $L_2 \ldots L_c$ — dimensiunile ce caracterizează fanta din punct de vedere geometric (L_c — dimensiunea caracteristică).

La valori mici ale numărului Reynolds se pot neglija forțele de inerție ($\mathcal{F}_r \to 0$) și din (2) se obține

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2\mathcal{E}u}} = \Phi\sqrt{\mathcal{R}e}, \tag{3}$$

$\Phi(L_1/L_c,\ L_2/L_c \ldots)$ reprezintă funcția de formă a fantei. În felul acesta problema se rezolvă numai principial, urmînd să se stabilească tot prin considerații teoretice și expresiile funcției de formă. Pe de altă parte,

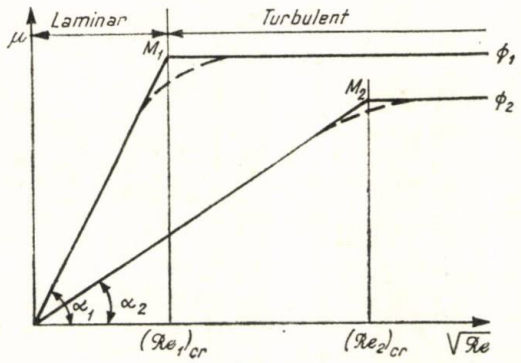


Fig. 3. — Variația coeficientului de debit în funcție de nr. Reynolds [13].

datorită simplificărilor făcute la deducerea relației (3), nu rezultă o diferențiere cu privire la variația coeficientului de debit în regim laminar și tranzitoriu (fig. 3). S-a arătat mai sus că trecerea în regim turbulent stabilizat se face continuu, forma din figura 3 fiind valabilă numai la un model teoretic.

În figurile 4 și 5 se prezintă curbele $\mu = f(\mathcal{R}e)$ la curgerea prin diafragme cu gradul de reducție $m = 0{,}008 \ldots 0{,}63$ [13], valorile foarte

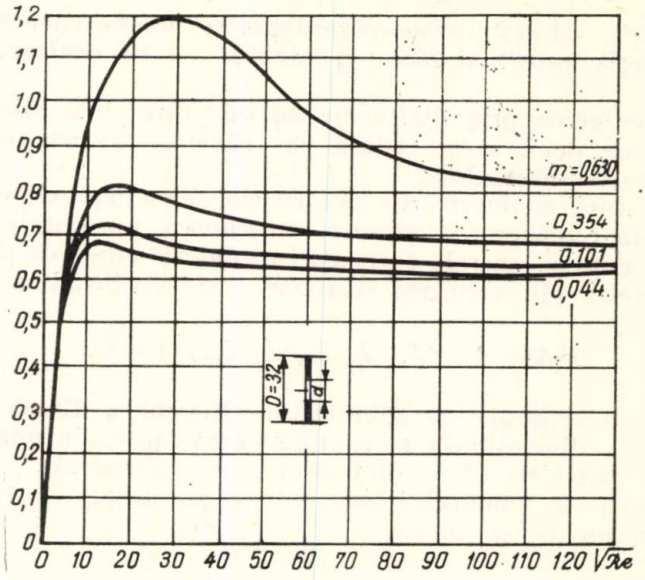


Fig. 4. — Variaţia coeficientului de debit funcţie de nr. Reynolds la curgerea prin diafragme cu diferite grade de reducţie [13].

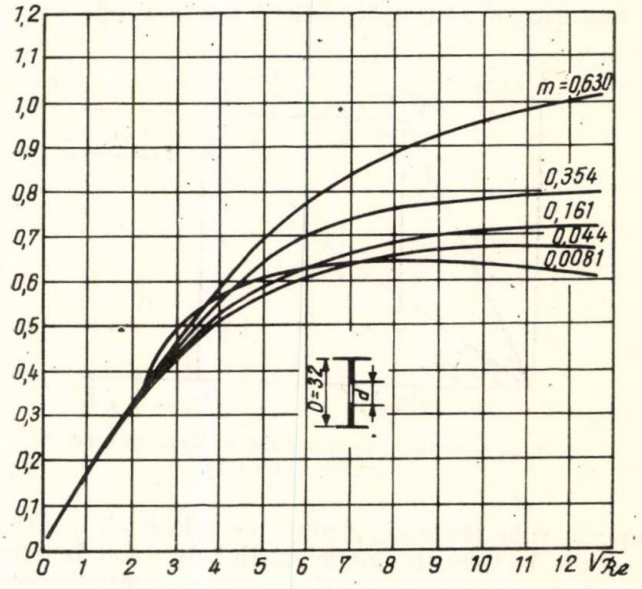


Fig. 5. — Variaţia coeficientului de debit funcţie de nr. Reynolds la curgerea prin diafragme cu diferite grade de reducţie (zona laminară şi tranzitorie) [13].

mici ale numărului Reynolds fiind obținute prin micșorarea căderii de presiune. Referitor la aceste rezultate se pot face următoarele observații :

— forma reală a curbelor $\mu = f(\mathcal{R}e)$ este mult diferită de cea teoretică (fig. 3);

— domeniul de valabilitate al relației (3) este foarte restrîns ($\mathcal{R}e < 10-20$), iar funcția de formă Φ (panta dreptelor) depinde în mică măsură de parametrul m ($\Phi = 0{,}14-0{,}16$);

— în zona tranzitorie de curgere, dependența $\mu = f(\mathcal{R}e)$ este mai complexă, iar curba corespunzătoare la $m = 0{,}008$ are o poziție particulară față de celelalte (le intersectează);

— valoarea maximă a coeficientului de debit pentru $m = 0{,}63$ este supraunitară ($\mu_{max} = 1{,}2$), rezultat ce pare a fi paradoxal;

— supraînălțarea curbelor scade odată cu creșterea gradului de reducție, fiind neglijabilă pentru $m < 0{,}008$;

— stabilizarea regimului tranzitoriu are loc la valori mai mici ale numărului Reynolds, iar valorile respective ale coeficientului de debit sînt mai mari față de cele prezentate în figura 2 (la aceleași valori ale coeficientului de reducție m);

— nu se indică grosimea diafragmelor, forma muchiei de la intrare și viscozitatea lichidului, parametri ce au o mare influență asupra coeficientului de debit;

— dată fiind influența mare a coeficientului de reducție asupra formei curbelor $\mu = f(\mathcal{R}e)$, rezultatele prezentate nu sînt valabile și la diafragme avînd diametrul $d < 1$ mm ($m < 0{,}008$).

Cercetările teoretice și experimentale făcute de Altșuli [3], [4] asupra curgerii prin diafragme au permis să se traseze curbele din figura 6.

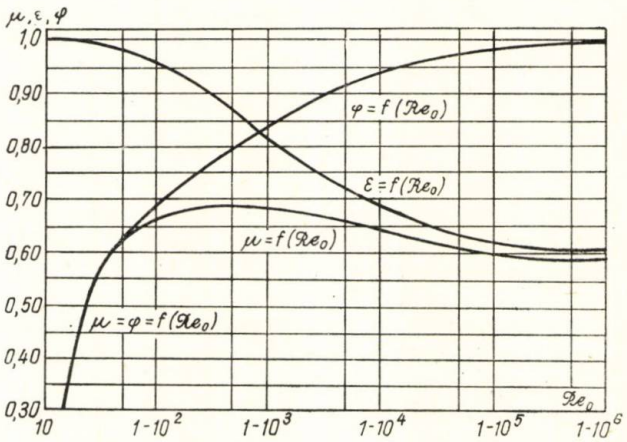


Fig. 6. — Variația coeficientului de debit (μ), coeficientului de contracție (ε) și a coeficientului de viteză (φ) funcție de nr. Reynolds la curgerea prin diafragme [3].

După cum rezultă din aceste date, contracția jetului de lichid este neglijabilă ($\varepsilon \to 1$) pentru $\mathcal{R}e < 20-30$, iar stabilizarea coeficienților φ, ε și μ are loc pentru $\mathcal{R}e \sim 10^5$ ($\mu_c \sim 0{,}6$).

Pe baza prelucrării acestor date au fost obținute următoarele formule empirice pentru calculul coeficientului de debit în diferite domenii de curgere :

$$\text{— pentru } \mathcal{R}e < 25 \qquad \mu = \frac{\mathcal{R}e}{48}, \tag{4}$$

$$\text{— pentru } \mathcal{R}e = 25-300 \qquad \mu = \frac{\mathcal{R}e}{1{,}5 + 1{,}4\,\mathcal{R}e}, \tag{5}$$

$$\text{— pentru } \mathcal{R}e = 300-10^5 \qquad \mu = 0{,}592 + \frac{0{,}27}{\mathcal{R}e^{1/6}}. \tag{6}$$

Rezultatele prezentate în figura 6 și relațiile (4), (5), (6) sînt discutabile :

— curbele sînt trasate în coordonate logaritmice și deci nu se pot compara direct cu cele din figurile 4 și 5 ;

— nu se precizează dimensiunile diafragmelor experimentate (diametrul, lungimea, raza de racordare a muchiei) și nici viscozitatea lichidului, dar după forma curbei $\mu = f(\mathcal{R}e)$ se deduce, că este vorba de diametre relativ mari ;

— nu se prezintă curba $\mu = f(\mathcal{R}e)$ la valori mici ale numărului Reynolds ($\mathcal{R}e < 10$) ;

— poziția punctului de maxim și valoarea stabilizată a coeficientului de debit nu concordă cu cele din figura 5 ;

— relațiile (3) și (4) deduse pentru numere Reynolds mici conduc la obținerea unor rezultate total diferite (de exemplu, pentru $\mathcal{R}e = 9$ se obțin valorile $\mu = 0{,}45$ și $0{,}19$) ; relația (4) nu poate fi valabilă simultan cu relația complementară $Q = C\Delta p$;

— valorile obținute cu relațiile (5), (6) nu concordă, în general, cu cele înscrise în figura 6 ; dealtfel, nici una din cele două relații nu poate descrie o curbă cu maxim ;

— nu se discută influența diametrului și grosimii diafragmei asupra coeficientului de debit ;

— nu se arată felul în care s-a realizat variația numărului Reynolds.

2.3.2. *Curgerea prin diafragme de diametru mic.* Problemele referitoare la curgerea prin astfel de diafragme sînt mai complexe, datorită creșterii sensibilității coeficientului de debit la variația parametrilor de formă.

În lucrarea de sinteză [27] se prezintă curbele $\mu = f(\mathcal{R}e)$ pentru diametre de 0,3—0,9 (fig. 7) și diferite raze de rotunjire ale muchiei de la intrare (fig. 8).

În legătură cu aceste rezultate se pot formula următoarele observații :

— diafragmele considerate în figura 7 au lungime mică ($l = 1/8\ d$), dar variabilă și deci nu se pot face aprecieri în legătură cu ordonarea curbelor după mărimea diametrului (lungimea canalului și diametrul acționează în sensuri contrarii asupra coeficientului de debit) ; în plus, curgerea mai este influențată de teșitura conică de la intrare, practicată pentru aducerea grosimii la valoarea $l = 1/8\ d$;

— supraînălțarea curbelor $\mu = f(\mathcal{R}e)$ și domeniul tranzitoriu de curgere sînt mult mai mici decît în cazul diafragmelor cu diametru mare ;

— forma curbelor din figurile 7 și 8 este mult diferită (în fig. 8 s-a neglijat domeniul tranzitoriu, ceea ce se poate admite numai la grosimi și raze de racordare foarte mici — diafragme ideale);

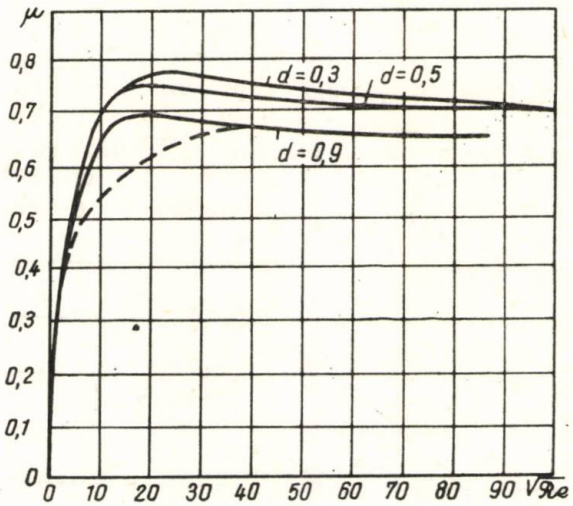


Fig. 7. — Variația coeficientului de debit funcție de nr. Reynolds la curgerea prin diafragme de diferite diametre [27].

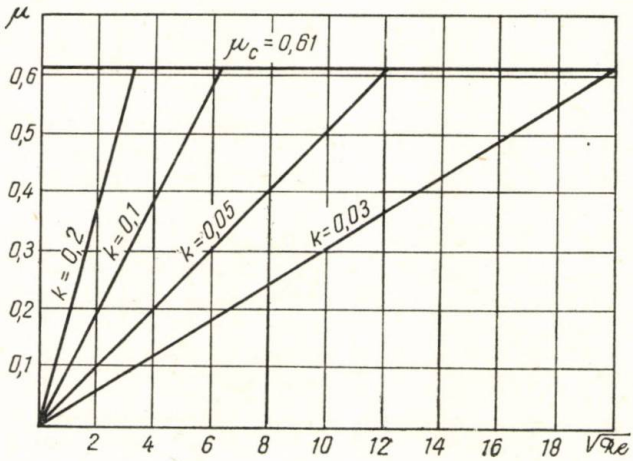


Fig. 8. — Variația coeficientului de debit funcție de nr. Reynolds la curgerea prin diafragme cu diferite raze de racordare a muchiei de intrare [27].

— din figura 8 rezultă că valorile coeficientului de debit (panta dreptelor $\mu = k\sqrt{Re}$) depind în mare măsură de rotunjirea muchiei de la intrare, dar nu se dau dimensiunile diafragmelor care au fost încercate (nici chiar valorile parametrului studiat — raza de racordare);

— diafragmele reale pot avea diferite grosimi și raze de racordare, astfel că se impune un studiu mai sistematic al influenței fiecăruia dintre acești parametri asupra coeficientului de debit (valorile $k = 0{,}17-0{,}20$ și $\mu_c = 0{,}60-0{,}61$ stabilite de Johansen, Hansen, Howland, Wüest, Schaller, Zick sînt valabile numai la diafragme apropiate de cazul ideal); în cazul diafragmelor reale domeniul tranzitoriu are o întindere relativ mare, iar variația coeficientului de debit nu mai este liniară — panta curbelor $\mu = f(\sqrt{Re})$ se micșorează continuu la creșterea numărului Reynolds.

Alte rezultate cu privire la curgerea prin diafragme de diametru mic se găsesc în [25]: influența diametrului și a viscozității lichidului asupra curbelor $\mu = f(Re)$ în domeniul tranzitoriu de curgere.

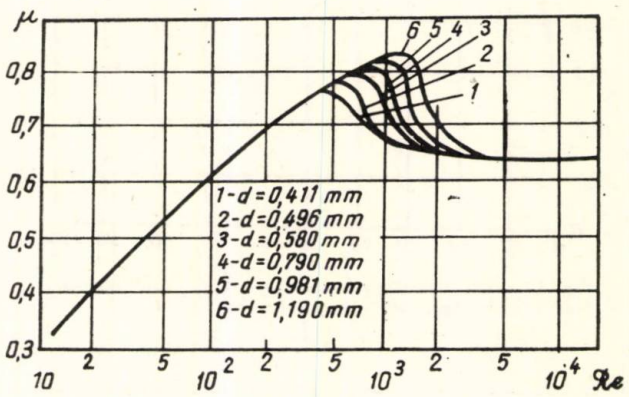


Fig. 9. — Variația coeficientului de debit funcție de nr. Reynolds pentru diferite diametre ale diafragmei [25].

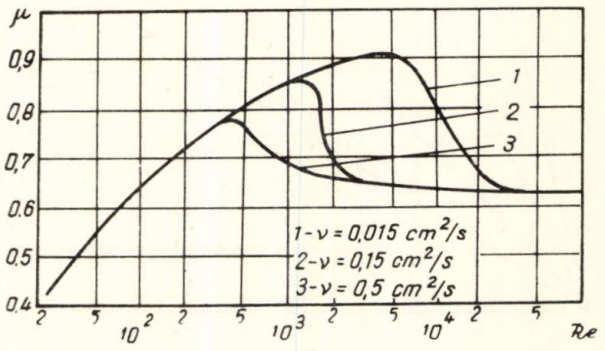


Fig. 10. — Variația coeficientului de debit funcție de nr. Reynolds la curgerea prin diafragme, pentru diferite viscozități ale lichidului [25].

Față de condițiile și rezultatele prezentate mai sus (fig. 7 și 8), se observă următoarele diferențe:

— încercările au fost făcute la diafragme cu diametre apropiate, dar grosimile sînt mult mai mari ($l = 1{,}5\ d$);

— în [27] nu se menționează viscozitatea lichidului folosit, iar în [25] forma muchiei de la intrare;

— supraînălțarea curbelor din figurile 9 și 10 (valorile maxime ale coeficientului de debit) și întinderea domeniului tranzitoriu sînt mult mai mari decît cele din figura 7;

— în ambele cazuri s-a constatat influența diametrului asupra curbelor $\mu = f(\mathcal{R}e)$, dar de la valori foarte diferite ale numărului Reynolds (fig. 7 — pentru $\mathcal{R}e > 25$; fig. 9 — pentru $\mathcal{R}e > 500$);

— succesiunea curbelor din figura 9 este inversă față de cea prezentată în figura 7;

— creșterea coeficientului de debit la micșorarea viscozității lichidului (fig. 10) nu este în concordanță cu raționamentele ce se fac în legătură cu influența pierderilor prin frecare.

Din toate cele arătate rezultă că pentru clarificarea unor probleme cu privire la variația coeficientului de debit în funcție de forma și dimensiunile diafragmei este necesar să se continue cercetările.

3. STUDIUL INFLUENȚEI DIAMETRULUI ȘI LUNGIMII CANALULUI ASUPRA COEFICIENTULUI DE DEBIT ($d \leqslant 1$ mm)

În vederea acestui studiu au fost executate următoarele diafragme:

— $d = 0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}5$; $0{,}8$; $1{,}0$ și grosimea $0{,}4$ mm;

— grosimea: $0{,}05$; $0{,}2$; $0{,}4$; $0{,}6$; $0{,}8$; $1{,}0$ și diametrul $0{,}5$ mm;

— grosimea relativă: $l/d = 1\left(\frac{0{,}2}{0.2}; \frac{0{,}3}{0{,}3}; \frac{0{,}4}{0{,}4}; \frac{0{,}5}{0{,}5}; \frac{0{,}6}{0{,}6}; \frac{0{,}8}{0{,}8}; \frac{1{,}0}{1{,}0}\right)$.

Pentru înlăturarea bavurilor, netezirea suprafețelor, micșorarea erorilor de formă și obținerea unor muchii ascuțite, diafragmele au fost prelucrate foarte îngrijit (calibrarea succesivă a găurilor cu sîrme de oțel și lustruirea suprafețelor frontale cu hîrtie metalografică). Verificarea dimensiunilor și a formei s-a făcut la microscop, pe ambele fețe ale diafragmelor, constatîndu-se următoarele abateri:

— toleranța diametrului și ovalitatea $5-8$ μm;

— raza de rotunjire a muchiilor $2-3$ μm;

— înălțimea maximă a microneregularităților $1-2$ μm.

Condiții de lucru:

— temperatura camerei $25 \pm 1°C$;

— temperatura uleiului a fost menținută la $25 \pm 0{,}2°C$ (măsurarea acesteia s-a făcut în camera de la intrarea în diafragmă, folosind un termometru cu precizia de $0{,}1°C$);

— viscozitatea uleiului folosit $\nu_{25°C} = 1{,}11$ cm^2/s (ulei de turbină Tb 5004);

— presiunea din fața diafragmei a fost variată în limitele $0{,}05 - 40$ kgf/cm^2 (pentru $p < 1{,}5$ kgf/cm^2 — manometru cu coloană de mercur, iar pentru $p = 1{,}5-40$ kgf/cm^2 — manometre metalice din clasa de precizie $0{,}6$);

— măsurarea debitului s-a făcut prin metoda volumetrică și fiecare măsurătoare a fost repetată de $3-6$ ori.

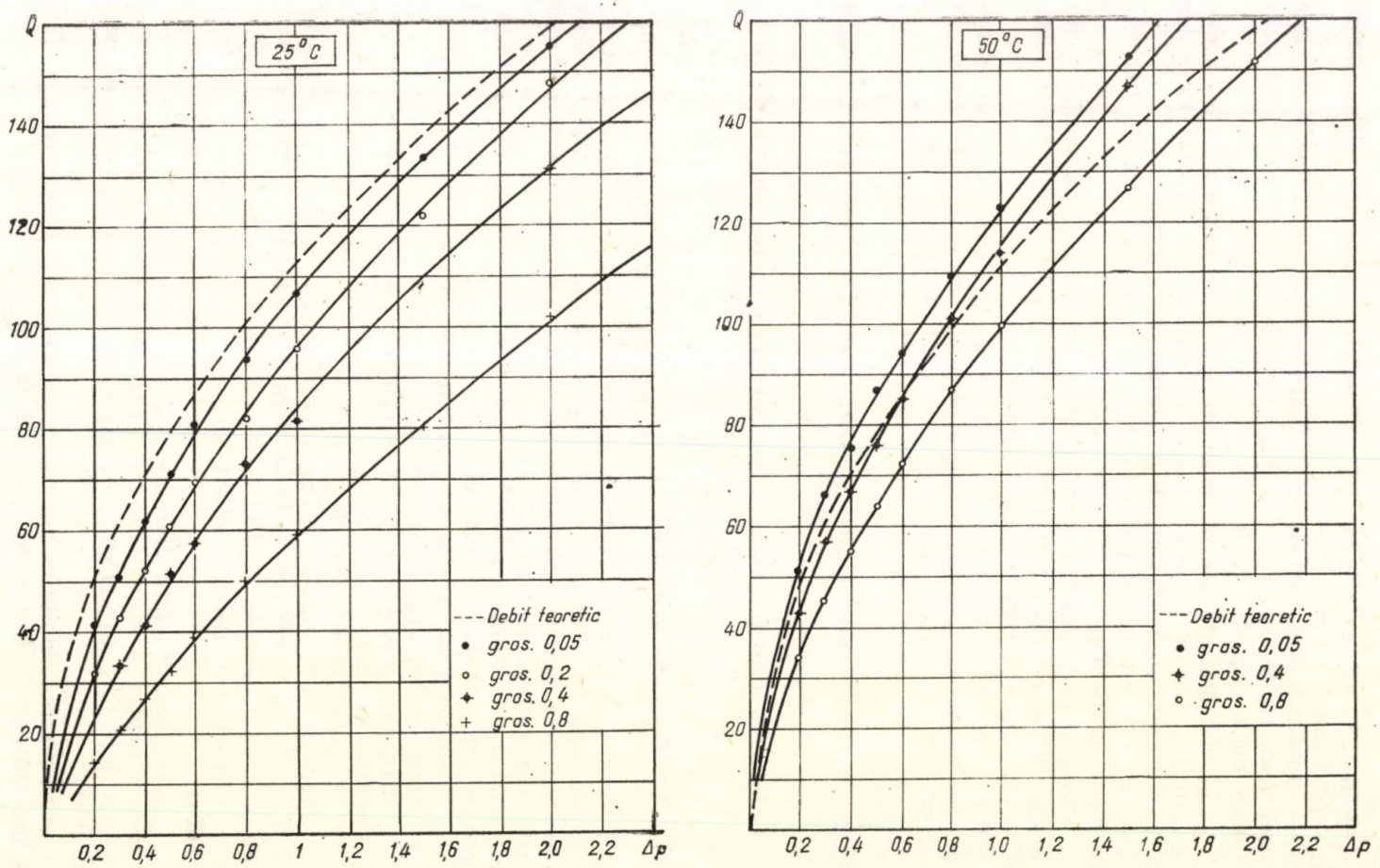


Fig. 11. — Variația debitului cu presiunea ($d = 0{,}5$ mm ; $l = 0{,}05 \ldots 0{,}8$ mm).

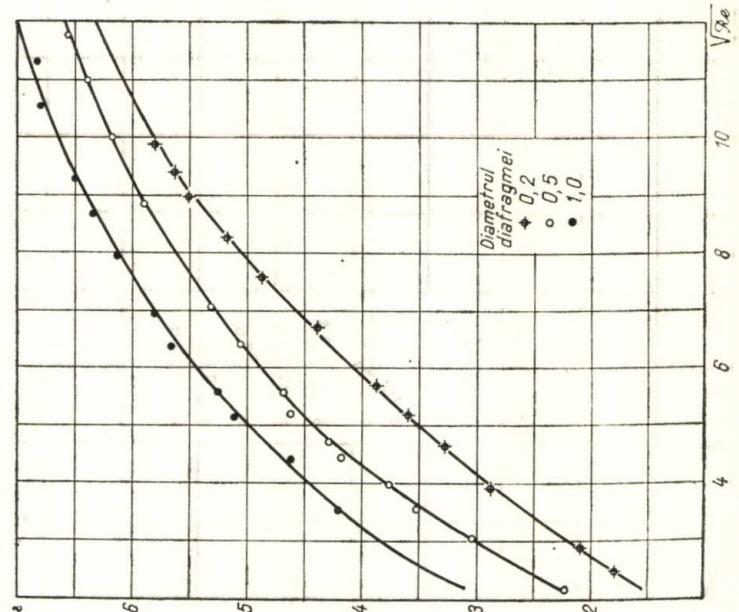


Fig. 13. — Variația coeficientului de debit funcție de numărul Reynolds $l = 0{,}4$ mm ; $d = 0{,}2 \ldots 1{,}0$ mm ; $\nu = 1{,}11$ cm²/s.

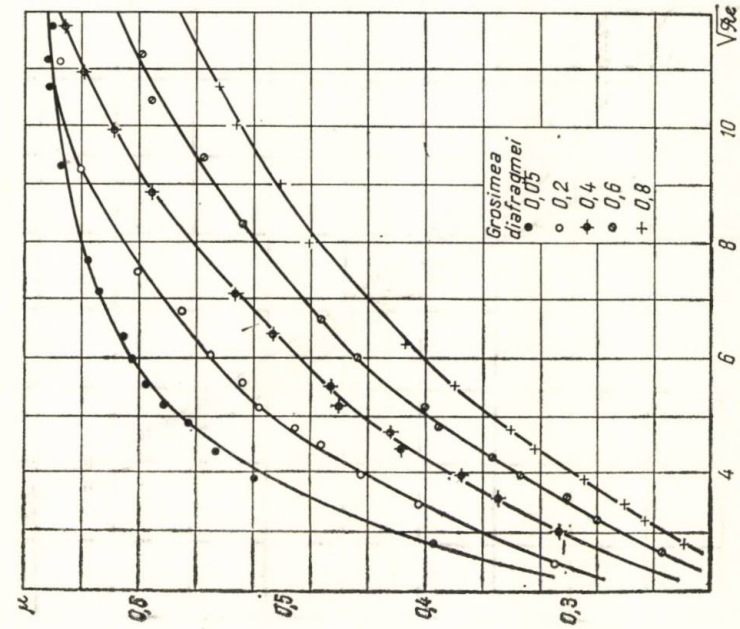


Fig. 12. — Variația coeficientului de debit funcție de numărul Re. $d = 0{,}5$ mm ; $l = 0{,}05 \ldots 0{,}8$ mm ; $\nu = 1{,}11$ cm²/s.

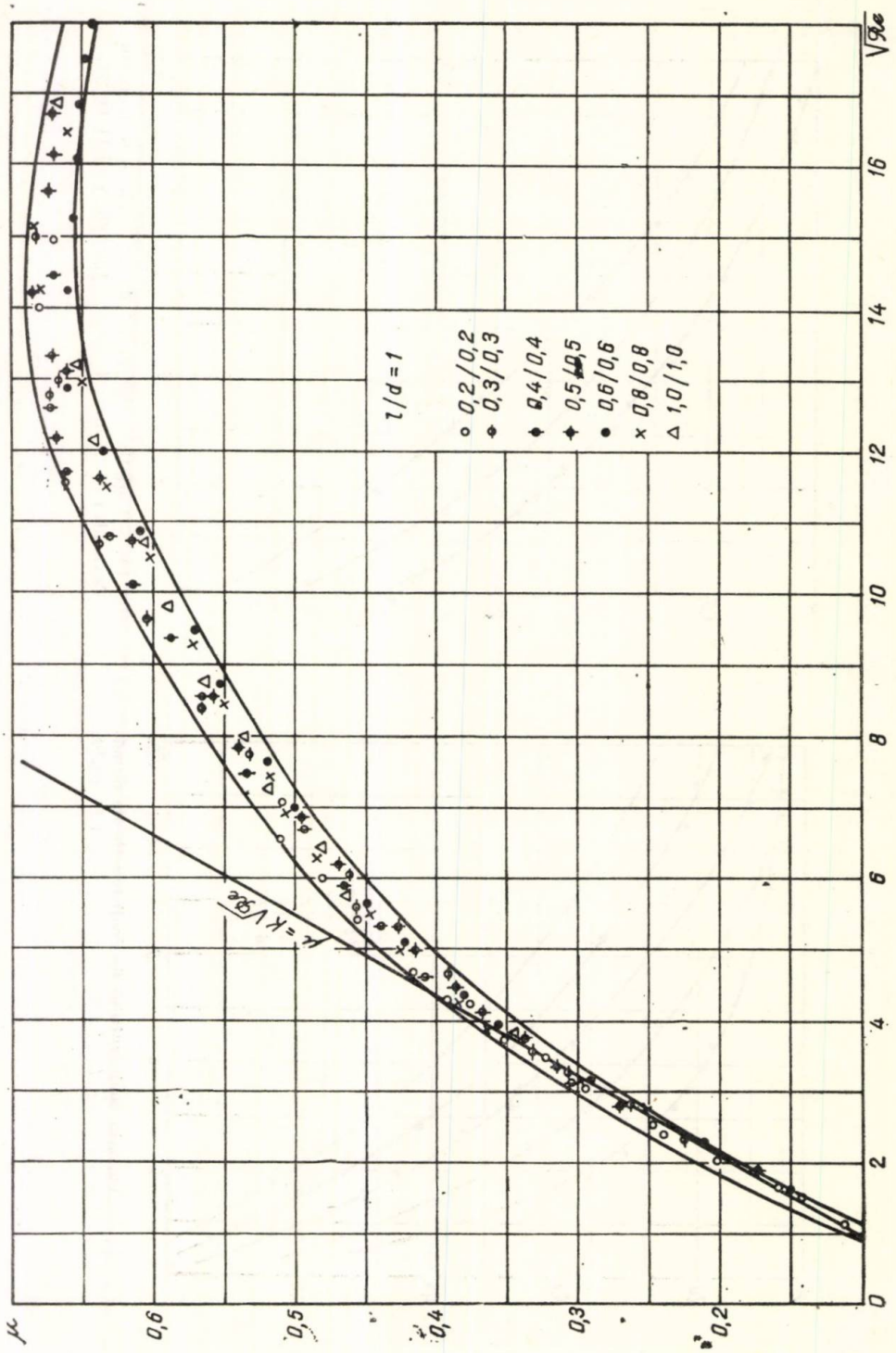


Fig. 14. — Variația coeficientului de debit funcție de numărul Re la aceeași grosime relativă a diafragmei.

Pentru calculul coeficientului de debit s-a folosit relaţia (1), iar numărul Reynolds a fost calculat la diametrul diafragmei şi viteza medie de curgere — $v = 4Q/\pi d^2$. Valoarea de referinţă a coeficientului de debit pentru calculul debitului teoretic s-a considerat 0,65.

Rezultatele obişnuite în urma acestui studiu sînt reprezentate în figurile 11—14.

4. CONCLUZII

4.1. La curgerea prin fante de dimensiuni mari, coeficientul de debit variază în limitele 0,6 — 0,8 şi deci sînt posibile erori de peste 30%.

4.2. La diametre şi presiuni mici, debitul efectiv este mult mai mic decît cel calculat cu relaţia (1) dacă se consideră valorile obişnuite ale coeficientului de debit. Această diferenţă este cu atît mai mare, cu cît diametrul şi presiunea sînt mai mici, iar lungimea canalului şi viscozitatea lichidului sînt mai mari (debite mici : $Q \sim 10^1 - 10^0$).

4.3. Pentru menţinerea relaţiei (1) şi în domeniul fantelor mici, la care pierderile prin frecare vîscoasă pot fi preponderente, este necesar să se facă o corecţie importantă a coeficientului de debit (fig. 12, 13, 14).

4.4. Felul variaţiei coeficientului de debit în funcţie de numărul Reynolds corespunde cu cele arătate în figura 1, dar la diametre mici supraînălţarea curbelor este neglijabilă (fig. 14).

4.5. Coeficientul de debit este funcţie de lungimea canalului şi diametrul diafragmei (fig. 12, 13), problemă ce nu este clarificată în lucrările consultate [3], [17], [25], [27].

4.6. Ordonarea curbelor $\mu = f(\mathcal{R}e)$ după mărimea diametrului (fig. 13) este inversă faţă de cea prezentată în [27] (fig. 7).

4.7. Domeniul de valabilitate al relaţiei $\mu = k\sqrt{\mathcal{R}e}$ este mult mai restrîns decît cel arătat în figura 8. Valoarea critică a numărului Reynolds care delimitează acest domeniu se măreşte odată cu creşterea grosimii şi micşorarea diametrului diafragmei.

4.8. În domeniul tranzitoriu panta curbelor $\mu = f(\sqrt{\mathcal{R}e})$ se micşorează odată cu intensificarea curgerii datorită contracţiei jetului de lichid.

4.9. La lungimi relativ mici ale canalului de curgere ($l/d < 1$) s-au obţinut $(\mathcal{R}e)_{max} = 100 - 250$ şi $\mu_{max} = 0{,}67 - 0{,}69$, valori ce sînt mult diferite faţă de cele prezentate în lucrarea [25] pentru lichide cu viscozitate mai mică şi $l/d = 1{,}5$. Rezultă că este necesar să se ia în discuţie, pe lîngă parametrii geometrici ai fantelor, şi viscozitatea lichidului — la micşorarea acesteia poziţia punctului de maxim se deplasează spre dreapta, iar valoarea maximă a coeficientului de debit creşte peste 0,9.

4.10. La diafragme cu lungimea relativă a canalului constantă ($l/d = 1$), coeficientul de debit nu variază cu diametrul (fig. 14).

4.11. La curgerea prin fante mici, coeficientul de debit este funcţie de diametru şi viscozitatea lichidului, deci nu există similitudine după criteriul Reynolds. Studiul variaţiei acestui coeficient trebuie făcut parametric.

Primită la redacţie la 26 martie 1971

BIBLIOTECA CENTRALĂ MOSZA 1848

BIBLIOGRAFIE

1. A. Acél, *Ölhydraulische Drosselungen bei Steuerungen und Regelungen von Werkzeugmaschinen*, Techniche Rundchau *39*, **15**, 9 (1961).
2. N. S. Acerkan și colab., *Metallorejuşcie stanki*, Moskva, Maşinostroenie, 1965.
3. A. D. Altşuli și P. G. Kiselev, *Ghidravlika i aerodinamika*, Moskva, Stroiizdat, 1965.
4. A. D. Altşuli, *Mestnie ghidravliceskie soprotivlenia pri dvijenii viazkih jidkostei*, Moskva, Gostoptehizdat, 1962.
5. T. M. Başta, *Maşinostroitelnaia ghidravlika*, Moskva, Maşghiz, 1962.
6. J. F. Blackburn și colab., *Ghidravliceskie i pnevmaticeskie silovie sistemî upravlenia*, Moskva, Iz-svo inostranoi literaturî, 1962.
7. E. Botez, *Acționarea hidraulică a mașinilor-unelte*, București, Edit. tehnică, 1955.
8. P. P. Ciugaev, *Ghidravlika*, Moskva-Leningrad, Geizdat, 1963.
9. I. Diaconescu și colab., *Mașini-unelte*, vol. II, București, E.T.T., 1959.
10. F. Falley, *Drosselregelungen in Ölhydraulischen Antriebe*, Oelhydraulik und pneumatik, *4*, *9* (1960).
11. D. Germani, *Hidraulica teoretică și aplicată*, București, 1945.
12. A. Giulea și C. Olariu, *Măsurarea debitelor cu ajutorul diafragmei*, București, Edit. tehnică, 1956.
13. L. Gross, *Bestimmung der Durchflus beiwerte verschiedener Drosselelemente, besonders bei kleinen Druckunterschieden*, Ölhydraulik und Pneumatik, *1* (1968).
14. P. Hess și H. Kupp, *Regelung Kleiner Ölströme*, Oelhydraulik und Pneumatik, **8**, *1* (1964).
15. V. A. Hohlov, *Elektroghidravliceskii slediascii privod*, Nauka, Noskva, 1964.
16. I. N. Kicin, *Nekotorîe metodî stabilizații i regulirovania malîh rashodov rabocei jidkosti v sistemah ghidroavtomatiki*, Atvomatika i telemehanika, **18**, *8* (1957).
17. P. P. Kremlevskii, *Rashodometrî*, Moskva-Leningrad, Maşghiz, 1963.
18. G. Lamb, *Ghidrodinamica*, Moskva—Leningrad, Gostehizdat, 1947.
19. F. Lämmle, Hidrantische Vorschubstenerungen an Werkzengmaşchinen. Industrie, Anzeiger, **20**, *77* (1961).
20. C. Mateescu, *Hidraulica*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1963.
21. G. A. Nikitin, *O nekotorîh osobenostiah tecenia jidkosti cerez zazorî mikronnîh razmerov*, In sbornik : Ghidroprivod i ghidroavtomatika v maşinostroenie. Moskva, Maşinostroenie, 1966.
22. A. Oprean și colab., *Sistemele hidrostatice ale mașinilor-unelte și preselor*, București, Edit. tehnică, 1965.
23. E. Z. Rabinovici, *Ghidravlika*, Moskva, Gosfizmatizdat, 1963.
24. N. S. Tamînin, *Osnovî sledișcevo ghidravliceskovo privoda*, Moskva, Oboronghiz, 1962.
25. V. V. Vakina, *Istecenie viazkih jidkostei pri vîsokih perepadah davlenia cerez drosselnîh șarbî*.
26. I. Z. Zaicenko și N. V. Vasiliev, *Issledovanie i rasciot novîh konstrukții drosselei*, Stanki i instrument, *7* (1960).
27. J. Zick, *Untersuchungen an Regelblenden sehr kleiner Öffnung* (I). Ölhydraulik und Pneumatik **10**, *5* (1966).

RECENZII

R. J. KNOPS, L. E. PAYNE, *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity* (*Teoreme de unicitate în elasticitatea lineară*), Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1971, IX+130 p., 36 DM.

Unicitatea soluției unei probleme de fizică matematică în general prezintă un interes deosebit, nu numai din punct de vedere strict matematic, ci și aplicativ, deși acest de-al doilea aspect este uneori trecut cu vederea. În teoria elasticității lineare, ale cărei multiple aplicații tehnice nu mai este necesar să le amintim, astfel de preocupări există de peste un secol, iar atenția acordată în special în ultimele două decenii problemelor de unicitate a soluțiilor a făcut ca în prezent situația să fie bine clarificată.

Autorii acestui volum, publicat în colecția „Springer Tracts in Natural Philosophy", au colectat rezultatele existente urmînd, într-o primă clasificare, criteriul istoric. A rezultat astfel o expunere concisă, dar foarte sistematică și deosebit de clară care se urmărește cu ușurință.

Capitolul introductiv precizează obiectivul urmărit, materialul expus în continuare referindu-se numai la problemele bi- sau tridimensionale ale elasticității lineare care au un caracter general, excluzîndu-se deci probleme mai specializate, ca torsiunea și încovoierea grinzilor, deformația plăcilor și învelitorilor și altele. Atenția autorilor se concentrează asupra elasticității lineare a corpurilor anizotrope și neomogene, unicitatea fiind examinată atît pentru soluțiile clasice, cît și pentru cele slabe. Prin particularizări, se ajunge apoi la corpurile omogene cu diferite grade de simetrie și apoi la cazul izotropic. În introducere mai sînt indicate și cîteva probleme încă nerezolvate.

Capitolul al doilea cuprinde o prezentare a ecuațiilor fundamentale, cu formularea problemelor de valori inițiale și la limită, precum și definirea soluțiilor clasice, respectiv slabe.

În capitolul al treilea sînt prezentate cercetările mai vechi asupra unicității soluțiilor, efectuate în prima perioadă, pe care autorii o extind de la anii care au precedat apariția teoremei clasice a lui Kirchhoff, în 1859, pînă în jurul anului 1910. O atenție specială este acordată rezultatelor obținute de frații Cosserat, care constituie contribuția majoră a perioadei examinate.

Expunerea lucrărilor moderne începe în capitolul al patrulea, în care se tratează unicitatea soluțiilor clasice și slabe pentru diverse tipuri de probleme la limită, în cazul materialelor elastice anizotrope sau izotrope, neomogene sau omogene, aflate în echilibru.

Capitolul al cincilea cuprinde teoremele de unicitate în elastostatica bidimensională a materialelor omogene și izotrope, cu mențiuni și asupra soluțiilor problemelor tridimensionale cu simetrie axială.

În capitolul al șaselea sînt expuse rezultatele cu privire la unicitatea soluțiilor pentru problemele referitoare la întregul plan sau la semiplan.

Capitolul următor, al șaptelea, cuprinde o serie de probleme cu un caracter mai special (probleme pentru o sferă, problema lui Cauchy pentru elastostatica materialelor izotrope, problema lui Signorini).

În ultimul capitol, al optulea, sînt tratate teoremele de unicitate în elastodinamică, în partea finală examinîndu-se şi relaţiile dintre noţiunile de unicitate, mărginire, stabilitate şi existenţă a soluţiilor.

Pentru demonstrarea teoremelor de unicitate, cele mai frecvent utilizate metode se bazează pe argumente energetice, deşi există şi alte posibilităţi. În lucrare se dă cîte o singură demonstraţie, celelalte urmînd a fi găsite în bibliografie. Unele demonstraţii, ca şi anumite rezultate, aparţin dealtfel. autorilor.

Referinţele bibliografice sînt numeroase şi, fără a avea un caracter exhaustiv, nu omit nici una dintre lucrările cu adevărat importante.

Ideea de a colecta într-o lucrare de volum restrîns toate rezultatele principale legate de unicitatea soluţiilor în elasticitatea lineară, cu restricţiile amintite mai înainte, este interesantă şi se dovedeşte deosebit de utilă, datorită calităţilor pe care le-am semnalat.

Lucrarea se adresează în primul rînd specialiştilor din domeniul elasticităţii, dar poate oferi sugestii valoroase şi celor care se ocupă cu alte ramuri ale mecanicii mediilor continue deformabile.

T. Oroveanu

M. S. TROITSKY, *Orthotropic Bridges. Theory and Design.* (*Poduri ortotrope. Teorie şi proiectare*). Cleveland, Ohio The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 2nd Printing 1968, 256 p.

Teoria plăcilor ortotrope pentru proiectarea şi construcţia podurilor s-a dezvoltat întîi în Europa, după cel de-al doilea război mondial, ca urmare a lipsei de materiale. În comparaţie cu alte sisteme de construcţie, acesta se dovedeşte mult mai economic, datorită în mare măsură şi aplicării sudurii. Din Europa sistemul a trecut şi în America de Nord, găsindu-şi o largă răspîndire.

Cartea de faţă, prima de acest gen în limba engleză, prezintă o discuţie amplă a teoriei şi a aplicaţiilor sale inginereşti.

La baza ei stau o serie de prelegeri ţinute de autor la Şcoala politehnică din Montreal, între anii 1960 şi 1962; textul acestor prelegeri, adus la zi şi completat, reprezintă volumul de faţă.

Cartea cuprinde o listă de notaţii şi definiţii, 17 capitole, trei anexe, bibliografie şi un index de autori.

Capitolul 1 cuprinde o scurtă descriere a evoluţiei platelajelor metalice.

În *capitolul 2* se descrie sistemul ortotrop din punct de vedere constructiv (concepţia de bază, detalii, comparaţie între diferite tipuri de platelaje, îmbinări, calea, protecţia contra coroziunii, uzinare, calitate de oţel, încercări la oboseală, sudarea nervurilor, tehnologia de sudare, subansamble, grinzile principale, control, montaj, avantaje structurale şi economice).

Capitolul 3 conţine o descriere de poduri ortotrope, bogat ilustrată cu fotografii şi schiţe.

Capitolele 4—12 tratează aspectele teoretice: teoria plăcilor ortotrope, calculul spaţial al podului, calculul plăcii, metode pentru calculul plăcilor ortotrope, metoda simplificată Pelikan-Esslinger, placa cu nervuri simple pe reazeme rigide şi elastice, precum şi placa cu nervuri casetate pe reazeme rigide şi elastice.

În *capitolul 13* se examinează conlucrarea platelajului cu restul podului.

Capitolul 14 cuprinde calculul optim al platelajului.

În *capitolul 15* se dau criterii de proiectare cuprinzînd convoaiele, presiunea pe roată, rezistențele admisibile și săgeți.

Capitolele 16 și 17 conțin două exemple de calcul.

Anexa A cuprinde 7 tabele cu poduri ortotrope de diferite tipuri.

Anexa B cuprinde 4 diagrame auxiliare (lățimea activă de placă, distribuția încărcării, distanța ideală între nervurile elastice, linii de influență pentru grinda continuă).

Anexa C cuprinde trei tabele cu ordonate de linii de influență.

Bibliografia este dată pe capitole și cuprinde 154 de referințe.

Lucrarea prezintă o valoare și un interes deosebit prin calitățile sale de analiză și de sinteză, prin claritatea expunerii și prin bogăția materialului ilustrativ; ea se adresează tuturor specialiștilor în poduri, studenților de la facultățile de poduri, precum și tuturor celorlalți specialiști care ar putea prelua și aplica acest nou sistem constructiv în domeniile lor.

Mircea V. Soare

M. SH. MIKELADZE, *Introducere în teoria tehnică a plăcilor curbe subțiri perfect plastice*, Tbilisi, Izd. Meținereba, 1969, 46 fig., 182 p.

Capitolul întîi, ,,Relații de bază ale teoriei plăcilor curbe subțiri plastice'', are un caracter introductiv. El conține noțiuni de geometrie diferențială a suprafețelor în coordonate curbilinii ortogonale, componentele deformațiilor în suprafața mediană și la o cotă z, mărimile secționale și ecuațiile de echilibru, condiții la limită și starea de eforturi plană în teoria plasticității.

Capitolul 2, ,,O teorie de încovoiere simplificată pentru plăcile cilindrice'', începe prin a examina plasticizarea plăcii pe grosimea ei ținînd seama de ortotropia de material. Se obține o reprezentare parametrică a condiției de plasticitate și o reprezentare liniară aproximativă. În continuare este studiată încovoierea plăcii cilindrice în ipoteza simplificatoare (de tip Finsterwalder) că momentele de torsiune și momentul încovoietor longitudinal sînt neglijați. Problema se simplifică considerabil și revine la a găsi o lege de variație a grosimii plăcii, astfel încît placa să se plastifice în întregime sub acțiunea forțelor date.

Capitolul 3, ,,Plăci sandwich ideale'', tratează plăcile compuse din două straturi subțiri separate printr-un miez ușor.

Capitolul 4, ,,Teoria plăcilor curbe subțiri pleoștite'', introduce ipoteza că materialul plăcii este rigid-plastic și satisface condiția de plasticitate a lui Hill; în plus se postulează că întreaga secțiune transversală a plăcii se plastifică simultan.

Studiul este simplificat prin reducerea la găsirea succesivă a două probleme: problema plană a plasticității și problema echilibrului la limită a unei plăci plane în anumite condiții.

Capitolul 5 tratează despre ,,principiile calculului optim al plăcilor curbe subțiri plastice''. Sînt indicate două metode distincte de abordare a problemei.

Capitolul 6, ,,Teoria plăcilor curbe subțiri fragil-plastice'', introduce ipoteza că materialul are două limite de curgere diferite: la întindere și la compresiune.

Ecuațiile sînt stabilite pentru baraje, ziduri de sprijin, plăci ondulate, iar pentru obținerea soluțiilor este indicată rezolvarea prin aproximații succesive.

Bine documentată și redactată clar și cu finețea unui cercetător experimentat, cartea reprezintă în mare măsură o sinteză a lucrărilor autorului apărute în publicațiile Academiei de științe din U.R.S.S. sau din R. S. S. Gruzină, sau comunicate la diferite congrese internaționale. Ea se adresează tuturor celor ce se preocupă de probleme de teoria plasticității și de plăci curbe subțiri.

Mircea V. Soare

ALFRED MEHMEL, WOLFGANG KRUSE, SABRI SAMAAN, HEINZ SCHWARZ, *Schnittkrafttafeln für den Entwurf kreiszylindrischer Tonnenkettendächer* (*Tabele de eforturi pentru proiectarea plăcilor subțiri cilindrice circulare multiple*), Berlin Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 216, 1971, 162 p.

Statica plăcilor curbe subțiri cilindrice circulare este extrem de complicată, datorită faptului că necesită obținerea soluției unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul opt. Sînt cunoscute numeroase soluții aproximative, variind de la unele care implică simplificări drastice pînă la altele de același ordin de complexitate cu soluția exactă.

Apariția calculatoarelor electronice a permis elaborarea unor tabele de valori numerice (de exemplu cele ale lui Gibson, Parme, Manualul ASCE etc.). Toate aceste lucrări au însă un domeniu limitat de valabilitate, constatare care a făcut pe autorii de față să caute noi soluții, constînd din diagrame și tabele.

Cartea conține o succintă prezentare a datelor de bază și o detaliere a diagramelor și tabelelor cuprinse.

Următorii parametri au fost luați în considerare:

$$\text{a)}\ \frac{\text{deschidere de boltă}}{\text{grosimea plăcii}} = 100;\ 150;\ 200;$$

$$\text{b)}\ \frac{\text{deschidere de boltă}}{\text{lungimea generatoarelor}} = 0{,}20 \ldots 1{,}80$$

$$\text{c)}\ \frac{\text{săgeata de boltă}}{\text{deschidere de boltă}} = 0{,}12 \ldots 0{,}24.$$

Sînt studiate atît plăcile marginale, cît și cele interioare. Sarcinile sînt atît cele de suprafață, cît și liniare (la dolii). Efectul precomprimării este considerat pentru un traseu parabolic al cablurilor.

În cazul betonului armat, este necesară și cunoașterea rezultantei eforturilor de întindere într-o secțiune transversală, pentru determinarea cantității de armătură.

În încheierea textului sînt date indicații privind evaluarea sarcinii critice de voalare și un număr mare de exemple de calcul (inclusiv armarea plăcii).

Lucrarea constituie un auxiliar deosebit de util pus la îndemîna proiectanților de plăci subțiri cilindrice circulare.

Mircea V. Soare

VLADIMIR CILINGHIR

CONSIDERAȚII VARIAȚIONALE ASUPRA PIERDERILOR DE ENERGIE ÎN MIȘCAREA HARTMANN

Se studiază mișcarea plană, permanentă, a unui fluid electroconductor în prezența unui cîmp magnetic transversal.
Pe o cale variațională se arată că repartiția vitezei după un cosinus hiperbolic corespunde unui minimum al pierderilor totale de energie. Pierderile de energie, care, prin efect electrocaloric datorită curentului electric de conducție și prin frecare datorită viscozității, se transformă în căldură, însumate sînt mai mari decît pierderile corespunzătoare mișcării fără cîmp magnetic.
Raportul acestor pierderi de energie variază funcție numai de numărul lui Hartmann între limitele 0 și 1.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 729—739
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. SETEANU

CURGEREA TURBULENTĂ ÎNTR-O CONDUCTĂ CIRCULARĂ NETEDĂ

În lucrare se prezintă un procedeu de determinare a pulsațiilor vitezei lichidului în curgere turbulentă într-o conductă circulară netedă cu gradient de presiune. Pentru a obține expresia analitică a amplitudinilor pulsațiilor vitezei se admite existența unor pulsații aleatorii ale densității lichidului, de mică amplitudine și cu valoare medie în timp nulă. În afara substratului-limită laminar se folosește aproximația fluidului nevîscos turbulent. Se integrează apoi ecuațiile lui Reynolds și se obține viteza medie de curgere care se compară cu datele experimentale.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 741—751
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

FLORENTIN MORARU

ASUPRA ECUAȚIILOR MIȘCĂRII GENERALE A RACHETEI ÎN MEDIU REZISTENT

În lucrare se elaborează un sistem complet de ecuații pentru determinarea mișcării generale a rachetei, cu șase grade de libertate, pe traiectorii oarecare, în atmosfera neperturbată, fără a mai face apel la ipotezele și simplificările adoptate în mod curent. Este tratat cazul rachetei balistice, simetrică în principiu în raport cu axa longitudinală, putînd avea o rotație proprie în jurul acestei axe. Se ține cont de întregul ansamblu al forțelor și cuplurilor ce acționează asupra rachetei, de fenomenul de basculare și de deviațiile laterale de la părăsirea lansatorului. De asemenea, se iau în considerație disimetriile aerodinamice și gazodinamice ale rachetei. Sistemul ecuațiilor astfel obținute este redus la forma canonică de ordinul I în vederea integrării cu ajutorul calculatoarelor electronice. În cazul zborului cu incidențe mici, ecuațiile sînt simplificate și aduse la o formă convenabilă integrării pe arce scurte de traiectorie.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 753—779
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

S. LARIONESCU

EVALUAREA PERICOLULUI DE AVARIE A SISTEMELOR MECANICE SUPUSE LA VIBRAȚII ALEATORII

Avariile sistemelor mecanice pot apare în mod brusc sau într-o perioadă de timp mai îndelungată. În lucrare sînt analizate avariile de-al doilea tip, provocate de vibrațiile aleatorii cu banda de frecvențe îngustă. La început se stabilește o scară ierarhică a pericolului de avarie funcțională, iar după aceea se calculează timpul de apariție al unei avarii prin oboseală. Se iau în considerație efectele vibrațiilor aleatorii cu un spectru larg de frecvențe, ca și efectul suprapunerii peste vibrațiile aleatorii cu banda îngustă de frecvențe a unui număr finit de componente armonice. În sfîrșit, se prezintă modul în care pot fi estimate caracteristicile necesare ale vibrațiilor aleatorii cu ajutorul aparaturii obișnuite pentru măsurarea vibrațiilor sinusoidale.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 781—807
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MIRCEA GRIGORIU

STUDIUL VIBRAȚIILOR GRINZILOR CU ZĂBRELE CU CONFIGURAȚIE OARECARE LA ACȚIUNEA UNOR FORȚE VARIABILE ÎN TIMP ÎN DOMENIUL ELASTOPLASTIC

Lucrarea tratează problema vibrațiilor grinzilor cu zăbrele solicitate la încărcări variabile în timp. Se formulează problema propusă într-un cadru general și apoi se indică modul de rezolvare pentru cazul unor solicitări, care conduc la depășirea stadiului elastic de lucru al structurii.
Prin restricționarea cazului general prezentat se ajunge la formularea binecunoscutei probleme a modurilor proprii.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 809—821
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MAGDALENA POSEA

CALCULUL ÎMBINĂRILOR PRIN FLANȘE LA ÎNCĂRCĂRI NESIMETRICE PRIN UTILIZAREA ELEMENTELOR FINITE

În lucrare se prezintă un procedeu nou de calcul al îmbinărilor prin flanșe pentru cazul nesimetriei încărcărilor datorate forțelor din șuruburi.
Părțile componente ale flanșei, gîtul și talerul acesteia, se descompun în elemente finite. Din studiul echilibrului fiecărui element finit și al fiecărui nod de legătură dintre elementele finite considerate, se ajunge la un sistem de ecuații algebrice a cărui soluție constituie deplasările și rotirile tuturor secțiunilor de separație dintre elementele finite. În funcție de aceste deformații, se dau relațiile necesare pentru calculul eforturilor în orice secțiune a flanșei.
Se precizează că metoda propusă ia concomitent în considerație deformabilitatea tuturor elementelor îmbinării, inclusiv șuruburile și garnitura.
Algoritmul obținut este simplu, cu operații ciclice și ușor de programat la un calculator automat.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 823—850
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. UNGUREANU

CALCULUL UNOR PLĂCI REZEMATE PE PILOȚI

Se prezintă calculul unor plăci rezemate pe piloți, considerînd piloții reazeme elastice. Modelul matematic propus pentru rezolvarea problemei implică corectarea ecuației diferențiale a lui Lagrange, cu termeni care iau în considerație încastrarea piloților în placă. Cu ajutorul funcțiilor ortogonale, se obțin soluții pentru cîteva cazuri practice de încărcare și rezemare pe contur.
Folosind metoda diferențelor finite se extinde rezolvarea problemei și la cazuri mai generale, îndeosebi prin utilizarea calculatoarelor electronice.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 851—864
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. I. MANOLESCU, GH. C. POPA

SINTEZA ANALITICĂ TRIPOZIȚIONALĂ PE BAZA CURBELOR r_c

Lucrarea folosește rezultatele obținute de autori în alte articole publicate anterior. Autorii stabilesc formele cele mai convenabile pentru sinteză ale ecuației curbei r_c la mecanismul patrulater, manivelă-piston etc.
În continuare sînt prezentate aplicații ale curbelor r_c la sinteza analitică tripoziționlă a conturului patrulater, fără folosirea triunghiului polilor.
Rezultatele obținute sînt exemplificate prin rezolvări numerice. În final este prezentată o metodă de sinteză de asemenea principial nouă, sinteza tripoziționlă cu „mecanism ajutător".

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 865—885
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. MUNTEANU

UN MODEL MATEMATIC AL SEPARĂRII GRANULOMETRICE PE SITELE VIBRATOARE

În prima parte a lucrării s-a determinat inițial o ecuație integrodiferențială ce descrie fenomenul separării de-a lungul sitei, considerînd cazul unei distribuții granulometrice omogene după înălțime a stratului de material.
Soluțiile acestei ecuații reprezintă ecuațiile curbelor de separare de-a lungul sitei, corespunzătoare claselor de granulație în care se divizează gama dimensională a granulelor materialului de cernut.
Partea a doua cuprinde rezultatele determinărilor experimentale efectuate la Uzinele sodice Ocna-Mureș, precum și verificarea rezultatelor teoretice pentru acest caz particular.
Pentru determinarea experimentală a punctelor curbelor de separare și a curbelor de concentrație s-a aplicat metoda statistică a sondajului simplu repetat, caracteristica studiată fiind curba de distribuție granulometrică de-a lungul sitei.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 887—915
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. SIMIONESCU, C. DUCA, O. MUNTEANU, C. DRĂGAN

STUDIUL PARAMETRILOR CINEMATICI AI MECANISMELOR PLANE CU AJUTORUL UNUI TRADUCTOR MECANOELECTRIC ORTOGONAL

Se prezintă un traductor mecanoelectric ortogonal pentru cercetarea mișcării diferitelor puncte ale unui mecanism plan.
Partea mecanică se compune dintr-o diadă de aspectul 5 cu ghidaje perpendiculare, materializînd cele două axe de coordonate.
Cu ajutorul unor traductoare rezistive se obțin traiectoriile punctelor hodografele vitezelor și ale accelerațiilor, obținîndu-se cu ajutorul a două traductoare inductive de tip rotativ.
Semnalul obținut se înscrie direct pe ecranul osciloscopului catodic pentru viteze și prin derivare electrică pentru accelerații. Erorile măsurătorilor nu depășesc limitele admisibile.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 917—925
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

D. RAȘEEV, D. CONSTANTINESCU

UNELE ASPECTE PRIVIND UZURA SAPELOR CU INSERȚII DIN ALIAJE DURE SINTERIZATE

Se studiază dinamica uzurii aliajelor dure sinterizate, utilizate în construcția sapelor de foraj cu tăiș fix. Se stabilește influența factorilor funcționali specifici tehnologiei curente de foraj : apăsarea pe sapă, viteza și caracteristicile fluidului de circulație asupra rezistenței la uzură a inserțiilor din aliaje dure. Se trag concluzii privind tipurile de uzură, se stabilesc și se discută legitățile acestora și se determină relații de calcul ce descriu, cu suficientă precizie, fenomenele studiate.
Cercetările efectuate vor contribui la dimensionarea corectă a sapelor cu tăiș fix, precum și la utilizarea lor rațională, ceea ce deschide noi perspective în foraj.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 927—953
Redația: București, str. Const. Mille nr. 15

GH. ZGURĂ

CONSIDERAȚII TEORETICE PRIVIND AMBUTISAREA ADÎNCĂ A PIESELOR CILINDRICE

Lucrarea constituie un studiu teoretic asupra comportării la deformare a tablelor subțiri supuse prelucrării prin ambutisare în matrițe conice. Se studiază starea de eforturi unitare, pe baza căreia se apreciază posibilitățile de creștere a gradului de deformare.
Concluziile acestui studiu folosesc deopotrivă cercetătorilor din domeniul prelucrării prin deformare, precum și proiectanților de matrițe și procese tehnologice.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 955—960
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

V. TABĂRĂ, H. VERTAN

CONSIDERAȚII ASUPRA UNOR FUNCȚII ORIGINAL CARE PERMIT UTILIZAREA CALCULATOARELOR ÎN CONTROLUL AUTOMAT AL PIESELOR FILETATE

Lucrarea elaborată se referă la studiul teoretic al conturului secțiunilor transversale și axiale prin piese prevăzute cu canale elicoidale sau spirale (șuruburi, țevi ghintuite, plăci cu canale spirale etc.). Relațiile stabilite au scopul să asigure baza teoretică pentru automatizarea operației de control și pentru ridicarea preciziei de măsurare.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 961–968
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ȘTEFAN ISPAS

PERSPECTIVE ȘI PREOCUPĂRI ÎN CONSTRUCȚIA DE AVIOANE MODERNE

Se analizează sub diverse aspecte tendințele de dezvoltare a avioanelor moderne, cu evidențierea preocupărilor științifice și soluțiile tehnice adoptate pentru satisfacerea cerințelor impuse aviației militare. Se prezintă în continuare unele considerații economice privind organizarea cercetării, proiectării și fabricației acestor categorii de avioane.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 969—988
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

DAN COȘA

UTILIZAREA ARBORELUI ELASTIC ÎN CALCULUL STRUCTURILOR DIN BARE

În lucrare autorul examinează posibilitatea analizării complete a calculului static al structurilor elastice de bare, urmărind adaptarea metodelor clasice de calcul în sensul posibilității de folosire maximă a calculatoarelor numerice.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 989—1000
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

C. MITOȘERIU

STUDIU ASUPRA CURGERII LICHIDELOR VÎSCOASE PRIN FANTE MICI

În lucrare se discută valorile și curbele de variație ale coeficientului de debit în funcție de diferiți parametri: forma și dimensiunile fantei, viscozitatea lichidului, viteza de curgere. Se prezintă curbele $\mu = f(\mathcal{R}e)$ la curgerea prin orificii circulare avînd diametrul $d < 1$ mm.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 4, 1972, p. 1001—1018
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

GH. VASILIEV, **Torsiunea structurilor elastice cu pereți subțiri**, 1970, 240 p., 11,50 lei.
I. S. GHEORGHIU, AL. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice, vol. II**: Transformatoare electrice, 1970, 464 p., 30 lei.
AL. MARINESCU, **Metode, aparate și instalații de măsură în aeromecanică**, 1970, 356 p., 24,50 lei.
AL. VAICUM, **Fundații încastrate**, 1970, 303 p., 21,50 lei.
LUIGI DOBRESCU, **Fenomene de suprafață la metale și aliaje**, 1970, 444 p., 29 lei.
M. GR. NĂSTASE, **Bazele defectoscopiei radiologice**, 1970, 260 p., 14 lei.
C. HAIDUC, **Optimizarea parametrilor centralelor nucleare-electrice**, 1970, 323 p., 17,50 lei.
C. PUPĂZAN, **Acustica în construcții**, 1970, 262 p., 13 lei.
EUG. DIMITRIU-VÂLCEA, **Termotehnica în construcții**, 1970, 284 p., 15 lei.
I. S. GHEORGHIU, AL. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice, vol. III. Mașini asincrone**, 1971, 534 p., 33 lei.
EDMOND NICOLAU, **Sinteza sistemelor radiante**, 1971, 376 p., 22 lei.
C. I. PENESCU, **Sisteme de protecție de distanță**, 1971, 624 p., 41 lei.
ENE MARIN, **Metoda mărimilor determinante**, 1971, 228 p., 13 lei.
GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria matematicilor aplicate clasice din România, mecanică și astronomie**, 1971, 638 p., 48 lei.
B. POPA, V. KASIAN, **Teoria și calculul injectoarelor mecanice cu cameră de turbionare**, 1971, 311 p., 21 lei.
I. S. GHEORGHIU, ALEXANDRU S. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice, vol. IV, mașini sincrone**, 1972, 482 p., 30 lei.
P. P. TEODORESCU, **Dinamica corpurilor liniar elastice**, 1972, 392 p., 24,50 lei.
M. MIȘICU, **Teoria mobilității elastice**, 1972, 428 p., 23,50 lei.
EDMOND NICOLAU, **Cîmpuri și unde electromagnetice**, 1972, 350 p., 21,50 lei.
C. A. VASILESCU, S. FAUR, V. PIMSNER, GH. RĂDULESCU, **Corelațiile dintre combustibilul lichid și motorul cu ardere internă**, 1972, 336 p., 23,50 lei.
CHRISTIAN PELECUDI, **Teoria mecanismelor spațiale**, 1972, 512 p., 30 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 4, P. 727–1022, BUCUREȘTI, 1972

I. P. „Informația" — c. 1431

43 832

Lei 40. —

F 2557 R

5
TOMUL 31
1972

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

1972

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*,
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct*,
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție*.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuța poștală 2001, București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, București.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 31, nr. 5 1973

SUMAR

STUDII

Pag.

E. CARAFOLI şi I. PARASCHIVOIU, Studiu asupra unei serii de aripi cu geometrie variabilă derivate din aripile delta de diferite alungiri. I. Caracteristicile aerodinamice ale aripilor delta 1025

I. SETEANU, Studiul curgerii plane a fluidului vîscos în jurul unui corp. 1041

V. PANAITESCU, *Studiul acţiunii rugozităţii suprafeţei* asupra tranziţiei stratului-limită laminar în strat-limită turbulent 1051

N. MACOVEI, Filtrarea fluidelor de foraj în formaţiile permeabile din jurul unei sonde. I. Filtrarea liniară 1065

ST. PETRESCU, Studiul experimental al interacţiunii gaz-piston mobil, în cazul unui sistem deschis 1081

GH. HOBEANU, Asupra unor ipoteze în dinamica rotoarelor. 1087

EUGEN BUGAJEWSKI, Asupra determinării eforturilor în elementele stîlpilor ancoraţi parţial simetric 1099

CH. VASILIU şi I. GHIŢĂ, Cercetări experimentale privind coeficientul de aderenţă la alunecare 1119

N.I. MANOLESCU şi M. DRANGA, Compararea structurală a lanţurilor cinematice plane articulate (LCp) cu ajutorul teoriei grafelor 1133

O. MUNTEANU, Gh. ILIESCU, C. DUCA, I. SIMIONESCU şi C. DRĂGAN, Studiul parametrilor mişcării de rotaţie, în mecanismele plane, prin metode mecanoelectrice 1145

MAGDALENA POSEA, Îmbunătăţiri privind calculul îmbinărilor prin flanşe 1155

A. PAVEL, Studii şi cercetări teoretice-experimentale privind securitatea tehnică a mantalei unui recipient cilindric de mare presiune. I 1173

NOTE

D. COŞA, Consideraţii privind ortogonalitatea formelor proprii de oscilaţie la sisteme elastice cu mai multe grade de libertate 1191

ALEX. DARABONT, Analiza spectrală a vibraţiilor sistemelor mecanice cu masă continuă, avînd ataşate un număr finit de mase concentrate 1195

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

M. RADEŞ, Metode şi modele folosite în studiul răspunsului dinamic al corpurilor rezemate pe medii deformabile 1205

RECENZII 1225

STUDIU ASUPRA UNEI SERII DE ARIPI CU GEOMETRIE VARIABILĂ DERIVATE DIN ARIPILE DELTA DE DIFERITE ALUNGIRI

I. CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPILOR DELTA

E. CARAFOLI şi I. PARASCHIVOIU
I.M.F.C.A. I.P.B.

Prezenta lucrare se ocupă cu determinarea caracteristicilor aerodinamice ale aripilor delta în regim subsonic, ca regim de tranziţie pentru decolarea şi aterizarea avioanelor supersonice.
Pentru studiul experimental, în sufleria aerodinamică s-a considerat un set de patru aripi delta cu alungirile respective :
$\lambda_0 = 1{,}25 ; 1{,}50 ; 1{,}75 ; 2$, domeniu în care se situează în mod aproximativ aripile avioanelor supersonice.
Se constată o bună concordanţă între rezultatele teoretice şi cele experimentale.

1. INTRODUCERE

Construcţia aeronavelor cu viteze supersonice şi hipersonice a impus modificări esenţiale ale organului principal de zbor, aripa, ca suprafaţă portantă. Aceste modificări constau mai ales în micşorarea grosimii relative a profilului, forma sa triunghiulară (aripă delta) şi, implicit, micşorarea alungirii aripii.

Astfel, aerodinamica supersonică se preocupă foarte intens cu studiul aripilor delta de alungire mică. Regimul subsonic prezintă interes prin aceea că aceste aripi evoluează în zbor şi la regimurile subsonice de decolare şi aterizare.

La aripile delta de alungire mică, portanţa şi momentul de tangaj nu mai cresc liniar cu unghiul de incidenţă. Dependenţa portanţei şi a momentului de tangaj, apare printr-o componentă liniară şi alta neliniară, aceasta din urmă crescînd în intensitate cu cît alungirea scade.

Termenul liniar este asociat cu mişcarea din jurul aripii, presupusă a se încadra în ipoteza teoriei aripii subţiri şi dă o portanţă proporţională cu incidenţa ; termenul neliniar este asociat cu efectele de separare a curentului la bordurile de atac şi este produs de straturile turbionare, care iau naştere la

T. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1025–1039

aceste borduri sub forma a două cornete de vîrtej pe extradosul aripii. Efectele neliniare, asupra caracteristicilor aerodinamice scad odată cu creşterea alungirii aripii triunghiulare.

În regimurile de zbor subsonice, la decolare şi aterizare, se pot folosi aripile delta cu geometria variabilă, realizată în diverse moduri. În vederea unui studiu asupra unor categorii speciale de aripi delta cu geometria variabilă, s-a pornit de la patru aripi delta, (fig. 1), considerate ca matrice cu alungirile $\lambda_0 = 1{,}25\,;\ 1{,}50\,;\ 1{,}75\,;\ 2$, alungiri utilizate în general în aviaţia supersonică.

Întrucît introducerea părţilor mobile ale machetelor încercate s-a imaginat a se face în interiorul profilului aripii, iar modelele au fost executate din lemn, a apărut necesitatea de a construi machetele respective cu bordurile de atac groase şi rotunjite, asupra cărora se insistă mai puţin în literatura de specialitate.

Pentru a vedea însă care este diferenţa dintre aripile cu bordurile de atac mai puţin rotunjite, aşa cum se construiesc în realitate, şi aripile cu bordurile de atac groase şi rotunjite, aşa cum am fost nevoiţi să facem

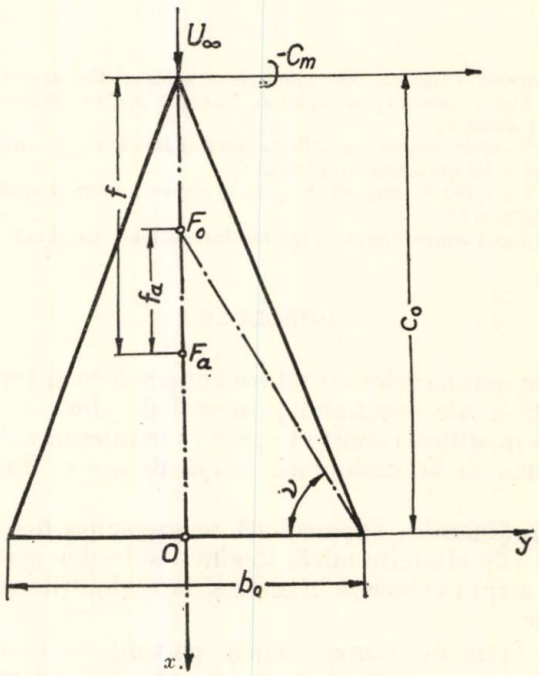
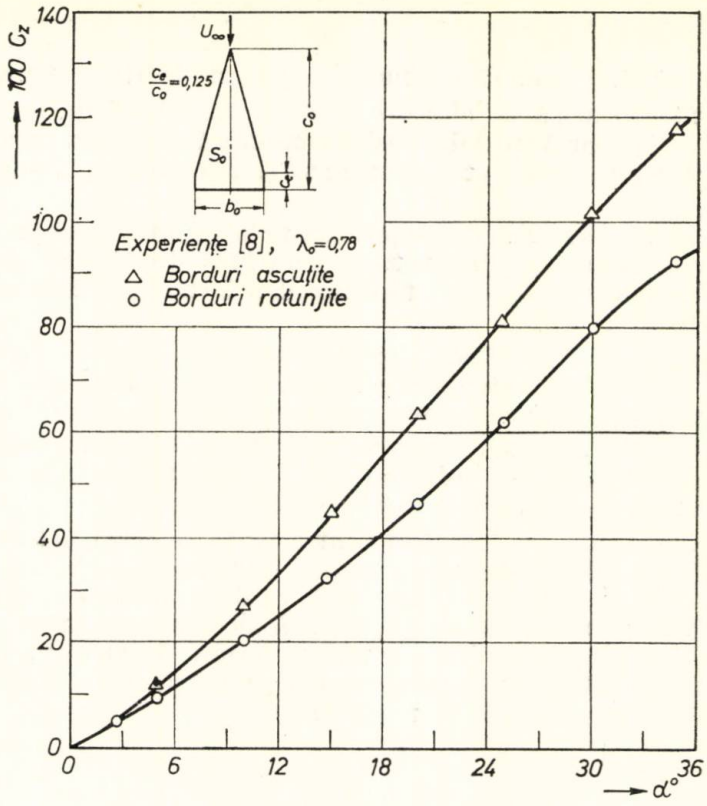


Fig. 1

modelele de experimentare, vom da mai jos rezultatele experimentale obţinute pe trei astfel de aripi :

a) pentru o aripă de *alungire mică*, $\lambda_0 = 0{,}78$, de forma delta, cu extremităţile foarte puţin teşite, în raportul $\frac{ce}{c_0} = 0{,}125$ (fig. 2 *a*), alungire care este cu mult în afară de cele patru alungiri considerate mai


100 C_z
U_∞
$\frac{c_e}{c_0}=0,125$
S_0
c_0
c_e
b_0
Experiențe [8], $\lambda_0=0,78$
△ Borduri ascuțite
○ Borduri rotunjite
0
20
40
60
80
100
120
140
0
6
12
18
24
30
36
α°

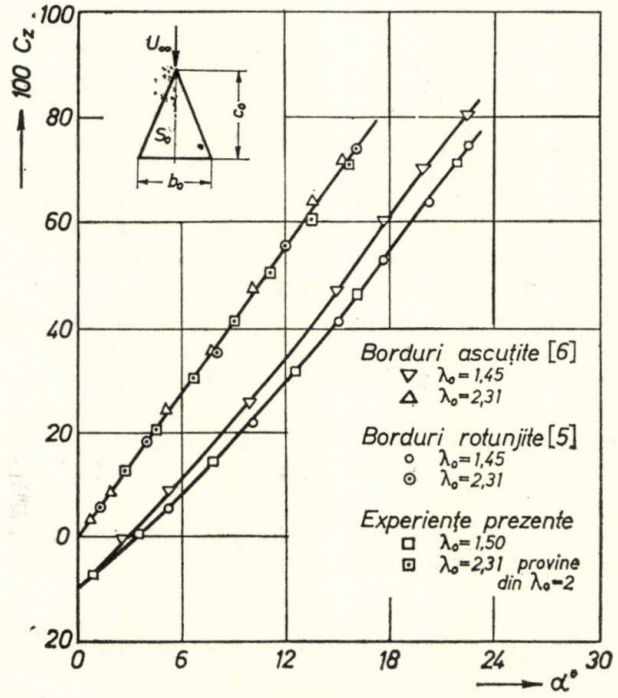

100 C_z
U_∞
S_0
c_0
b_0
Borduri ascuțite [6]
▽ $\lambda_0=1,45$
△ $\lambda_0=2,31$
Borduri rotunjite [5]
○ $\lambda_0=1,45$
⊙ $\lambda_0=2,31$
Experiențe prezente
□ $\lambda_0=1,50$
⊡ $\lambda_0=2,31$ provine din $\lambda_0=2$
-20
0
20
40
60
80
100
0
6
12
18
24
30
α°

Fig. 2

sus, se vede că fenomenul de ordinul al doilea este foarte pronunțat;

b) pentru o aripă de *alungire mijlocie*, $\lambda_0 = 1{,}45$, de forma delta, cu alungirea care intră în cadrul celor considerate în acest studiu, diferența dintre bordurile de atac rotunjite și cele subțiri, scade simțitor (fig. 2 *b*).

Pe această diagramă sînt reprezentate și rezultatele obținute în laboratorul aerodinamic al Institutului politehnic din București, pentru $\lambda_0 = 1{,}5$, de unde se vede perfecta concordanță cu experiențele executate de alți autori [5];

c) pentru o aripă de *alungire normală*, $\lambda_0 = 2{,}31$, de forma delta, cu alungirea în afară de intervalul considerat mai sus, termenul de ordinul al doilea tinde să dispară cu creșterea alungirii (fig. 2*b*), dincolo de $\lambda_0 = 2$.

Reiese deci, că pentru alungirile mici și mijlocii panta coeficientului de portanță la aripile cu bordurile de atac rotunjite este mai mică decît cea corespunzătoare aripilor cu bordurile de atac subțiri.

În consecință, vom considera pentru motivele constructive indicate, aripi delta cu bordurile de atac groase și rotunjite, iar trecerea la aripile cu bordurile de atac subțiri se face pe baza diagramelor din (fig. 2*b*). De altfel, acest lucru nu are mare importanță ,deoarece rezultatele obținute pe aceste aripi delta cu bordurile rotunjite formează numai un parametru de comparație pentru aripile cu geometria variabilă, care vor fi prezentate într-o lucrare viitoare (partea a II-a).

2. CONSIDERAȚII TEORETICE

Pentru aripile de alungire mică, teoriile liniarizate nu corespund fenomenului real și de aceea trebuie să ținem seama și de termenii neliniari, așa cum fac diverși autori, printre care Küchemann [3], Truckenbrodt [4], Gersten [8] etc. În realitate, fenomenul este foarte complicat, dacă ținem seama mai ales și de influența celor două vîrtejuri în cornet, care scapă de la vîrfurile aripilor delta și care nu dispare decît pentru alungiri mai mari [9]. Dacă însă alungirea este mijlocie sau normală, se dovedește în acest caz pe cale experimentală, că rezultatele se pot explica pe baza unei teorii liniarizate de genul Prandtl-Glauert.

În lucrarea de față vom utiliza o metodă de calcul expusă într-o lucrare anterioară [1] și bazată tocmai pe această ipoteză simplificatoare, dar care este confirmată într-o bună măsură de experiență.

Chiar dacă pentru *alungirile mijlocii* există mici abateri față de teoria liniarizată, totuși, avînd în vedere că pentru alungirile aripilor cu geometrie variabilă ($\lambda \simeq 3$), rezultatele sînt bune, această metodă poate fi aplicată în mod unitar de la $\lambda = 1{,}25$ la $\lambda \geqslant 3$.

În acest sens, vom reprezenta mai întîi conturul triunghiular printr-un *contur echivalent*, dat de următoarea formulă:

$$\frac{c_0}{c} \sin \theta = \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta + 2\beta_4 \cos 4\theta, \qquad (1)$$

unde c este coarda într-un punct oarecare y pe anvergură, iar c_0 coarda mediană la centru. Variabila θ este legată de y prin relația următoare, care definește schimbarea de variabilă:

$$\cos\theta = -\frac{2y}{b_0}, \tag{2}$$

unde b_0 este anvergura totală a aripii, în cazul de față, aceasta fiind chiar baza aripii delta.

Luînd pentru coeficienții β_{2m} valorile

$$\beta_0 = 2{,}673, \quad 2\beta_2 = 1{,}710, \quad 2\beta_4 = 0{,}171, \tag{3}$$

conturul echivalent obținut este foarte apropiat de cel triunghiular, după cum se vede din figurile 3÷6; așa încît, prin această înlocuire, nu se comite nici o eroare importantă.

Fie circulația Γ dată de expresia obișnuită

$$\Gamma = 2b_0 U_\infty (A_1 \sin\theta + A_3 \sin 3\theta + A_5 \sin 5\theta + \ldots) \tag{4}$$

și să considerăm mai departe un parametru k_∞, care reprezintă jumătate din panta coeficientului de portanță C_z în funcție de incidența pentru aripa de anvergură infinită,

$$k_\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha}\right)_\infty = \varkappa\pi, \tag{5}$$

unde $\varkappa$ este un coeficient de reducere a portanței experimentale față de cea teoretică, așa cum rezultă din experiențele noastre și ale altor autori [5], pentru aripile cu bordurile groase și rotunjite.

Să notăm cu

$$\mu_0 = \frac{k_\infty}{2}\frac{c_0}{b_0} = \frac{k_\infty}{2}\frac{c_0 b_0}{S_0}\frac{1}{\lambda_0}, \tag{6}$$

unde S_0 este suprafața aripii delta, iar λ_0 alungirea sa,

$$\lambda_0 = \frac{b_0^2}{S_0}. \tag{7}$$

Printr-o metodă adecvată, de care am vorbit mai sus, se ajunge la următoarele ecuații, care ne dau coeficienții A_n [1]:

$$\left[\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0}\right] A_1 = \mu_0\alpha,$$

$$\left(3\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{5\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{7\mu_0 + \beta_0}\right) A_3 + \left(\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0}\right) A_1 = 0,$$

. . . . . e . . .

$$\left[n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{(n+4)\mu_0 + \beta_0}\right] A_n +$$

$$+ \beta_2\left[1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0}\right] A_{n-2} + \beta_4 A_{n-4} = 0. \tag{8}$$

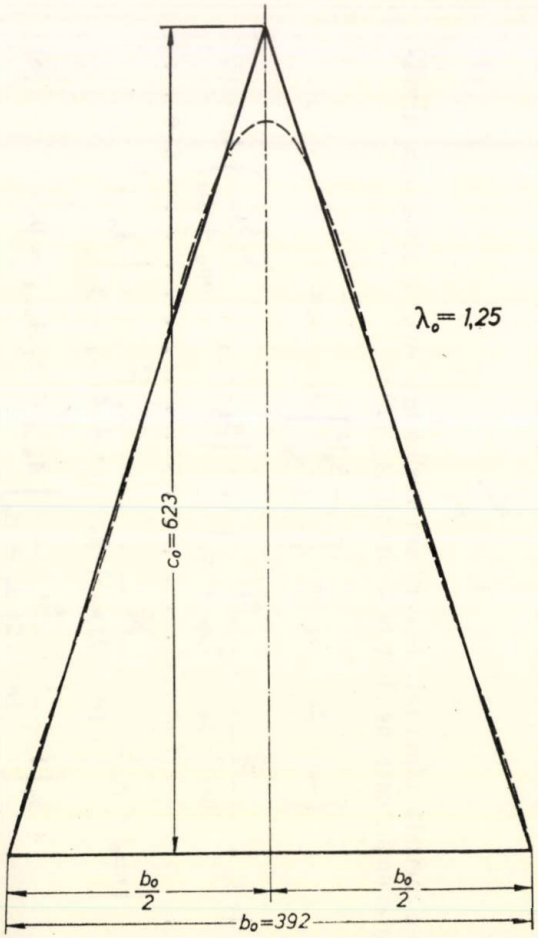

$\lambda_o = 1{,}25$
$c_o = 623$
$\frac{b_o}{2}$
$\frac{b_o}{2}$
$b_o = 392$

Fig. 3

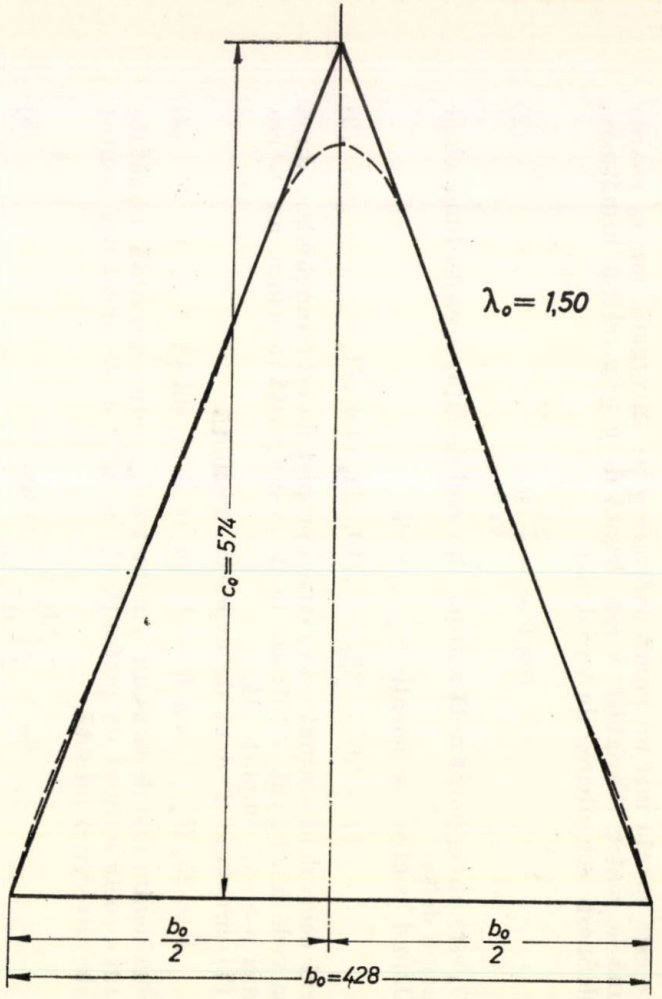

$\lambda_o = 1{,}50$
$c_o = 574$
$\frac{b_o}{2}$
$\frac{b_o}{2}$
$b_o = 428$

Fig. 4

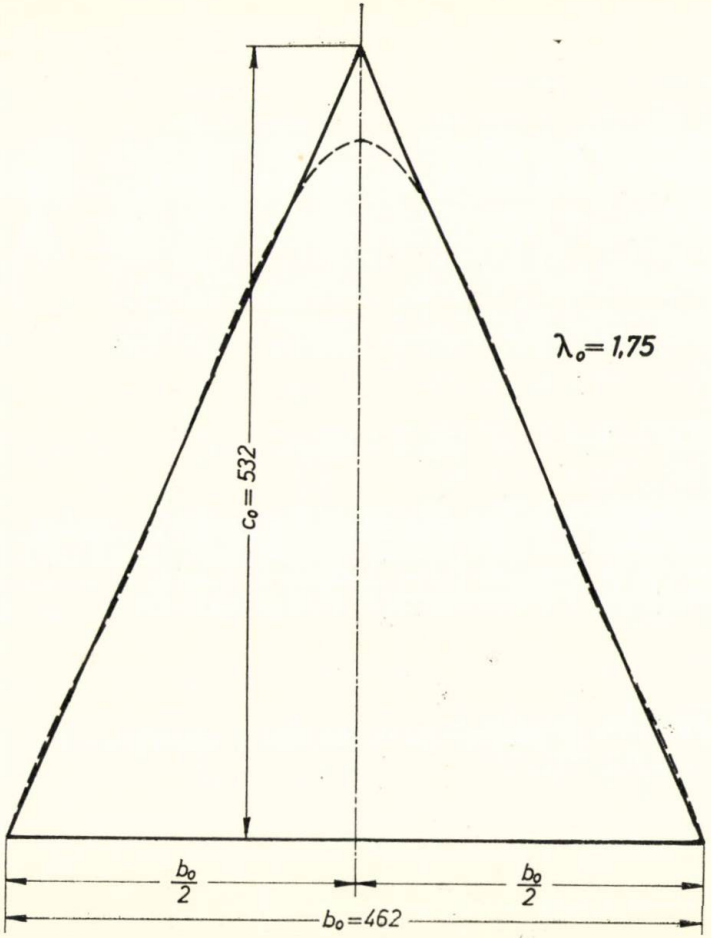

$\lambda_o = 1{,}75$
$c_o = 532$
$\frac{b_o}{2}$
$\frac{b_o}{2}$
$b_o = 462$

Fig. 5

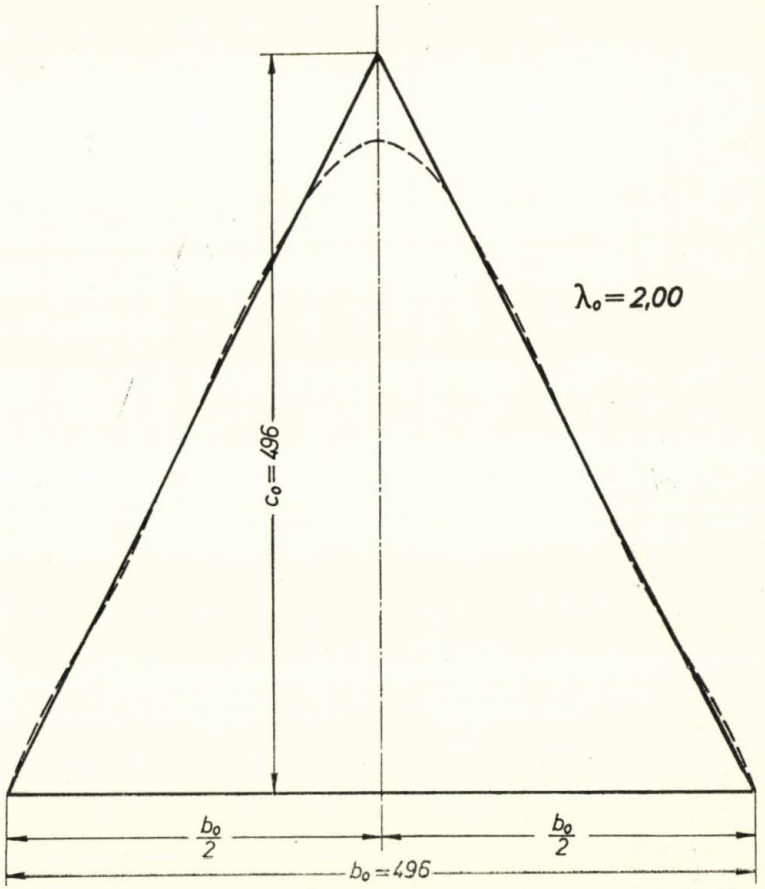

$\lambda_o = 2{,}00$
$c_o = 496$
$\frac{b_o}{2}$
$\frac{b_o}{2}$
$b_o = 496$

Fig. 6

În figurile 3—6, sînt trasate cu linie întreruptă contururile aripilor echivalente deduse din (1), ţinînd seama de coeficienţii de formă (3). De asemenea, introducînd coeficienţii din (3) în ecuaţiile (8) şi luînd pentru $\varkappa$ din (5) valoarea $\varkappa = 0{,}75$, rezultat din experienţele efectuate în laborator pe profilul NACA 65—009, cu bordurile de atac rotunjite, se pot calcula valorile coeficienţilor A_n, trecute în tabela 1.

Tabela 1

λ_0	$\frac{1}{\mu_0}$	$\frac{A_1}{\mu_0\alpha}$	$\frac{A_3}{\mu_0\alpha}$	$\frac{A_5}{\mu_0\alpha}$	τ	$\frac{dC_z}{d\alpha}$
1,25	0,610	0,294	−0,0298	0,00002	0,219	1,88
1,50	0,722	0,321	−0,0362	0,00035	0,254	2,09
1,75	0,840	0,343	−0,0424	0,00077	0,288	2,24
2	0,965	0,364	−0,0486	0,00129	0,323	2,37

Diagramele circulaţiei de-a lungul anvergurii, sub forma

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma}{2b_0 U_\infty \mu_0\alpha} A_1^* \sin\theta + A_3^* \sin 3\theta + A_5^* \sin 5\theta + \dots \qquad (9)$$

sînt trasate în figura 7 *a* comparativ pentru aripile delta de diverse alungiri, raportată la aceiaşi semianvergură, egală cu unitatea, unde s-a notat

$$A_n^* = \frac{A_n}{\mu_0\alpha} \quad (n = 1, 3, 5, 7, \dots). \qquad (9')$$

Pentru a da o indicaţie asupra distribuţiei circulaţiei pentru aripi delta de alungire $\lambda_0 = 2{,}50$ de acelaşi ordin ca cele cu $\lambda_0 = 1{,}75$ şi $\lambda_0 = 2$, dăm reprezentarea circulaţiei adimensionale de-a lungul semianvergurii în figura 7*b*.

Se constată o aproximaţie mulţumitoare între teoria liniară şi rezultatele experimentale.

Vom determina mai departe caracteristicile aerodinamice sub forma coeficienţilor unitari de portanţă şi moment de tangaj. Reamintim formulele care ne dau aceşti coeficienţi :

a) Coeficientul de portanţă

$$C_z = \pi\lambda_0 A_1 = 2k_0\alpha, \qquad (10)$$

unde $2k_0$ este panta lui C_z pentru aripa de alungire λ_0 dată de formula

$$k_0 = \frac{1}{2} \frac{\pi\mu_0\lambda_0}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \dfrac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_6}}. \qquad (11)$$

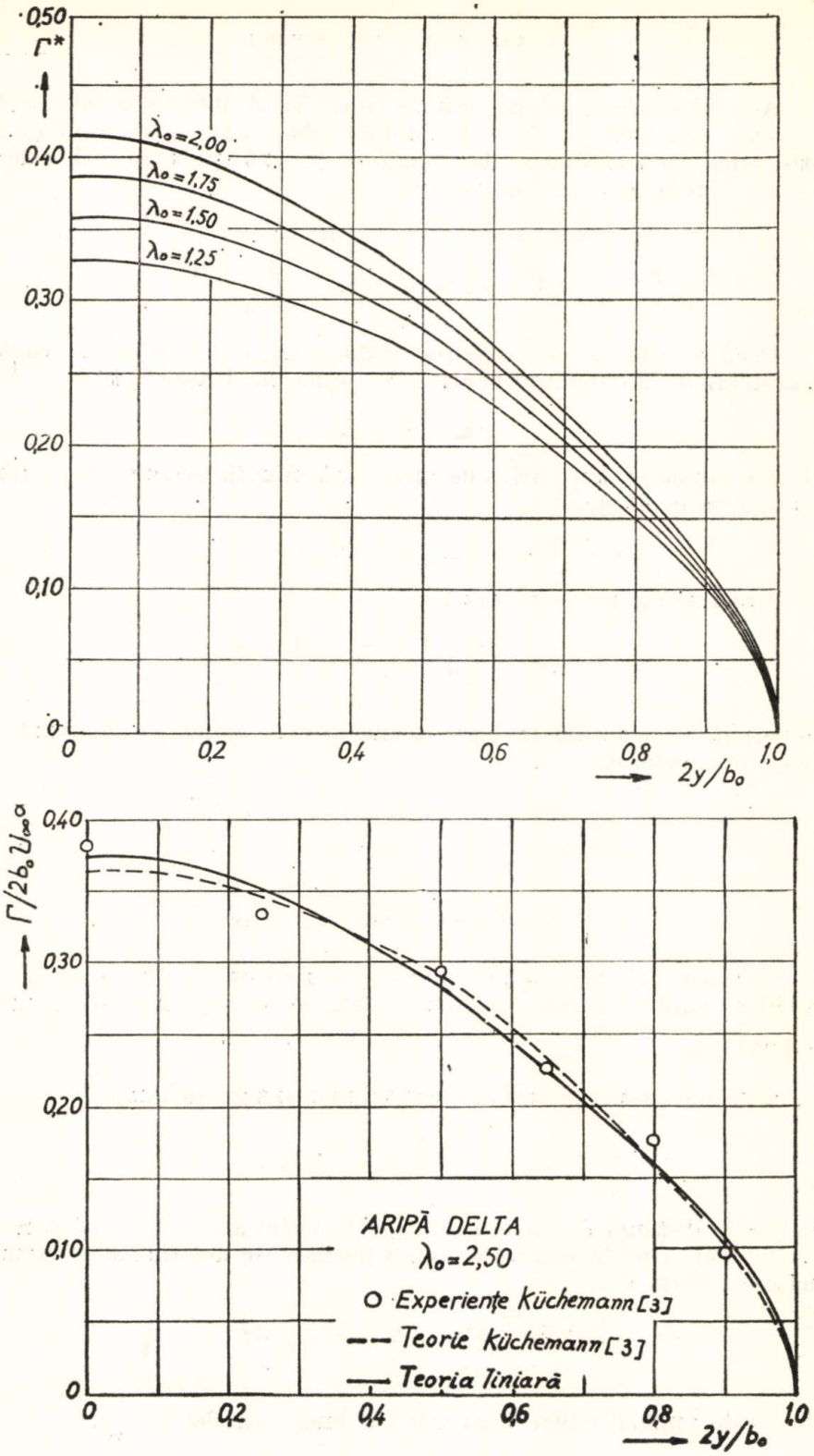

0,50
Γ*
λ₀=2,00
λ₀=1,75
λ₀=1,50
λ₀=1,25
0,40
0,30
0,20
0,10
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
2y/b₀
Γ/2b₀U∞
0,40
0,30
0,20
0,10
0
ARIPĂ DELTA
λ₀=2,50
O Experiență Küchemann [3]
Teorie Küchemann [3]
Teoria liniară
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
2y/b₀

Fig. 7 *a*, *b*

Această expresie rezultă prin înlocuirea lui A_1 din (8), în relaţia (10), coeficienţii de formă β_0, β_2 şi β_4 fiind daţi de (3), iar μ_0 de (6). Raportul dintre panta portanţei aripii de alungire λ_0 şi panta portanţei aripii de anvergură infinită, este dat de relaţia

$$\frac{k_0}{k_\infty} = \frac{\pi}{4}\frac{C_0 b_0}{S_0}\frac{1}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \dfrac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0}}. \tag{12}$$

Dacă se notează cu i valoarea medie a unghiului indus (în realitate acesta diferă de la o secţiune la alta), se obţine incidenţa efectivă

$$\alpha_e = \alpha - i, \tag{13}$$

care corespunde pentru o aripă de anvergură infinită aceluiaşi C_z, obţinut pentru aripa de alungire λ_0

$$C_z = 2k_0\alpha = 2k_\infty\alpha_e = 2k_\infty(\alpha - i). \tag{14}$$

Astfel se ajunge la expresia

$$\alpha' - \alpha = \frac{C_z}{\pi}\left(\frac{1+\tau'}{\lambda_0'} - \frac{1+\tau}{\lambda_0}\right), \tag{15}$$

care permite să se traseze curba C_z a unei aripi de alungire λ_0' în funcţie de aceea a unei aripi de alungire λ_0 cu

$$\tau = \frac{1}{\mu_0}\left[\beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{\pi}{4}\frac{c_0 b_0}{S_0}\right]. \tag{16}$$

b) Coeficientul de moment de tangaj

Se calculează în raport cu o axă care trece prin vîrful aripii şi este paralelă cu bordul de fugă, luîndu-se ca lungime de referinţă coarda medie aerodinamică $c_m = \dfrac{2}{3}c_0$.

Vom scrie astfel pentru coeficientul momentului de tangaj,

$$C_m = \frac{f}{c_m}C_z = \frac{f}{c_m}\cdot 2k_0\alpha, \tag{17}$$

unde f este distanţa de la focarul aripii la vîrful acesteia, iar distanţa f_a de la focarul aripii la focarul secţiunii mediane se determină cu formula următoare, luată din [1]:

$$f_a = \frac{2\lambda_0 b_0 \operatorname{tg}\nu}{C_z}\left(\frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{5} - \frac{A_5}{21} + \frac{A_7}{45} + \dots\right), \tag{18}$$

unde ν este unghiul dintre baza aripii şi linia focarelor (fig. 1.).

În continuare vom prezenta cîteva considerații asupra coeficientului de rezistență pentru aripile delta studiate. Așa cum se arată și în lucrările [3], [5], [7], [8], la aripile delta de alungiri mici, mijlocii și chiar normale (λ_0=2,31) se constată o divergență considerabilă între polara teoretică și polara experimentală, contrar rezultatelor obținute în cazul aripilor drepte.

Acest fapt se explică prin condițiile reale de scurgere, deosebite, în jurul bordurilor de atac ale aripilor delta ce se manifestă prin apariția unor cornete de vîrtejuri, situate pe extradosul aripii, care iau naștere chiar la incidențe mici ($\alpha = 6 - 7°$).

Datorită acestui sistem turbionar de vîrtejuri, aportul succiunii este redus aproape complet și are loc o creștere bruscă a rezistenței date de portanță; acest fenomen destul de complex nu a putut fi cuprins exact în niciuna din teoriile existente în prezent.

Astfel, pentru coeficientul de rezistență datorită portanței, în cazul aripilor delta se poate admite expresia

$$C_x^* = C_z\alpha, \tag{19}$$

care dă rezultate apropiate de cele experimentale și care este considerată de toți autorii.

Coeficientul rezistenței totale se obține adăugînd la C_x^*, coeficientul rezistenței de profil C_{x0} determinat experimental,

$$C_x = C_{x0} + C_z\alpha. \tag{20}$$

3. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

În figura 8 sînt reprezentate curbele experimentale $C_z = f(\alpha)$ pentru aripi delta de diverse alungiri $\lambda_0 = 1{,}25 - 2$, cu borduri de atac groase și rotunjite, după datele obținute în laboratorul aerodinamic al Institutului politehnic din București, la viteza $U_\infty \simeq 30$ m/s, fiind comparate cu rezultatele obținute prin metoda teoriei liniare. Se observă că neliniaritatea curbelor experimentale este mai accentuată la alungirea mijlocie ($\lambda_0 = 1{,}25$; $\lambda_0 = 1{,}50$), unde persistă încă efectul cornetelor de vîrtej.

În diagramele din figura 9 se reduc punctele experimentale corespunzătoare alungirilor menționate la aripa de alungire $\lambda_0 = 2$ și este astfel trasată curba teoretică, pentru această alungire, $C_z = f(\alpha)$.

Se constată un bun acord între teoria liniarizată și rezultatele obținute prin măsurători în sufleria aerodinamică.

Pentru aripi delta cu bordurile de atac ascuțite este reprezentată în figura 10, curba $C_z = f(\alpha)$, unde de această dată s-a utilizat $\varkappa = 0{,}85$, deoarece panta coeficientului de portanță este mai mare pentru acest gen de aripi; comparația dintre teorie și experiențe este bună și de această dată.

O comparație între polarele experimentale ale aripilor și cele date de formula (20) este redată în figura 11, de unde se observă că aplicarea acestei formule este justificată.

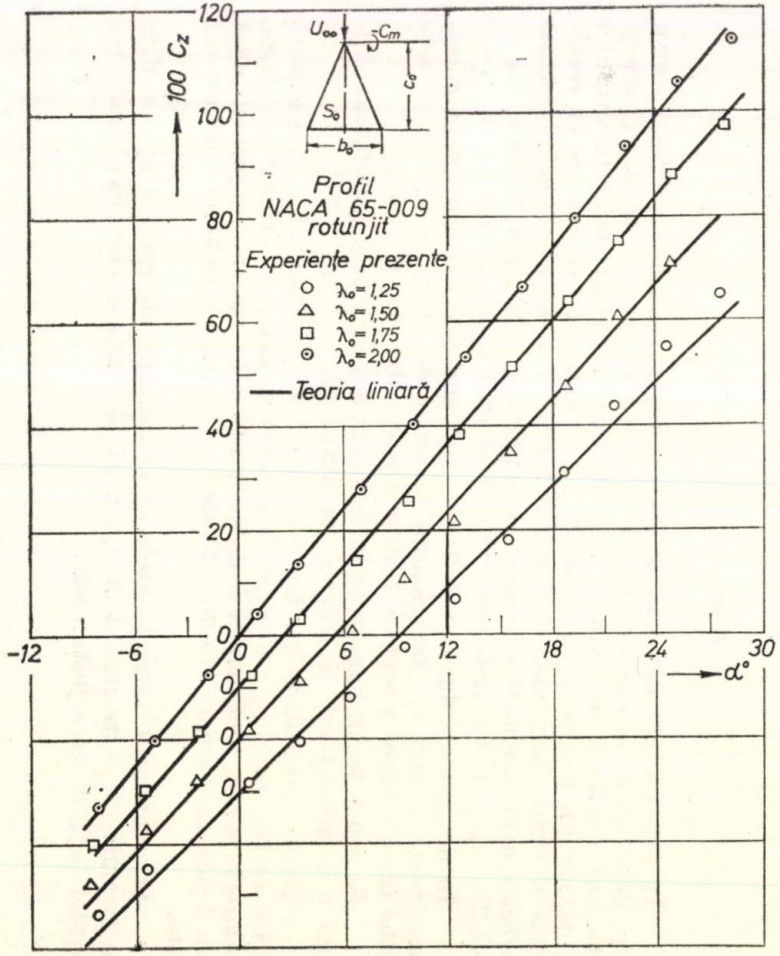

100 C_z
120
100
80
60
40
20
0
-12
-6
0
6
12
18
24
30
α°
U_∞
C_m
c_0
S_0
b_0
Profil
NACA 65-009
rotunjit
Experiențe prezente
$\lambda_0 = 1,25$
$\lambda_0 = 1,50$
$\lambda_0 = 1,75$
$\lambda_0 = 2,00$
Teoria liniară

Fig. 8

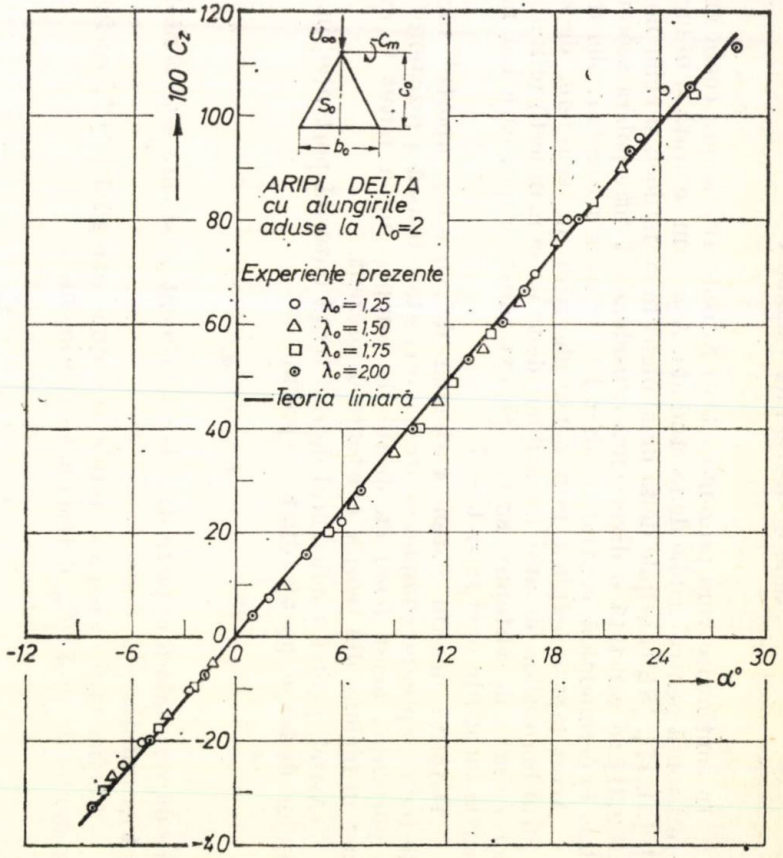

100 C_z
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-12
-6
0
6
12
18
24
30
α°
U_∞
C_m
c_0
S_0
b_0
ARIPI DELTA
cu alungirile
aduse la $\lambda_0 = 2$
Experiențe prezente
$\lambda_0 = 1,25$
$\lambda_0 = 1,50$
$\lambda_0 = 1,75$
$\lambda_0 = 2,00$
Teoria liniară

Fig. 9

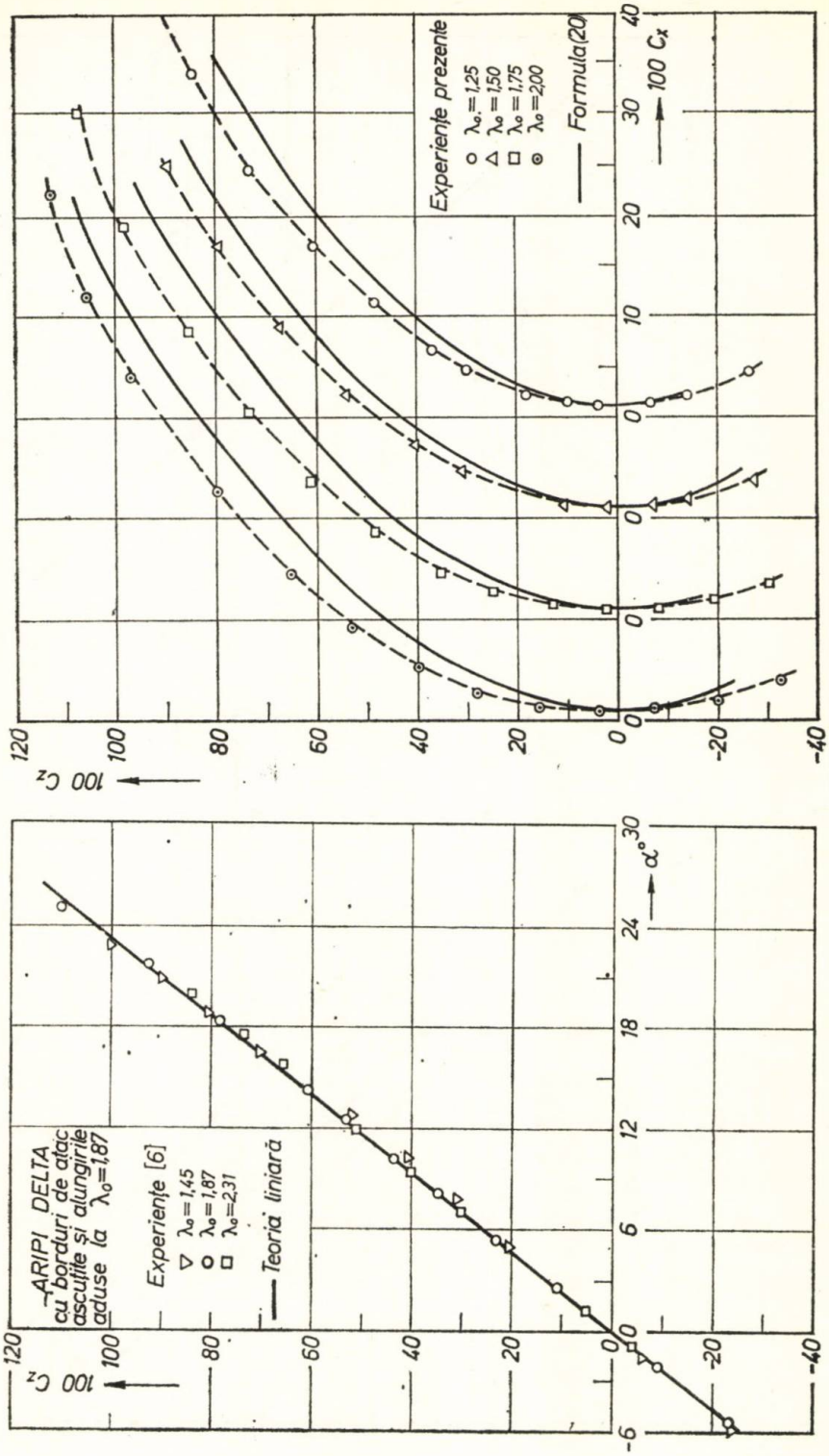

ARIPI DELTA
cu borduri de atac
ascuțite și alungirile
aduse la λo=1,87
Experiențe [6]
λo=1,45
λo=1,87
λo=2,31
Teoria liniară
100 Cz
α°
Experiențe prezente
λo=1,25
λo=1,50
λo=1,75
λo=2,00
Formula (20)
100 Cx

Fig. 10

Fig. 11

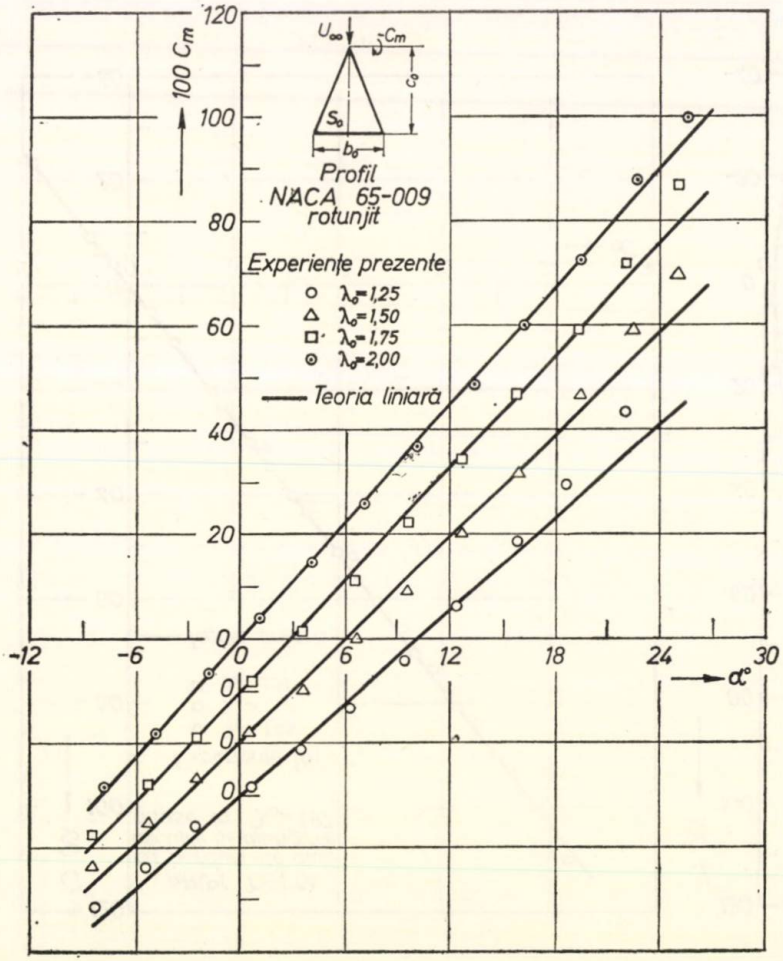


Fig. 12 *a*

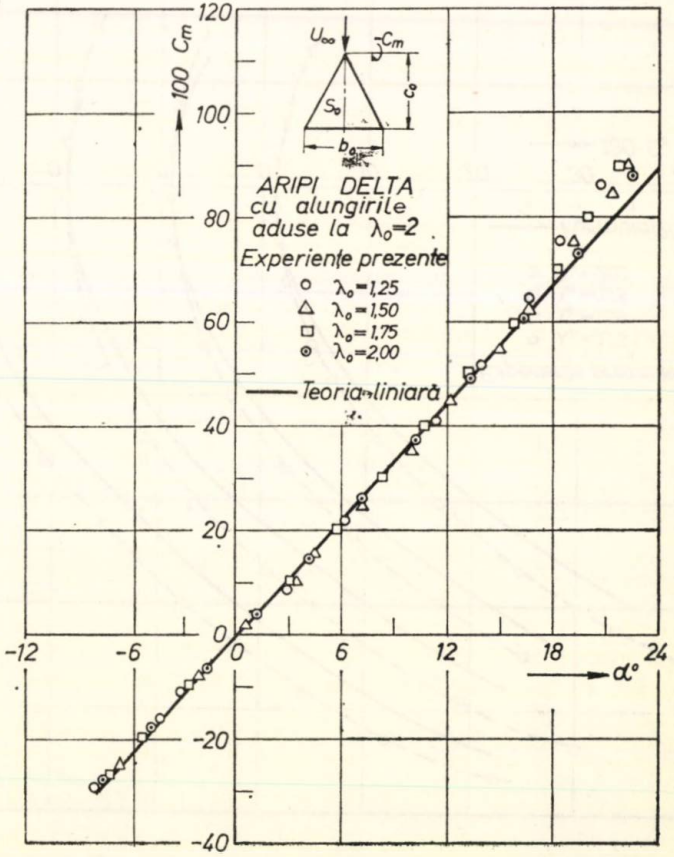


Fig. 12 *b*

Curbele $C_m = f(\alpha)$ sînt redate în diagramele din fig. (12*a*) și (12*b*), arătînd o bună concordanță între experiențe și metoda de calcul a teoriei liniarizate.

Remarcă. Am stabilit cele de mai sus pentru a avea un punct de plecare pentru aripile cu geometria variabilă, unde vom utiliza aceiași metodă teoretică simplificatoare.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Aerodinamica*, București, Edit. tehnică, 1951.
2. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*, vol. II Edit. Academiei, 1955.
3. D. Küchemann, *A simple Method for Calculating the Span and Chordwise Loading on Straight and Swept Wings of any Given Aspect Ratio at Subsonic Speeds*", R. & M. nr. 2935 — August 1952.
4. H. Schlichting, E. Truckenbrodt, *Aerodynamik*, Bd. II, Aufl. 1960, Berlin — Götingen.
5. P. Rebuffet, *Aerodynamique Experimentale*, II — 1960.
6. R. B. Earnshaw, J. A. Lawford *Low-Speed Wind—Tunnel Experiments on a Series of Sharp* Edges Delta Wings, R. & M. No. 3424 — 1966.
7. D. A. Kirby, *An Experimental Investigation of the Effect of Planform Shape on the Subsonic Longitudinal Stability Characteristics of Slender Wings*, R. & M. No. 3568 — 1969.
8. K. Gersten, *Nichtlineare Tragflächentheorie inbesondere fur Tragflügel mit Kleinem Seiten verhaltnis*, Ingenieur — Archiv, XXX Band, 1961.
9. D. Hummel, P. S. Srinivasan, *Vortex Breakdown Effects of the Low-Speed Aerodynamic Characteristics of Slender Delta Wings in Symmetrical Flow*, J.A.R.S. — April 1967.

STUDIUL CURGERII PLANE A FLUIDULUI VÎSCOS ÎN JURUL UNUI CORP

de I. SETEANU
Institutul politehnic Bucureşti

Se studiază mişcarea plană a fluidului vîscos newtonian incompresibil în jurul unui corp mărginit de o curbă netedă pe porţiuni, folosindu-se metoda dezvoltării în serie după funcţii de coordonate. Se foloseşte o transformare conformă adecvată prin care condiţiile la limită se pot satisface automat. Soluţia se obţine prin compararea cu soluţia aproximativă obţinută prin metoda dezvoltărilor asimptotice racordate.

1. INTRODUCERE

Curgerea fluidului vîscos, chiar în ipotezele simplificatoare ale modelului newtonian şi incompresibilităţii, creează dificultăţi deosebite pentru studierea analitică datorită caracterului neliniar al ecuaţiilor mişcării. Încercările de a se obţine rezultate apropiate de realitate în situaţiile de curgere, care prezintă un interes practic, au pornit de la soluţii simplificate şi au avut drept scop obţinerea corecţiilor de diferite ordine, folosindu-se, de exemplu, metoda perturbaţiilor (metoda parametrului mic). Deşi nu se poate vorbi de demonstrarea unei teoreme de existenţă în sens tare (demonstrarea convergenţei seriilor obţinute prin metoda parametrului mic), totuşi s-au putut obţine dezvoltări apropiate de observaţiile experimentale, în special în teoria stratului-limită [1]. Atunci cînd s-a încercat să se obţină aproximaţii superioare pornind de la mişcarea potenţială sau chiar de la soluţiile aproximative ale ecuaţiilor lui Oseen sau Stokes, s-a constatat că efectul perturbator al parametrului *Re* are un caracter singular, adică la variaţii destul de mici ale parametrului corespund variaţii finite şi neuniforme în domeniu ale soluţiei perturbate (paradoxurile lui Whitehead sau Filon) [2].

Teoria stratului-limită a lui Prandtl constituie prima încercare sistematică de eliminare a paradoxurilor care apar datorită caracterului singular al perturbaţiilor. Ea se bazează pe studierea în detaliu a domeniului

de neuniformitate al perturbaţiilor (vecinătatea suprafeţei corpului), obţinînd soluţii care se „racordează" cu curgerea potenţială admisă la o oarecare distanţă de corp. Cercetările cunoscute sub numele de „metoda dezvoltărilor asimptotice racordate" au generalizat ideea lui Prandtl prin introducerea trecerilor la limită interioară şi exterioară şi a dezvoltărilor asimptotice corespunzătoare [3]. Se admite că manifestarea paradoxurilor este provocată de incapacitatea soluţiei fundamentale, aleasă ca primă aproximaţie, de a satisface simultan condiţiile la limită şi la infinit ale soluţiei exacte şi de a rămîne totuşi uniform apropiată de aceasta. Esenţa metodei constă în extrapolarea treptată a soluţiilor alese ca prime aproximaţii în domenii diferite către celelalte domenii, folosind un procedeu sui generis de evidenţiere a acestor domenii (parametri de formă). Compararea asimptotică pe etape („racordarea asimptotică") permite obţinerea unor soluţii cu sens fizic.

După cum am arătat în lucrări anterioare, pot să apară situaţii în care să fie posibil să se aleagă o soluţie fundamentală ca primă aproximaţie, satisfăcînd simultan condiţiile la limită şi la infinit impuse soluţiei exacte şi care să permită astfel aplicarea teoriei perturbaţiilor regulate [4]. Deoarece metoda iteraţiilor, aplicată la problemele neliniare, dă la fiecare pas de aproximare şi o parte din termenii de ordin superior a căror considerare nu este folositoare, este convenabil să se folosească metoda dezvoltărilor în serie care permite o examinare mai sistematică a termenilor în funcţie de ordinul lor de micime. Metoda dezvoltării în serie pentru o problemă neliniară se deosebeşte de procedeul separării variabilelor, care este o consecinţă a principiului superpoziţiei. În general, pentru ecuaţiile de tip eliptic, unde se pun probleme la limită, metoda dezvoltării în serie după puterile coordonatelor duce doar la rezultate calitative, datorită influenţei condiţiilor la limită în ansamblu asupra unei soluţii obţinută local [5]. Folosind o reprezentare conformă adecvată care a permis ca în domeniul transformat să se satisfacă automat condiţiile la limită, am putut obţine anterior soluţia curgerii fluidului vîscos într-un domeniu de tip bandă simplu conex. Elementele arbitrare ale soluţiei s-au precizat prin racordarea cu o funcţie fundamentală existentă în tot domeniul şi care satisfăcea condiţiile la limită şi la infinit, dar care nu era soluţie a ecuaţiei de mişcare decît în vecinătatea punctului de la infinit (amonte şi aval) [6].

2. ENUNŢUL PROBLEMEI

Se studiază mişcarea plană a fluidului vîscos newtonian incompresibil în jurul unui corp cu frontiera la distanţă finită. Se presupune că în vecinătatea punctului de la infinit (amonte şi aval) curgerea este uniformă şi se produce spre dreapta de la stînga (fig. 1). Frontiera corpului se presupune o curbă netedă pe porţiuni, adică este descrisă în reprezentarea parametrică de funcţii de clasă C_0 (derivatele admit doar discontinuităţi de prima speţă).

Curgerea este admisă staţionară. După eliminarea presiunii şi introducerea funcţiei de curent ψ, ecuaţiile lui Navier-Stokes se reduc la ecuaţia lui Helmholtz

$$\Delta\Delta\,\psi = -\,Re\frac{D\,(\psi,\,\Delta\psi)}{D\,(x,\,y)}. \tag{1}$$

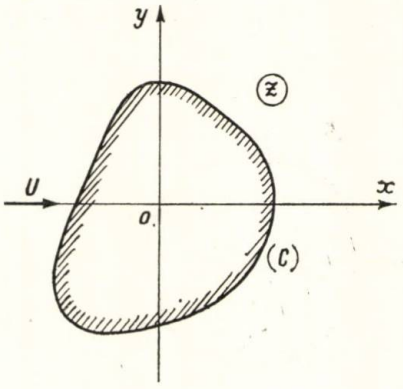


Fig. 1

Condiţiile la limită pe suprafaţa solidă C rezultă din condiţia de aderenţă

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{pe } C. \tag{2}$$

Condiţiile la infinit se scriu :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial y} \to U, \\ &\qquad\qquad \text{cînd } \sqrt{x^2+y^2} \to \infty. \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x} \to 0, \end{aligned} \tag{3}$$

În cele ce urmează, deoarece comportarea soluţiei va fi urmărită în vecinătatea suprafeţei corpului, condiţiile la limită (3) vor fi înlocuite de condiţia de racordare asimptotică cu o anumită soluţie fundamentală valabilă în tot domeniul fizic al curgerii :

$$\psi \sim \psi_0 \text{ în vecinătatea lui } C. \tag{4}$$

Soluţia fundamentală ψ_0 satisface condiţiile la limită pe suprafaţa corpului şi satisface asimptotic (în sensul metodei dezvoltărilor asimptotice racordate) şi condiţiile la infinit (3), dar nu verifică exact ecuaţia lui Helmholtz (1). Această soluţie va fi precizată în cele ce urmează.

3. REPREZENTAREA CONFORMĂ

Fie funcţia de variabilă complexă

$$Z = f(z), \tag{5}$$

care realizează reprezentarea conformă a domeniului din figura 1 pe exteriorul cercului unitar cu centrul în origina 0 a planului Z (fig. 2).

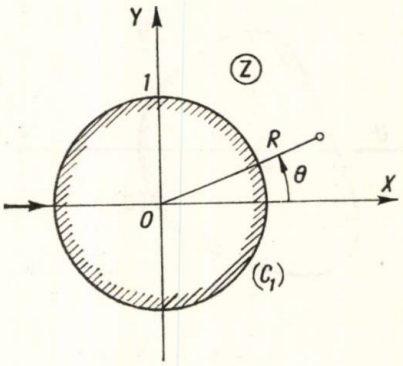


Fig. 2

În punctele de discontinuitate ale tangentei dusă la frontiera domeniului fizic din figura 1, reprezentarea conformă îşi pierde sensul. Vom elimina de aceea aceste puncte cu ajutorul unor cercuri de rază mică.

Vom înlocui studiul ecuaţiei (1) cu condiţiile la limită (2) şi condiţia de racordare asimptotică (4) cu studiul ecuaţiei şi condiţiilor transformate cu ajutorul formulei (5).

Vom folosi următoarele identităţi elementare :

$$\Delta_{xy}\psi(x, y) = M\Delta_{XY}\psi(X, Y), \tag{6}$$

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = M\frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Y)};$$

S-a folosit notaţia

$$M = \left|\frac{dZ}{dz}\right|^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2. \tag{7}$$

Ecuaţia (1) devine după transformare

$$\Delta(M\Delta\psi) = -\,Re\frac{D(\psi, M\Delta\psi)}{D(X, Y)}; \tag{8}$$

Deoarece derivatele parţiale ale funcţiilor se transformă liniar şi omogen,

$$\frac{\partial\psi}{\partial X} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} \text{ etc.},$$

rezultă că prin transformarea (5) condiţiile la limită nu se modifică:

$$\frac{\partial \psi}{\partial S} = \frac{\partial \psi}{\partial N} = 0 \qquad \text{pe } C_1. \tag{9}$$

Observăm că, deoarece transformarea conformă aleasă nu modifică punctul de la infinit şi păstrează condiţiile de la infinit, se poate scrie explicit formula (5) astfel:

$$Z = A_0 + A_1 z + \frac{K_1}{z} + \frac{K_2}{z^2} + \ldots, \tag{10}$$

adică formula (7) devine

$$M = \left|\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right|^2 = A_1' + \frac{K_2'}{|z|^2} + \ldots \tag{11}$$

Funcţia de transformare (10) se poate găsi cu una din metodele cunoscute, de exemplu cu metoda parametrului mic [7]. Astfel, funcţia de transformare a exteriorului curbei, dată sub formă parametrică

$$z(t) = \mathrm{e}^{it}(1 - \lambda\, \mathrm{e}^{it}), \tag{12}$$

se scrie

$$Z = (1 - \lambda^2 + \lambda^4)\, z + (\lambda - 3\,\lambda^3 + \lambda^4) + (\lambda^2 - 6\lambda^4)\, \frac{1}{z} + \frac{\lambda^3}{z^2} + \frac{\lambda^4}{z^3}. \tag{13}$$

Este convenabil să se treacă în planul Z la un sistem de coordonate polare

$$Z = R\mathrm{e}^{i\theta}. \tag{14}$$

Ecuaţia lui Helmholtz transformată (8) se transcrie astfel:

$$\Delta(M\Delta\psi) = \frac{\mathrm{Re}}{r}\, \frac{D(M\Delta\psi, \psi)}{D(r, \theta)}, \tag{15}$$

unde am notat

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}; \tag{16}$$

Condiţiile la limită (9) se scriu:

$$\psi\Big|_{r=1} = \frac{\partial \psi}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0. \tag{17}$$

Se observă că în vecinătatea punctului de la infinit, cînd $|Z| \to \infty$, conform formulei (11), $M \to A_1'$, deci ecuaţia lui Helmholtz transformată (8) tinde asimptotic către ecuaţia lui Helmholtz (1) în planul Z. În consecinţă, soluţia ecuaţiei lui Helmholtz transformată (8) se racordează asimp-

totic la infinit cu soluţia ecuaţiei lui Helmholtz (1) pentru acelaşi domeniu (exteriorul cercului unitar cu centrul în origine).

Pentru exprimarea comodă a condiţiilor la limită (17) este comod să se efectueze schimbarea de variabile

$$\xi = r - 1, \qquad \theta = \theta. \tag{18}$$

Ecuaţia (15) devine :

$$(\xi + 1)\,\Delta\,(M\Delta\psi) = Re\frac{\Delta(M\Delta\psi,\ \psi)}{D(\xi,\ \theta)}, \tag{19}$$

unde am notat

$$\Delta\psi = \frac{1}{\xi + 1}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi + 1)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right] + \frac{1}{(\xi + 1)^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \tag{20}$$

Condiţiile la limită (17) se scriu

$$\psi\Big|_{\xi=0} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} = 0. \tag{21}$$

4. FORMA GENERALĂ A SOLUŢIEI

Vom căuta soluţia generală a ecuaţiei (19) cu condiţiile la limită (21) sub forma unei serii de puteri ale lui ξ, coeficienţii fiind funcţii de θ :

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta)\xi^n. \tag{22}$$

Vom admite pentru funcţia M dezvoltarea cunoscută :

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(\theta)\xi^n; \tag{23}$$

se obţine următorul şir de egalităţi :

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\theta)\xi^n,\\
M\cdot\Delta\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\theta)\xi^n,\\
\frac{D(\psi, M\cdot\Delta\psi)}{D(\xi,\ \theta)} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\theta)\xi^n,\\
\Delta(M\Delta\psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n(\theta)\xi^n,\\
(1 + \xi)\,\Delta(M\Delta\psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta)\xi^n,
\end{aligned} \tag{24}$$

unde s-a notat

$$b_n = (n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}[(p+1)\,a_{p+1} + (n-p+1)\,a_p''],$$

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} \mu_{n-p} b_p,$$

$$d_n = f_n - g_n,$$

$$f_n = \sum_{p=0}^{n} (p+1)\,c_{p+1}\,a'_{n-p}, \tag{25}$$

$$g_n = \sum_{p=0}^{n} (p+1)\,a_{p+1}\,c'_{n-p},$$

$$e_n = (n+1)(n+2)\,c_{n+2} + \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}[(p+1)\,c_{p+1} + (n-p+1)\,c_p''],$$

$$f_n = e_n + e_{n-1}; \quad (n \geqslant 1); \quad f_0 = e_0.$$

Dacă se introduc formulele (24) în ecuaţia (19) şi se identifică coeficienţii aceloraşi puteri ale lui ξ, se obţine relaţia de recurenţă fundamentală

$$-f_n = Re \cdot d_n. \tag{26}$$

Întrucît b_n conţine pe a_{n+2}, iar c_n conţine pe b_n, urmează că coeficienţii c_n conţin pe a_{n+2}. Coeficienţii f_n conţin pe c_{n+1}, deci pe a_{n+3}, iar g_n doar pe a_{n+1}, adică d_n conţine pe a_{n+3}. Coeficientul e_n conţine pe c_{n+2}, deci pe a_{n+4}, adică deoarece f_n conţine pe e_n, relaţia de recurenţă (26) determină pe a_{n+4} în funcţie de coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_{n+3}$ şi de derivatele lor. Explicitînd coeficientul a_{n+4} în expresia lui f_n, vom nota

$$f_n = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\,a_{n+4}\mu_0 + h_n; \tag{27}$$

vom putea scrie formula de recurenţă pentru coeficienţii a_n

$$a_{n+4} = -\frac{Re \cdot d_n + h_n}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\,\mu_0} \qquad (n \geqslant 0). \tag{28}$$

În consecinţă, ecuaţia (19) determină coeficienţii începînd cu a_4 inclusiv, iar coeficienţii a_0, a_1, a_2, a_3 constituie patru funcţii arbitrare de variabila θ care se vor determina prin condiţii suplimentare (condiţiile la limită, racordarea asimptotică în vecinătatea punctului de la infinit etc.). Apariţia celor patru funcţii arbitrare este legată de faptul că ecuaţia (19) este de ordinul 4 [8].

Este esențială împrejurarea că relația de recurență (28) determină explicit în mod iterativ coeficienții a_n doar în funcție de termenii anteriori și de derivatele acestora, fără a conduce la ecuații diferențiale sau integrale, cum se întîmplă, de exemplu, pentru seriile lui Goertler din teoria stratului-limită. Ca urmare, în fiecare etapă se pot calcula toți termenii de ordinul dat, fără a interveni termenii de rang superior. În linii generale, situația este analogă aceleia dintr-o lucrare anterioară a autorului [6].

Condițiile la limită (21) determină primii doi coeficienți arbitrari

$$a_0(\theta) = a_1(\theta) = 0. \tag{29}$$

Condițiile la infinit (3) nu pot fi analizate deoarece dezvoltarea (22) este valabilă în apropierea suprafeței corpului, deci pentru valori mici ale lui $|\xi|$. După cum am menționat la punctul 2, vom înlocui condițiile la infinit (3) prin condiția de racordare asimptotică în domeniu a soluției, dată prin dezvoltarea (22) cu a_0 și a_1 nuli, cu o soluție aproximativă obținută prin metoda dezvoltărilor asimptotice racordate care este valabilă și la mari distanțe.

Vom observa că, la mari distanțe, ecuația lui Helmholtz transformată (8) devine asimptotic identică cu ecuația lui Helmholtz netransformată (1) pentru mișcarea în jurul cercului în planul Z. Admițînd pentru aceasta o dezvoltare de forma (22) ca soluție, se obțin relații de recurență asemănătoare cu formula (28) în care facem $M = 1$. Deoarece condițiile la limită (21) sînt satisfăcute, iar coeficienții a_2 și a_3 nu pot fi determinați prin ecuația cu derivate parțiale (8), vom impune ca ei să fie identici pentru ambele tipuri de ecuații în tot domeniul. Admițînd că soluția (22) există (adică seria este convergentă) ea satisface astfel condițiile la limită, la infinit și ecuația cu derivate parțiale (adică relația de recurență). Dacă aceste condiții determină în mod unic soluția, rezultă că am obținut soluția curgerii fluidului vîscos în planul transformat Z. Notînd soluția aproximativă obținută prin metoda dezvoltărilor asimptotice racordate prin ψ_0 și transcriind-o ca o dezvoltare în serie

$$\psi_0 = a_2^{(0)}\xi^2 + a_3^{(0)}\xi^3 + a_4^{(0)}\xi^4 + \ldots, \tag{30}$$

vom satisface condiția la infinit (4) impunînd egalitatea coeficienților

$$a_2 = a_2^{(0)}; \quad a_3 = a_3^{(0)}. \tag{31}$$

Soluția aproximativă a mișcării fluidului vîscos în jurul cilindrului circular ψ_0 a fost dată de către Kaplun prin folosirea metodei dezvoltărilor asimptotice racordate [9]. El a izbutit astfel să rezolve paradoxul lui Stokes. Soluția lui Kaplun se scrie :

$$\psi_0 \sim \left(\Delta_1 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \Delta_1^n\right)\left(r.\ln r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)\sin\theta, \tag{32}$$

unde s-a notat

$$\Delta_1 = \left(\ln\frac{4}{Re} - \gamma + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\ln\frac{3{,}703}{Re}\right)^{-1}, \tag{33}$$

iar γ este constanta lui Euler ($\gamma = 0{,}5772\ldots$). După Kaplun, coeficientul a_3 are valoarea

$$a_3 = -0{,}87. \tag{34}$$

S-au folosit dezvoltarea lui Stokes (valabilă în vecinătatea corpului) şi dezvoltarea lui Oseen (valabilă la mari distanţe) racordate în domeniul comun situat la o distanţă medie.

Dezvoltarea în serie (30) se scrie explicit

$$\psi_0 \sim C \cdot \sin\theta \cdot \xi^2 - \frac{2}{3} C. \sin\theta \cdot \xi^3 + \frac{7}{12} C. \sin\theta \cdot \xi^4 + \ldots, \tag{35}$$

în care s-a notat

$$C = \Delta_1 - 0{,}87\Delta_1^3. \tag{36}$$

Condiţiile (31) se scriu :

$$\begin{aligned} a_2 &= C. \sin\theta, \\ a_3 &= -\frac{2}{3} C. \sin\theta. \end{aligned} \tag{37}$$

Prin aceasta, cu ajutorul relaţiilor de recurenţă (28), soluţia problemei este complet determinată. Se revine în planul fizic prin transformarea (5) şi se obţine dezvoltarea soluţiei după funcţii de coordonate.

Primită la redacţie la 13 aprilie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. H. Goertler, *A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flows*, J. Math. Mech., **6**, *1* (1957).
2. G. Birkhoff, *Hydrodynamics*, Princeton-New Jersey, Princeton University Press, 1960.
3. Milton Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, New York-London, 1964.
4. I. Seteanu, *Mişcarea plană a fluidului vîscos într-un domeniu simplu conex nemărginit*, St. cerc. mec. apl., **28**, *2*, 369–379 (1969).
5. L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations*, *Interscience Publishers*, New York-London-Sydney, 1964.
6. I. Seteanu, *Séries dans l'étude du fluide visqueux*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **14**, *3*, 507–517 (1969).
7. Л. Канторович, В. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950.
8. R. Courant, *Partial differential equations*, New York–London, 1962.
9. S. Kaplun, *Low Reynolds number flow past a circular cylinder*, J. Math. Mech., *6*, 595–603 (1957).

STUDIUL ACȚIUNII RUGOZITĂȚII SUPRAFEȚEI ASUPRA TRANZIȚIEI STRATULUI-LIMITĂ LAMINAR ÎN STRAT-LIMITĂ TURBULENT

de VALERIU PANAITESCU
Institutul politehnic București

Se expune o metodă de studiu a tranziției stratului-limită laminar în turbulent, într-un fluid incompresibil, sub acțiunea rugozității suprafeței corpului. Se stabilește o reprezentare a mecanismului de tranziție pe baza analizării datelor experimentale cunoscute în literatură, se introduc unele considerente de analiză dimensională și se generalizează ipoteza lui Taylor asupra mecanismului tranziției premature a stratului-limită laminar în turbulent. Se examinează cazul curgerii în jurul plăcii plane cu ajutorul metodei propuse și se stabilește o schemă de calcul practic.

1. INTRODUCERE, LISTA PRINCIPALELOR NOTAȚII

Rugozitatea peretelui favorizează tranziția curgerii laminare în curgere turbulentă în sensul că menținînd aceleași condiții de curgere, tranziția în cazul unui perete rugos are loc la numere Reynolds mai mici decît în cazul unui perete neted (fig. 1). Acest lucru poate fi explicat pe baza teoriei stabilității : rugozitatea provoacă în curgerea laminară perturbații suplimentare care se suprapun peste perturbațiile deja existente ca urmare al unui anumit grad de turbulență al curgerii, astfel încît cele mai puternice perturbații însumate au nevoie de o creștere neînsemnată pentru ca să aibă loc trecerea de la mișcarea laminară la mișcarea turbulentă.

Deși problema influenței rugozității peretelui asupra trecerii mișcării laminare în mișcare turbulentă este de o importanță tehnică deosebită, practic încă nu a fost obținut nici un rezultat teoretic în această direcție [1]. Rezultatele existente în literatură sînt rezultate experimentale.

Se examinează tranziția stratului-limită laminar în turbulent, sub acțiunea rugozității suprafeței (fig. 2).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1051–1064

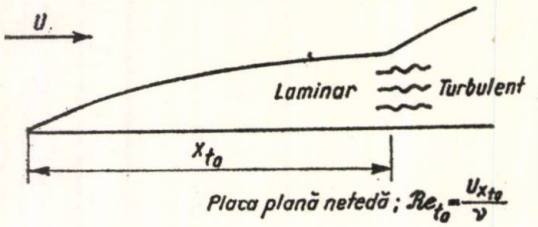
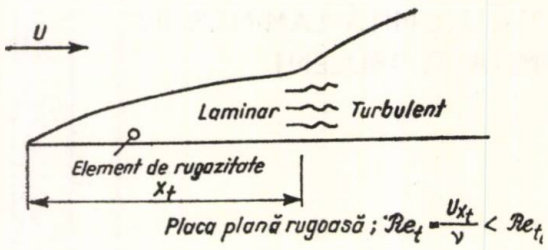


Fig. 1. — Reprezentarea schematică a efectului elementului de rugozitate asupra tranziției pe placa plană.



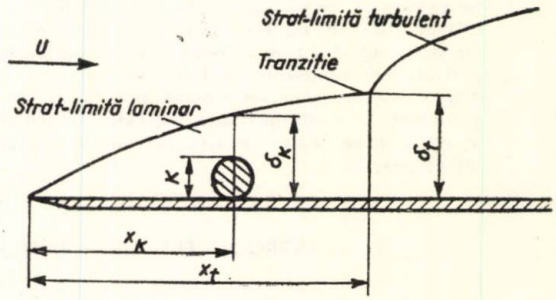


Fig. 2. — Tranziția stratului-limită laminar în strat-limită turbulent, sub acțiunea unui element de rugozitate.

În lucrare se folosesc următoarele notații principale :

ρ — densitatea fluidului,
ν — coeficientul cinematic de viscozitate,
k — înălțimea elementului de rugozitate,
x_k — abscisa punctului în care este plasat elementul de rugozitate,
x_t — abscisa punctului de tranziție,
δ_{1k} — grosimea de deplasare a stratului-limită în punctul de abscisă x_k
δ_{1t} — grosimea de deplasare a stratului-limită în punctul de abscisă x_t
δ_{2k} — grosimea de pierdere de impuls a stratului-limită în punctul de abscisă x_k,
δ_{2t} — grosimea de pierdere de impuls a stratului-limită în punctul de abscisă x_t,
U — viteza pe frontiera exterioară a stratului-limită,
u_k — viteza în stratul-limită la înălțimea elementului de rugozitate,
u — valoarea medie pătratică a componentei pulsatorii a vitezei,

u_k^* — viteza dinamică calculată în punctul de abscisă x_k,

τ_{0k} — tensiunea tangențială de frecare pe perete în punctul de abscisă x_k,

f_0 — valoarea parametrului de formă în punctul de desprindere a stratului-limită,

$\widetilde{\frac{\partial p}{\partial x}}$ — valoarea medie pătratică a pulsației gradientului de presiune pe frontiera exterioară a stratului-limită.

2. ANALIZAREA PRINCIPALELOR REZULTATE DIN LITERATURĂ. FORMULAREA OBIECTIVULUI LUCRĂRII

Pentru studierea influenței rugozității asupra tranziției stratului-limită laminar în strat-limită turbulent au fost efectuate numeroase cercetări experimentale. Astfel, S. Goldstein [2], J. Tani, F. R. Hama și S. Mituisi [3], A. Fage și J. H. Preston [4], A. Fage [5] au stabilit formule empirice pentru determinarea înălțimii admisibile k_a a rugozității (cea mai mare înălțime care încă nu influențează asupra trecerii formei laminare de curgere în forma turbulentă) și a înălțimii critice k_c (cea mai mică înălțime a rugozității la care trecerea de la regimul laminar de mișcare la regimul turbulent are loc nemijlocit în spatele elementului de rugozitate).

C. Gazley jr. [6] a determinat dependența poziției x_t a punctului de tranziție funcție de înălțimea k și lățimea b a elementului de rugozitate, sub forma $Ux_t/\nu = f\ (k^2/bx_t)$. După o astfel de lege, poziția punctului de tranziție x_t nu depinde de poziția x_k a elementului de rugozitate; acest lucru nu este însă confirmat de măsurătorile ulterioare efectuate, de exemplu, de J. Tani și F. R. Hama [7], P. F. Brinich [8], E. G. Feindt [9]. H. L. Dryden [10] a stabilit că raportul dintre numărul Reynolds de tranziție pentru peretele rugos $\mathcal{R}e_{xt}$ și numărul Reynolds de tranziție pentru peretele neted $\mathcal{R}e_{xt0}$ este o funcție universală de raportul dintre înălțimea k a rugozității și grosimea de pierdere de impuls δ_{2k}, $\mathcal{R}e_{xt}/\mathcal{R}e_{xt0} = f\,(k/\delta_{2k})$, universalitatea funcției constînd în nedependența ei de turbulența inițială a curgerii. Această ipoteză este preluată de mulți cercetători, fiind utilizată larg în calculele aerodinamice, de exemplu de G. V. Lachmann [11]. Totuși, experiențele efectuate pe instalații cu un curent inițial puternic turbulent de E. G. Feindt [9] și J. Tani, F. R. Hama, S. Mituisi [12] dovedesc că ipoteza lui Dryden este valabilă numai în cazul în care gradul de turbulență inițială nu este prea mare.

Analiza datelor din literatură referitoare la studiul influenței rugozității suprafeței asupra tranziției stratului-limită laminar în strat-limită turbulent stabilește că rezultatele obținute în această direcție sînt rezultate experimentale iar formulele de calcul propuse sînt formule empirice. Plecînd de la această constatare, lucrarea își propune să facă un studiu teoretic și să dea o schemă efectivă de calcul al acțiunii rugozității asupra fenomenului de tranziție, ale cărui rezultate să fie în concordanță cu datele experimentale.

3. EXPUNEREA METODEI PROPUSĂ PENTRU CALCULUL TRANZIȚIEI STRATULUI-LIMITĂ LAMINAR ÎN STRAT-LIMITĂ TURBULENT SUB ACȚIUNEA RUGOZITĂȚII PERETELUI

3.1. *Supoziție asupra mecanismului de tranziție.* Mișcarea fluidului în jurul elementului de rugozitate de pe suprafața unui corp este însoțită de o generare periodică de vîrtejuri. Această ipoteză este confirmată experimental prin vizualizarea curgerii în stratul-limită cu ajutorul vinelor colorate, ca de exemplu în lucrarea lui F. R. Hama, I. Long., I Hegarty, [13]. Mișcarea de înaintare a lanțurilor de vîrtejuri formate în spatele elementului de rugozitate provoacă pulsații periodice de viteză în stratul-limită care, pe de o parte servesc drept surse de perturbații turbulente, iar pe de altă parte exercită o influență asupra distribuției vitezelor în stratul-limită. Datorită efectului perturbator al lanțurilor de vîrtejuri, profilul vitezelor capătă într-un anumit punct din spatele elementului de rugozitate o formă care este caracteristică profilului de viteze corespunzător punctului de desprindere a stratului limită. În figura 3 este reprezentată (cu linie continuă) forma profilului vitezelor în stratul-limită în prezența unui element de rugozitate pe suprafață în comparație cu forma profilului vitezelor în cazul suprafeței netede (linie punctată). Existența unui element de rugozitate pe suprafață favorizează desprinderea stratului-limită în sensul că acesta se desprinde într-un punct de abscisă mai mică, deci la un număr Reynolds corespunzător mai mic, în comparație cu cazul în care suprafața considerată este netedă. În continuare stratul-limită deprins prematur se descompune în vîrtejuri separate și trece în turbulent. Această reprezentare a curgerii pune în evidență legătura nemijlocită între desprinderea prematură a stratului-limită și tranziția stratului laminar în turbulent provocată de elementul de rugozitate.

3.2. *Considerații dimensionale.* După cum reiese din analizarea rezultatelor experimentale obținute de diferiți cercetători, abscisa x_t a punctului de tranziție (fig. 2) este funcție numai de înălțimea k a elementului de rugozitate, de abscisă x_k a punctului în care este plasat elementul de rugozitate, de viteza U a curentului de fluid din exteriorul stratului-limită

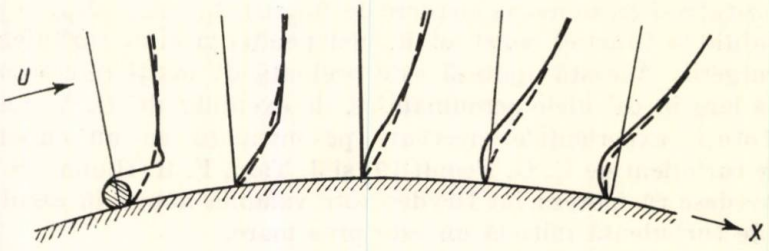


Fig. 3. — Comparație între forma profilului vitezelor în stratul-limită în prezența unui element de rugozitate (linie continuă) și forma profilului vitezelor în cazul suprafeței netede (linie punctată).

și de viscozitatea cinematică ν a fluidului. Deoarece cele cinci variabile x_t, k, x_k, U și ν implică numai unități de lungime și timp, raționamentele dimensionale arată că o relație funcțională generală între aceste cinci cantități dimensionale poate fi redusă la o relație între trei parametri adimensionali independenți. Din mulțimea parametrilor adimen-

sionali care pot fi construiți se selectează în primul rînd numărul Reynolds de tranziție $\mathcal{R}e_t = Ux_t/\nu$ și numărul Reynolds nominal al elementului de rugozitate $\mathcal{R}e_k = Uk/\nu$ deoarece primul permite localizarea punctului de tranziție, iar al doilea introduce dimensiunea k a elementului de rugozitate. Cel de al treilea parametru adimensional trebuie să fie format prin folosirea abscisei x_k a punctului în care este plasat elementul de rugozitate, de exemplu unul din rapoartele x_t/x_k sau k/x_k; raportul k/x_k este preferat față de raportul x_t/x_k ca al treilea parametru adimensional deoarece, pe de o parte k/x_k este determinat numai de caracteristicile geometrice ale modelului studiat și, pe de altă parte, principala variabilă de interes x_t apare în acest fel numai în unul din cei trei parametri. Apare astfel rațională căutarea unei legi de tipul

$$\mathcal{R}e_t = f(\mathcal{R}e_k,\ k/x_k) \tag{1}$$

pentru descrierea fenomenului de tranziție a stratului-limită laminar în strat-limită turbulent datorită acțiunii rugozității suprafeței.

3.3. *Generalizarea ipotezei lui Taylor asupra tranziției premature a stratului-limită laminar în turbulent.* Tranziția stratului-limită laminar în strat-limită turbulent este caracterizată printr-un număr Reynolds critic $\mathcal{R}e_t$ construit cu viteza U a curentului exterior și cu abscisa x_t corespunzătoare punctului de tranziție,

$$\mathcal{R}e_t = \frac{Ux_t}{\nu}. \tag{2}$$

Pentru alcătuirea numărului Reynolds în punctul de tranziție se poate lua, în locul abscisei x_t, grosimea de deplasare δ_{1t} considerată în punctul de tranziție și se obține

$$\mathcal{R}e_{1t} = \frac{U\delta_{1t}}{\nu}. \tag{3}$$

Tranziția stratului-limită laminar în strat-limită turbulent poate fi caracterizată și prin numărul Reynolds $\mathcal{R}e_{2t}$ construit cu grosimea de pierdere de impus δ_{2t} corespunzătoare punctului de tranziție

$$\mathcal{R}e_{2t} = \frac{U\delta_{2t}}{\nu}. \tag{4}$$

Numerele Reynolds $\mathcal{R}e_{1t}$ și $\mathcal{R}e_{2t}$ pot fi exprimate în funcție de numărul Reynolds $\mathcal{R}e_t$, dacă se ține seama de relațiile dintre grosimile δ_{1t} și δ_{2t} și abscisa x_t a punctului de tranziție. De exemplu, în cazul plăcii plane, conform calculelor efectuate de H. Blasius [14], $\delta_{1t} = 1{,}73\sqrt{\nu x_t/U}$ și $\delta_{2t} = 0{,}664\sqrt{\nu x_t/U}$; rezultă $\mathcal{R}e_{1t} = 1{,}73\sqrt{\mathcal{R}e_t}$ și $\mathcal{R}e_{2t} = 0{,}664\sqrt{\mathcal{R}e_t}$.

Pentru studierea influenței înălțimii k a elementului de rugozitate asupra fenomenului de tranziție, se construiește numărul Reynolds $\mathcal{R}e_k$,

$$\mathcal{R}e_k = \frac{Uk}{\nu}. \tag{5}$$

Se apreciază că pentru înălțimi k foarte mici ale elementului de rugozitate, deci pentru valori ale numărului Reynolds $\mathcal{R}e_k$ inferioare unei anumite limite, perturbațiile provocate de rugozitate sînt sub nivelul perturbațiilor care determină gradul de turbulență al curgerii exterioare; în acest caz rugozitatea nu are nici o influență asupra trecerii curgerii laminare în curgere turbulentă. Această ipoteză, confirmată de rezultatele experimentale, de exemplu de cele ale lui S. Goldstein [2], va fi folosită ulterior pentru determinarea expresiei numărului Reynolds de tranziție $\mathcal{R}e_{2t}$.

G. I. Taylor [15] a studiat influența turbulenței inițiale a curentului asupra trecerii stratului-limită laminar în strat-limită turbulent și a formulat o ipoteză asupra mecanismului tranziției premature, exprimată matematic prin relația

$$\frac{\delta_{2t}^2}{\nu\rho U}\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-\frac{\widetilde{\partial p}}{\partial x}\right]=f_0. \tag{6}$$

Acceptarea mecanismului de tranziție a stratului-limită laminar în strat-limită turbulent sub acțiunea rugozității suprafeței, descris la punctul 3.1., permite generalizarea pentru acest caz de tranziție a ipotezei lui Taylor, [16]. Pentru aceasta se evaluează grosimea de pierdere de impuls δ_{2t} a stratului-limită în punctul de tranziție, gradientul de presiune pe frontiera exterioară a stratului-limită $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ și valoarea medie pătratică a pulsației gradientului de presiune pe frontiera exterioară a stratului $\dfrac{\widetilde{\partial p}}{\partial x}$.

Grosimea de pierdere de impuls δ_{2t} a stratului-limită în punctul de abscisă x_t se determină din formula (4) a numărului Reynolds de tranziție

$$\delta_{2t}=\frac{\nu}{U}\mathcal{R}e_{2t}. \tag{4'}$$

Expresia gradientului de presiune $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ pe frontiera exterioară a stratului-limită se deduce din ecuația de mișcare

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{7}$$

pentru cazul mișcării permanente rezultă

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\rho U\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{8}$$

Pentru determinarea valorii medii pătratică a pulsației gradientului de presiune $\frac{\widetilde{\partial p}}{\partial x}$ se face ipoteza că curentul turbulent care se formează datorită generării vîrtejurilor în urma elementului de rugozitate este izotrop. În conformitate cu teoria statistică a turbulenței se poate scrie, după G. I. Taylor [17], proporționalitatea

$$\frac{\widetilde{\partial p}}{\partial x} \approx - \rho \frac{\widetilde{u}^2}{l}, \tag{9}$$

în care $\widetilde{u}$ este valoarea medie pătratică a componentei pulsatorii a vitezei, iar l este dimensiunea celui mai mic vîrtej; se admite că această dimensiune este proporțională cu înălțimea k a elementului de rugozitate,

$$l \approx k.$$

Relația (9) se scrie

$$\frac{\widetilde{\partial p}}{\partial x} \approx - \rho \frac{\widetilde{u}^2}{k}. \tag{9'}$$

Se ține seama că pulsațiile vitezelor apar ca urmare a formării vîrtejurilor la curgerea în jurul elementului de rugozitate și se notează cu Γ circulația vîrtejului desprins în spatele elementului de rugozitate; în acest caz, valoarea medie pătratică a componentei pulsatorii a vitezei $\widetilde{u}$ în vecinătatea suprafeței corpului are expresia

$$\widetilde{u} \approx \frac{\Gamma}{k}. \tag{10}$$

Folosind legea liniară a distribuției vitezelor în stratul-limită, viteza u_k, măsurată la o distanță de suprafața peretelui egală cu înălțimea k a elementului de rugozitate, se scrie

$$u_k \approx U \frac{k}{\delta_{2k}}; \tag{11}$$

Conform ipotezei lui H. Schlichting [1], circulația Γ a vîrtejului care se formează la curgerea în jurul elementului de rugozitate este proporțională cu produsul dintre viteza u_k în stratul-limită la înălțimea elementului de rugozitate și înălțimea k a acestui element. Se deduce, ținînd seama de relația (11),

$$\Gamma \approx k u_k \approx U \frac{k^2}{\delta_{2k}}. \tag{12}$$

Se introduce această expresie a circulației Γ în formula (10) și se obține pentru valoarea medie pătratică a componentei pulsatorii a vitezei relația

$$\widetilde{u} \approx U \frac{k}{\delta_{2k}}. \tag{13}$$

Cu ajutorul acestei formule, valoarea medie pătratică a pulsației gradientului de presiune $\frac{\widetilde{\partial p}}{\partial x}$, dată de (9'), se scrie sub forma

$$\frac{\widetilde{\partial p}}{\partial x} \approx -\rho U^2 \frac{k}{\delta_{2k}^2}. \tag{14}$$

Ținînd seama de expresiile (4'), (8) și (14) ale mărimilor δ_{2t}, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ și respectiv $\frac{\widetilde{\partial p}}{\partial x}$, ipoteza lui Taylor dată de relația (5) se scrie sub forma

$$\frac{1}{\nu\rho U}\frac{\nu^2}{U^2}\mathcal{R}e_{2t}^2\left[-\rho U\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}+\rho U^2\frac{k}{\delta_{2k}^2}\right]\approx f_0$$

sau, după efectuarea unor operații simple,

$$\frac{k^2}{\delta_{2k}^2}\mathcal{R}e_{2t}^2 \approx \frac{Uk}{\nu}\left(f_0+\frac{\nu}{U^2}\mathcal{R}e_{2t}^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right),$$

înlocuind în partea dreaptă pe $\mathcal{R}e_{2t}$ cu expresia sa dată de (4) se obține

$$\mathcal{R}e_{2t}^2 \approx \frac{\delta_{2k}^2}{k^2}\frac{Uk}{\nu}\left(f_0+\frac{1}{\nu}\delta_{2t}^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right). \tag{15}$$

Se introduce notația

$$f=\frac{1}{\nu}\delta_{2t}^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{16}$$

Mărimea f are semnificația unui alt parametru de formă; această semnificație este evidentă și rezultă din simpla comparație cu parametrul de formă

$$\lambda=\frac{1}{\nu}\delta^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}, \tag{17}$$

introdus de K. Pohlhausen [18] în cadrul metodei sale de integrare aproximativă a ecuațiilor stratului-limită.

Tranziția stratului-limită laminar în strat-limită turbulent sub acțiunea rugozității peretelui este caracterizată de numărul Reynolds critic $\mathcal{R}e_{2t}$. După cum s-a mai precizat, rugozitatea peretelui poate să favorizeze

tranziția curgerii laminare în curgere turbulentă numai dacă înălțimea elementului de rugozitate depășește o anumită valoare. Conform indicațiilor lui H. Schlichting [1], în cazul în care

$$k \leqslant 0{,}3\ \delta_{1k}, \tag{18}$$

prezența rugozității practic nu mai influențează trecerea mișcării laminare în mișcare turbulentă și suprafața peretelui se consideră o suprafață netedă din punct de vedere hidraulic. Relația (18) se poate transcrie sub o formă în care este pus în evidență numărul Reynolds $\mathcal{R}e_k$ asociat curgerii și construit cu înălțimea k a elementului de rugozitate,

$$\mathcal{R}e_k = \frac{Uk}{\nu} \leqslant 0{,}52 \sqrt{\frac{Ux_k}{\nu}}. \tag{19}$$

Se presupune că numărul Reynolds $\mathcal{R}e_k$ depășește valoarea limită dată de relația (19), deci tranziția este influențată de rugozitate.
Trecerea stratului-limită laminar în strat-limită turbulent sub acțiunea rugozității suprafeței este dată de numărul Reynolds critic $\mathcal{R}e_{2t}$. K. Wieghardt [19], pe baza analizării unor rezultate experimentale obținute pentru diferiți gradienți de presiune pe frontiera exterioară a stratului-limită, stabilește cu ajutorul unor considerații ale teoriei stabilității hidrodinamice următoarea formulă de calcul al numerelor Reynolds critice inferioare, $\mathcal{R}e_{2tH}$,

$$\mathcal{R}e_{2tH} = e^{a-bH}, \tag{20}$$

în care a și b sînt niște mărimi constante, iar H este raportul dintre grosimea de deplasare și grosimea de pierdere de impuls a stratului-limită; K. Wieghardt recomandă pentru constantele a și b valorile $a = 29{,}1$ și $b = 9$.

Se propune pentru determinarea valorilor numerelor Reynolds critice inferioare o formulă de tipul formulei (20) stabilită de K. Wieghardt, cu valorile $a = 30$ și $b = 9{,}5$, deci

$$\mathcal{R}e_{2tH} = e^{30-9{,}5H}. \tag{21}$$

Se constată o bună concordanță între rezultatele obținute cu ajutorul formulei propuse (21) și rezultatele experimentale ale lui W. Schlichting și A. Ulrich [20], D. L. Burrows, A. L. Braslow și N. Tetervin [21], și J. M. Preston [22]. Formula (21) se dovedește a fi valabilă în intervalul $2 \leqslant H \leqslant 2{,}8$, deci exact în domeniul care prezintă mare importanță practică deoarece acest domeniu de variație al raportului H corespunde curegerii în jurul plăcii plane ($H = 2{,}59$) și curgerii în jurul profilelor aerohidrodinamice ($2{,}2 < H < 2{,}7$).

Se ține seama de formulele (5), (16) și de considerațiile care au dus la introducerea numărului Reynolds $\mathcal{R}e_{2tH}$; relația (15) se scrie sub forma

$$\mathcal{R}e_{2t} = \mathcal{R}e_{2tH} + C\left(\frac{k}{\delta_{2k}}\right)^{-1} \sqrt{\mathcal{R}e_k(f_0 + f)}, \tag{22}$$

în care C este o constantă. Mărimea constantei C se determină prin compararea și analizarea datelor de calcul și datelor experimentale; rezultă $C = 75$.

Se constată că formula rezultată este de tipul formulei (1), obținută pe baza aplicării teoriei analizei dimensionale, ceea ce constituie o primă verificare a justeței raționamentelor care au dus la deducerea formulei (22). Spre deosebire de formula (1), în locul abscisei x_t a punctului de tranziție și a abscisei x_k a punctului în care este amplasat elementul de rugozitate apar grosimile de pierdere de impuls corespunzătoare δ_{2t} și δ_{2k}; în literatură se consideră că aceste mărimi energetice dau o descripție mai completă a fenomenului de curgere în stratul-limită, de ex. H, Schlichting, [1], G. I. Taylor, [15] etc. (de altfel mărimile x_t și δ_{2t} și, respectiv, x_k și δ_{2k} sînt mărimi legate prin relații de tipul celor stabilite de H. Blasius [14] și menționate la începutul acestui paragraf). Formula (22) include și alți parametri care influențează procesul de tranziție a stratului-limită și care nu puteau fi sesizați numai cu ajutorul teoriei analizei dimensionale: parametrul de formă în punctul de desprindere a stratului-limită f_0 introdus de G. I. Taylor [15], parametrul de formă f introdus prin relația (16), numărul Reynolds critic inferior $\mathcal{R}e_{2tH}$. Introducerea numărului Reynolds $\mathcal{R}e_{2tH}$ face ca relația (22) să satisfacă condiției amortizării perturbațiilor în stratul-limită, determinate de rugozitatea peretelui, atunci cînd numărul Reynolds critic $\mathcal{R}e_{2t}$ devine egal cu valoarea sa critică inferioară $\mathcal{R}e_{2tH}$.

Rezultatele calculelor numerelor Reynolds critice locale ale tranziției cu ajutorul formulei (22) pot fi reprezentate și grafic. Spre exemplificare, în figura 4 au fost trasate cîteva grafice corespunzătoare parametru-

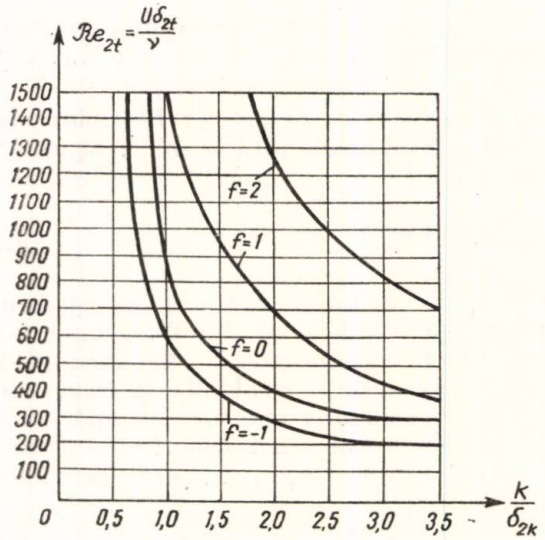


Fig. 4. — Diagrama pentru calculul numărului Reynolds de tranziție.

lui de formă al lui Taylor $f_0 = 0{,}05$ (G. I. Taylor [15] indică pentru acest parametru valori cuprinse între 0,01 și 0,1). Cu ajutorul acestor grafice se poate determina rapid valoarea numărului Reynolds de tranziție $\mathcal{R}e_{2t}$ în

funcție de raportul $\frac{k}{\delta_{2k}}$, pentru diferitele valori ale parametrului de formă f. Pentru verificarea rezultatelor calculelor date de formula (22), se compară aceste rezultate cu datele experimentale cunoscute ale lui P. S. Klebanoff, G. B. Schubauer, K. D. Tidstrom [28] corespunzătoare

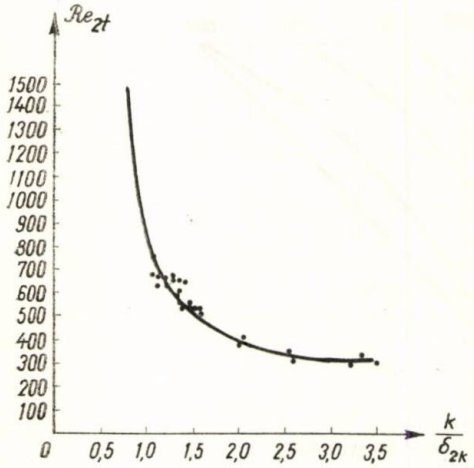


Fig. 5. — Compararea rezultatelor metodei propuse cu rezultatele experimentale ale lui P. S. Klebanoff, G. B. Schubauer și K. D. Tidstrom [28].

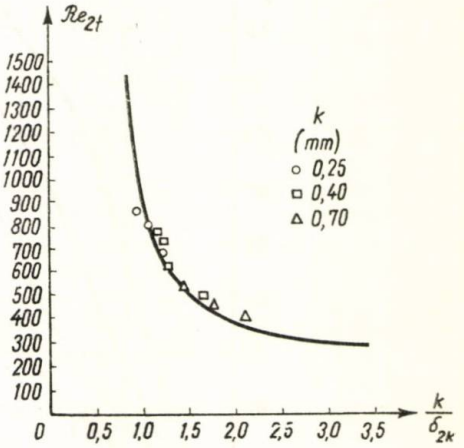


Fig. 6. — Compararea rezultatelor metodei propuse cu rezultatele experimentale ale lui J. Tani, F. R. Hama și S. Mituisi [12].

valorii $f = 0$ a parametrului de formă (fig. 5) și cu datele experimentale obținute de I. Tani și F. R. Hama [7], (fig. 6). Se constată o bună concordanță între rezultatele obținute cu formula propusă (22) și datele experimentale.

4. APLICAREA METODEI PROPUSE PENTRU CALCULUL TRANZIȚIEI STRATULUI-LIMITĂ LAMINAR ÎN TURBULENT PE PLACA PLANĂ, SUB ACȚIUNEA RUGOZITĂȚII

Un caz foarte important pentru aplicațiile practice este cazul tranziției stratului-limită laminar în turbulent pe placa plană, datorită influenței rugozității suprafeței plăcii [24]. În lungul plăcii plane $\frac{dU}{dx} = 0$ și deci parametrul de formă f are valoarea zero. Calculele efectuate cu ajutorul formulei (22) pentru $f = 0$ permit să se obțină grafic (fig. 7) dependența dintre numărul Reynolds critic local al tranziției Ux_t/ν și numărul Reynolds Ux_k/ν construit cu distanța x_k a elementului de rugozitate față de muchia amonte a plăcii pentru diferite valori ale numărului Reynolds nominal al elementului de rugozitate Uk/ν.

Diagrama se folosește pentru determinarea imediată a abscisei x_t a punctului de tranziție a stratului-limită (format pe o placă plană prin deplasarea cu viteza exterioară U a unui fluid de viscozitate ν) pentru o geometrie dată a modelului examinat (precizată prin abscisa x_k și înălțimea k a elementului de rugozitate).

Pe de altă parte diagrama reprezentată în figura 7 dă posibilitatea determinării înălțimii critice k_c a elementului de rugozitate, adică a celei mai mici înălțimi a rugozității la care trecerea de la regimul laminar de mișcare la regimul turbulent are loc nemijlocit în spatele elementului de

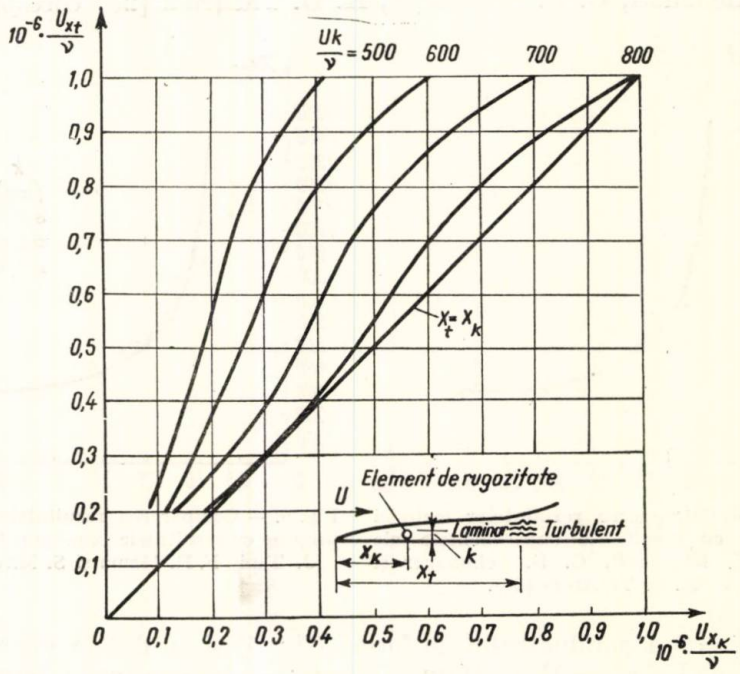


Fig. 7. — Diagramă pentru calculul tranziției stratului-limită laminar în turbulent pe placa plană sub acțiunea rugozității.

rugozitate. Într-adevăr, din examinarea alurei curbelor care dau variația numărului Reynolds al tranziției Ux_t/ν în funcție de numărul Reynolds Ux_k/ν pentru diferitele valori ale numărului Reynolds Uk/ν, reiese că trecerea stratului-limită laminar în turbulent apare chiar în spatele elementului de rugozitate, $x_t = x_k$, dacă

$$\frac{Uk}{\nu} \geqslant 800 + 900\,; \tag{23}$$

acest rezultat corespunde relației $Uk/\nu \geqslant 900$ stabilită experimental de K. Kraemer [25] și verificată de alți cercetători, [1]. Din formula (23) se deduce pentru înălțimea critică k_c a elementului de rugozitate expresia

$$k_c \cong 900\,\frac{\nu}{U}\cdot \tag{24}$$

Utilitatea diagramei din figura 7 constă în aceea că permite rezolvarea efectivă și rapidă a problemei tranziției stratului-limită laminar în strat-limită turbulent pe placa plană, sub influența rcgozității.

5. CONCLUZII

Tranziția de la mișcarea laminară la mișcarea turbulentă este o problemă fundamentală a mecanicii fluidelor. Una din cauzele care favorizează instabilitatea mișcării laminare este rugozitatea suprafeței solide în contact cu fluidul. Studiul acestei probleme are o deosebită importanță practică. În literatură sînt cunoscute numeroase cercetări experimentale, dar nu sînt semnalate studii teoretice ale acestui fenomen.

În lucrare se propune o metodă semiempirică de rezolvare a problemei tranziției stratului-limită laminar în strat-limită turbulent sub influența rugozității suprafeței. Formula finală de calcul a numărului lui Reynolds de tranziție a fost stabilită pe baza utilizării unor raționamente teoretice, în afara determinării unor constante a căror valoare a fost precizată în urma consultării unui număr însemnat de lucrări experimentale. Pentru cazul tranziției stratului-limită laminar în turbulent pe placa plană sub acțiunea rugozității suprafeței plăcii se stabilește o diagramă practică de lucru care soluționează efectiv problema tranziției în acest caz important pentru aplicațiile tehnice.

Rezultatele obținute prin aplicarea metodei propuse și rezultatele experimentale indicate în literatură sînt în bună concordanță.

Primită la redacție la 17 decembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. H. Schlichting, *Entstehung der Turbulenz*, Handbuch der Physik, Band VIII/1, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, p. 351—450 (1959).
2. S. Goldstein, *A note on roughness*, Britisch ARC Rep. a. Mem. 1763 (1936).
3. J. Tani, F. R. Hama, S. Mituisi, *On the permissible roughness in the laminar boundary layer*, Rep. Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., *199* (1940).
4. A. Fage, J. H. Preston, *On transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer*, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A. 178, 201 (1941).
5. A. Fage, *The smollest rize of a spanwise surface corrugation wich affects boundary-layer transition on an aero foil*, Brit. ARC Rep. a. Mem. 2120 (1943).
6. C. Gazley, jr., *Boundary layer stability and transition in subsonic and supersonic flow* (a review of avaisable information with now data in the supersonic range), J. Aeron. Sci, **20**, *19* (1953).
7. J. Tani, F. R. Hama, *Som experiments on the effect of a simple roughness element on boundary layer transition*, J. Aeron. Sci, **20**, 289 (1953).
8. P. F. Brinich, *Boundary layer transition at Mach 3, 12 with and withaut single roughness element*, NACA TN. 3267 (1954).
9. E. G. Feindt, *Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlanges laminar-turbulent von der Oberflächenrauhigkeit und der Druckverteilung*, Teză, Braunschweig, 1956, Jb. 1956 der schiffbautechn. Ges., *50*, 180 (1957).
10. H. L. Dryden, *Review of published data on the effect of roughness on transition from laminar to turbulent flow*, J. Aeron. Sci., *20*, 477 (1953).
11. G. V. Lachmann, *Laminarization through boundary layer control*, Aeron. Eng. Rev., **13**, *8*, (1954).
12. J. Tani, F. R., Hama, S. Mituisi, *On the effect of a single roughness element on boundary-layer transition*, Rep. Inst. Sci. and Technol., Univ. Tokyo, *8*, 125 (1954).
13. F. R. Hama, I. Long., I. Hegarty, *On transition from laminar to turbulent flow*, J. Appl. Phys., **28**, *4* (1957).
14. H. Blasius, *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Zs. Math. Phys., *56* (1908).
15. G. I. Taylor, *Effect of turbulence on boundary-layer*, Proc. Roy. Soc. A, *156* (1936).

16. V. Panaitescu, *În legătură cu influența rugozității suprafețelor asupra tranziției mișcării laminare în mișcare turbulentă*, A XI-a Sesiune științifică a Institutului politehnic din Brașov (1971).
17. G. I. Taylor, *Statistical theory of turbulence*, Proc. Roy. Soc. A. *151* (1935).
18. K. Pohlhausen, *Zur näherungeweisen Integration der Differenntialgleichungen der laminaren Reibungschichten*, Zs. angew. Math. Mech., *1*, 235 (1921).
19. K. Wieghardt, *Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit kontinuierlicher Absaugung*, Ing.-Archiv. Bd. *22*, 368 — 377 (1954).
20. H. Schlichting, A. Ulrich, *Jahrb d. deutschen Lutforschung* I, *8*, (1942).
21. D. L. Burrows, A. K. Braslow, N. Tetervin, *Experimental and theoretical studies of area suction for the control of the laminar boundary layer on a porous bronze*, NACA 64 AO10 airfoil, NACA Techn. Note 1905 (1949).
22. J. M. Preston, *The minimum Reynolds number for a turbulent boundary layer and the selection of a transition device*, J. Fluid Mech., *3*, 373 (1958).
23. P. S. Klebanoff, C. B. Schubauer, K. D. Tidstrom, *Measurements of the effect of two-dimensional and tree-dimensional roughness elements on boundary layer transition*, J. Aeronaut. Sci., **22**, 803 (1955).
24. V. Panaitescu, *Metodă de studiu a acțiunii rugozității peretelui asupra tranziției stratului-limită laminar în strat limită turbulent*, A XIV-a Sesiune științifică a Institutului politehnic din București (1971).
25. K. Kraemer, *Über die Wirkung von Stolperdrähten auf den Grenzschichtumschlag*, Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen, Bericht 59 /A/28 (1959).

FILTRAREA FLUIDELOR DE FORAJ ÎN FORMAȚIILE PERMEABILE DIN JURUL UNEI SONDE

I. FILTRAREA LINIARĂ

de N. MACOVEI
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

În lucrare se studiază filtrarea fluidelor de foraj în formațiile permeabile traversate de o gaură de sondă, luîndu-se în considerație atît rezistența la filtrare a turtei de colmatare depuse pe peretele sondei, cît și cea a mediului filtrant. S-au dezvoltat relații cu ajutorul cărora se pot evalua: viteza de filtrare, volumul și adîncimea de invazie a filtratului în formațiile poroase. În prima parte a lucrării se examinează aproximația liniară a filtrării fazei lichide pentru două situații: a) grosimea depunerilor solide crește continuu, ceea ce are loc în absența circulației axiale a fluidului de foraj, și b) depunerile solide au atins o grosime de echilibru, datorită efectului circulației. Așa cum va rezulta din partea a doua a lucrării, aproximația liniară este valabilă numai pentru durate relativ mici de filtrare și pentru medii poroase cu permeabilitate scăzută (apropiată de cea a turtei de colmatare).

1. INTRODUCERE

Este bine cunoscută importanța capacității de filtrare și colmatare a fluidelor de foraj, aflate în contact cu formațiile permeabile ce constituie pereții găurii de sondă, precum și dificultățile create de existența unei zone de invazie a filtratului și particulelor solide în jurul sondei.

Evaluarea vitezei de filtrare și a grosimii depunerii de particule solide pe suprafața mediului filtrant se efectuează în mod curent, în laborator sau șantier, în absența sau prezența circulației fluidului de foraj în raport cu suprafața filtrantă. Deoarece permeabilitatea formațiilor traversate prin foraj (zeci sau sute de mD) este remarcabil mai ridicată decît cea a turtelor depuse (10^{-4} ... 10^{-1} mD), cu excepția unei perioade foarte scurte de „inițiere" a turtei, se consideră că viteza de filtrare a fluidelor de foraj este controlată doar de permeabilitarea turtei depuse. Ca atare, toate cercetările sînt efectuate la o presiune de filtrare menținută constantă, ce simulează diferența dintre presiunea coloanei de fluid

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1065 — 1080

de foraj și presiunea fluidelor din formație, aceasta din urmă presupusă a fi neafectată de pătrunderea filtratului în formație.

Prezintă interes totuși studierea filtrării în condițiile reale ale găurii de sondă, cu luarea în considerație și a rezistenței mediului filtrant, avînd în vedere că, dimensiunile zonei implicate în fenomenul filtrării sînt mult mai mari decît cele ale turtei depuse.

Unele rezultate, în acest sens, au fost obținute de Gasanov și colaboratorii săi [1], [2]. Anumite inexactități de calcul conduc însă la concluzia existenței unei diferențe de presiune optimă între sondă și formație, la care adîncimea de pătrundere a filtratului în strat este cea mai mică, precum și a existenței unui timp la care pătrunderea încetează, ca urmare a egalizării presiunii din sondă cu cea din strat.

Prin urmare, în cele ce urmează, filtrarea va fi considerată a avea loc într-un domeniu constituit din două subdomenii cu rezistențe la filtrare diferite : turta de colmatare și roca filtrantă (se va ignora deteriorarea permeabilității în zona din jurul sondei).

Pentru simplitate, se va presupune că permeabilitatea și coeficientul de compresibilitate ale turtei depuse au valori constante în orice punct al acesteia sau, altfel spus, se vor utiliza valorile lor medii pe grosimea turtei.

Notații :

k — permeabilitatea ;
β — coeficientul de compresibilitate ;
μ — vîscozitatea filtratului ;
p — presiunea fluidului ;
a — coeficientul de piezoconductibilitate ($k/\beta\mu$).

Se va presupune mediul filtrant semifinit și se va indexa cu 1, ceea ce se referă la turtă și cu 2, ceea ce se referă la mediul filtrant.

În ipoteza că mișcarea filtratului are loc după legea lui Darcy, distribuția de presiune se obține prin rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale liniare :

$$a_i \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^\nu \frac{\partial p_i}{\partial x}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial t} \quad (i = 1,2), \tag{1}$$

unde

$\nu = 0$ — pentru curgerea liniară și
$\nu = 1$ — pentru curgere radial-plană.

Într-o primă aproximație, filtrarea fluidelor de foraj în gaura de sondă va fi considerată liniară, ipoteză acceptabilă datorită grosimii mici a turtei în raport cu raza sondei.

2. FILTRAREA STATICĂ

Prin filtrare „statică" se înțelege, aici, filtrarea unui fluid aflat în repaus față de mediul filtrant, ceea ce conduce la creșterea continuă a grosimii depunerilor solide.

Originea axei, după care are loc filtrarea, se va considera la frontiera dintre cele două medii — turtă și mediul filtrant, iar sensul pozitiv în direcția de curgere.

Problema matematică ce urmează a fi rezolvată va fi:

$$a_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad x \in [X(t),\ 0], \tag{2}$$

$$a_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad x \in [0,\ \infty), \tag{3}$$

cu următoarele condiții la limită și condiții inițiale:

$$p_1[X(t);\ t] = p_*, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to \infty} p_2(x;\ t) = 0, \tag{5}$$

$$p_1(0;\ t) = p_2(0;\ t), \tag{6}$$

$$\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad \text{pentru } x = 0, \tag{7}$$

$$p_2(x;\ 0) = 0 \quad \text{și} \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = b \frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \text{pentru } x = X(t), \tag{9}$$

unde

b — este raportul între cantitatea de solide depuse și volumul de filtrat;

p_* — presiunea din sondă, presiunea din formație fiind considerată nulă;

$X(t)$ — grosimea turtei la momentul t, cu $X(0) = 0$.

Condițiile (6) și (7) rezultă din continuitatea celor două funcții p_1 și p_2 și a derivatelor lor normale (vitezele de filtrare). Ultima condiție, cinematică, trebuie să fie satisfăcută pe frontiera mobilă, necunoscută încă.

Problema de mai sus este cunoscută în fizica matematică sub numele de problemă tip Stefan și e întîlnită la transmisia căldurii printr-un corp, însoțită de topire, (solidificare) [3] și la dezlocuirea fluidelor compresibile nemiscibile, în care caz e numită și problema lui N. N. Verighin [4]. Caracteristica esențială a unei astfel de probleme este existența unei suprafețe mobile, pe care se dă o condiție la limită. Deși ecuațiile sînt liniare, problema este neliniară datorită condiției cinematice (9).

Problemele de acest tip, admit o soluție de forma

$$p_i = p_i\left(\frac{x}{2\sqrt{a_i t}}\right) \quad (i = 1,\ 2). \tag{10}$$

Se spune că problema este cu „automodelare" [5] și soluția ei se scrie, direct, sub forma

$$p_1(x;\ t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) \quad \text{și} \tag{11}$$

$$p_2(x;\ t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right), \tag{12}$$

unde $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$ este integrala erorilor, iar A_1, B_1, A_2 și B_2 sînt constante ce urmează a fi determinate.

Condiția (4) revine la

$$A_1 + B_1 \operatorname{erf} \frac{X(t)}{2\sqrt{a_1 t}} = p_*. \tag{13}$$

Relația e valabilă doar pentru argumentul funcției erorilor constant, adică

$$X(t) = -2\alpha\sqrt{a_1 t}, \tag{14}$$

ceea ce reprezintă ecuația suprafeței mobile a turtei, α fiind un parametru ce urmează a fi determinat. S-a luat semnul minus, deoarece, conform alegerii sensului axei x, $X(t) \leqslant 0$.

Utilizînd condițiile (5—8), prima și ultima reducîndu-se, de fapt, la una singură și anume argumentul funcției erorilor tinde spre infinit, precum și notația

$$\lambda = \frac{k_2}{k_1}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}\frac{\beta_2}{\beta_1}}, \tag{15}$$

ecuațiile (11) și (12) devin:

$$p_1(x;\ t) = \frac{p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha}\left(1 - \lambda \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right), \quad x \in [-H,\ 0], \tag{16}$$

$$p_2(x;\ t) = \frac{p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha}\left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right), \quad x \in [0,\ \infty). \tag{17}$$

În fine, condiția de tip Stefan-Verighin (9) revine la

$$\alpha\sqrt{\frac{a_1}{t}} = b\frac{k_1}{\mu}\frac{\lambda p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha}\frac{e^{-\alpha^2}}{\sqrt{\pi a_1 t}} \tag{18}$$

sau

$$\pi^{1/2}\alpha \exp\ \alpha^2(1 + \lambda \operatorname{erf}\ \alpha) = \lambda b\ \beta_1 p_*, \tag{19}$$

ceea ce constituie o ecuație transcendentă ce poate fi rezolvată numeric pentru diverse valori ale lui λ (fig. 1).

Cunoscînd deci parametrul α, ecuațiile (16) și (17) descriu distribuția presiunii în turta depusă și în formația filtrantă.

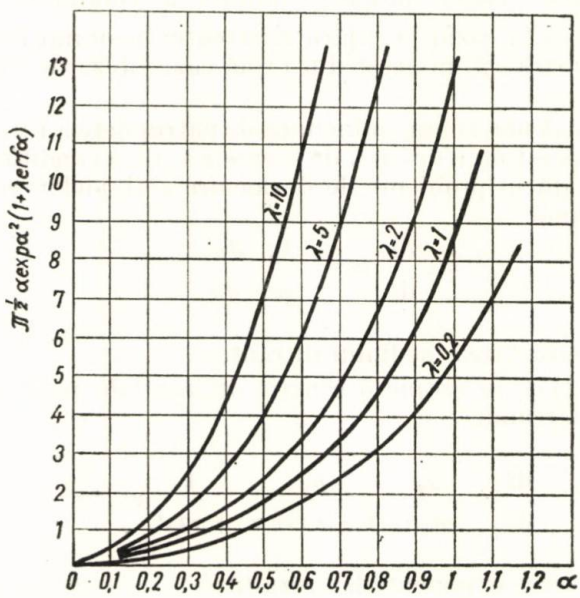


Fig. 1

Viteza de filtrare la $x = 0$ va fi

$$v = -\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{k_1}{\mu\sqrt{\pi a_1 t}}\frac{\lambda p_*}{1+\lambda\,\mathrm{erf}\,\alpha} \tag{20}$$

sau

$$v = \frac{\lambda p_*}{1+\lambda\,\mathrm{erf}\,\alpha}\sqrt{\frac{k_1\beta_1}{\pi\mu t}} \tag{20'}$$

sau încă

$$v = \frac{p_*}{1+\lambda\,\mathrm{erf}\,\alpha}\sqrt{\frac{k_2\beta_2}{\pi\mu t}}. \tag{20''}$$

La $t = 0$ rezultă o viteză infinită, ceea ce se explică prin aplicarea bruscă a presiunii p_* pe suprafața stratului. Singularitatea este însă integrabilă și volumul de filtrat pătruns pe unitatea de arie va fi

$$V = \int_0^t v\,dt = \frac{2\lambda p_*}{1+\lambda\,\mathrm{erf}\,\alpha}\sqrt{\frac{k_1\beta_1}{\pi\mu}t} \tag{21}$$

sau

$$V = \frac{2p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha} \sqrt{\frac{k_2\beta_2}{\pi\mu}\, t}\,. \tag{21'}$$

Se remarcă aceeași proporționalitate a volumului cumulativ de filtrat cu $t^{\frac{1}{2}}$, ca și în cazul neglijării rezistenței mediului filtrant [6], dar, se poate demonstra că, în acest din urmă caz, viteza de filtrare este mai mare.

Se poate calcula, acum, adîncimea de pătrundere a filtratului. Frontul de avansare al acestuia e descris, de asemenea, de o condiție de tip Stefan-Verighin, utilizată în probleme de dezlocuire a fluidelor compresibile nemiscibile și anume

$$m_2 \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_2}{\mu} \left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=l(t)}. \tag{22}$$

unde m_2 este porozitatea mediului filtrant.

Utilizînd (17), se obține o ecuație diferențială pentru determinarea adîncimii de pătrundere

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{k_2}{m_2\mu} \frac{p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha} \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t}} \mathrm{e}^{-\frac{l^2}{4a_2 t}}. \tag{23}$$

Dezvoltînd în serie exponențiala, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta_2}{m_2} \frac{p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha} \sqrt{\frac{a_2}{\pi t}} \left(1 - \frac{l^2}{4a_2 t} + \frac{l^4}{8a_2^2 t^2} - \cdots\right). \tag{24}$$

Pentru situații curente: $\beta_2 = (0{,}18 \ldots 0{,}9) \cdot 10^{-5}$ at^{-1} [7], $k_2 = 0{,}1 \ldots 1\,000$ mD, $\mu = 0{,}5$ cP, coeficientul de piezoconductibilitate are valori relativi mari — $a_2 = 10 \ldots 10^6$ cm^2/s.

Prin urmare, pentru timpi nu prea mici, din paranteza relației (24) se poate reține doar primul termen. Integrînd, obținem

$$l(t) = 2 \frac{\beta_2}{m_2} \frac{p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha} \sqrt{\frac{a_2 t}{\pi}}. \tag{25}$$

Deci frontul de invadare înaintează, de asemenea, proporțional cu $t^{\frac{1}{2}}$.

Presiunea fluidului la $x = 0$:

$$p_1(0\,;\,t) = p_2(0\,;\,t) = \frac{p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha}. \tag{26}$$

Se remarcă faptul că aceasta nu depinde de timp, ci doar de diferența inițială de presiune și raportul dintre rezistențele la filtrare ale celor două medii.

Exemplu.

$$p_* = 10 \text{ kgf/cm}^2, \quad b = 0{,}6; \quad k_1 = 0{,}002 \text{ mD}; \quad \beta_1 = 0{,}05 \text{ cm}^2/\text{kgf},$$

$$k_2 = 500 \text{ mD}; \quad \beta_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{kgf}; \quad m_2 = 0{,}25;$$

$$\mu = 0{,}5 \text{ cP} = 0{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ kgf/cm}^2 \text{ s}^{-1};$$

$$a_1 = \frac{k_1}{\beta_1 \mu} = 0{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s};$$

$$a_2 = \frac{k_2}{\beta_2 \mu} = 2 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{s};$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_2 \beta_2}{k_1 \beta_1}} = 5.$$

Din (19) rezultă $\pi^{\frac{1}{2}} \alpha \exp \alpha^2 (1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha) = 1{,}5$, iar din figura 1 se citește $\alpha = 0{,}29$.

Ecuația suprafeței mobile a turtei:

$$X(t) = -5{,}2 \cdot 10^{-3} t^{\frac{1}{2}} \quad [\text{cm}].$$

Volumul de filtrat:

$$V(t) = 8{,}7 \cdot 10^{-3} t^{\frac{1}{2}} \quad [\text{cm}^3/\text{cm}^2].$$

Adîncimea de pătrundere a filtratului:

$$l(t) = 34{,}6 \cdot 10^{-3} t^{\frac{1}{2}} \quad [\text{cm}].$$

Presiunea la $x = 0$;

$$p_1(0; t) = p_2(0; t) = 3{,}85 \quad [\text{at}]$$

Cîteva valori sînt calculate în tabela 1.

Tabela 1

t	s	10	100	1 000	3 600	10 000	84 600	10^6
$-X$	mm	0,164	0,52	1,64	3,12	5,2	15,1	52
V	cm³/cm²	0,0275	0,087	0,275	0,52	0,87	2,52	8,7
l	cm	0,11	0,348	1,1	2,08	3,48	10,08	34,8

În realitate, dacă se consideră turta avînd coeficientul de compresibilitate și permeabilitatea variabile, rezultă (efectuînd calcule mai complete decît cele prezentate aici) valori ceva mai mici pentru volumul de filtrat și adîncimea de pătrundere.

3. FILTRAREA DINAMICĂ

Prin filtrare „dinamică" se înțelege filtrarea ce are loc în prezența circulației fluidului de foraj în raport cu mediul filtrant.

În prima fază, fenomenul filtrării dinamice e similar cu cel al filtrării statice, fază încheiată la momentul T, la care grosimea turtei devine constantă, ca urmare a „echilibrării" forțelor de depunere cu cele de eroziune provocate de circulație. Se pot deci utiliza rezultatele din paragraful anterior, cu valori pentru parametrul α, probabil, mai mici.

Compactizarea turtei continuă și după stabilizarea grosimii turtei, dar se va ignora acest fenomen.

În continuare, se va presupune turta de grosime constantă H, cu o permeabilitate medie constantă și un coeficient de compresibilitate $\beta_1 = \text{const}$.

Problema matematică ce urmează a fi rezolvată va fi:

$$a_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad x \in [-H, 0], \tag{27}$$

$$a_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad x \in [0, \infty), \tag{28}$$

$$p_1(-H;\ T + t) = p_*, \tag{29}$$

$$\lim_{x \to \infty} p_2(x;\ T + t) = 0, \tag{30}$$

$$p_1(0;\ T + t) = p_2(0;\ T + t), \tag{31}$$

$$\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad \text{pentru } x = 0, \tag{32}$$

$$p_1(x;\ T) = \frac{p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha} \left(1 - \lambda \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1 T}}\right), \quad x \in [-H, 0], \tag{33}$$

$$p_2(x;\ T) = \frac{p_*}{1 + \lambda \operatorname{erf} \alpha} \left((1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_2 T}}\right), \quad x \in [0, \infty). \tag{34}$$

Condițiile (33) și (34), care reprezintă distribuția inițială a presiunii, sînt date de (16) și (17).

Se știe că, la timpi suficient de mari, soluțiile ecuațiilor de tip parabolic nu depind de condițiile inițiale, ci numai de condițiile la limită [8]. Pentru acest motiv și pentru a simplifica problema, se va considera, deocamdată, distribuția inițială nulă în întreg domeniul $[-H, \infty)$ și se vor evalua soluțiile doar la timpi suficient de mari. Concluziile finale nu vor fi alterate de această presupunere.

Prin urmare, condiţiile (33) şi (34) devin

$$p_1(x;\ T) = p_2(x;\ T) = 0. \tag{35}$$

Utilizînd transformata Laplace, definită prin

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

soluţia problemei (27—32, 35) va fi:

$$p_1(x;\ T+t) = p_* \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \left[\operatorname{erfc} \frac{(2n+1)H + x}{2\sqrt{a_1 t}} - \sigma \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)H - x}{2\sqrt{a_1 t}}\right],$$
$$x \in [-H,\ 0], \tag{36}$$

$$p_2(x;\ T+t) = \frac{2p_*}{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)H + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\, x}{2\sqrt{a_1 t}},$$
$$x \in [0,\ \infty). \tag{37}$$

În relaţiile de mai sus s-a notat

$$\sigma = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \tag{38}$$

unde λ e definit prin (15), iar $\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$.

Pentru $x = 0$:

$$p_1(0;\ T+t) = p_2(0;\ T+t) = \frac{2p_*}{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)H}{2\sqrt{a_1 t}}. \tag{39}$$

Viteza de filtrare la $x = 0$, va fi

$$v = -\frac{k_2}{\mu} \left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 2\frac{k_2}{\mu} \frac{p_*}{\lambda+1} \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t}} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n e^{-\frac{(2n+1)^2 H^2}{4a_1 t}}. \tag{40}$$

Pentru valori mari ale timpului ($t > 10^5$ s), exponenţialele pot fi înlocuite cu unitatea şi rezultă aproximaţia

$$v = \frac{2k_2}{\mu} \frac{p_*}{\lambda+1} \frac{1}{1-\sigma} \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t}} = \frac{k_2}{\mu} \frac{p_*}{\sqrt{\pi a_2 t}}. \tag{41}$$

Volumul cumulativ de filtrat pe unitatea de arie este, în acest caz,

$$V = 2\frac{k_2}{\mu} p_* \sqrt{\frac{t}{\pi a_2}}. \tag{42}$$

Deci, dacă rezistența mediului este luată în considerație, la timpi suficient de mari viteza de filtrare nu se stabilizează ci scade continuu în timp; aceasta se datorește faptului că presiunile pe cele două fețe ale turtei tind să se echilibreze. Într-adevăr, pentru timpi foarte mari, deoarece $\operatorname{erfc} 0 = 1$, din (39) rezultă

$$p_1(0\,;\,\infty) = \frac{2p_*}{\lambda+1}\,\frac{1}{1-\sigma} = p_*. \tag{43}$$

Se remarcă, de asemenea, că la timpi mari, în aproximația liniară a curgerii, viteza de filtrare nu depinde de caracteristicile turtei, ci numai de cele ale mediului poros.

Dacă, dimpotrivă, se consideră, pentru aceeași problemă, condițiile inițiale astfel:

$$p_1(x\,;\,T) = p_*, \qquad x \in [-H,\,0], \tag{44}$$

$$p_2(x\,;\,T) = 0, \qquad x \in [0,\,\infty), \tag{45}$$

atunci, integrînd sistemul (27–32, 44, 45), distribuția presiunii va fi:

$$p_1(x\,;\,T+t) =$$

$$= p_*\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n\left[\operatorname{erfc}\frac{2nH-x}{2\sqrt{a_1 t}} - \operatorname{erfc}\frac{2(n+1)\,H+x}{2\sqrt{a_1 t}}\right]\right\}, \tag{46}$$

$$p_2(x\,;\,T+t) = p_*\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n\left[\operatorname{erfc}\frac{2nH+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,x}{2\sqrt{a_1 t}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{erfc}\frac{2(n+1)\,H+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,x}{2\sqrt{a_1 t}}\right]\right\} \tag{47}$$

Presiunea pe suprafața $x = 0$ este

$$p_1(0\,;\,T+t) = p_2(0\,;\,T+t) =$$

$$= p_*\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n\left[\operatorname{erfc}\frac{nH}{\sqrt{a_1 t}} - \operatorname{erfc}\frac{(n+1)\,H}{\sqrt{a_1 t}}\right]\right\}. \tag{48}$$

Din nou, pentru timpi mari ($t > 10^5$ s), $p(0\,;\,t) \to p_*$.

Viteza de filtrare este

$$v = -\frac{k_1}{\mu}\left.\frac{\partial p_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{k_1}{\mu}\,\frac{\lambda}{\lambda+1}\,\frac{p^*}{\sqrt{\pi a_1 t}}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n\left[\mathrm{e}^{-\frac{n^2H^2}{a_1 t}} + \mathrm{e}^{-\frac{(n+1)^2H^2}{a_1 t}}\right]. \tag{49}$$

Pentru valori mari ale timpului, exponențialele pot fi înlocuite cu unitatea și rezultă aceeași relație (41).

Aceasta confirmă faptul că, aproximarea condițiilor inițiale nu alterează soluția la timpi suficient de mari.

O soluție mai comodă poate fi obținută, utilizînd teoria transmiterii căldurii într-un spațiu semifinit, acoperit de un film cu proprietăți termice distincte. Deoarece grosimea turtei este relativ mică în raport cu mediul poros, se va considera distribuția presiunii în turtă liniară în orice moment. Aceasta înseamnă a rezuma problema la rezolvarea unei singure ecuații diferențiale, cu una din condițiile la limită rezultînd din aproximația de mai sus.

Deci, schimbînd variabila $T + t$ cu t, se obține

$$p_1(x\ ; t) = Ax + B. \tag{50}$$

Utilizînd condițiile

$$p_1(-H\ ;\ t) = p_*, \tag{51}$$

$$p_1(0\ ;\ t) = p_2(0\ ;\ t), \tag{52}$$

ecuația (50) ia forma

$$p_1(x\ ;\ t) = -\frac{p_* - p_2(0\ ;\ t)}{H}\, x + p_2(0\ ;\ t). \tag{53}$$

Cu acestea, problema determinării distribuției presiunii în mediul filtrant devine :

$$a_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial p_2}{\partial t}, \qquad x \in [0,\ \infty), \tag{54}$$

$$p_2(x\ ;\ 0) = 0, \tag{55}$$

$$\lim_{x \to \infty} p_2(x\ ;\ t) = 0, \tag{56}$$

$$k_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} = -k_1 \frac{p_*}{H} + k_1 \frac{p_2}{H} \quad \text{pentru } x = 0. \tag{57}$$

Aplicînd transformata Laplace, se obține

$$\overline{p}_2(x\ ;\ s) = \frac{k_1}{k_2} \frac{p_*}{H} \frac{\mathrm{e}^{-q_2 x}}{s\left(\dfrac{k_1}{k_2 H} + q_2\right)}, \quad \text{unde } q_2 = \sqrt{\frac{s}{a_2}}. \tag{58}$$

Inversînd [9], soluția problemei va fi

$$p_2(x\ ;\ t) = p_* \left[\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} - \exp\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{x}{H} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} + \frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t}\right)\right]. \tag{59}$$

Pentru $x = 0$ avem

$$p_2(0\,;\,t) = p_*\left[1 - \exp\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t}\right)\right]. \tag{60}$$

Introducînd această expresie în (53) rezultă, imediat, distribuţia presiunii în turtă:

$$p_1(x\,;\,t) = p_*\left[1 - \left(1 + \frac{x}{H}\right)\exp\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t}\right)\right]. \tag{61}$$

Pentru $t \to \infty$, $p_2\,(0\,;\,t) \to p_*$.

Viteza de filtrare la $x = 0$ este

$$v = \frac{k_1}{\mu}\frac{p_*}{H}\exp\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t}\right), \tag{62}$$

care la $t \to \infty$ se comportă ca $t^{-\frac{1}{2}}$.

Soluţia (59, 61) este convergentă pentru toate valorile timpului, dar este convenabilă numai pentru timpii relativ mici. Pentru timpi adimensionali $a_2 t/x^2 > 1$ — cazul de faţă — convergenţa este foarte înceată.

Dealtfel, pentru timpi foarte mici, dezvoltînd în serie (62), rezultă expresia

$$v(0\,;\,t) = \frac{k_1}{\mu}\frac{p_*}{H}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t} + \frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\frac{k_1^3 (a_2 t)^{3/2}}{k_2^3 H^3} + \ldots\right], \tag{63}$$

care converge foarte rapid pentru $\dfrac{k_1\sqrt{a_2 t}}{k_2 H} \ll 1$.

Pentru timpi mari, o soluţie convenabilă poate fi obţinută dezvoltînd în serie expresia (58). Într-adevăr,

$$\overline{p}_2(x\,;\,s) = \frac{p_*}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(q_2\frac{k_2 H}{k_1}\right)^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q_2^n x^n}{n\,!}. \tag{64}$$

Efectuînd calculele,

$$\overline{p}_2(x\,;\,s) = \frac{p_*}{s}\left[1 - q_2\left(x + \frac{k_2 H}{k_1}\right) + q_2^2\left(\frac{k_2^2 H^2}{k_1^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{k_2 H}{k_1}x\right) - \right.$$

$$\left. - q_2^3\left(\frac{x^3}{6} + \frac{k_2 H}{2k_1}x^2 + \frac{k_2^2 H^2}{k_1^2}x + \frac{k_2^3 H^3}{k_1^3} + \ldots\right)\right]. \tag{65}$$

Inversînd, rezultă

$$p_2(x;t) = p_*\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t}}\left[\left(x + \frac{k_2 H}{k_1}\right) - \left(\frac{x^3}{6} + \frac{k_2 H}{2k_1}x^2 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{k_2^2 H^2}{k_1^2}x + \frac{k_2^3 H^3}{k_1^3}\right)\frac{1}{a_2 t} + \ldots\right]\right\}. \qquad (66)$$

Distribuţia de presiune în turtă va fi

$$p_1(x;t) = p_*\left\{1 - \frac{k_2}{k_1}\frac{H}{\sqrt{\pi a_2 t}}\left(1 + \frac{x}{H}\right)\left[1 - \left(\frac{k_2}{k_1}H\right)^2\frac{1}{a_2 t} + \ldots\right]\right\}. \qquad (67)$$

Atît expresia din (66) cît şi cea din (67) sînt rapid convergente la timpi suficient de mari.
La $x = 0$ avem

$$p_2(0;t) = p_*\left\{1 - \frac{k_2}{k_1}\frac{H}{\sqrt{\pi a_2 t}}\left[1 - \left(\frac{k_2}{k_1}H\right)^2\frac{1}{a_2 t} + \ldots\right]\right\}. \qquad (68)$$

Viteza de filtrare la timpi mari este

$$v(0;t) = \frac{k_2 p_*}{\mu\sqrt{\pi a_2 t}}\left[1 - \left(\frac{k_2}{k_1}H\right)^2\frac{1}{a_2 t} + \ldots\right]. \qquad (69)$$

Pentru cazuri practice, dacă $t > 10^5$ s, termenul al doilea din paranteză pătrată, poate fi neglijat.

Aproximaţiile (62) şi (63) sînt mai comode decît (40), iar la timpi foarte mari (69) coincide cu (41).

Se remarcă faptul că la începutul fenomenului, viteza de filtrare este controlată, în general, de turtă (în relaţia (63) termenii de ordin superior sînt neglijabili), în timp ce la intervale mari de timp, viteza de filtrare este controlată doar de mediul filtrant (69)*.

Volumul cumulativ de filtrat se obţine integrînd expresia (62)

$$V = \frac{k_1}{\mu}\frac{p_*}{H}\left[\frac{2k_2}{k_1}H\sqrt{\frac{t}{\pi a_2}} + \frac{k_2^2}{k_1^2}\frac{H^2}{a_2}\exp\left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t}\right)\right]; \qquad (70)$$

— la timpi mici, integrînd în (63),

$$V = \frac{k_1}{\mu}\frac{p_*}{H}t\left(1 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t} + \frac{k_1^2}{2k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2} - \ldots\right); \qquad (71)$$

* În partea a doua a lucrării se va examina în ce măsură aproximaţia liniară a filtrării fluidelor de foraj într-o gaură de sondă este acceptabilă, la durate mari de filtrare.

— la timpi mari, integrînd în (69),

$$V = 2\frac{k_2 p_*}{\mu}\sqrt{\frac{t}{\pi a_2}}\left[1 + \left(\frac{k_2}{k_1}H\right)^2 \frac{1}{a_2 t} + \ldots\right], \tag{72}$$

Adîncimea de pătrundere a filtratului rezultă din ecuația

$$m_2 \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_2}{\mu}\frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=l(t)}. \tag{73}$$

Derivînd în (59) și înlocuind în (73), se obține

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{k_2 p_*}{m_2 \mu}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t}}\exp\frac{l^2}{4a_2 t} + \frac{k_1}{k_2 H}\exp\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{l}{H} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{l}{2\sqrt{a_2 t}} + \frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t}}\exp\left(\frac{l}{2\sqrt{a_2 t}} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_1}{k_2 H}\sqrt{a_2 t}\right)^2 \exp\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{l}{H} + \frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{a_2 t}{H^2}\right)\right]. \tag{74}$$

Ecuația diferențială de mai sus este dificil de rezolvat. Pentru timpi relativ mici, efectuînd unele simplificări, adîncimea de pătrundere va fi

$$l = \frac{k_1}{m_2 \mu}\frac{p_*}{H}\, t \tag{75}$$

Pentru timpi relativ mari, luînd doar primul termen în paranteza patrată din (66), rezultă

$$l = \frac{2k_2 p_*}{m_2 \mu}\sqrt{\frac{t}{\pi a_2}} = \frac{2p_*}{m_2}\sqrt{\frac{k_2 \beta_2}{\pi \mu}\, t}. \tag{76}$$

De altfel, presupunînd m_2 independent de punctul x, adîncimea de pătrundere a filtratului poate fi calculată cu relația

$$l = \frac{V}{m_2}, \tag{77}$$

ceea ce permite utilizarea relațiilor (70), (71) și (72).

În figurile 2, 3 și 4 sînt calculate :

— distribuția presiunii în mediul poros și turtă cu relațiile generale (36) și (37);

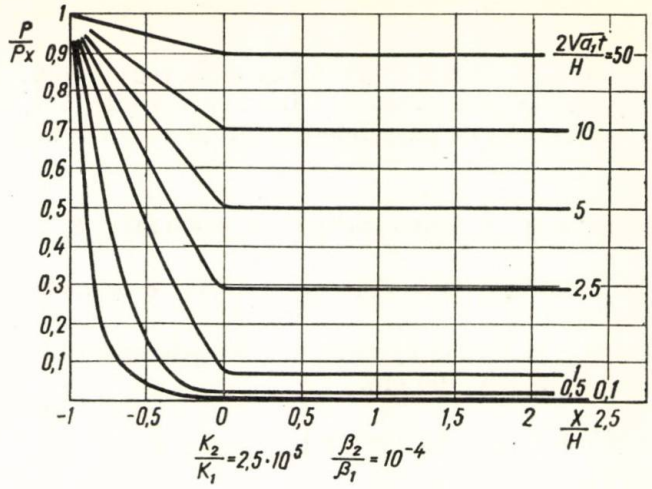


Fig. 2

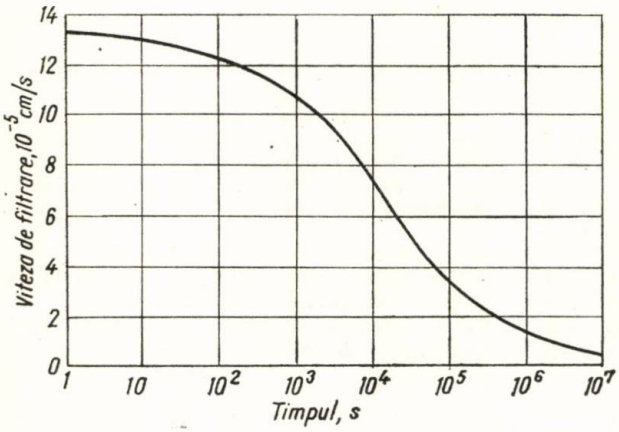


Fig. 3

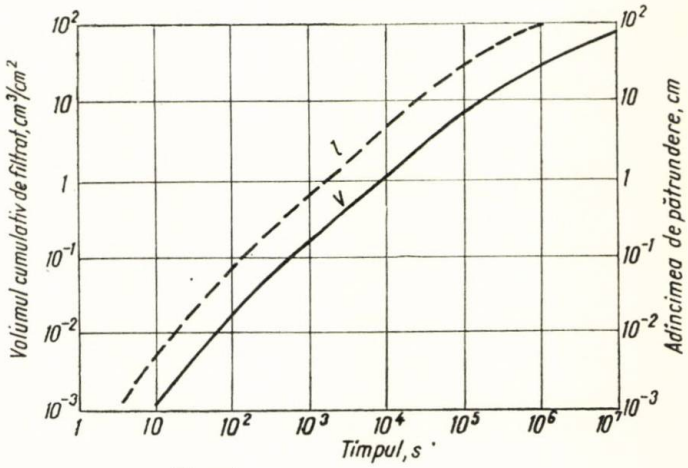


Fig. 4

— viteza de filtrare cu relaţiile (63), (62) şi (69);
— volumul cumulativ de filtrat cu relaţiile (71), (70) şi (72);
— adîncimea de pătrundere a filtratului cu relaţia (77).

Datele folosite :

$$k_1 = 0{,}002 \text{ mD}\,;\ \beta_1 = 0{,}05 \text{ cm}^2/\text{kgf}\,;\ k_2 = 500 \text{ mD}\,;\ \beta_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{kgf}\,;$$

$$\mu = 0{,}5 \text{ cP}\,;\ H = 0{,}3 \text{ cm}\,;\ \lambda = 5\,;\ \sigma = 0{,}667\,;\ m_2 = 0{,}25.$$

După o zi (84600 s) adîncimea de pătrundere va fi 32 cm, iar după 10 zile aproximativ 100 cm.

Primită la redacţie la 28 aprilie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. G. T. Gasanov, N. M. Serstnev, Z. M. Ahmedov, *Ob opredelenii dinamiceskovo davleni a plasta*, Izv. visşih ucebnih zavedenii, Nefti i gaz, *5* (1969).
2. G. T. Gasanov, G. V. Gabunia, *Isledovanie proţesa proniknovenia filtrata promivocinoi jidkosti v plast prin burenii*, Soobşcenie Akademii Nauk Gruzinskoi SSR, *2* (1970).
3. H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, Edit. 2, 1959.
4. N. N. Verighin, *Negnetanie viajuşcih rastvorov v gornie parodi v telliah povişenia procinosti i vodonepronitaemosti osnovanii gidrodinamiceskih soorujenii*, Izv. A.N. SSSR, OTN, *5*, 674—687 (1952).
5. L. I., Rubinstein, *Problema Stefana*, Izd. Zvaigne, Riga, 1967.
6. W. F. Rogers, *Compoziţia şi proprietăţile fluidelor de foraj*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1969.
7. A. Vernescu, *Mecanica zăcămintelor petroliere*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1966.
8. A. N. Tihonov, A. A. Samarski, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956,
9. G. Fodor, *Laplace Transforms in Engineering*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1965.

STUDIUL EXPERIMENTAL AL INTERACȚIUNII GAZ-PISTON MOBIL, ÎN CAZUL UNUI SISTEM DESCHIS*)

de ST. PETRESCU
Institutul politehnic București

Lucrarea își propune verificarea experimentală a ecuației presiunii pe un piston, P_p, ce se deplasează cu viteza medie w

$$P_p = P_{mg}\left(1 \pm \frac{aw}{c}\right),$$

în care P_{mg} este presiunea medie din gaz, c — viteza medie moleculară, a — coeficient ce depinde de natura gazului și configurația sistemului. Se prezintă instalația experimentală, considerațiile teoretice care conduc la determinarea experimentală a lui a, precum și rezultatele experimentale obținute pentru un sistem deschis (piston în cădere liberă printr-un tub, $a = 0{,}985$).

În lucrările anterioare [1] — [4] s-a arătat că presiunea pe un piston mobil poate fi exprimată prin relația

$$P_p = P_{mg}\left(1 \pm \frac{aw}{c}\right). \tag{1}$$

Experiența care se descrie în cele ce urmează a avut drept scop punerea în evidență a acestui efect și evaluarea ordinului de mărime a coeficientului a pentru un anumit sistem particular. Întrucît măsurarea directă a presiunii ridică unele dificultăți experimentale, s-a plecat de la ideea de a înlocui măsurarea efectivă a acesteia cu măsurarea unui efect al ei.

*) Acest studiu a fost efectuat în Laboratorul de termodinamică din Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, U.S.A., cu sprijinul și îndrumarea binevoitoare a domnului prof. dr. Eng. H. C. Van Ness, Șeful diviziei de studii și cercetări avansate în domeniul proceselor termice, chimice și fluide, pentru care doresc să-i exprim, și pe această cale, cele mai sincere mulțumiri.

Astfel s-a studiat căderea unui piston metalic într-un tub de sticlă (fig. 1) şi prin măsurarea timpului de cădere τ, între secţiunea (1) şi (2) s-a determinat prin calcul coeficientul a.

1. TEORIA EXPERIENŢEI

Întrucît pistonul de greutate

$$G = mg \tag{2}$$

cade cu viteza finită w, va apare pe faţa de jos a sa un efect de creştere a presiunii, faţă de presiunea atmosferică, iar pe faţa de sus va apare un efect de scădere a presiunii. Dacă admitem pentru aceste efecte valabilă expresia (1), putem scrie presiunea pe faţa de jos ca un efect de comprimare :

$$P_c = P_{atm}\left(1 + \frac{aw}{c}\right), \tag{3}$$

şi presiunea pe faţa de sus ca un efect de destindere :

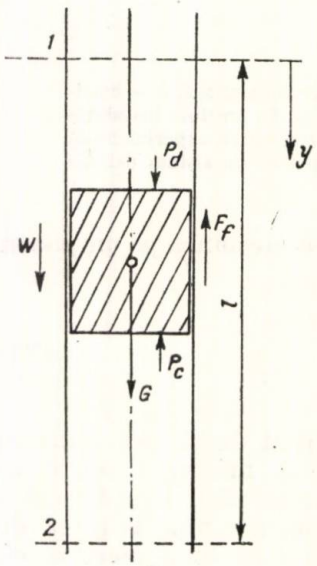


Fig. 1

$$P_d = P_{atm}\left(1 - \frac{aw}{c}\right). \tag{4}$$

Diferenţa de presiune care va acţiona asupra pistonului,

$$P_c - P_d = P_{atm}\frac{2a\dot{y}}{c}, \tag{5}$$

va determina o forţă de frînare a căderii libere a pistonului :

$$F_p = (P_c - P_d)\cdot S_p = \frac{2\,a\,\dot{y}}{c} P_{atm}\cdot S_p. \tag{6}$$

Pentru a asigura etanşarea între piston şi tubul de sticlă, pistonul a fost prevăzut cu caneluri şi uns cu ulei. Aceasta conduce la apariţia unei forţe de frecare între piston şi tub, pe care o presupunem că variază liniar cu viteza de cădere :

$$F_f = \mu\, w = \mu\dot{y}\,. \tag{7}$$

Scriind ecuaţia lui Newton pentru mişcarea pistonului

$$F = m\ddot{y} = G - F_f - F_p \tag{8}$$

și înlocuind expresiile forțelor din (2), (6), și (7), obținem ecuația diferențială a căderii pistonului

$$\ddot{y} + \frac{K}{m}\dot{y} - g = 0, \tag{9}$$

unde

$$K = \mu + \frac{2a\, P_{atm}\, S_p}{c}. \tag{10}$$

Prin integrare se obține

$$y = \frac{mg}{K}\,\tau + \frac{m^2}{K^2}\cdot \exp\left[-\frac{K}{m}(\tau + C_1)\right] + C_2. \tag{11}$$

Pentru a determina constantele de integrare se impun condițiile la limită:

$$\tau = 0; \quad y = 0; \quad \dot{y} = 0 \tag{12}$$

și rezultă

$$\exp\left(-\frac{K}{m}\,C_1\right) = g, \tag{13}$$

$$C_2 = -\frac{m^2 g}{K^2}, \tag{14}$$

În acest caz (11) devine

$$y = \frac{mg}{K}\,\tau + \frac{m^2 g}{K^2}\exp\left[\left(-\frac{K}{m}\,\tau\right) - 1\right]. \tag{15}$$

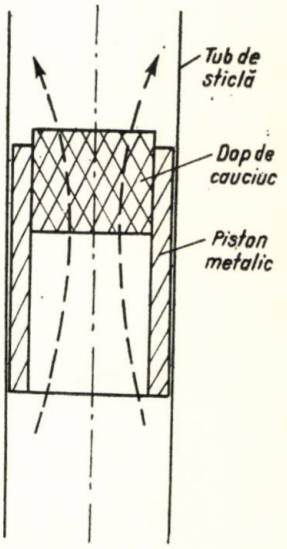


Fig. 2

Dacă se măsoară y, și τ se determină experimental, atunci, din ecuația de mai sus, se poate determina valoarea lui K. Cu aceasta calculăm apoi din relația (10) valoarea coeficientului a. Întrucît expresia lui K mai conține, pe lîngă a, încă o altă necunoscută μ, este necesar ca experiența să se organizeze astfel încît să se poată determina experimental și valoarea lui μ. În acest scop pistonul s-a conceput în formă tubulară, prevăzut cu un dop de cauciuc (fig. 2). Experiența se poate efectua astfel în două alternative, cu sau fără dop. În situația în care pistonul are dop, din (15) se determină K, corespunzător timpului măsurat τ și masei pistonului m. În situația în care se scoate

dopul, efectul de presiune pe piston este complet diminuat deoarece aerul curge din amonte în aval astfel că în relaţia (10), $a = 0$. În acest caz măsurînd timpul τ' şi masa m' rezultă din (15) valoarea coeficientului de frecare $\mu = K'$. Cu acestea se obţine din (10) valoarea lui a

$$a = (K - \mu)\frac{c}{2\,P_{atm}S_p}. \tag{16}$$

2. INSTALAŢIA ŞI REZULTATELE EXPERIMENTALE

După cum se indică schematic în figura 3, instalaţia folosită constă din trei părţi principale: A — tubul de sticlă în care cade pistonul, B — pupitrul de comandă cu releele de pornire şi oprire a ceasului electronic şi C — ceas electronic care poate înregistra intervale de timp pînă la 0,001 s.

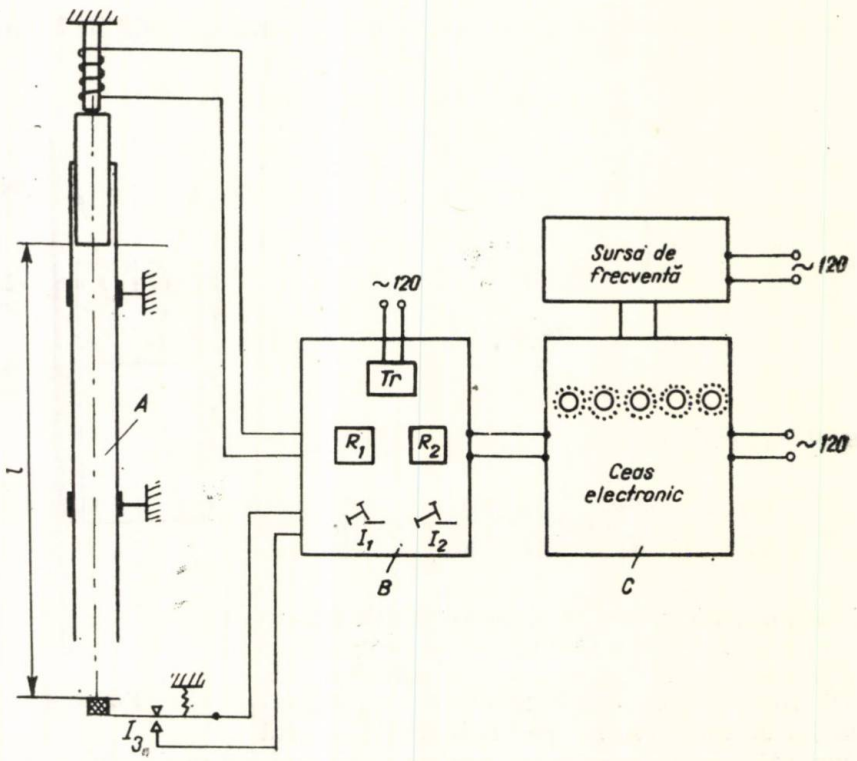


Fig. 3

Tubul A este prevăzut la partea superioară cu un electromagnet E_m care foloseşte la declanşarea experienţei. Electromagnetul este legat în serie cu releul R_1 şi cu întrerupătorul I_1. Înainte de începerea experien-

ței se închide întrerupătorul I_1. Curentul trece prin releul R_1 și prin electromagnetul E_m. În această situație pistonul se află la partea superioară a tubului, suspendat de electromagnet. În momentul în care se deschide circuitul cu întrerupătorul I_1, pistonul începe mișcarea de cădere și, totodată, releul R_1 comandă începerea înregistrării timpului în ceasul electronic. Cînd pistonul ajunge la capătul tubului, el acționează asupra întrerupătorului I_3, care este legat de releul R_2, comandînd oprirea ceasului electronic. Releele sînt acționate de o tensiune alternativă de 6 V de la transformatorul T_r. O primă experiență s-a efectuat cu pistonul fără dop, avînd masa $m' = 22{,}59$ g. Lungimea de cădere a fost $l = 1{,}195$ m. Presiunea atmosferică $P_{atm} = 750$ mm Hg, iar temperatura aerului din laborator $t = 23°C$. În aceste condiții s-a determinat timpul de cădere τ' de 30 de ori și s-a efectuat media :

$$\tau'_{med} = 0{,}548 \text{ s.} \tag{17}$$

A doua experiență s-a efectuat cu pistonul în care s-a montat dopul de cauciuc, astfel, că masa lui s-a modificat, fiind $m = 29{,}06$ g. Celelalte condiții au rămas aceleași. S-a determinat timpul τ de cădere de 30 de ori și s-a efectuat media :

$$\tau_{med} = 0{,}615 \text{ s.} \tag{18}$$

Cu aceste date rezultă din ecuația (15), pe cale grafo-analitică, următoarele valori ale lui K :

$$\mu = K' = 0{,}85 \frac{\text{gf.s}}{m}, \tag{19}$$

$$K = 9{,}95 \frac{\text{gf.s}}{m}. \tag{20}$$

Din (20) se obține valoarea lui a

$$a = (K - \mu) \frac{c}{2 P_{atm} \cdot S_p} = \frac{9{,}1 \cdot 502}{2.1020 \cdot 2{,}27} = 0{,}985. \tag{21}$$

Prin urmare, pentru sistemul studiat se poate scrie, conform cu (1),

$$P_p = P_{mg}\left(1 \pm 0{,}985 \frac{w}{c}\right). \tag{22}$$

Se constată că pentru sistemul studiat, valoarea lui a_{med} este mai mică decît a_2 (vezi fig. 6, lucrarea [4]).

Aceasta se explică prin faptul că a_1 acuză o alură rapid descrescătoare, deoarece accelerația pistonului este relativ mică (9,8 m/s²) comparativ cu cazul sistemului studiat în lucrările [5] și [6] (~ 200 m/s²). Prin urmare în cazul de față se impune ca efect principal, efectul timpului de relaxare finit.

Primită la redacție la 23 februarie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. L. Stoicescu, S. Petrescu, *Der erste Grundsatz der Thermodynakik für Tehnische Prozesse welche mit endlicher Geschwindigheit und ohne Strömung verlaufen*, Buc. Inst. politehnic București, **XXVI**, 5, 87—108 (1964).
2. S. Petrescu, *Determinarea lucrului mecanic în procesele termodinamice de viteză finită, folosind metoda termodinamicii ireversibile fenomenologice*, St. cerc. energ. electr., **19**, 2, 249—254 (1969).
3. L. Stoicescu, S. Petrescu, M. Marinescu, *Determinarea pe cale statistică a expresiei lucrului mecanic pentru unele procese termodinamice cu viteză finită*, Comunicare prezentată la Sesiunea științifică a Institutului politehnic București din 1 — 3 noiembrie 1968.
4. S. Petrescu, *Considerații cinetice privind presiunea pe un piston mobil*, St. cerc. energ. electr., **21**, 1, 93 — 107 (1971).
5. L. Stoicescu, S. Petrescu, *Experimentale Überprüfung des neuen Ausdrucker des ersten Grundsatzes für Thermodynamische Prozesse mit endlicher Geschwindigkeit.*
6. S. Petrescu, *Contribuții la studiul unor interacțiuni și procese Termodinamice de neechilibru din mașinile termice*, Teză de doctorat, I.P.B. — 1969.

ASUPRA UNOR IPOTEZE ÎN DINAMICA ROTOARELOR

de GH. HOBEANU
Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" București.

În lucrare se examinează modele matematice ale unui rotor cu arbore elastic, în regim nestaționar.
Luînd în considerare premize diferite se stabilește felul în care acestea influențează configurația modelului.
Sînt semnalate unele neconcordanțe care apar în lucrările existente și se trag concluzii cu privire la originea lor.

1. INTRODUCERE

Răspîndirea largă a mașinilor rotative de forță (turbine cu abur, cu gaze etc.) a determinat cercetarea trecerii rotoarelor cu arbore elastic prin turația critică.

Adesea, în cercetările efectuate, nu sînt precizate în mod explicit ipotezele care au stat la baza obținerii modelului matematic al sistemului studiat.

Astfel se consideră direct ecuația unui oscilator liniar unidimensional [1], [2], [4], [8] fără a se menționa dacă se cercetează mișcarea centrului elastic sau a centrului de greutate al rotorului; de asemenea, nu sînt indicate atît ipotezele referitoare la punctul în jurul căruia se efectuează mișcarea de rotație, cît și ipotezele asupra forței de amortizare.

Firește, în aceste condiții, analiza, corelarea și interpretarea critică a rezultatelor obținute întîmpină dificultăți și uneori poate genera confuzii.

2. DEDUCEREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

Perioada de trecere a unui rotor de la o turație inferioară celei nominale, la turația nominală, sau invers, reprezintă un regim de funcționare nestaționar.

La majoritatea mașinilor rotative actuale turația nominală este superioară primei turații critice, astfel că în timpul pornirii sau opririi, rotorul trece prin rezonanță, căpătînd amplitudini maxime; este cazul rotoarelor cu arbore elastic.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1087—1097

Ne vom referi în cele ce urmează, din considerente de claritate, la principalii factori care influenţează oscilaţia unui rotor lăsînd la o parte parametrii secundari ca: amortizarea internă, efectul giroscopic, elasticitatea lagărelor şi a peliculei de ulei, masa lagărelor şi a fundaţiei etc. Fie în formă schematizată un rotor cu un singur disc cu masa m, raza de inerţie r, avînd centrul de greutate $C_2\,(x_2, y_2)$ situat faţă de centrul elastic $C_1\,(x_1,\ y_1)$ la distanţa $C_1C_2 = e$; centrul elastic C_1 coincide cu centrul geometric al secţiunii arborelui. Discul este aşezat la mijlocul unui arbore cu rigiditatea la încovoiere c, sprijinit pe două lagăre rigide, axa lagărelor fiind orizontală, în direcţia axei oz (fig. 1) a triedrului fix xyz. Masa arborelui şi a lagărelor este neglijabilă faţă de masa discului. Între coordonatele punctelor C_1 şi C_2 există relaţiile

$$x_2 = x_1 + e\ \cos\ \varphi,$$

$$y_2 = y_1 + e\ \sin\ \varphi. \tag{1}$$

Poziţia unghiulară a rotorului este precizată prin unghiul de rotaţie φ; presupunem că arborele se roteşte în jurul propriei sale axe deformate, care intersectează planul vertical xoy în punctul C_1.

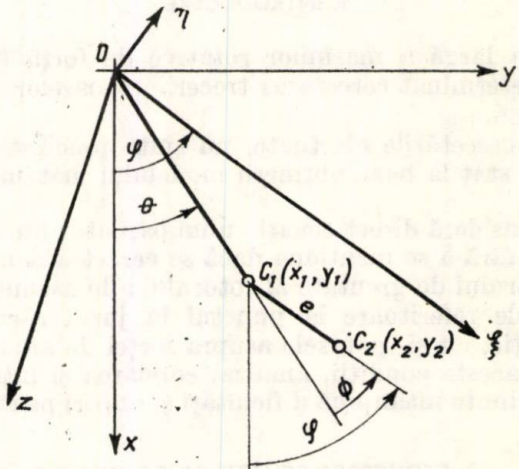


Fig. 1

Energia cinetică a discului, T, şi energia potenţială V au expresiile:

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\dot{y}_2^2 + \frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2,$$

$$V = \frac{c}{2}x_1^2 + \frac{c}{2}y_1^2 - M\varphi - mg\,x_2, \tag{2}$$

unde derivatele în raport cu timpul t s-au însemnat prin puncte. Admitem două ipoteze asupra forței de amortizare externă:

1) forța de amortizare este proporțională cu viteza absolută a centrului elastic. Funcția de disipare a energiei are forma

$$D = k\,(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2); \tag{3}$$

2) forța de amortizare este proporțională cu viteza absolută a centrului de greutate

$$D = k\,(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2). \tag{4}$$

Dacă forțele generalizate derivă dintr-un potențial și energia potențială depinde numai de poziția punctului cercetat, se poate introduce potențialul cinetic

$$L = T - V, \tag{5}$$

și ecuațiile lui Lagrange, cu aceste notații devin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{6}$$

unde q_j sînt coordonatele generalizate.

Înlocuind relațiile (2) — (5) în (6) se obțin ecuațiile de mișcare (modelul matematic) ale rotorului, în general, sub forma sistemului

$$\begin{aligned} Lx &\equiv m\ddot{x} + 2k\dot{x} + cx = X, \\ Ly &\equiv m\ddot{y} + 2k\dot{y} + cy = Y, \\ M &= M(\dot{\varphi}). \end{aligned} \tag{7}$$

3. VARIANTELE MODELULUI MATEMATIC

3.1. TERMENI DE STRUCTURĂ FIXĂ

Primele două ecuații ale sistemului (7) conțin operatorul L, provenit din însumarea forței de inerție din mișcarea de translație, a forței de amortizare și a forței elastice. Acest operator este prezent întotdeauna în primele două ecuații, alcătuind membrul stîng și se aplică coordonatei punctului cercetat.

3.2. TERMENI CU STRUCTURĂ VARIABILĂ

Sînt reprezentați în modelul matematic (7) prin termenii X și Y din partea dreaptă a primelor două ecuații și cea de a treia ecuație. Mărimile X și Y reprezintă forțele perturbatoare și sînt alcătuite fiecare din trei componente:

X^{I} — componentă determinată de greutatea proprie ; depinde de poziţia rotorului (verticală sau orizontală) şi de direcţia pe care se măsoară deplasarea (direcţia ox sau oy) ;

X^{II} — componentă determinată de forţele de inerţie din mişcare de rotaţie ; amplitudinea acestei componente este constantă dacă se studiază mişcarea centrului de greutate C_2, sau variabilă (proporţională cu pătratul vitezei unghiulare $\dot{\varphi}$) dacă se studiază mişcarea centrului elastic C_1.

X^{III} — componentă determinată de forţa de amortizare ; este nulă la considerarea forţei de amortizare proporţională cu viteza absolută a punctului studiat.

Momentul de rotaţie M (sau cuplul motor), care acţionează asupra rotorului, determină o acceleraţie unghiulară $\ddot{\varphi}$; în acest caz cea de a treia ecuaţie din relaţiile (7) trebuie asociată primelor două, alcătuind un sistem propriu-zis.

Dacă se impune $\ddot{\varphi} = \text{const}$ rezultă variaţia necesară pentru momentul de rotaţie M şi ultima ecuaţie este astfel independentă de primele două ecuaţii.

Practic, acceleraţia unghiulară $\ddot{\varphi}$ se poate considera constantă dacă sursa care imprimă rotorului mişcarea de rotaţie are o putere suficient de mare.

3.3. PREZENTAREA VARIANTELOR

În tabela 1 sînt considerate patru variante, două asupra punctului cercetat şi două în legătură cu forţa de amortizare externă. Din acest tabel, pentru varianta 11 (prima cifră se referă la coordonatele punctului cercetat, centrul elastic C_1, iar cea de a doua la ipoteza asupra forţei de amortizare, proporţională cu viteza absolută a centrului elastic) rezultă sistemul de ecuaţii :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2k\dot{x}_1 + cx_1 &= mq + me(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi} \sin\varphi), \\ m\ddot{y} + 2k\dot{y}_1 + cy_1 &= me\ (\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi), \\ M &= m[\ddot{\varphi}(e^2 + r^2) - e\ (\ddot{x}_1 \sin\varphi - \ddot{y}_1 \cos\varphi\ ) + ge\ \sin\varphi]. \end{aligned} \tag{8}$$

4. CONFIGURAŢIA MODELULUI MATEMATIC ŞI PREMISELE ADOPTATE

4.1. MIŞCAREA DE ROTAŢIE PROPRIE ŞI MIŞCAREA DE PRECESIE

Dacă ne referim la starea staţionară, $\ddot{\varphi} = 0$, primele două ecuaţii ale sistemului (8) devin :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + p^2 x_1 &= g + e\dot{\varphi}^2 \cos\varphi, \\ \ddot{y}_1 + 2n\dot{y}_1 + p^2 y_1 &= e\dot{\varphi}^2 \sin\varphi, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\text{cu notaţiile } n = \frac{k}{m},\ p^2 = \frac{c}{m}.$$

Tabela 1

Variantele modelului matematic

Nr. crt.	Denumirea punctului studiat	Coordonatele punctului studiat	Ecuația de mișcare	Forțele perturbatoare X, Y					
				1. Forța de amortizare proporțională cu viteza absolută a centrului elastic.			2. Forța de amortizare proporțională cu viteza absolută a centrului de greutate.		
				X^{I}, Y^{I}	X^{II}, Y^{II}	X^{III}, Y^{III}	X^{I}, Y^{I}	X^{II}, Y^{II}	X^{III}, Y^{III}
1	C_1	X_1	$L X_1 = X_1$	mg	$me(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi} \sin\varphi)$	0	mg	$me(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi)$	$2Ke\dot{\varphi}.\ \sin\varphi$
		Y_1	$Ly_1 = Y_1$	0	$me(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi)$	0	0	$me(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi)$	$-2Ke\dot{\varphi}\cos\varphi$
	Momentul de rotație M		$M = M(\dot{\varphi})$	$M_{11} = m[\ddot{\varphi}(e^2 + r^2) - e(\ddot{x}_1 \sin\varphi - \ddot{y}_1 \cos\varphi) + ge\sin\varphi]$			$M_{12} = M_{11} + 2k\ [-e(\dot{x}_1 \sin\varphi - \dot{y}_1 \cos\varphi(+ e^2\dot{\varphi}]$		
2	C_2	x_2	$Lx_2 = X_2$	mg	$mep^2 \cos\varphi$	$-2ke\dot{\varphi}\sin\varphi$	mg	$mep^2 \cos\varphi$	0
		y_2	$Ly_2 = Y_2$	0	$mep^2 \sin\varphi$	$2ke\dot{\varphi}\cos\varphi$	0	$mep^2 \sin\varphi$	0
	Momentul de rotație M		$M = M(\dot{\varphi})$	$M_{21} = M_{22} + 2Ke(\dot{x}_2 \sin\varphi - \dot{y}_2 \cos\varphi + \dot{\varphi}e]$			$M_{22} = mr^2\ddot{\varphi} + ce(x_2 \sin\varphi - y_2 \cos\varphi)$		

Neglijînd componentele vibrației proprii amortizate, ecuațiile (9) au soluțiile :

$$x_1 = \frac{9}{p^2} + A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi,$$

$$y_1 = - A_2 \cos\varphi + A_1 \sin\varphi, \tag{10}$$

unde

$$A_1 = \frac{\dot{\varphi}^2 (p^2 - \dot{\varphi}^2)}{(p^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n^2 \dot{\varphi}^2}; \quad A_2 = \frac{2n \dot{\varphi}^3}{(p^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n^2 \dot{\varphi}^2}.$$

Introducînd variabila complexă,

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{11}$$

și avînd în vedere că

$$r_1 = \frac{e \alpha^2}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2 \alpha^2}}, \alpha = \frac{\dot{\varphi}}{p}, \gamma = \frac{n}{p}, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{2 \gamma \alpha}{1 - \alpha^2} \tag{13}$$

soluția ecuațiilor (9) se poate scrie sub forma

$$z_1 = \frac{g}{p^2} + r_1 e^{i(\varphi - \Phi)}. \tag{14}$$

Din ecuația (14) se observă că centrul elastic C_1 se rotește față de axa *oz* cu viteza unghiulară $\dot{\varphi}$, adică planul de flexiune al rotorului, execută în regim staționar o mișcare de precesie în raport cu linia lagărelor.

4.1.2. *Mișcarea de precesie. Ipoteză.* Să presupunem că rotorul execută o mișcare de rotație în jurul axei sale inițiale, nedeformate, care coincide cu axa *oz*, cu viteza unghiulară de rotație $\dot{\varphi}$.
Considerăm în plus ipotezele :

$$g = 0, \qquad \gamma = 0 \tag{15}$$

și notînd $OC_1 = \rho$ are loc (fig. 2a) echilibrul

$$\rho c = (\rho + e)\, m\, \dot{\varphi}^2, \tag{16}$$

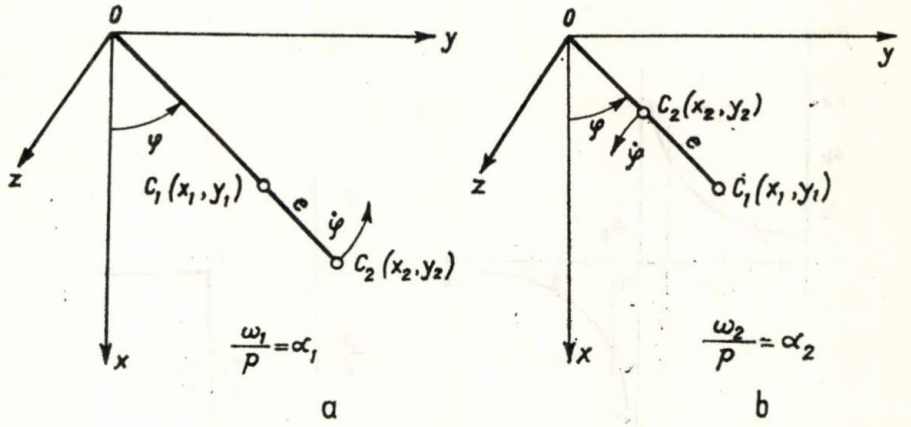


Fig. 2

de unde

$$\rho = e\,\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}. \tag{17}$$

Această cale de a exprima echilibrul rotorului este des întîlnită în manuale universitare, în țară și peste hotare; o critică aspră este făcută în lucrarea [3].

Se reproșează în primul rînd lipsa de temei a ipotezei referitoare la mișcarea de rotație a arborelui în jurul axei nedeformate și apoi faptul că relația (17) care exprimă deplasarea centrului elastic este discontinuă la rezonanță.

Acceptarea concluziei de la §4.1.1. direct, ca ipoteză, nu poate fi interpretată drept o eroare.

De asemenea, nici caracterul discontinuu al funcției $\rho = \rho\ (\alpha)$ (fig. 3) nu reprezintă un neajuns; dimpotrivă, dacă ținem seama de ipotezele simplificatoare (15), utilizate, din (14) se obține

$$|z_1| = \rho,$$

deci ambele teorii coincid.

Condiția (16) care exprimă echilibrul, are avantajul de a fi simplă și de a reda totodată comportarea centrului de greutate.

Astfel, pentru $\alpha < 1$, punctul C_2 se deplasează către exterior, (fig. 2a) deformația crescînd (fig. 3), iar pentru $\alpha > 1$, deformația își schimbă semnul (fig. 2b) și C_2 tinde (fig. 4) să se așeze pe axa *oz* (autocentrarea rotorului).

Dacă atribuim deplasării punctului C_2, de la axa *oz* către periferie semnul plus (defazajul încovoiere-dezechilibru este nul, fig. 4, $\alpha = \alpha_1$) și în sens invers semnul minus ($\alpha = \alpha_2$, fig. 4), constatăm că relația (17) descrie și din acest punct de vedere comportarea centrului de greutate.

Teoria prezentată mai sus conține totuși lacune esențiale; în primul rînd nu poate fi acceptată, referindu-ne la rotoare reale, valoarea nelimitată a amplitudinii centrului de greutate (sau elastic). Concluzia se datorește

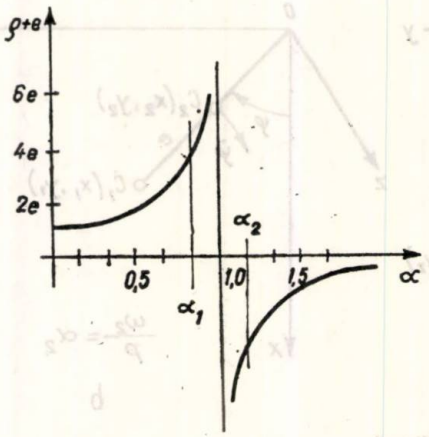


Fig. 3

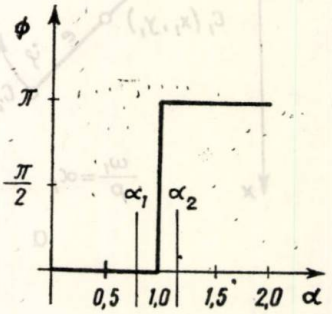


Fig. 4

potezei considerate — amortizare nulă ($\gamma = 0$). Eliminînd această ipoteză, devine imposibilă aplicarea teoriei (unghiul Φ este diferit de zero și punctele O, C_1, C_2 nu mai sînt coliniare); în acest fel nu se pot obține nici un fel de informații referitoare la mărimea amplitudinilor de rezonanță, pentru rotoare reale.

În al doilea rînd teoria este aplicabilă [7] numai mișcării staționare. Adesea, pe baza acestei teorii se încearcă explicarea în general a comportării unui rotor, scop în care se omite indicarea precisă a ipotezelor care stau la baza relației (17) sau se extinde această relație într-un domeniu în care își pierde valabilitatea; din acest punct de vedere criticile formulate [3] sînt justificate pe deplin.

4.2. COORDONATELE PUNCTULUI CERCETAT

4.2.1. *Amplitudinea oscilațiilor.* Apariția în termenul X^{II} sau Y^{II} a mărimii variabile $\dot{\varphi}^2$, [4], [5], în locul factorului constant p^2, [1], [2], nu trebuie interpretată ca o perfecționare adusă modelului matematic atunci cînd nu se precizează punctul cercetat (C_1 sau C_2).

Aproximații apar la cercetarea mișcării centrului elastic C_1, [8] utilizînd ecuații care descriu mișcarea centrului de greutate C_2, [2], [8].

Așa cum rezultă din tabela 1, prezența factorului variabil $\dot{\varphi}^2$ sau al factorului constant p^2 este funcție de coordonatele punctului cercetat.

4.2.2. *Viteza unghiulară de rezonanță.* La trecerea uniform accelerată a unui rotor prin turația critică, cu accelerația unghiulară $\ddot{\varphi}$, distanța de la punctul C_1 sau C_2 la axa *oz* nu devine maximă la viteza unghiulară

proprie a sistemului cu amortizare, $\omega_0 = \sqrt{p^2 - n^2}$, ci la o viteză unghiulară mai mare (fig. 5, $\alpha = \alpha_{max}$),

$$\omega_{max} = (1 + \varkappa)\,\omega_0. \tag{18}$$

În lucrarea [4] s-a considerat că variaţia funcţiei ω_{max} este determinată (fig. 6) de amplitudinea variabilă $\dot{\varphi}^2$ sau constantă p^2 a componentei X^{II} a forţei perturbatoare X, ceea ce nu este just, întrucît funcţia ω_{max} nu este influenţată calitativ de coordonatele punctului cercetat.

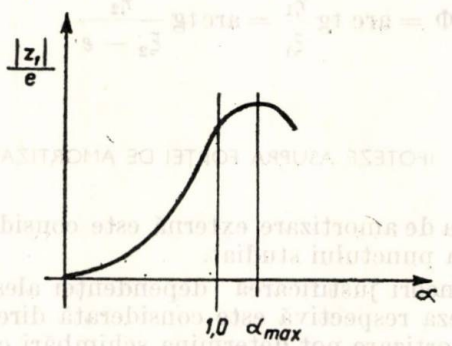


Fig. 5

4.2.3. *Faza mişcării.* Înţelegem prin faza mişcării, unghiul Φ pe care îl formează planul în care este situat dezechilibrul rotorului C_1 C_2 cu planul de flexiune al arborelui (fig. 1). Cercetarea mişcării centrului de greutate este considerată mai avantajoasă deoarece componenta X^{II} (respectiv Y^{II}) are amplitudinea constantă mep^2; totuşi, dificultăţile introduse de apariţia amplitudinii variabile $me\dot{\varphi}^2$ nu sînt prea mari [2], [8].

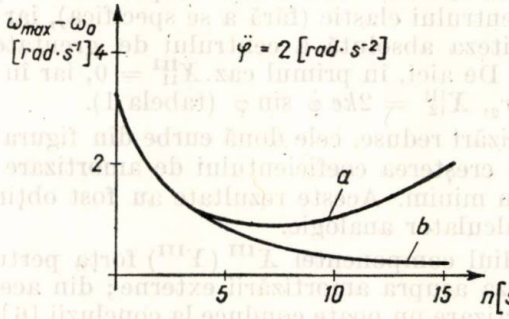


Fig. 6

De regulă, interesează mişcarea centrului elastic şi această alegere este cu atît mai indicată atunci cînd se studiază şi variaţia fazei în regim nestaţionar. Cu notaţiile din figura 1 faza mişcării este

$$\Phi = \theta - \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_1}{x_1} - \varphi \tag{19}$$

sau într-o formă mai avantajoasă, la utilizarea calculatoarelor analogice

$$\Phi = \int_0^t \frac{x_1 \dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \, dt \cdot \tag{20}$$

Dacă se utilizează sistemul mobil de coordonate $\xi 0 \eta$ atunci $C_1 (\xi_1, \eta_1)$ și $C_2 (\xi_2, \eta_2)$

$$\Phi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_1}{\xi_1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_2}{\xi_2 - e} \tag{21}$$

4.3. IPOTEZE ASUPRA FORȚEI DE AMORTIZARE

De obicei forța de amortizare externă este considerată proporțională cu viteza absolută a punctului studiat.

Se încearcă uneori justificarea dependenței alese [9], însă de cele mai multe ori ipoteza respectivă este considerată direct. Ipoteze diferite asupra forței de amortizare pot determina schimbări calitative în variația unor parametri.

Cercetînd variația vitezei unghiulare ω_{max} la care deplasarea OC_1 devine maximă se ajunge la concluzia [4] că pentru $X_{11}^{II} = e\dot{\varphi}^2 \cos\varphi$, $\omega_{max} - \omega_0$ (deci și ω_{max}) prezintă un minim (fig. 6, curba a) spre deosebire de $X_{22}^{II} = ep^2 \cos\varphi$ [1], [2], pentru care $\omega_{max} - \omega_0$ este o funcție monoton descrescătoare (fig. 6 curba *b*).

În realitate schimbarea calitativă rezultă din modificarea ipotezei asupra forței de amortizare, considerată în primul caz proporțională cu viteza absolută a centrului elastic (fără a se specifica), iar în al doilea caz proporțională cu viteza absolută a centrului de greutate (de asemenea fără a se specifica). De aici, în primul caz $X_{11}^{III} = 0$, iar în cel de al doilea, trecînd de la x_1 la x_2, $X_{12}^{III} = 2ke\dot{\varphi} \sin\varphi$ (tabela 1).

Pentru amortizări reduse, cele două curbe din figura 6 au o configurație apropiată; cu creșterea coeficientului de amortizare n $\omega_{max} - \omega_0$ deci și ω_{max}) prezintă un minim. Aceste rezultate au fost obținute și de autor cu ajutorul unui calculator analogic.

Prin intermediul componentei X^{III} (Y^{III}) forța perturbatoare X (Y) depinde și de ipoteza asupra amortizării externe; din acest motiv, neglijarea forței de amortizare nu poate conduce la concluzii [6] valabile pentru rotoare reale.

5. CONCLUZII

Mișcarea de rotație a unui rotor în jurul propriei sale axe deformate reprezintă o ipoteză fundamentală pentru cercetarea oscilațiilor în regim nestaționar.

Expresiile forţelor perturbatoare X, Y, depind atît de coordonatele punctului cercetat, cît şi de ipoteza referitoare la forţa de amortizare. De aceea aprecierile legate de aproximaţiile conţinute în expresia forţei perturbatoare sînt neconcludente fără considerarea acestor aspecte.

Pentru amortizări mici ($n < 5$), în decursul aceluiaşi proces nestaţionar, amplitudinile maxime ale centrului de greutate, respectiv elastic şi vitezele unghiulare la care au loc aceste maxime sînt aproximativ egale, adică

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \approx \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

$$(\omega_{max})_2 \approx (\omega_{max})_1.$$

Primită la redacţie la 29 septembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. F. M. Lewis, *Vibration During Acceleration Through a Critical Speed*, Trans. A.S.M.E., **54** *23*, 253 (1932).
2. A. M. Kaţ *Vinujdennie kolebaniia pri prohojdenii cerez rezonans*, Injenernii Sbornic, **3**, *2*, 101, (1947).
3. E.Dowham *Theory of Shaft Whirling*, The Engineer, **204** *5307—5311*, 518. (1957).
4. Kh. Nasitta, *Auf und Abfahrproblem beschrieben durch eine lineare Schwingungsleichung mit Konstanten Koeffiziente ten und nichtperiodischem Storglied*, V. D. I. Berichte. Bd. *30* 73 (1958).
5. F. Howitt, *Accelerating a Rotor through a Critical Speed*, The Engineer, **212**, *5518*, 691 (1961).
6. G. W. Pick, *Accelerating a Rotor through a Critical Speed*, The Engineer, 1962, March 30, 558.
7. E. G. Goloskokov. *Nestaţionarnie kolebaniia mehaniceschih sistem*, Naukova Dumka, Kiev, 1966, p.5
8. J. G. Potov, *On the vibration of a rotating shaft when accelerated through the jump phenomena associated with nonlinear constraints*, Doct. diss. Univ.Toronto, 1965, p. 14.

ASUPRA DETERMINĂRII EFORTURILOR ÎN ELEMENTELE STÎLPILOR ANCORAȚI PARȚIAL SIMETRIC*)

de EUGEN BUGAIEWSKI
Institutul de petrol Ploiești

În lucrare se stabilesc relații generale de calcul pentru eforturile din ancore și stîlp în cazul general al unui stîlp așezat înclinat și ancorat într-un punct după direcții simetrice față de planul vertical în care se află. Se dau, de asemenea, expresiile particularizate pentru pozițiile ancorelor și cazurile de încărcare mai des întîlnite.

Ancorarea printr-un fasciul de fire pornind dintr-un punct reprezintă, sub aspectul determinării eforturilor din ancore și stîlp, o situație static nedeterminată datorită sprijinirii pe mai multe direcții realizată astfel.

În cazul poziției verticale a stîlpului și a ancorării complet simetrice (întîlnit, de exemplu, la stîlpii de antenă sau la coloanele de macara Derrick), eforturile se pot calcula relativ ușor, considerînd forțele exterioare orientate astfel încît să ducă la o forță de sprijin în punctul de ancorare situată în planul vertical al uneia din ancore, expresiile de calcul rezultînd în această situație simple datorită simetriei.

Dacă însă fasciculul de ancore este distribuit parțial simetric numai față de un plan vertical, iar stîlpul este așezat înclinat în acest plan, ca în cazul stîlpilor de montaj, problema se complică, cu atît mai mult cu cît forța de sprijin are adesea o orientare oarecare față de planul de simetrie.

În această situație, calculele practice se întocmesc de obicei în ipoteza simplificatoare a unui sistem de forțe ce dau o rezultantă de sprijin în planul vertical al stîlpului, admițînd că lucrează numai perechea de ancore simetrice solicitate cel mai dezavantajos, iar dimensionarea se face pentru toate ancorele după acestea.

---

*) Lucrare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23—27 iunie, 1969

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 5, 1972, P. 1099—1117

În prezenta lucrare se consideră cazul unei încărcări oarecare pentru o schemă de ancorare într-un singur punct, conform figurii 1, stîlpul fiind înclinat faţă de verticală la un unghi β. Sistemul de ancore cuprinde două ancore „posterioare" şi două ancore „laterale", distribuite simetric faţă de planul vertical al stîlpului, toate mărimile care se referă la acestea fiind afectate de indicii inferiori, respectiv p, l şi s. Pentru notaţiile care rezultă din figură se precizează că proiecţiile mărimilor geometrice în planul

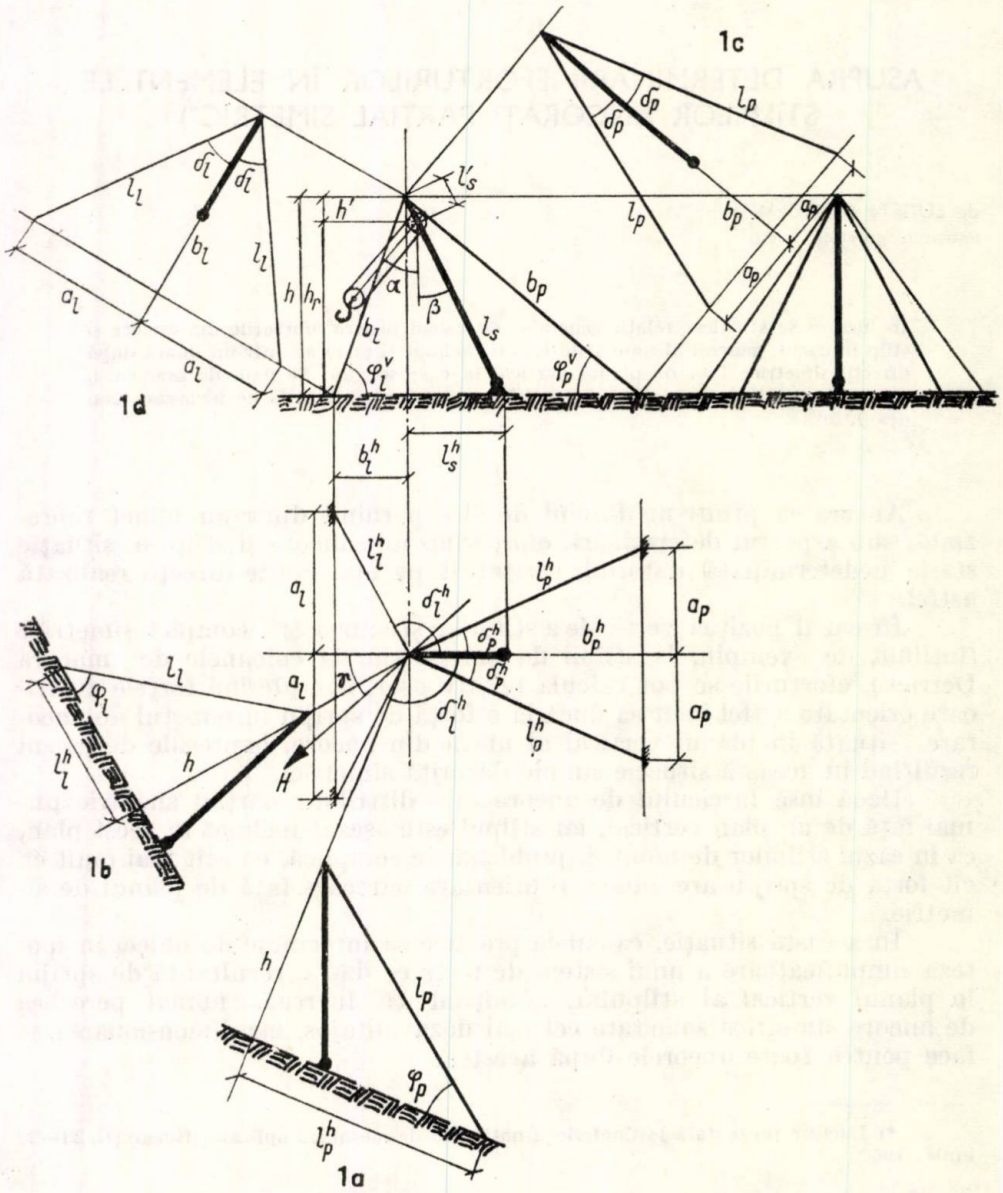


Fig. 1

vertical și cel orizontal sînt afectate de indicii superiori v, respectiv h, iar în scopul scrierii unice a relațiilor asemănătoare privind ancorele s-a folosit indicele general plasat inferior $j \in \{p, 1\}$, care reprezintă ordinul unei ancore oarecari.

De asemenea, pentru o reprezentare mai completă în care să apară toate mărimile geometrice în valoare naturală, figura 1 cuprinde în afara celor trei vederi clasice (elevație, plan, profil) și următoarele rabateri speciale :

— fig. 1*a* : planul vertical al unei ancore posterioare ;
— fig. 1*b* : planul vertical al unei ancore laterale ;
— fig. 1*c* : planul ancorelor posterioare ;
— fig. 1*d* : planul ancorelor laterale.

Se menționează că pentru stîlpii de montaj sau alte cazuri asemănătoare, situația prezentată în figura 1 poate fi considerată ca generală, dacă ancorarea se face într-un singur punct, și permite prin particularizare obținerea diferitelor cazuri speciale de așezare a stîlpului și a ancorelor. Ancorarea în mai multe puncte constituie o situație mai complicată datorită rezemării multiple care apare astfel și nu este tratată aici, însă rezultatele obținute pot fi folosite și în acest caz.

1. RELAȚII GEOMETRICE

Între mărimile geometrice arătate în figura 1 rezultă simplu următoarele relații de legătură utile pentru înlocuiri în expresiile de calcul ca și pentru determinarea lor :

$$h = h_r + h' = h_r + l'_s \cos \beta, \tag{1a}$$

$$l_s = \frac{h_r}{\cos \beta} + l'_s = \frac{h}{\cos \beta}, \tag{1b}$$

$$l_j = \frac{h}{\sin \varphi_j} = \frac{l_j^h}{\cos \varphi_j} = \frac{a_j}{\sin \delta_j}, \tag{1c}$$

$$b_j = \frac{h}{\sin \varphi_j^v} = l_j \cos \delta_j = \frac{a_j}{\tan \delta_j} = \frac{b_j^h}{\cos \varphi_j^h}, \tag{1d}$$

$$l_j^h = \frac{h}{\tan \varphi_j} = \frac{b_j^h}{|\cos \delta_j^h|} = \frac{a_j}{\sin \delta_j^h}, \tag{1e}$$

$$b_j^h = \frac{a_j}{|\tan \delta_j^h|}, \tag{1f}$$

$$\tan \delta_j = \frac{b_j^h}{b_j} \cdot |\tan \delta_j^h| = \cos \varphi_j^v \cdot |\tan \delta_j^h|, \tag{1g}$$

$$\sin \varphi_j = \frac{h}{a_j} \sin \delta_j = \sin \varphi_j^v \cdot \cos \delta_j, \tag{1h}$$

$$\cos \varphi_j = \frac{l_j^h}{l_j} = \frac{\sin \delta_j}{\sin \delta_j^h}. \tag{1i}$$

2. DETERMINAREA EXPRESIILOR GENERALE PENTRU FORȚELE DIN ANCORE ȘI DIN STÎLP

În general, sistemul de forțe exterioare se presupune dat. În cazul stîlpilor de montaj, greutatea sarcinii Q dă forțe care lucrează asupra stîlpului ce se determină din calculul mecanismului de ridicare, pornind de la forța la cîrlig care în condiții de prindere oarecari, definite prin unghiurile α al planului de ridicare și ε al cablului de contra, se poate calcula ușor conform schemei forțelor asupra sarcinii dată în figura 2, din care rezultă :

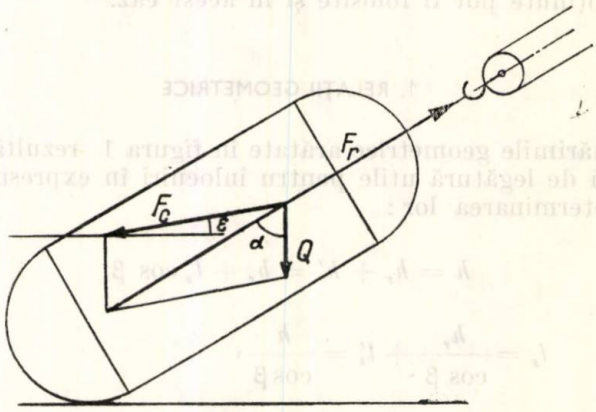


Fig. 2

— forța la cîrligul planului de ridicare :

$$F_r = Q \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\cos (\alpha + \varepsilon)} \tag{2}$$

— forța în cablu de contra :

$$F_c = Q \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha + \varepsilon)}. \tag{2'}$$

Pentru determinarea celorlalte forțe exterioare (din vînt, greutăți proprii, eventuale împingeri speciale etc.) calculele se dezvoltă după specificul fiecărui caz.

Pentru determinarea forțelor din ancore se va considera faptul că rezultanta acestora este forța de sprijin în punctul de ancorare, orientată ca pentru un reazem simplu perpendicular pe stîlp.

Pentru ridicarea nedeterminării datorită ancorării multiple în acest punct, se va considera numai deformarea ancorelor, față de care deformarea stîlpului poate fi neglijată pentru o primă simplificare datorită rigidității sale mari, ceea ce se practică în mod curent în asemenea situații.

Deformarea ancorelor se poate exprima în funcție de deplasarea punctului de legătură care este determinată de aceste deformații și are deci o direcție inițial necunoscută. Pentru simplificare se va considera în primul rînd că această deplasare diferă puțin față de componenta sa orizontală, ceea ce introduce o eroare cu atît mai mică cu cît stîlpul este mai lung și cu cît β este mai mic, adică stîlpul este așezat mai aproape de verticală. Totodată se va admite că deplasarea punctului de ancorare este foarte apropiată de direcția forței de sprijin.

În baza și sub rezerva exactității acestor ipoteze, se poate considera deplasarea punctului de ancorare sub efectul componentei orizontale H a rezultantei sistemului de forțe exterioare în acest punct, obținută din ecuația momentelor față de baza stîlpului, care, în general, este orientată la un unghi γ față de planul vertical al stîlpului.

Proiectînd această deplasare, notată cu x, pe planul vertical al unei ancore de ordin j, ca în figura 3*a*, și admițînd ca neglijabilă schimbarea

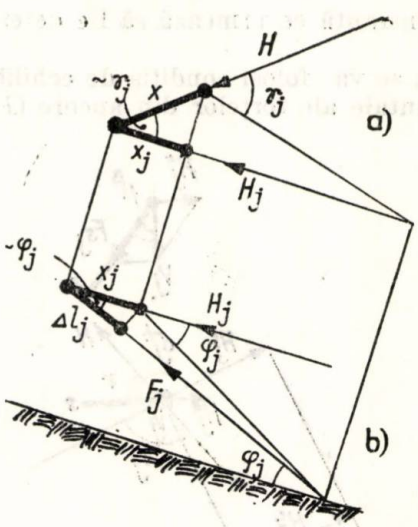


Fig. 3

direcției ancorei (x fiind mic față de lungimea acesteia) se obține componenta orizontală x_j a deformației ancorei Δl_j

$$x_j = x. \cos \gamma_j, \tag{3}$$

unde

$$\gamma_j = \gamma \pm \delta_j^N \tag{4}$$

se poate exprima astfel pentru fiecare pereche de ancore simetrice.

Dacă se consideră apoi planul vertical al ancorei j, ca în figura 3*b*. se obține prin considerații analoge deformația acesteia :

$$\Delta l_j = x \cdot \cos \varphi_j = x \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos \gamma_j = x \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos (\gamma + \delta_j^h). \quad (5)$$

Ținînd seama de expresia cunoscută a deformației la întindere, se poate scrie forța în ancoră sub forma

$$F_j = \frac{\Delta l_j}{l_j} E \cdot A_j = \frac{x \cdot E \cdot A_j}{l_j} \cos \varphi_j \cdot \cos \gamma_j = \frac{k}{l_j} \cos \varphi_j \cdot \cos (\gamma \pm \delta_j^h) \quad (6)$$

sau, cu ajutorul relației (1c),

$$F_j = \frac{k}{h} \cos \varphi_j \cdot \sin \varphi_j \cdot \cos \gamma_j = \frac{k}{2h} \cdot \sin 2 \varphi_j \cdot \cos (\gamma \pm \delta_j^h). \quad (6')$$

Întrucît secțiunile ancorelor sînt sensibil apropiate, s-a notat în relația (6)

$$k = x \cdot E \cdot A_j, \quad (7)$$

care reprezintă o constantă ce urmează să fie determinată, x fiind necunoscut.

Pentru aceasta se va folosi condiția de echilibrare a forței H prin componentele orizontale ale forțelor din ancore (F_j). Deoarece descom-

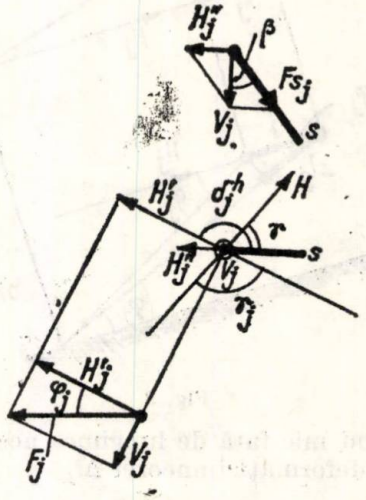


Fig. 4

punerea imediată a forțelor F_j după direcțiile după care pot fi preluate (orizontală și stîlp) este dificilă datorită configurației spațiale a sistemului, se va proceda indirect prin descompunerea intermediară după orizontală

și verticală — obținînd componentele H_j' și V_j — iar apoi componentele verticale V_j se vor mai descompune în planul stîlpului după orizontală (componentele H_j'') și după direcția stîlpului (componentele F_{s_j}), cum se arată în figura 4.

Rezultă astfel expresiile acestor componente ale forțelor F_j :

$$H_j' = F_j \cdot \cos \varphi_j = \frac{k}{l_j} \cos^2 \varphi_j \cdot \cos \gamma_j, \tag{8}$$

$$V_j = F_j \cdot \sin \varphi_j = \frac{k}{l_j} \sin \varphi_j \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos \gamma_j, \tag{8'}$$

$$H_j'' = V_j \cdot \tan \beta = \frac{k}{l_j} \tan \beta \cdot \sin \varphi_j \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos \gamma_j, \tag{8''}$$

$$F_{s_j} = \frac{V_j}{\cos \beta} = \frac{k}{l_j \cos \beta} \cdot \sin \varphi_j \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos \gamma_j, \tag{8'''}$$

care se mai pot scrie folosind relațiile (1c), și (4) sub forma :

$$H_j' = \frac{k}{2h} \cdot \sin 2 \varphi_j \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos (\gamma \pm \delta_j^h), \tag{9}$$

$$V_j = \frac{k}{2h} \cdot \sin 2 \varphi_j \cdot \sin \varphi_j \cdot \cos (\gamma \pm \delta_j^h), \tag{9'}$$

$$H_j'' = \frac{k}{2h} \tan \beta \cdot \sin 2 \varphi_j \cdot \sin \varphi_j \cdot \cos (\gamma \pm \delta_j^h), \tag{9''}$$

$$F_{s_j} = \frac{k}{2h \cos \beta} \sin 2 \varphi_j \cdot \sin \varphi_j \cdot \cos (\gamma \pm \delta_j^h). \tag{9'''}$$

Ecuația de echilibru în plan orizontal

$$\overline{H} = \Sigma \overline{H}_j' + \Sigma \overline{H}_j'', \tag{10}$$

proiectată pe direcția forței H și perpendicular dă următoarele ecuații scalare :

$$H = \Sigma H_j' \cos \gamma_j + \Sigma H_j'' \cos (\gamma - \pi) = \Sigma H_j' \cos (\gamma \pm \delta_j^h) - \Sigma H_j'' \cos \gamma, \tag{10'}$$

$$\Sigma H_j' \cdot \sin \gamma_j + \Sigma H_j'' \sin (\gamma - \pi) = \Sigma H_j' \sin (\gamma \pm \delta_j^h) +$$

$$+ \Sigma H_j'' \cdot \sin \gamma = 0. \tag{10''}$$

Ecuația (10′) scrisă dezvoltat prin înlocuirea expresiilor componentelor H'_j și H''_j din relațiile (9) și (9″), sub forma

$$H = \frac{k}{2h} \cdot [\Sigma \sin 2\varphi_j \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos^2(\gamma \pm \delta_j^h) - \tan\beta \cdot \cos\gamma \, \Sigma \sin 2\varphi_j \cdot$$

$$\cdot \sin \varphi_j \cdot \cos(\gamma \pm \delta_j^h)], \qquad (10''')$$

permite determinarea constantei k, a cărei expresie este

$$k = \frac{2hH}{\Sigma \sin 2\varphi_j \cos\varphi_j \cos^2(\gamma \pm \delta_j^h) - \tan\beta \cdot \cos\gamma \, \Sigma \sin 2\varphi_j \sin\varphi_j \cos(\gamma \pm \delta_j^h)}. \qquad (11)$$

În numitorul acestei relații se poate opera următoarea restrîngere prin introducerea valorilor $j \in \{p, \ l\}$,

$$\cos\gamma \, \Sigma \sin 2\varphi_j \sin\varphi_j \cos(\gamma \pm \delta_j^h) = \cos\gamma \{\sin 2\varphi_p \sin\varphi_p [\cos(\gamma + \delta_p^h) +$$

$$+ \cos(\gamma - \delta_p^h)] + \sin 2\varphi_l \sin\varphi_l [\cos(\gamma + \delta_l^h) + \cos(\gamma - \delta_l^h)\} =$$

$$= 2\cos^2\gamma (\sin 2\varphi_p \sin\varphi_p \cos\delta_p^h + \sin 2\varphi_l \sin\varphi_l \cos\delta_l^h), \qquad (11')$$

de unde rezultă expresia dezvoltată a constantei k sub forma

$$k = \frac{2hH}{\sin 2\varphi_p \{\cos\varphi_p [\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h)] -$$

$$- 2\tan\beta \cos^2\gamma \sin\varphi_p \cos\delta_p^h\} + \sin 2\varphi_l \{\cos\varphi_l [\cos^2(\gamma + \delta_l^h +$$

$$+ \cos^2(\gamma - \delta_l^h)] - 2\tan\beta \cos^2\gamma \cdot \sin\varphi_l \cos\delta_l^h\} \qquad (11'')$$

Introducînd această expresie în relația (6′) se obțin următoarele formule dezvoltate pentru forțele din ancore:

— sub forma generală, corespunzătoare relației (11):

$$F_j = \frac{H \sin 2\varphi_j \cdot \cos(\gamma \pm \delta_j^h)}{\Sigma \sin 2\varphi_j \cos\varphi_j \cos^2(\gamma \pm \delta_j^h) - 2\tan\beta \cos^2\gamma \, \Sigma \sin 2\varphi_j \cdot \sin\varphi_j \cos\delta_j^h}, \qquad (12)$$

— sub forma generală dezvoltată, corespunzătoare relației (11″):

$$F_j = \frac{H \sin 2\varphi_j \cdot \cos(\gamma \pm \delta_j^h)}{\sin 2\varphi_p \{\cos\varphi_p [\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h)] -} \qquad (12')$$

$$- 2\tan\beta \cos^2\gamma \sin\varphi_p \cos\delta_p^h\} + \sin 2\varphi_l \{\cos\varphi_l [\cos^2(\gamma + \delta_l^h)] +$$

$$+ \cos^2(\gamma - \delta_l^h)] - 2\tan\beta \cos^2\gamma \sin\varphi_l \cos\delta_l^h\}$$

— sub forma particularizată pentru ancorele posterioare :

$$F_p = \frac{H \cdot \cos(\gamma \pm \delta_p^h)}{\cos\varphi_p\,[\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\tan\varphi_p\cos\delta_p^h] + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p}\cos\varphi_l[\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_l^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\tan\varphi_l\cos\delta_l^h]}, \quad (12'')$$

— sub forma particularizată pentru ancorele laterale :

$$F_l = \frac{H \cdot \cos(\gamma \pm \delta_l^h)}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cdot\cos\varphi_p[\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\tan\varphi_p\cos\delta_p^h] + \cos\varphi_l[\cos^2(\gamma + \delta_l^h) + \cos^2(\gamma - \delta_l^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\tan\varphi_l\cos\delta_l^h]}. \quad (12''')$$

De asemenea, cu ajutorul relației (9''') prin introducerea expresiei constantei k, se obțin formulele dezvoltate ale forței din stîlp datorită ancorelor, după cum urmează :

— expresia generală corespunzătoare relației (11):

$$F_s = \Sigma F_{s_j} = \frac{k}{2h\cos\beta}\Sigma\sin 2\varphi_j\sin\varphi_j\cos(\gamma \pm \delta_j^h) = H\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{2\Sigma\sin 2\varphi_j\sin\varphi_j\cos\delta_j^h}{\Sigma\sin 2\varphi_j\cos\varphi_j\cos^2(\gamma\pm\delta_j^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\Sigma\sin 2\varphi_j\sin\varphi_j\cos\delta_j^h}, \quad (13)$$

— expresia dezvoltată corespunzător relației (11'');

$$F_s = 2H\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin 2\varphi_p\sin\varphi_p\cos\delta_p^h + \sin 2\varphi_l\sin\varphi_l\cos\delta_l^h}{\sin 2\varphi_p\cos\varphi_p[\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\tan\varphi_p\cos\delta_l^h] + \sin 2\varphi_l\cos\varphi_l[\cos^2(\gamma + \delta_l^h) + \cos^2(\gamma - \delta_l^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\tan\varphi_l\cos\delta_l^h]}, \quad (13')$$

— sau sub o formă analogă relațiilor (12'') și (12''')

$$F_s = 2H\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cdot\frac{\sin\varphi_p}{\sin\varphi_l}\cdot\cos\delta_p^h + \cos\delta_l^h}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cdot\frac{\cos\varphi_p}{\sin\varphi_l}\cdot[\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\tan\varphi_p\cos\delta_p^h] + \cot\varphi_l[\cos^2(\gamma + \delta_l^h) + \cos^2(\gamma - \delta_l^h) - 2\tan\beta\cos^2\gamma\tan\varphi_l\cos\delta_l^h]}. \quad (13'')$$

Datorită simetriei doar parţiale a configuraţiei geometrice şi asimetriei sistemului de forţe, relaţiile de mai sus se prezintă sub o formă algebrică relativ complicată în expresiile ce conţin nemijlocit datele iniţiale. În acest sens menţionăm că s-a preferat exprimarea conţinînd forma $\sin 2\varphi_j$ pentru a se reduce la minimum ridicările la patrat ale funcţiilor trigonometrice. De asemenea, expresiile (12″), (12‴) şi (13″), prin rapoartele funcţiilor trigonometrice pe care le conţin, permit un calcul numeric mai expeditiv, iar în unele cazuri cînd se poate adopta constructiv $\varphi_p \cong \varphi_l$, se pretează la simplificări destul de importante care se pot opera direct, astfel încît noile forme nu au mai fost reproduse.

3. EXPRESII PARTICULARE IMPORTANTE PENTRU FORŢELE DIN ANCORE ŞI STÎLP

Formulele generale stabilite mai sus se simplifică apreciabil în unele cazuri particulare importante şi destul de numeroase care se pot ordona după valorile unghiurilor γ, δ_p^h şi δ_l^h ce definesc orientarea în planul orizontal a forţei H şi a ancorelor, după cum reiese din tabela 1, unde cazurile practic frecvente au fost subliniate.

Tabela 1

Cazul	Valori caracteristice			Categoria	Notaţia forţelor			
	δ_p	δ_l	γ		F_j	F_p	F_l	F_s
1	ned	ned	ned	—	F_j	F_p	F_l	F_s
2	ned	ned	0	2a	F_{j0}	F_{p0}	F_{l0}	F_{s0}
			$\pi/2$	2b	$F_{j\pi/2}$	$F_{p\pi/2}$	$F_l^{\pi/2}$	$F_{s\pi/2}$
			δ_p^h	2c	F_{jp}	F_{pp}	F_{lp}	F_{sp}
			δ_l^h	2d	F_{jl}	F_{pl}	F_{ll}	F_{sl}
3	ned	$\pi/2$	ned	3a	$F_j^{\pi/2}$	$F_p^{\pi/2}$	$F_l^{\pi/2}$	$F_s^{\pi/2}$
			0	3b	$F_{j0}^{\pi/2}$	$F_{p0}^{\pi/2}$	$F_{l0}^{\pi/2}$	$F_{s0}^{\pi/2}$
			$\pi/2$	3c	$F_{j\pi/2}^{\pi/2}$	$F_{p\pi/2}^{\pi/2}$	$F_{l\pi/2}^{\pi/2}$	$F_{s\pi/2}^{\pi/2}$
			δ_p^h	3d	$F_{jp}^{\pi/2}$	$F_{pp}^{\pi/2}$	$F_{lp}^{\pi/2}$	$F_{sp}^{\pi/2}$
4	0	ned	ned	4a	F_j^0	F_p^0	F_l^0	F_s^0
			0	4b	F_{j0}^0	F_{p0}^0	F_{l0}^0	F_{s0}^0
			$\pi/2$	4c	$F_{j\pi/2}^0$	$F_{p\pi/2}^0$	$F_{l\pi/2}^0$	$F_{s\pi/2}^0$
			δ_l^h	4d	F_{jl}^0	F_{pl}^0	F_{ll}^0	F_{sl}^0
5	0	$\pi/2$	ned	5a	$F_j^{0\pi/2}$	$F_p^{0\pi/2}$	$F_l^{0\pi/2}$	$F_s^{0\pi/2}$
			0	5b	$F_{j0}^{0\pi/2}$	$F_{p0}^{0\pi/2}$	$F_{l0}^{0\pi/2}$	$F_{s0}^{0\pi/2}$
			$\pi/2$	5c	$F_{j\pi/2}^{0\pi/2}$	$F_{p\pi/2}^{0\pi/2}$	$F_{l\pi/2}^{0\pi/2}$	$F_{s\pi/2}^{0\pi/2}$

Pentru urmărirea ușoară a listei relațiilor astfel particularizate, redată mai jos, s-au specificat în tabela 1 și notațiile respective ale forțelor F_j (F_p, F_l) și F_s, folosindu-se ca indice inferior valoarea γ și ca indici superiori valorile δ_p^h și δ_l^h (în această ordine). De asemenea, lipsa unui indice indică valoarea sa oarecare, ceea ce în tabelă s-a specificat prin indicativul „ned." (nedefinit).

Astfel se obțin următoarele formule particularizate conform tabelei 1 :

— pentru cazul general 1 : relațiile (12 — 13'')

— pentru cazul 2a ($\gamma = 0$) :

$$F_{j0} = \frac{\frac{1}{2} H \sin 2\varphi_j \cos \delta_j^h}{\sin 2\varphi_p \cos \varphi_p \cos \delta_p^h (\cos \delta_p^h - \tan \beta \tan \varphi_p) + \\ + \sin 2\varphi_l \cos \varphi_l \cos \delta_l^h (\cos \delta_l^h - \tan \beta \tan \varphi_l)}, \tag{14a}$$

$$F_{p0} = \frac{\frac{1}{2} H \cos \delta_p^h}{\cos \varphi_p \cos \delta_p^h (\cos \delta_p^h - \tan \beta \tan \varphi_p) + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cos \varphi_l \cos \delta_l^h \cdot \\ \cdot (\cos \delta_l^h - \tan \beta \tan \varphi_l)} \tag{14b}$$

$$F_{l0} = \frac{\frac{1}{2} H \cos \delta_l^h}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cos \varphi_p \cos \delta_p^h (\cos \delta_p^h - \tan \beta \tan \varphi_p) + \cos \varphi_l \cos \delta_l^h \cdot \\ \cdot (\cos \delta_l^h - \tan \beta \tan \varphi_l)}, \tag{14c}$$

$$F_{s0} = H \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \frac{\sin \varphi_p}{\sin \varphi_l} \cos \delta_p^h + \cos \delta_l^h}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \frac{\cos \varphi_p}{\sin \varphi_l} \cos \delta_p^h (\cos \delta_p^h - \tan \beta \tan \varphi_p) + \\ + \cot \varphi_l \cos \delta_l^h (\cos \delta_l^h - \tan \beta \tan \varphi_l)}, \tag{14d}$$

— pentru cazul $2b \left(\gamma = \frac{\pi}{2} \right)$:

$$F_{j\pi/2} = \frac{\pm \frac{1}{2} H \sin 2\varphi_j \sin \delta_j^h}{\sin 2\varphi_p \cos \varphi_p \sin^2 \delta_p^h + \sin 2\varphi_l \cos \varphi_l \sin \delta_l^h}, \tag{15a}$$

$$F_{p\pi/2} = \frac{\pm \frac{1}{2} H \sin \delta_p^h}{\cos \varphi_p \sin^2 \delta_p^h + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cos \varphi_l \sin^2 \delta_l^h}, \tag{15b}$$

$$F_{\pi/2} = \frac{\frac{1}{2} H \sin \delta_l^h}{\frac{\sin^2 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cos \varphi_p \sin^2 \delta_p^h + \cos \varphi_l \sin^2 \delta_l^h}, \tag{15c}$$

şi

$$F_{s\pi/2} = 0$$

— pentru cazul 2c ($\gamma = \delta_p^h$):

$$F_{jp} = \frac{H \sin 2\varphi_j \cos (\delta_p^h \pm \delta_j^h)}{\sin 2\varphi_p \cos \varphi_p (1 + \cos^2 2\delta_p^h - 2 \tan \beta \tan \varphi_p \cos^3 \delta_p^h) + \\ + \sin 2\varphi_l \cos \varphi_l [\cos^2 (\delta_p^h + \delta_l^h) + \cos^2 (\delta_p^h - \delta_l^h) - \\ - 2 \tan \beta \tan \varphi_l \cos^2 \delta_p^h \cos \delta_l^h]}, \tag{16a}$$

$$F_{pp} = \frac{H \cos (\delta_p^h \pm \delta_p^h),}{\cos \varphi_p (1 + \cos^2 2\delta_p^h - 2 \tan \beta \tan \varphi_p \cos^3 \delta_p^h) + \\ + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cos \varphi_l [\cos^2 (\delta_p^h + \delta_l^h) + \\ + \cos^2 (\delta_p^h - \delta_l^h) - 2 \tan \beta \tan \varphi_l \cos^2 \delta_p^h \cos \delta_l^h]}, \tag{16b}$$

$$F_{lp} = \frac{H \cos (\delta_p^h \pm \delta_l^h)}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cos \varphi_p (1 + \cos^2 2\delta_p^h - 2 \tan \beta \tan \varphi_p \cos^3 \delta_p^h) + \\ + \cos \varphi_l [\cos^2 (\delta_p^h + \delta_l^h) + \cos^2 (\delta_p^h - \delta_l^h) - \\ - 2 \tan \beta \tan \varphi_l \cos^2 \delta_p^h \cos \delta_l^h)}, \tag{16c}$$

$$F_{sp} = 2H \frac{\cos \delta_p^h}{\cos \beta} \cdot \frac{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \frac{\sin \varphi_p}{\sin \varphi_l} \cos \delta_p^h + \cos \delta_l^h}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \frac{\cos \varphi_p}{\sin \varphi_l} (1 + \cos^2 2\delta_p^h - 2 \tan \beta \tan \varphi_p \cos^3 \delta_p^h) + \\ + \cot \varphi_l [\cos^2 (\delta_p^h + \delta_l^h) + \cos^2 (\delta_p^h - \delta_l^h) - \\ - 2 \tan \beta \tan \varphi_l \cos^2 \delta_p^h \cos \delta_l^h]}, \tag{16d}$$

— pentru cazul 2d ($\gamma = \delta_i^h$):

$$F_{jl} = \frac{H \sin 2\varphi_j \cos(\delta_i^h \pm \delta_j^h)}{\sin 2\varphi_p \cos\varphi_p [\cos^2(\delta_i^h + \delta_p^h) + \cos^2(\delta_i^h - \delta_p^h) - 2\tan\beta \tan\varphi_p \cos^2\delta_i^h \cos\delta_p^h] + \sin 2\varphi_l \cos\varphi_l (1 + \cos^2 2\delta_i^h - 2\tan\beta \tan\varphi_l \cos^3\delta_i^h)}, \tag{17a}$$

$$F_{pl} = \frac{H \cos(\delta_i^h \pm \delta_p^h)}{\cos\varphi_p [\cos^2(\delta_i^h + \delta_p^h) + \cos^2(\delta_i^h - \delta_p^h) - 2\tan\beta \tan\varphi_p \cos^2\delta_i^h \cos\delta_p^i] + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cos\varphi_l (1 + \cos^2 2\delta_i^h = 2\tan\beta \tan\varphi_l \cos^3\delta_i^h)}, \tag{17b}$$

$$F_{jl} = \frac{H \cos(\delta_i^h \pm \delta_l^h)}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cos\varphi_p [\cos^2(\delta_i^h + \delta_p^h) + \cos^2(\delta_i^h - \delta_p^h) - 2\tan\beta \tan\varphi_p \cos^2\delta_i^h \cos\delta_p^h] + \cos\varphi_l (1 + \cos^2 2\delta_i^h - 2\tan\beta \tan\varphi_l \cos^3\delta_i^h)}, \tag{17c}$$

$$F_{sl} = 2H \frac{\cos\delta_l^h}{\cos\beta} \cdot \frac{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \frac{\sin\varphi_p}{\sin\varphi_l} \cos\delta_p^h + \cos\delta_l^h}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \frac{\cos\varphi_p}{\sin\varphi_l} [\cos^2(\delta_i^h + \delta_p^h) + \cos^2(\delta_i^h - \delta_p^h) - 2\tan\beta \tan\varphi_p \cos^2\delta_i^h \cos\delta_p^h] + \cot\varphi_l (1 + \cos^2 2\delta_i^h - 2\tan\beta \tan\varphi_l \cos^3\delta_i^h)}, \tag{17d}$$

— pentru cazul 3a$\left(\delta_i^h = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$F_j^{\pi/2} = \frac{H \sin 2\varphi_j \cos(\gamma \pm \delta_j^h)}{\sin 2\varphi_p \cos\varphi_p [\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h) - 2\tan\beta \tan\varphi_p \cos^2\gamma \cos\delta_p^h] + 2\sin 2\varphi_l \cos\varphi_l \sin^2\gamma}, \tag{18a}$$

$$F_p^{\pi/2} = \frac{H \cos(\gamma \pm \delta_p^h)}{\cos\varphi_p [\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h) - 2\tan\beta \tan\varphi_p \cos^2\gamma \cos\delta_p^h] + 2\frac{2\sin\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cos\varphi_l \sin_2\gamma}, \tag{18b}$$

$$F_i^{\pi/2} = \frac{\pm H \sin\gamma}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cos\varphi_p\,[\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h) - 2\tan\beta\tan\varphi_p\cos^2\gamma\cos\delta_p^h] + 2\cos\varphi_l\sin^2\gamma}, \tag{18c}$$

$$F_s^{\pi/2} = 2H\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos\delta_p^h}{\cot\varphi_p\,[\cos^2(\gamma + \delta_p^h) + \cos^2(\gamma - \delta_p^h)] - 2\tan\beta\cos^2\gamma\cos\delta_p^h + 2\frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p}\cdot\frac{\cos\varphi_l}{\sin\varphi_p}\cdot\sin^2\gamma}, \tag{18d}$$

— pentru cazul 3b $\left(\delta_i^h = \frac{\pi}{2}; \gamma = 0\right)$:

$$F_{j0}^{\pi/2} = \frac{\frac{1}{2}H\sin 2\varphi_j\cos\delta_j^h}{\sin 2\varphi_p\cos\varphi_p\cos\delta_p^h(\cos\delta_p^h - \tan\beta\tan\varphi_p)}, \tag{19a}$$

$$F_{p0}^{\pi/2} = \frac{\frac{1}{2}H}{\cos\varphi_p(\cos\delta_p^h - \tan\beta\tan\varphi_p)}, \tag{19b}$$

$$F_{s0}^{\pi/2} = \frac{H}{\cos\beta}\cdot\frac{\tan\varphi_p}{\cos\delta_p^h - \tan\beta\tan\varphi_p} \tag{19c}$$

și

$$F_{i0}^{\pi/2} = 0$$

— pentru cazul 3c $\left(\delta_i^h = \frac{\pi}{2};\ \gamma = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$F_{j\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pm\frac{1}{2}H\sin 2\varphi_j\sin\delta_j^h}{\sin 2\varphi_p\cos\varphi_p\sin^2\delta_p^h + \sin 2\varphi_l\cos\varphi_l}, \tag{20a}$$

$$F_{p\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pm\frac{1}{2}H\sin\delta_p^h}{\cos\varphi_p\sin^2\delta_p^h + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p}\cos\varphi_l}, \tag{20b}$$

$$F_{l\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pm \frac{1}{2} H}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \cos \varphi_p \sin^2 \delta_p^h + \cos \varphi_l} \tag{20c}$$

și

$$F_{s\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

— pentru cazul 3d $\left(\delta_l^h = \frac{\pi}{2} \; ; \; \gamma = \delta_p^h\right)$

$$F_{jp}^{\pi/2} = \frac{H \sin 2\varphi_j \cos(\delta_p^h \pm \delta_j^h)}{\sin 2\varphi_p \cos \varphi_p (1 + \cos^2 2\delta_p^h - 2 \tan \beta \tan \varphi_p \cos^3 \delta_p^h) + \\ + 2 \sin 2\varphi_l \cos \varphi_l \sin^2 \delta_p^h} \tag{21a}$$

$$F_{pp}^{\pi/2} = \frac{H \cos(\delta_p^h \pm \delta_p^h)}{\cos \varphi_p (1 + \cos^2 2\delta_p^h = 2 \tan \beta \tan \varphi_p \cos^3 \delta_p^h) + \\ + 2 \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cos \varphi_l \sin^2 \delta_p^h} \tag{21b}$$

$$F_{lp}^{\pi/2} = \frac{\pm H \sin \delta_p^h}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cos \varphi_p (1 + \cos^2 2\delta_p^h - 2 \tan \beta \tan \varphi_p \cos^3 \delta_p^h) + \\ + 2 \cos \varphi_l \sin^2 \delta_p^h}, \tag{21c}$$

$$F_{sp}^{\pi/2} = 2H \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos^2 \delta_p^h}{\cot \varphi_p (1 + \cos^2 2 \delta_p^h) - 2 \tan \beta \cos^3 \delta_p^h + \\ + 2 \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cdot \frac{\cos \varphi_l}{\sin \varphi_p} \sin^2 \delta_p^h}, \tag{21d}$$

— pentru cazul 4a ($\delta_p^h = 0$):

$$F_j^0 = \frac{H \sin 2\varphi_j \cos(\gamma \pm \delta_p^h)}{2 \sin 2\varphi_p \cos \varphi_p \cos^2 \gamma (1 - \tan \beta \cdot \tan \varphi_p) + \\ + \sin 2\varphi_l \cos \varphi_l [\cos^2(\gamma + \delta_l^h) + \cos^2(\gamma - \delta_l^h) - \\ - 2 \tan \beta \tan \varphi_l \cos^2 \gamma \cos \delta_l^h]}, \tag{22a}$$

$$F_p^0 = \frac{H \cos \gamma}{2 \cos \varphi_p \cos^2 \gamma (1 - \tan \beta \tan \varphi_p) + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cos \varphi_l [\cos^2(\gamma + \delta_l^h) + \\ + \cos^2(\gamma - \delta_l^h) - 2 \tan \beta \tan \varphi_l \cos^2 \gamma \cos \delta_l^h]}, \tag{22b}$$

$$F_l^0 = \frac{H\cos(\gamma \pm \delta_l^h)}{2\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cos\varphi_p\cos^2\gamma(1-\tan\beta\tan\varphi_p)+\cos\varphi_l[\cos^2(\gamma+\delta_l^h)+ \\ +\cos^2(\gamma-\delta_l^h)-2\tan\beta\tan\varphi_l\cos^2\gamma\cos\delta_l^h]}, \tag{22c}$$

$$F_s^0 = 2H\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cdot\frac{\sin\varphi_p}{\sin\varphi_l}+\cos\delta_l^h}{2\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cdot\frac{\cos\varphi_p}{\sin\varphi_l}\cos^2\gamma(1-\tan\beta\tan\varphi_p)+ \\ +\cot\varphi_l[\cos^2(\gamma+\delta_l^h)+\cos^2(\gamma-\delta_l^h)]-2\tan\beta\cos^2\gamma\cdot\cos\delta_l^h}, \tag{22d}$$

— pentru cazul 4b ($\delta_p^h = 0\,;\ \gamma = 0$):

$$F_{j0}^0 = \frac{\frac{1}{2}H\sin 2\varphi_j\cos\delta_j^h}{\sin 2\varphi_p\cos\varphi_p(1-\tan\beta\tan\varphi_p)+ \\ \sin 2\varphi_l\cos\varphi_l\cos\delta_l^h(\cos\delta_l^h-\tan\beta\tan\varphi_l)}, \tag{23a}$$

$$F_{p0}^0 = \frac{\frac{1}{2}H}{\cos\varphi_p(1-\tan\beta\tan\varphi_p)+\frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p}\times \\ \times\cos\varphi_l\cos\delta_l^h(\cos\delta_l^h-\tan\beta\tan\varphi_l)}, \tag{23b}$$

$$F_{l0}^0 = \frac{\frac{1}{2}H\cos\delta_l^h}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cdot\cos\varphi_p(1-\tan\beta\tan\varphi_p)+\cos\varphi_l\cos)\,\delta_l^h(\cos\delta_l^h-\tan\beta\tan\varphi_l)}, \tag{23c}$$

$$F_{s0}^0 = \frac{H}{\cos\beta}\cdot\frac{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cdot\frac{\sin\varphi_p}{\sin\varphi_l}+\cos\delta_l^h}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l}\cdot\frac{\cos\varphi_p}{\sin\varphi_l}(1-\tan\beta\tan\varphi_p)+ \\ +\cot\varphi_l\cos\delta_l^h(\cos\delta_l^h-\tan\beta\tan\varphi_l)}, \tag{23d}$$

— pentru cazul 4c $\left(\delta_l^h = 0\,;\ \gamma = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$F_{j\pi/2}^0 = \frac{\pm\frac{1}{2}H\cdot\sin 2\varphi_j\cdot\sin\delta_j^h}{\sin 2\varphi_l\cdot\cos\varphi_l\cdot\sin^2\delta_l^h}, \tag{24a}$$

$$F^0_{l\pi/2} = \frac{\pm \frac{1}{2} H}{\cos\ \varphi_l \cdot \sin\ \delta^h_l} \tag{24b}$$

și

$$F^0_{p\pi/2} = 0\ ;\ F^0_{s\pi/2} = 0,$$

pentru cazul 4d ($\delta^h_p = 0\ ;\ \gamma = \delta^h_l$):

$$F^0_{jl} = \frac{H\ \sin 2\varphi_j\ \cos\ (\delta^h_l \pm \delta^h_j)}{2\ \sin 2\varphi_p \cos\ \delta_p \cos^2\ \delta^h_l(1 - \tan\ \beta\ \tan\ \varphi_p) + \\ + \sin\ 2\varphi_l\ \cos\ \varphi_l(1 + \cos^2 2\delta^h_l - \\ - 2\tan\ \beta\ \tan\ \varphi_l\ \cos^3\ \delta^h_l)} \tag{25a}$$

$$F^0_{pl} = \frac{H \cdot \cos\ \delta^h_l}{2\cos\ \varphi_p \cdot \cos^2\ \delta^h_l (1 - \tan\ \beta \cdot \tan\ \varphi_p) + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cos\ \varphi_l(1 + \cos^2 2\delta^h_l - \\ - \tan\ \beta\ \tan\ \varphi_l\ \cos^3\ \delta^h_l)}, \tag{25b}$$

$$F^0_l = \frac{H \cdot \cos(\delta^h_l \pm \delta^h_l)}{2\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cos\ \varphi_p \cdot \cos^2\ \delta^h_l (1 - \tan\ \beta\ \tan\ \varphi_p) + \\ + \cos\ \varphi_l(1 + \cos^2 2\delta^h_l - 2\tan\ \beta\ \tan\ \varphi_l\ \cos^3\ \delta^h_l)}, \tag{25c}$$

$$F^0_{sl} = 2H \frac{\cos\ \delta^h_l}{\cos\ \beta} \cdot \frac{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \frac{\sin\ \varphi_p}{\sin\ \varphi_l} + \cos\ \delta^h_l}{2\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_l} \cdot \frac{\cos\ \varphi_p}{\sin\ \varphi_l} \cos^2\ \delta^h_l (1 - \tan\ \beta\ \tan\ \varphi_p) + \\ + \cot\ \varphi_l(1 + \cos^2 2\delta^h_l) - 2\ \tan\ \beta\ \cos^3\ \delta^h_l} + \tag{25d}$$

— pentru cazul 5a $\left(\delta^h_p = 0\ ;\quad \delta^h_l = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$F^{0\pi/2}_j = \frac{\frac{1}{2} H \cdot \sin 2\varphi_j \cdot \cos(\gamma \pm \delta^h_j)}{\sin 2\varphi_p \cos\ \varphi_p \cos^2\ \gamma (1 - \tan\beta \cdot \tan\ \varphi_p) + \sin 2\varphi_l \cdot \cos\ \varphi_l \cdot \sin^2\ \gamma}, \tag{26a}$$

$$F^{0\pi/2}_p = \frac{\frac{1}{2} H \cdot \cos\ \gamma}{\cos\ \varphi_p \cdot \cos^2\ \gamma (1 - \tan\ \beta \cdot \tan\ \varphi_p) + \frac{\sin 2\varphi_l}{\sin 2\varphi_p} \cdot \cos\ \varphi_l\ \sin^2 \gamma}, \tag{26b}$$

$$F_{i}^{0\pi/2} = \frac{\pm \frac{1}{2} H \sin\gamma}{\frac{\sin 2\varphi_p}{\sin 2\varphi_i} \cdot \cos\varphi_p \cdot \cos^2\gamma\,(1 - \tan\beta \tan\varphi_p) + \cos\varphi_i \cdot \sin^2\gamma}, \tag{26c}$$

$$F_{s}^{0\pi/2} = H\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \cdot \frac{\sin 2\varphi_p \cdot \sin\varphi_p}{\sin 2\varphi_p \cos\varphi_p \cos^2\gamma\,(1 - \tan\beta \tan\varphi_p) + \\ + \sin 2\varphi_i \cos\varphi_i \sin^2\gamma}. \tag{26d}$$

— pentru cazul 5b $\left(\delta_p^h = 0\,; \quad \delta_i^h = \frac{\pi}{2}\,; \quad \gamma = 0\right)$:

$$F_{j0}^{0\pi/2} = \frac{\frac{1}{2} H \sin 2\varphi_j \cdot \cos\delta_j^h}{\sin 2\varphi_p \cos\varphi_p (1 - \tan\beta \cdot \tan\varphi_p)}, \tag{27a}$$

$$F_{p0}^{0\pi/2} = \frac{\frac{1}{2} H}{\cos\varphi_p (1 - \tan\beta \cdot \tan\varphi_p),} \tag{27b}$$

$$F_{s0}^{0\pi/2} = \frac{H}{\cos\beta}, \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi_p}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\varphi_p} \tag{27c}$$

şi

$$F_{i0}^{0\pi/2} = 0,$$

— pentru cazul 5c $\left(\delta_p^h = 0\,; \quad \delta_i^h = \frac{\pi}{2}\,; \quad \gamma = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$F_{j\pi/2}^{0\pi/2} = \frac{\pm \frac{1}{2} H \sin 2\varphi_j \cdot \sin\delta_j^h}{\sin 2\varphi_i \cdot \cos\varphi_i}, \tag{28a}$$

$$F_{i\pi/2}^{0\pi/2} = \pm \frac{H}{2\cos\varphi_i}, \tag{28b}$$

iar

$$F_{p\pi/2}^{0\pi/2} = 0 \quad \text{şi} \quad F_{s\pi/2}^{0\pi/2} = 0.$$

Se observă şi aici că în situaţiile cînd poate se admite $\varphi_p \cong \varphi_i = \varphi$, relaţiile prezentate mai sus capătă forme mai simple, uşor de dedus, care dau posibilitatea unui calcul numeric mai rapid.

4. CONSIDERAȚII ASUPRA SOLICITĂRII EFECTIVE A ANCORELOR ȘI A STÎLPULUI

Pentru stabilitatea construcției, ancorele se montează cu o tensiune inițială care se admite de obicei

$$S_0 = (2 \div 3) F_{j\,max}. \tag{29}$$

În această situație, ancorele solicitate în exploatare cu forțe negative (de compresiune) în limita valorilor maxime calculate rămîn tensionate și se comportă ca niște bare, ceea ce s-a admis inițial în calcule întrucît au fost considerate valorile de orice semn ale forțelor.

Astfel efortul maxim din ancore, pe baza căruia trebuie să se facă dimensionarea, rezultă

$$S_{j\,max} = S_0 + F_{j\,max} = (3 \div 4) F_{j max}, \tag{30}$$

iar efortul efectiv în orice moment este pentru fiecare ancoră

$$S_j = S_0 + F_j. \tag{30'}$$

Totodată, forța totală asupra stîlpului provenită din ancore capătă expresia

$$F_{st} = \Sigma \frac{V_j}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta} \cdot \Sigma S_j \sin \varphi_j = \frac{1}{\cos \beta} \Sigma (S_0 \sin \varphi_j + F_j \sin \varphi_j],$$

adică

$$F_{st} = \frac{2 \div 3}{\cos \beta} \Sigma F_{j max} \cdot \sin \varphi_j + \frac{1}{\cos \beta} \Sigma F_j \sin \varphi_j = \frac{2 \div 3}{\cos \beta} F_{j\,max} \Sigma \sin \varphi_j + F_s. \tag{31}$$

Dezvoltînd suma din această relație se obține în continuare formula

$$F_{st} = F_s + \frac{2 \div 3}{\cos \beta} F_{j max} (2 \sin \varphi_p + 2 \sin \varphi_l) = F_s + \frac{4 \div 6}{\cos \beta} F_{j\,max} (\sin \varphi_p + \sin \varphi_p). \tag{31'}$$

În aceste expresii, (29) — (31'), $F_{j\,max}$ trebuie considerat de la caz la caz utilizînd formulele corespunzătoare situațiilor cînd $\gamma = \delta_p^h$ și $\gamma = \delta_l^h$, deoarece valorile reale depind de pozițiile ancorelor (unghiurile φ_j și δ_j^h).

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR BUDAPEST 1848

CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND COEFICIENTUL DE ADERENȚĂ LA ALUNECARE

de CH. VASILIU și I. GHIȚĂ
Institutul politehnic București

Coeficientul de aderență la alunecare are o deosebită importanță în fenomenul de frînare a automobilului.
Determinarea valorilor acestuia pentru diferitele căi de circulație rutieră, precum și prezentarea analitică a funcției de variație în raport cu viteza de deplasare, fiind de un real folos în cercetare, proiectare și exploatare, autorii prezintă în lucrare rezultatele unor experimentări proprii din acest domeniu, pentru două din cele mai întîlnite căi de circulație din țara noastră.

1. COEFICIENTUL DE ADERENȚĂ LA ALUNECARE ȘI IMPORTANȚA SA

Un rol primordial în mișcarea automobilului îl are mărimea aderenței pneurilor față de cale (pornirea, accelerarea, frînarea, deraparea, sînt fenomene ce depind, îndeosebi, de aderență), capacitatea de aderare a benzii de rulare a pneurilor la suprafața de uzură (îmbrăcămintea) a drumului, apreciindu-se prin coeficientul de aderență φ.

Este unanim acceptat că raportul dintre forța maximă tangențială la roată $F_{r\,max}$ — egală cu forța de aderență F_{ad} — și reacțiunea normală a căii Z_r asupra roții să fie denumit coeficient de aderență φ:

$$\varphi = \frac{F_{r\,max}}{Z_r} = \frac{F_{ad}}{Z_r}. \tag{1}$$

Mărimea coeficientului de aderență depinde de o serie de factori [1], printre care și procentul de alunecare (la frînare) sau patinare (la accelerare) a roții față de cale [2].

Experimental s-a constatat că pînă la alunecări de 18—30% coeficientul de aderență crește, atingînd un maximum, după care scade odată cu mărirea procentului de alunecare, astfel că la o alunecare de 100% (roțile blocate), valoarea sa reprezintă 50—75% din cea maximă. În ultimul caz, acest coeficient reprezintă *coeficientul de aderență la alunecare* φ_a.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1119—1131

De asemenea, s-a constatat că — în marea majoritate a accidentelor grave de circulație — urmele de frînare sînt pronunțate, ceea ce denotă blocarea roților frînate (alunecare 100%), blocare care se produce la o apăsare puternică a pedalei de frînă; puțini dintre conducătorii auto, în astfel de ocazii, își mai amintesc că frînarea este mai eficace la o apăsare moderată, care să producă o alunecare optimă a roții pe cale de 18—30%.

Astăzi, cînd traficul și viteza automobilelor sînt într-o continuă creștere, determinarea — și eventual mărirea — coeficientului de aderență la alunecare, pe diferite categorii de drumuri, capătă o importanță deosebită.

Determinarea prin calcul teoretic a coeficientului de aderență este o problemă extrem de dificilă, datorită complexității factorilor ce-l influențează (natura, rugozitatea și starea căii, tipul, modul de construcție și presiunea interioară a pneului, viteza de deplasare a automobilului, factorii atmosferici etc.) Abordarea pe cale teoretică a acestei probleme implică introducerea unor ipoteze simplificatoare, care ar conduce la obținerea unor valori neconcordante cu realitatea.

Din această cauză, determinarea (măsurarea) coeficientului de aderență, numită uneori *odiometrie*, necesită cercetări experimentale, prin care să se obțină valori ale mărimilor ce definesc coeficientul de aderență.

2. METODICA DE CERCETARE EXPERIMENTALĂ A COEFICIENTULUI DE ADERENȚĂ LA ALUNECARE

Coeficientul de aderență la alunecare se poate determina cu ajutorul unui automobil sau al unei remorci dinamometrice, în regim de frînare, folosind una din metodele:

— măsurarea directă a forței de aderență la alunecare (cu căruciorul dinamometric);

— măsurarea decelerației, cu roțile blocate (cu automobilul).

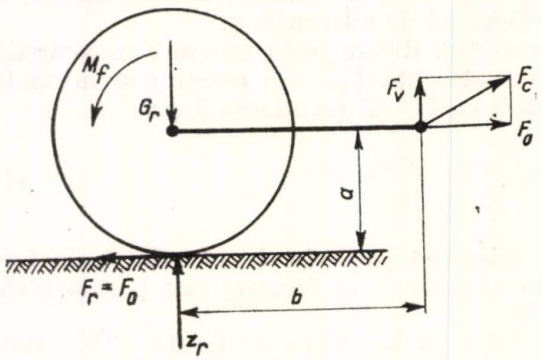


Fig. 1. — Schema de principiu a căruciorului dinamometric cu o roată: M_f — momentul de frînare; F_c — forța la cîrlig; F_v — componenta verticală a forței F_c; F_0 — componenta orizontală a forței F_c; F_{ad} — forța de aderență; G_r — greutatea pe roată; Z_r — reacțiunea solului; a — înălțimea de la sol a cîrligului; b — distanța de la axa roții la cîrlig.

Autorii au ales metoda măsurării directe a forței de aderență la alunecare, folosind un cărucior dinamometric cu o singură roată (fig. 1).

Asupra roții acționează un moment de frînare M_f de sens opus mișcării de rotație, care are tendința de a provoca imobilizarea ei. În zona de

sprijin se dezvoltă o forță de reacțiune a solului F_r, a cărei valoare maximă este egală cu forța de aderență F_{ad}.

Ecuațiile de echilibru ale forțelor și momentelor ce acționează asupra căruciorului dinamometric, formează următorul sistem :

$$\begin{aligned} F_{ad} \cdot a - F_v \cdot b &= 0, \\ Z_r + F_v - G_r &= 0, \\ F_{ad} - F_o &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Din acest sistem de ecuații și ținînd seama de ecuația (1), se deduce relația pentru determinarea coeficientului de aderență la alunecare φ_a, folosită de autori

$$\varphi_a = \frac{F_o}{G_r - \frac{a}{b} F_o} \tag{3}$$

3. INSTALAȚIA PENTRU DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A COEFICIENTULUI DE ADERENȚĂ LA ALUNECARE

Instalația utilizată pentru determinarea coeficientului de aderență la alunecare în regim de frînare, prin măsurarea directă a forței de aderență, cuprinde :

— un cărucior dinamometric ;

— aparate și dispozitive auxiliare.

3.1. *Căruciorul dinamometric.* Căruciorul dinamometric (fig. 2), construit special pentru astfel de determinări, are roata prevăzută cu un pneu de fabricație românească și folosit curent la autoturisme (Victoria, 590—13), cu presiunea interioară de 2,2 at și raza statică r_s de 278 mm.

Frînarea căruciorului dinamometric se realizează cu ajutorul unei instalații de frînare *1*, cu comandă hidraulică, acționată din automobilul-tractor, independentă de instalația de frînare a automobilului-tractor.

Forța orizontală la cîrlig F_0 se măsoară cu ajutorul unui traductor de forță inductiv, pentru întindere și compresiune, de 500 kgf. Traductorul s-a montat în dispozitivul *2*, construit special pentru aceste experimentări, fixat pe bara de tracțiune a căruciorului dinamometric.

Pentru mărirea sarcinii pe roată sînt dispuse cîte două calupuri *3* din beton, de 70 kg fiecare, pe părțile laterale ale căruciorului dinamometric.

Caracteristicile căruciorului dinamometric (fig. 1.) sînt :

$$a = 62 \text{ mm} ; \; b = 1655 \text{ mm} ; \; G_r = 315 \text{ kgf}.$$

3.2. *Aparate de măsurare și înregistrare.* Măsurarea și înregistrarea forței orizontale la cîrlig s-a făcut cu ajutorul traductorului de forță montat pe bara căruciorului, a instalației universale de măsurare UM-111 *1* și a oscilografului N-700 *2*, iar înregistrarea vitezei de deplasare a ansamblului automobil-cărucior dinamometric, cu ajutorul instalației „Roata Peiseler" (fig. 2 și 3).

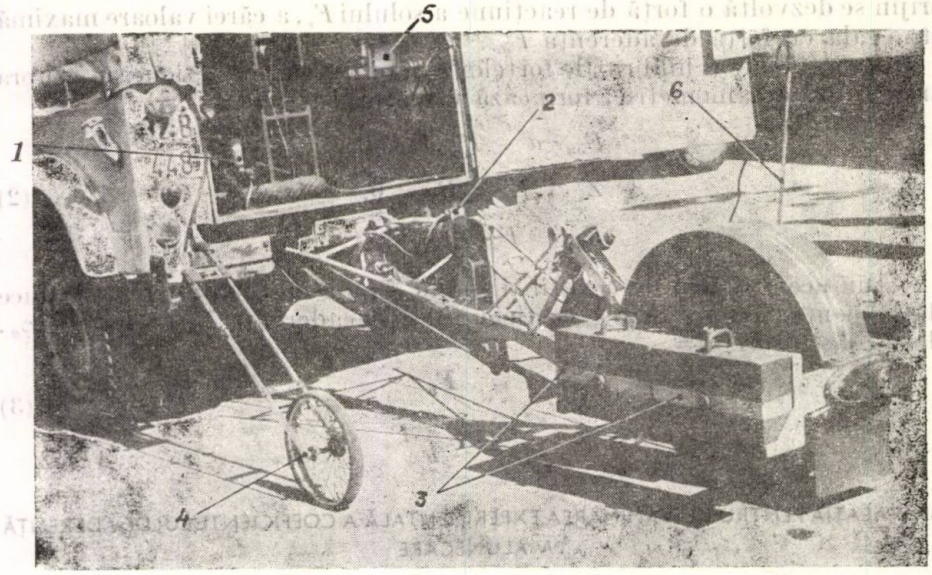


Fig. 2. — Părţile componente ale căruciorului dinamometric.

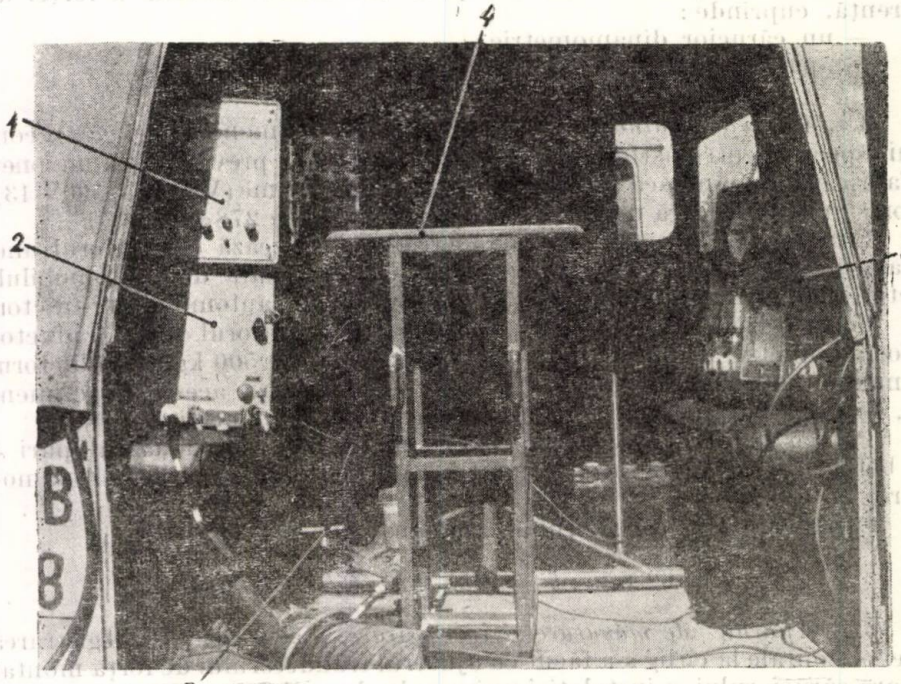


Fig. 3. — Aparatura de măsurare şi înregistrare : *1* — instalaţia universală UM—111 ; *2* — oscilograful N — 700 ; *3* — pedala de frînă ; *4* — pupitrul de comandă ; 5 — aparatul de măsurare al „Roţii Peiseler".

Instalația universală de măsurare UM—111. Această instalație este un amplificator de măsurare complet tranzistorizat, cu un singur canal, fabricat în R. D. Germană.

Circuitele de intrare sînt : semipunte, formată dintr-o marcă activă și o rezistență de compensare ; semipunte din două mărci active ; punte completă din mărci tensometrice ; punte de echilibrare externă. Domeniul frecvenței de lucru este 0—1200 Hz.

Oscilograful N—700. Forța orizontală la cîrlig este înregistrată pe banda oscilografului N—700. Acest oscilograf, fabricat în U.R.S.S., este prevăzut cu 14 canale și permite înregistrarea proceselor electrice în banda de frecvențe 0—1700 Hz.

Alimentarea oscilografului a fost asigurată de două baterii de acumulatoare de 12 V, iar înregistrarea s-a făcut pe hîrtie specială pentru oscilograf, cu lățimea de 100 mm, viteza de deplasare a hîrtiei fiind de 160 mm/s.

Roata Peiseler. Viteza de deplasare a automobilului s-a măsurat și înregistrat cu instalația „Roata Peiseler, tip Labor-Kombination *K*" cunoscută și sub denumirea de „roata a cincea", care se compune din următoarele părți :

— roata 4 (vezi fig. 2) care rulează pe drum, cu articulație cardanică și cu cleme cu gheare de prindere pe cadrul automobilului și un arbore flexibil care transmite mișcarea roții la aparatul de măsurare ;

— aparatul de măsurare *5* (vezi fig. 2 și 3) care cuprinde : înregistratorul forței la pedală ; înregistratorul de viteză ; înregistratorul distanței parcurse ; înregistratorul numărului de rotații ale roților automobilului ; înregistratorul cu bandă cerată : ale semnalelor de timp și ale spațiului de frînare, a diagramei forței la pedala de frînă, și a numărului de impulsuri a rotației roților ; comutatoare și lămpi de semnalizare de punere în funcțiune a aparatului de măsurare ;

— traductorul de impulsuri *6* (vezi fig. 2) pentru determinarea numărului de rotații ale roții căruciorului dinamometric. Traductorul se fixează pe butucul roții prin intermediul unei flanșe construite special.

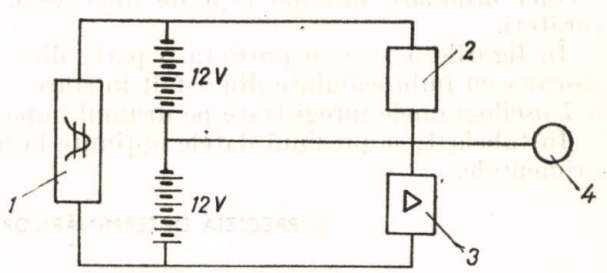


Fig. 4. — Schema — bloc a aparaturii de măsurare și înregistrare : *1* — oscilograf ; *2* — „Roata Peiseler" ; *3* — amplificator ; *4* — traductor de forță.

În figura 4 este reprezentată schema-bloc a aparaturii de măsurare și înregistrare.

3.3. Instalații auxiliare. Pentru determinarea coeficientului de aderență pe căi cu suprafețe umede, în interiorul automobilului-tractor s-a montat o instalație de stropire cu apă a suprafeței căii din fața roții căruciorului, care intră în funcțiune la comanda operatorului.

4. SUCCESIUNEA OPERAȚIILOR ÎN TIMPUL ÎNCERCĂRILOR

Înainte de începerea încercărilor propriu-zise, s-a procedat la :

— pregătirea și verificarea stării tehnice a automobilului folosit pentru probe (autoturismul M—461) :

— verificarea instalației de frînare și instalației electrice a căruciorului dinamometric ;

— verificarea și etalonarea aparaturii de măsurare și înregistrare.

Încercările au fost efectuate pe drumuri — uscate și umede — cu îmbrăcămintea din asfalt (șoseaua „București-com. Măgurele") și împietruite (drumul „com. Măgurele — com. Dumitrana").

Vitezele de experimentare sînt cuprinse între 20—60 km/h (trei intervale a 20 km/h) ; la viteza respectivă, operatorul apasă progresiv pe pedala instalației de frînă *3* (fig. 3) a căruciorului pînă la blocarea completă a roții acestuia.

În momentul apăsării pe pedala de frînă, operatorul pune simultan în funcțiune, prin comanda electrică, de la pupitrul de comandă *4* (fig. 3), aparatura de măsurare și înregistrare. În acest moment, pe baza oscilografului se înregistrează forța orizontală la cîrlig, iar pe banda aparatului de măsurare a „roții a cincea" se înregistrează semnalele de timp (care se pot transforma în viteză) și numărul de impulsuri a rotației roții căruciorului dinamometric.

Măsurătorile și înregistrările s-au făcut la alunecare totală, adică la blocarea roții căruciorului dinamometric, putîndu-se determina astfel coeficientul de aderență la alunecare.

5. REZULTATE EXPERIMENTALE

Valorile coeficienților de aderență (φ_i) din oscilogramele forței orizontale la cîrlig F_0 s-au determinat prin metoda „abaterea medie aritmetică", adică măsurîndu-se valorile a cîte cinci ordonate maxime și a cîte cinci ordonate minime față de linia zero, pentru fiecare serie de măsurători.

În figurile 5 și 6 se prezintă o parte din oscilogramele înregistrate pe șoseaua cu îmbrăcăminte din asfalt în stare uscată și umedă, iar în figura 7 oscilogramele înregistrate pe drumul împietruit.

În tabela 1, se prezintă datele obținute în urma prelucrării valorilor experimentale.

6. PRECIZIA DETERMINĂRILOR

Pentru a se cunoaște precizia de măsurare a aparaturii folosite, s-au efectuat n măsurători pe aceeași bandă de drum. Pentru fiecare serie de măsurători, s-au calculat următoarele mărimi (tabelele 2,3 și 4) :

media aritmetică $\overline{\varphi}_a$ care se determină cu relația

$$\overline{\varphi}_a = \frac{\sum_1^n \varphi_i}{n}, \tag{4}$$

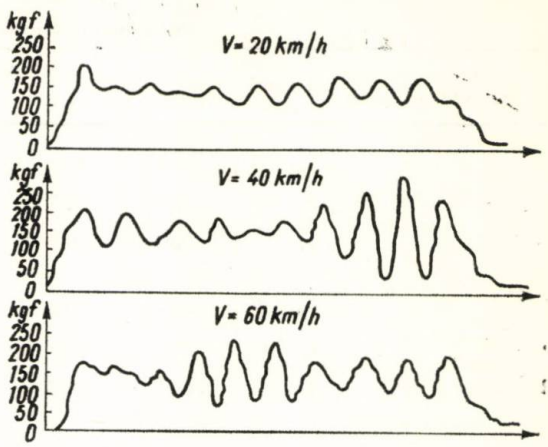


Fig. 5. — Înregistrări ale lui F_o pe șosea asfaltată, în stare uscată.

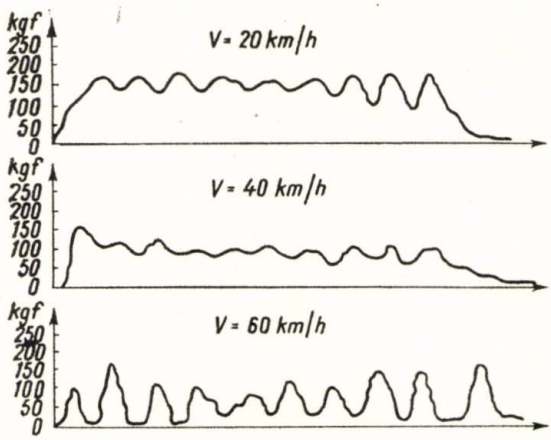


Fig. 6. — Înregistrări ale lui F_o pe șosea asfaltată în stare umedă.

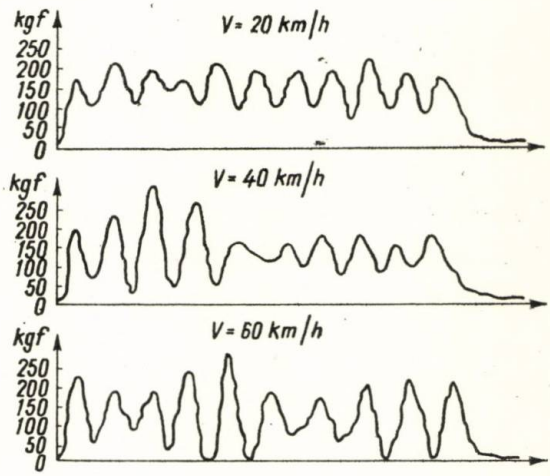


Fig. 7. — Înregistrări ale lui F_o pe drum împietruit.

Tabela 1

Prelucrarea oscilogramelor F_o

Felul drumului	Viteza km/h	Mărimea determinată	Numărul experimentărilor, n					
			1	2	3	4	5	6
Asfalt uscat (Şos. „Bucureşti—Com. Măgurele")	20	F_o, kgf	156	159	152,4	159	157	151
		Z_r, kgf	256	257	258,4	255	256	252
		φ_i	0,61	0,58	0,59	0,62	0,61	0,60
	40	F_o, kgf	148	142	148	148	142	148
		Z_r, kgf	264	258	260	264	258	260
		φ_i	0,56	0,55	0,57	0,56	0,55	0,57
	60	F_o, kgf	140	146	142	146	163	142
		Z_r, kgf	269	266	268	266	269	268
		φ_i	0,52	0,54	0,53	0,54	0,52	0,53
Asfalt umed (Şos. „Bucureşti—Com. Măgurele")	20	F_o, kgf	140	141	136	132	132	139
		Z_r, kgf	269	276	264	266	270	273
		φ_i	0,52	0,51	0,50	0,50	0,49	0,51
	40	F_o, kgf	94	89	94,5	90,6	89,5	88,5
		Z_r, kgf	280	281,6	279,56	278	281,8	281
		φ_i	0,336	0,316	0,339	0,326	0,317	0,315
	60	F_o, kgf	78	79	82	83	72,2	80
		Z_r, kgf	292	285,4	284,2	278	285	281
		φ_i	0,267	0,277	0,288	0,298	0,278	0,280
Drum împietruit („Com. Măgurele—Com. Dumitrana")	20	F_o, kgf	147	145	149	145	149	146
		Z_r, kgf	260	260,4	259	260,4	259	260,25
		φ_i	0,565	0,556	0,575	0,556	0,575	0,560
	40	F_o, kgf	139	138	136	137	139	137
		Z_r, kgf	280	280	280	281	280	280
		φ_i	0,498	0,494	0,485	0,489	0,496	0,489
	60	F_o, kgf	120	117	118			
		Z_r, kgf	270	278	271			
		φ_i	0,444	0,421	0,435			

Tabela 2

Calculul erorilor

Felul drumului	Viteza km/h	φ_i	$\sum_1^n \varphi_i$	$\overline{\varphi}_a$	$\varphi_i - \overline{\varphi}_a$	$\sum_1^n (\varphi_i - \overline{\varphi}_a)^2$	σ	e_m	$\pm e_p$
ASFALT USCAT („Şos. Bucureşti – Com. Măgurele")	20	0,61			0,01	0,0001			
		0,58			−0,02	0,0004			
		0,59			−0,01	0,0001			
		0,62			0,02	0,0004			
		0,61			0,01	0,0001			
		0,60			0	0			
			3,61	0,60		0,0011	0,014	0,0057	±0,011
	40	0,56			0	0			
		0,55			−0,01	0,0001			
		0,57			0,01	0,0001			
		0,56			0	0			
		0,55			−0,01	0,0001			
		0,57			0,02	0,0004			
			3,36	0,56		0,0007	0,01	0,0039	±0,0078
	60	0,52			−0,01	0,0001			
		0,54			0,01	0,0001			
		0,53			0	0			
		0,54			0,01	0,0001			
		0,52			−0,01	0,0001			
		0,53			0	0			
			3,18	0,53		0,0004	0,008	0,0031	±0,0062

Tabela 3

Calculul erorilor

Felul drumului	Viteza km/h	φ_i	$\sum_1^n \varphi_i$	$\overline{\varphi}_a$	$\varphi_i - \overline{\varphi}_a$	$\sum_1^n (\varphi_i - \overline{\varphi}_a)^2$	σ	e_m	$\pm e_p$
ASFALT UMED („Şos. Bucureşti – Com. Măgurele")	20	0,52			0,014	0,000196			
		0,51			0,004	0,000016			
		0,50			−0,006	0,000036			
		0,50			0,006	0,000036			
		0,49			−0,016	0,000256			
		0,51			0,004	0,000016			
			3,03	0,506		0,000556	0,0097	0,0038	+0,0076
	40	0,336			0,011	0,000121			
		0,316			−0,009	0,000081			
		0,339			0,014	0,000196			
		0,326			0,001	0,000001			
		0,317			−0,008	0,000064			
		0,315			−0,010	0,000100			
			1,949	0,325		0,000463	0,0087	0,0034	±0,0068
	60	0,267			0,014	0,000196			
		0,277			−0,004	0,000016			
		0,288			0,007	0,000049			
		0,298			0,017	0,000298			
		0,278			−0,003	0,000009			
		0,280			−0,001	0,000001			
			1,688	0,281		0,000560	0,00964	0,0038	±0,0076

Tabela 4

Calculul erorilor

Felul drumului	Viteza km/ha	φ_i	$\sum_1^n \varphi_a$	$\overline{\varphi}_a$	$\varphi_i - \overline{\varphi}_a$	$\sum_1^n (\varphi_i - \overline{\varphi}_a)^2$	σ	e_m	$\pm e_p$
DRUM ÎMPIETRUIT („Com. Măgurele — Com. Dumitrana")	20	0,565			0.001	0,000001			
		0,556			−0,008	0,000064			
		0,575			0,011	0,000121			
		0,556			−0,008	0,000064			
		0,575			0,011	0,000121			
		0,560			−0,004	0,000016			
			3,387	0,564		0,000387	0,008	0,0031	±0,0062
	40	0,498			0,006	0,000036			
		0,494			0,002	0,000004			
		0,485			−0,007	0,000049			
		0,489			−0,003	0,000009			
		0,496			0,004	0,000016			
		0,489			−0,003	0,000009			
			2,951	0,492		0,000123	0,0045	0,0017	±0,0034
	60	0,444			0,011	0,000121			
		0,421			−0,12	0,000144			
		0,435			0,002	0,000004			
			1,300	0,433		0,000265	0,0093	0,0038	±0,0076

în care

φ_i este mărimea aleatorie a coeficientului de aderență;
n — numărul măsurătorilor;

abaterea medie pătratică σ, care se calculează cu relația

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\varphi_i - \overline{\varphi}_a)^2}{n}}; \tag{5}$$

eroarea medie e_m, care se determină cu relația

$$e_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \tag{6}$$

eroarea probabilă e_p, care se calculează cu relația

$$e_p = \pm 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{7}$$

Eroarea probabilă e_p reprezintă intervalul în care variază valorile aleatorii ale coeficienților de aderență φ_i.

7. GRAFICELE DE VARIAȚIE ȘI FORMA ANALITICĂ A FUNCȚIEI COEFICIENTULUI DE ADERENȚĂ LA ALUNECARE

Pe baza valorilor medii calculate ale coeficientului de aderență la alunecare, s-au trasat curbele de variație a aderenței în funcție de viteza de deplasare a automobilului, după cum urmează :

— pentru șosele asfaltate, în stare uscată (fig. 8);
— pentru șosele asfaltate, în stare umedă (fig. 9);
— pentru drumuri împietruite, în stare uscată (fig. 10).

În vederea exprimării analitice a curbelor experimentale [1] sub forma

$$\varphi_a(V) = a + bV + cV^2, \tag{8}$$

s-a scris condiția de compatibilitate a sistemului format :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_a & 1 & V & V^2 \\ \varphi_{a_{20}} & 1 & 20 & 20^2 \\ \varphi_{a_{40}} & 1 & 40 & 40^2 \\ \varphi_{a_{60}} & 1 & 60 & 60^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

obținîndu-se cele trei constante ale funcției :

$$\begin{aligned} a &= 3\varphi_{a_{20}} - 3\varphi_{a_{40}} + \varphi_{a_{60}}, \\ b &= \frac{5\varphi_{a_{20}} - 8\varphi_{a_{40}} + 3\varphi_{a_{60}}}{2.20}, \\ c &= \frac{\varphi_{a_{20}} - 2\varphi_{a_{40}} + \varphi_{a_{50}}}{2.20^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

Pentru cele trei cazuri experimentate expresiile analitice ale funcției coeficientului de aderență sînt date în tabela 5.

Tabela 5

Expresiile analitice ale funcției coeficientului de aderență pentru căile experimentate

Felul și starea căii	Expresia analitică $\varphi_a(V)$
Șosea asfaltată, uscată	$0{,}65 - 2{,}25 \cdot V \cdot 10^{-3} + 1{,}25 \cdot V^2 \cdot 10^{-5}$
Șosea asfaltată, umedă	$0{,}824 - 19{,}325 \cdot V \cdot 10^{-3} + 17{,}125 \cdot V^2 \cdot 10^{-5}$
Drum împietruit, uscat	$0{,}649 - 4{,}57 \cdot V \cdot 10^{-3} + 1{,}625 \cdot V^2 \cdot 10^{-5}$

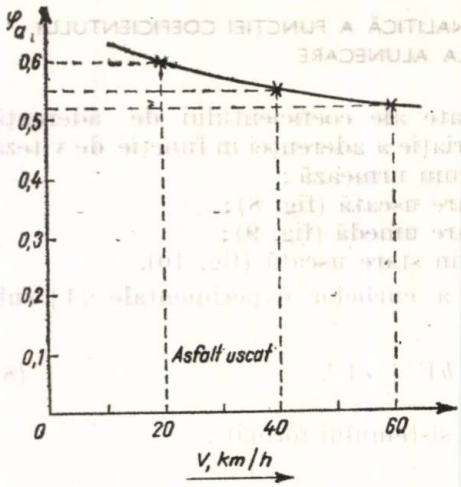


Fig. 8. — Variația coeficientului de aderență la alunecare pe asfalt uscat.

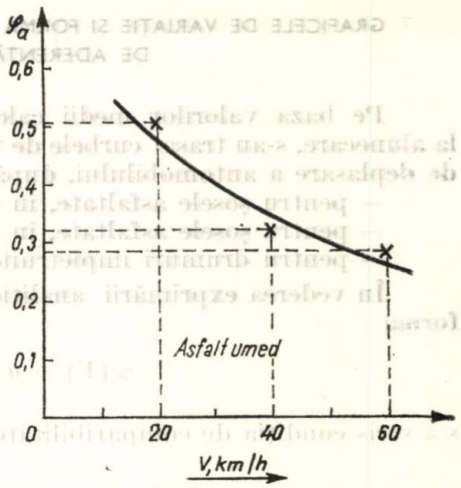


Fig. 9. — Variația coeficientului de aderență la alunecare pe asfalt umed.

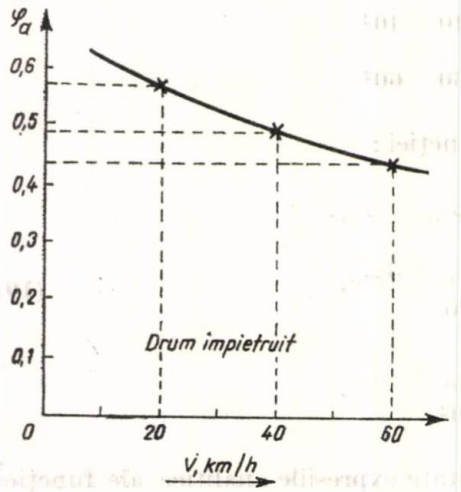


Fig. 10. — Variația coeficientului de aderență la alunecare pe drum împietruit uscat.

8. CONCLUZII

Din analiza valorilor coeficientului de aderență la alunecare, din tabele precum și din graficele de variație în funcție de viteza de deplasare rezultă următoarele :

— coeficienții de aderență scad odată cu creșterea vitezei de deplasare a automobilului ;

— valorile coeficienților de aderență în cazul drumurilor în stare umedă sînt inferioare față de cele determinate pe aceleași drumuri, însă în stare uscată ;

— valorile coeficientului de aderență scad mai mult, în funcție de viteză, pe o cale umedă decît pe una uscată.

Rezultatele obținute de autori, pe drumuri curent întîlnite în țara noastră, pun la îndemîna celor ce se ocupă cu probleme de construcția și exploatarea automobilelor, precum și experților tehnici în automobile, date folositoare cu privire la mărimea și variația coeficientului de aderență la alunecare.

Primită la redacție la 20 aprilie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. Ch. Vasiliu, *Influența variației coeficientului de aderență asupra parametrilor capacității de frînare a automobilului*, St. cerc. mec. apl., *1*, (1972).
2. C. Ghiulai, *Mecanica automobilului*, București; Edit. tehnică, 1965.

COMPARAREA STRUCTURALĂ A LANȚURILOR CINEMATICE PLANE ARTICULATE (LCp) CU AJUTORUL TEORIEI GRAFELOR

de N. I. MANOLESCU și M. DRANGA

Institutul politehnic București

În enumerarea lanțurilor cinematice plane cu anumite proprietăți, o problemă esențială o constituie identificarea structurilor echivalente de lanțuri dintr-o mulțime dată. Pentru rezolvarea acestei probleme, în literatura de specialitate se indică utilizarea teoriei grafelor prin stabilirea unei corespondente între mulțimea de lanțuri și o mulțime de grafe (grafe cinematice), la lanțuri echivalente structural corespunzînd o clasă de grafe izomorfe.
Lucrarea tratează din punct de vedere algebric problema izomorfismului grafelor în legătură cu problema enunțată, și pe baza rezultatelor stabilite se propune un algoritm pentru verificarea izomorfismului la un calculator numeric.

1. INTRODUCERE

1.1. Prin *lanț cinematic* se înțelege un sistem tehnic de corpuri legate între ele. Corpurile se numesc *elementele* lanțului iar legăturile mobile dintre ele se numesc *cuple* cinematice.

Dacă lanțul cinematic este astfel încît elementele sale în orice poziție a acestora se mișcă într-un același plan sau în plane paralele lanțul se numește plan. O clasă importantă de lanțuri plane o constituie lanțurile plane articulate, prescurtat (*LCpa*). La aceste lanțuri elementele sînt legate prin cuple de rotație (articulații) care permit numai o mișcare relativă de rotație în raport cu axa care trece prin centrul geometric al cuplei și este perpendiculară pe planul de mișcare.

Numărul de cuple aferente unui element definește *rangul* elementului.

Un lanț cinematic este *închis* dacă nu există elemente cu rangul inferior lui doi.

Numărul gradelor de libertate ale unui *LCp* se calculează cu formula

$$L = 3e - 2\ c_5, \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1133–1144

în care e este numărul elementelor şi c_5 numărul articulaţiilor (indicele 5 reprezintă numărul gradelor de libertate relative suprimate de articulaţie elementelor cuplei).

Din lanţurile cinematice închise, prin fixarea unui element oarecare se obţin „mecanismele" — unităţile structurale separabile din punct de vedere cinematic ale sistemelor mecanice mobile cu aplicaţie în tehnică (maşini, transmisii, aparate, instrumente, dispozitive).

Elementul fixat (considerat fix) se numeşte *bază*.

Gradul de libertate al unui mecanism, care reprezintă gradul de libertate al lanţului din care provine în raport cu baza, se numeşte *gradul de mobilitate* al mecanismului. Acest număr coincide cu numărul necesar de mişcări simple imprimate unor elemente, numite elemente conducătoare, pentru ca mecanismul să fie desmodrom, adică toate elementele să aibă mişcări determinate.

Cele mai utilizate mecanisme în practică sînt mecanismele plane, fapt ce atestă importanţa lanţurilor cinematice plane.

1.2. O problemă importantă în studiul *LCpa* este a se determina toate lanţurile distincte structural (enumera) care corespund unui triplet dat de numere întregi (L, e, c_5) ce satisfac relaţia (1). Rezultatele obţinute pînă în prezent se referă numai la *LCpa* cu *cuple simple* numite lanţuri cinematice de bază, abreviat *LCB*, cu $L = 4$ şi $e = 4{,}6{,}8$ şi 10 elemente. Cu 4 elemente există un singur lanţ, patrulaterul articulat (fig. 1*a*), cu 6 elemente există două lanţuri distincte, lanţul Watt şi lanţul Stephenson (fig. 1*b*), cu 8 elemente există 16 lanţuri [7] iar cu 10 elemente există 230 *LCB* [3], [4].

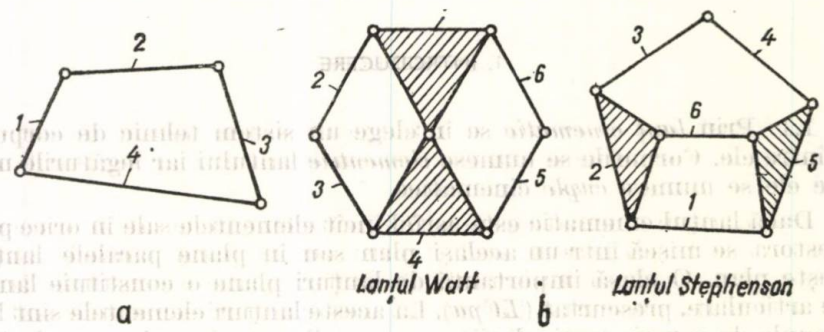


Fig. 1

În rezolvarea problemei enumerării, cercetătorii au aplicat diferite procedee de a obţine noi lanţuri cinematice plecînd de la lanţuri cunoscute. S-a constatat însă, că prin metodele utilizate rezultau nu numai lanţuri distincte structural, fiind necesar ca din mulţimea lanţurilor astfel obţinute să se identifice structurile echivalente; această operaţie este ceea ce se numeşte *compararea structurală* a lanţurilor cinematice şi este legată de problema enumerării elementelor unei clase de lanţuri cu anumite proprietăţi, de exemplu, lanţurile care corespund unui triplet oarecare (L, e, c_5) dat.

1.3. În cele ce urmează se dă un algoritm de comparare a două sau mai multe *LCpa* la calculator cu ajutorul teoriei grafelor. De altfel, teoria grafelor s-a aplicat și pentru enumerarea *LCB* cu 6,8 și 10 elemente [3], [5], [7], iar în [6] s-au enumerat *LC* cu cuple superioare cu $L_3 = 4,5$ și $e = 2,3,4,5$. Utilizarea teoriei grafelor în rezolvarea acestor probleme este bazată pe faptul că structura unui *LC* poate fi definită printr-un graf în care punctele reprezintă elementele, iar muchiile cuplele respective. În figura 2 sînt reprezentate, de exemplu, grafele corespunzătoare lanțurilor cinematice cu 6 elemente (fig. 1*b*). Grafele asociate în modul arătat lanțurilor cinematice se numesc *grafe cinematice* [1].

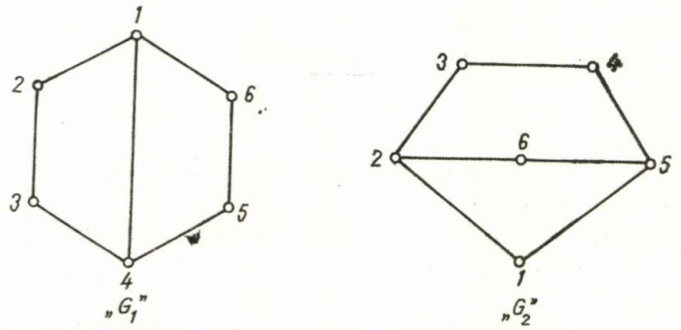


Fig. 2

Este de precizat că graful asociat unui lanț cinematic este unic determinat, abstracție făcînd de un *izomorfism* de grafe, unei clase de lanțuri echivalente (nedistincte) structural corespunzîndu-i o clasă de grafe izomorfe.

În lucrarea de față se tratează riguros problema izomorfismului grafelor cinematice pe baza căreia se pot justifica o serie de algoritmi [1], inclusiv a celui propus de autorii acestui articol, utilizați pentru verificarea identității structurale a două sau mai multe *LC*, chestiune esențială în problema enumerării lanțurilor cinematice [1], [6], [7].

Pentru cele ce urmează sînt necesare mai întîi unele elemente de teoria grafelor după care se va trece la fundamentarea algebrică a noțiunii de izomorfism de grafe.

2. IZOMORFISMUL GRAFELOR

2. 1. Din punct de vedere matematic un graf reprezintă o pereche $G = (X, \Gamma)$, în care X este o mulțime (mulțimea suport) și Γ este o aplicație multivocă a lui X în X. Dacă X este o mulțime finită, se reprezintă elementele acestei mulțimi prin puncte în plan. Oricare două puncte x și y, care sînt astfel încît $y \in \Gamma x$, se unesc cu o linie care va pleca din x către y. Un element al mulțimii X se numește *punct* sau *vîrf*; o pereche (x, y) astfel încît $y \in \Gamma x$ se numește *arc* al grafului.

Se numeşte *muchie* a unui graf $G = (X, \Gamma)$ o mulţime de două vîrfuri x şi y astfel încît $y \in \Gamma x$ şi $x \in \Gamma y$, $x \neq y$. Punctele x şi y se numesc extremităţile muchiei. O muchie va fi notată printr-o literă minusculă avînd deasupra o bară, $\overline{u} = \overline{(x, y)}$, iar mulţimea muchiilor va fi notată printr-o literă mare, de asemenea barată. Spre deosebire de arc, muchia nu implică nici o orientare. Un graf avînd numai muchii este un *graf neorientat*.

Prin *gradul unui vîrf* x se înţelege numărul de muchii care au o extremitate în x, cealaltă extremitate fiind diferită de x. Scriem $g(x)$ pentru a indica gradul lui x.

Două vîrfuri x şi y sînt *adiacente* dacă sînt distincte şi dacă există o muchie $\overline{u} = \overline{(x, y)}$.

Un *lanţ* este un şir de muchii $(\overline{u}_1 \overline{u}_2, \ldots)$, fiecare muchie $\overline{u}_k$ fiind legată de $\overline{u}_{k-1}$ printr-una din extremităţile ei, iar de $\overline{u}_{k+1}$ prin cealaltă extremitate.

Se numeşte *ciclu*, un lanţ finit care pleacă dintr-un vîrf şi ajunge tot în acelaşi vîrf.

Un graf se numeşte *conex* dacă $\forall x$ şi $\forall y$ $(x \neq y)$ există un lanţ ce merge de la x către y.

Un *subgraf* al lui G este prin definiţie un graf (A, Γ_A), unde $A \subset X$ şi $\forall x$, $\Gamma_A x \subset \Gamma_x \cap A$.

Grafele cinematice sînt grafe neorientate, conexe, liniare (două puncte sînt unite prin cel mult o muchie) şi orice graf parţial avînd n' vîrfuri şi c_5' muchii satisface relaţia

$$3n' - 2c_5' > 4.$$

Această ultimă condiţie apare în legătură cu evitarea părţilor supraconstrînse în lanţul cinematic ($Mp \leqslant 0$) [3], [7]. Este de notat şi faptul că grafele cinematice corespunzătoare LCP închise au proprietatea

$$g(x) \geqslant 2 \forall x.$$

Grafele cinematice pot fi planare (muchiile nu se intersectează decît în vîrfurile grafului) sau nu, în concordanţă cu teorema lui Kuratowski [9].

2.2. Se spune că două grafe sînt *izomorfe* dacă pot fi făcute să coincidă printr-o *deformare elastică a planului* [8]. Aceasta este o definiţie topologică şi corespunde noţiunii intuitive de izomorfism. În concordanţă cu definiţia de mai sus se propune o definiţie algebrică (riguroasă)*) şi se va stabili o serie de rezultate care să servească la construirea, respectiv justificarea unor algoritmi de verificare a izomorfismului grafelor cinematice.

Fie două grafe $G_1 = (X, \Gamma) = (X, \overline{U})$ şi $G_2 = (Y, \Delta) = (Y, \overline{V})$. O aplicaţie $\varphi : X \to Y$ o numim *homomorfism* dacă pentru orice $\overline{(x, y)} \in \overline{U}$, avem $\overline{(\varphi x, \varphi y)} \in \overline{V}$.

*) Autorii lucrării de faţă nu au cunoştinţă de o tratare asemănătoare a problemei izomorfismului grafelor în literatura matematică.

Aplicația φ se numește *izomorfism* de grafe, dacă este : a) o aplicație biunivocă (bijecție), b) homomorfism și c) aplicația inversă $\varphi^{-1}: Y \to X$ este de asemenea homomorfism.

Grafele G_1 și G_2 vom zice că sînt *izomorfe* și vom nota $G_1 \sim G_2$, dacă există un izomorfism $\varphi : (X, \overline{U}) \to (Y, \overline{V})$.

Observația 1. Dacă $G_1 \sim G_2$, atunci mulțimile lor suport au același număr de elemente, $|X| = |Y|$.

TEOREMA 1. Două grafe $G_1 = (X, \Gamma)$ și $G_2 = (Y, \Delta)$ sînt izomorfe, dacă și numai dacă există o bijecție $\varphi : X \to Y$ astfel ca următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma} & \mathcal{P}(X) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \Delta & \downarrow{\scriptstyle\bar{\varphi}} \\ Y & \xrightarrow{} & \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

să fie comutativă, adică $\bar{\varphi}\,\Gamma = \Delta\varphi$, $\bar{\varphi}$ fiind aplicația definită de la $\mathcal{P}(X)$, mulțimea părților lui X, în $\mathcal{P}(Y)$, mulțimea părților lui Y.

Într-adevăr, să presupunem că $G_1 \sim G_2$. Atunci există $\varphi : X \to Y$ astfel că, dacă $(x_i, x_k) \in \overline{U} \Rightarrow (\varphi x_i, \varphi x_k) \in \overline{V}$.
Notăm $\varphi(x_i) = y_i$, $\varphi(x_k) = y_k$ și $\Gamma x_i = \mathcal{P}(x_k)$, $\Delta y_i = \mathcal{P}(y_k)$.
Avem $x_k \in \Gamma x_i = \mathcal{P}(x_k)$, $y_k \in \Delta y_i = \mathcal{P}(y_k)$ și $\mathcal{P}(x_k) = \mathcal{P}(y_k)$.
Deci $\bar{\varphi}\,\Gamma x_i = \Delta y_i = \Delta\varphi\, x_i$, adică $\bar{\varphi}\,\Gamma = \Delta\varphi$.

Reciproc, să presupunem că avem $\bar{\varphi}\,\Gamma = \Delta\,\varphi$ și să arătăm că $G_1 \sim G_2$.

Pentru aceasta fie $(x_i, x_k) \in \overline{U}$; înseamnă că $x_k \in \Gamma x_i = \mathcal{P}(x_i)$, de unde rezultă că $\varphi x_k \in \bar{\varphi}\,\mathcal{P}(x_k)$, adică $y_k \in \bar{\varphi}\Gamma\varphi x_i = \Delta\varphi x_i = \Delta y_i$, deci $(y_i, y_k) = (\varphi x_i, \varphi x_k) \in \overline{V}$.

Observația 2. Din diagrama de mai sus rezultă că avem îndeplinită și

$$\Gamma\varphi^{-1} = \bar{\varphi}^{-1}\,\underline{\Delta}.$$

Observația 3. Teorema 1 poate fi considerată o definiție echivalentă cu cea inițială a noțiunii de izomorfism a două grafe.

TEOREMA 2. Două grafe $G_1 = (X, \overline{U})$ și $G_2 = (Y, \overline{V})$ sînt izomorfe, dacă și numai dacă există o bijecție $\psi : \overline{U} \to \overline{V}$ cu proprietatea : dacă $(x_i, x_k) \in \overline{U}$ și $(y_i, y_k) \in \overline{V}$ astfel ca $(x_i, x_k) \overset{\psi}{\rightsquigarrow} (y_i, y_k)$, atunci $g(x_i) = g(y_i)$ și $g(x_k) = g(y_k)$ ($g(x)$ fiind gradul vîrfului x). Necesitatea $G_1 \sim G_2 \Rightarrow$ ex. $\varphi : X \to Y$ bijecție astfel ca $\bar{\varphi}\,\Gamma = \Delta\varphi$.

Fie $(x_i, x_k) \in \overline{U} \Rightarrow x_k \in \Gamma x_i$. Notăm $\varphi(x_i) = y_i$; $\varphi(x_k) = y_k$.
Să arătăm că $(y_i, y_k) \in \overline{V}$. Într-adevăr, din $x_k \in \Gamma x_i$ rezultă

$$y_k = \varphi\, x_k \in \bar{\varphi}\,\Gamma x_i = \Delta\varphi\, x_i = \Delta y_i.$$

Să luăm în rolul lui ψ aplicația $(x_i, x_k) \rightsquigarrow (y_i, y_k)$. Avem $\bar{\varphi}\Gamma x_i = \Delta\varphi x_i = \Delta y_i$. Dar $|\Gamma x_i| = g(x_i)$ și $|\Gamma x_i| = |\bar{\varphi}\,\Gamma x_i| = |\Delta y_i|$. Deci $g(x_i) = g(y_i)$.

Suficiența : Presupunem că există $\psi : \overline{U} \to \overline{V}$ și dacă $\overline{(x_i, x_k)} \in \overline{U}$ și $\overline{(y_i, y_k)} \in \overline{V}$ astfel că $\overline{(y_i, y_k)} = \psi\overline{(x_i, x_k)}$, atunci $g(x_i) = g(y_k)$ și $g(x_k) = g(y_k)$. Să arătăm că în aceste condiții $G_1 \sim G_2$. Pentru aceasta să observăm mai întîi că din ipoteze rezultă $|X| = |Y|$ (făcînd $i = k$, (x_i, y_i) reprezintă însuși punctul x_i deoarece graful este fără bucle). Fie aplicația $x_i \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} y_i$. Evident, φ e biunivocă.

Arătăm că φ satisface relația din teorema 1. Într-adevăr, $x_k \in \Gamma x_i \Rightarrow$ $\Rightarrow y_k = \varphi x_k \in \varphi x_i$ și deci $\Delta\varphi \subset \overline{\varphi}\Gamma$. Pentru a demonstra incluziunea contrară vom utiliza observația 2. Să considerăm $y_k \in \Gamma y_i$. Atunci $\varphi^{-1} y_k \in \varphi^{-1}\Delta y_i$, dar $\varphi^{-1} y_k = x_k \in \Gamma x_i$ și deci $\Gamma x_i \subset \varphi^{-1}\Delta y_i = \varphi^{-1}\Delta\varphi x_i$, de unde rezultă $\overline{\varphi}\,\Gamma \subset \Delta\varphi$.

Notă : Această teoremă se exprimă mai simplu astfel: Două grafe sînt izomorfe dacă și numai dacă există o aplicație biunivocă între muchiile lor care păstrează incidența *).

3. Practic, teorema 2 se poate aplica astfel : Se asociază fiecărui graf un tablou cu atîtea linii cîte vîrfuri are. Pentru fiecare vîrf, pe linie se scrie gradul vîrfului respectiv și gradele punctelor adiacente acestuia, într-o ordine arbitrară ; deci numerele de pe linii pot fi permutate între ele cu excepția primului număr fără să afecteze tabloul. De asemenea permutarea liniilor tabloului nu este semnificativă.

Două linii în același tablou sau în tablouri diferite sînt egale dacă diferă numai printr-o permutare a elementelor (eventual permutare cu repetiție).

Două tablouri vom zice că sînt *egale* și notăm $\approx$ dacă pot fi făcute să coincidă prin permutări ale elementelor pe linii și permutări de linii.

Astfel, tabloul asociat grafului G_1 din figura 2 este :

1	3	3	2	2		1	3	2	2	3
2	2	3	2			4	3	2	2	3
3	2	2	3		$\approx$	2	2	2	3	
4	3	2	3	2		3	2	2	3	
5	2	3	2			5	2	2	3	
6	2	2	3			6	2	2	3	

Este aproape evident că *egalitatea* tablourilor asociate a două grafe exprimă îndeplinirea teoremei 2.

Pînă acum am considerat lanțurile cinematice plane cu articulații simple (*LCp*). În [11] și [12] este studiată sinteza lanțurilor cinematice cu articulații multiple și elemente simple ale căror mulțime este notată în lucrările respective cu *LCpams*. La un asemenea lanț structura poate fi exprimată printr-un graf care are aceeași configurație ca și lanțul însuși, adică vîrfurile grafului corespund cuplelor iar muchiile elementelor lanțului.

*) O muchie este *incidentă* într-un punct x_i *dacă* x_i este o extremitate, adică dacă muchia este de forma $\overline{(x_i, y_i)}$ cu $y_i \neq x_i$.

În context *incidența* unui punct este sinonim cu gradul punctului.

Spre exemplificare fie lanțurile din figura 3 [11] rezultate din amplificarea unui lanț mai simplu de același tip cu o diadă (10,11) după cum se poate observa în figură. Se constată că tablourile respective sînt egale; într-adevăr

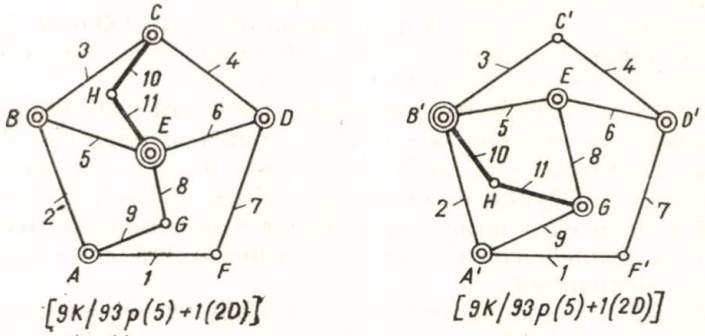


Fig. 3

A	3	3	2	2		A'	3	2	4	3
B	3	3	4	3		B'	4	2	3	2	3
C	3	3	2	3		C'	2	3	4	
D	3	2	4	3		D'	3	2	3	2
E	4	2	3	2	3	E'	3	3	3	4
F	2	3	3			F'	2	3	3	
G	2	3	4			G'	3	2	3	3
H	2	3	4			H'	2	3	4	

$\approx$

și deci lanțurile $[9K/93\ p\ (5) + 1(2D)]$ și $[9K/93\ p\ (5) + 1\ (2D)]$ (notațiile din lucrarea respectivă) redate în figura 3 sînt echivalente.

Față de cele de mai sus se pune întrebarea: mai este necesară o distincție pentru *LCpams* între lanțul cinematic și graful său asociat? Răspunsul este afirmativ, deoarece lanțul cinematic nu este o noțiune matematică și deci nu este posibil aplicarea rezultatelor stabilite privitoare la izomorfismul grafelor, precum și datorită faptului că, reamintim, graful reprezintă nu un anume lanț ci clasa tuturor lanțurilor cinematice cu structură echivalentă. Comparînd grafele a două lanțuri se stabilește de fapt dacă lanțurile respective aparțin sau nu aceleiași clase de echivalență. În acest sens literele din dreptul vîrfurilor în tablourile de mai sus, evident, nu sînt necesare; acestea s-au trecut doar pentru a ușura construirea tablourilor.

Observație

Rezultatele stabilite privitoare la izomorfismul grafelor pot servi și pentru justificarea altor algoritmi de comparare a grafelor cinematice, respectiv a lanțurilor cinematice. Avem astfel în vedere algoritmul

în care se consideră baze de cicluri independente precum [11], și algoritmii în care se compară grafe parțiale sau subgrafe ale grafelor respective [1].

În concluzie, rezultă că verificarea izomorfismului a două grafe se poate face verificînd *egalitatea* tablourilor definite în modul arătat, operație care se poate programa la calculator.

În anexă este dat un astfel de program denumit IZOGRAF.

Grafele cinematice, respectiv lanțurile cinematice care se compară, vor fi reprezentate prin tablourile lor asociate.

Deși nu are sens să se compare grafe care diferă prin numărul vîrfurilor, sau prin numărul muchiilor, sau prin numărul punctelor de același grad, se face verificarea prealabilă dacă aceste date coincid la cele două grafe. Egalitatea numărului de vîrfuri se verifică controlînd dacă tablourile respective au același număr de linii, iar a punctelor de același grad verificînd dacă primele coloane ale tablourilor diferă cel mult printr-o permutare a elementelor.

Se constată că suma elementelor unui tablou cu excepția celor de pe prima coloană este dublul numărului de muchii ale grafului corespunzător; această observație a servit la verificarea egalității numărului de muchii ale celor două grafe. În vederea stabilirii corespondenței între linii s-a procedat mai întîi la ordonarea descrescătoare a elementelor liniilor utilizînd o subrutină.

Dacă tablourile asociate grafelor nu satisfac una din condițiile enumerate se scrie : „grafele nu sînt izomorfe" urmînd condiția neîndeplinită. În caz contrar se scrie : „grafele sînt izomorfe".

Lista notațiilor și programul scris în FORTRAN IV sînt date în anexă.

Programul care a fost testat (compararea a două grafe a durat circa 2′ la calculatorul IBM−360), permite compararea de grafe cu pînă la 100 de vîrfuri și grad maxim al punctelor, 10; corespunzător acestor date numărul maxim al muchiilor este 500, programul putînd fi extins ușor pentru grafe de dimensiuni mai mari.

N o t ă

Matricele de incidență a două grafe izomorfe [1] diferă printr-o permutare a liniilor și coloanelor; verificarea izomorfismului pe această cale este însă inabordabilă chiar la un calculator modern [1], datorită numărului extrem de mare de operații.

Astfel, verificarea izomorfismului grafelor cinematice a două lanțuri cu grad de libertate L și e elemente presupune $e!\left[\frac{1}{2}(3e-L)\right]!$ permutări de linii și coloane în matricea de incidență.

Tabloul asociat unui graf cinematic definește clasa de grafe izomorfe cu graful respectiv. Compararea a două grafe cu ajutorul tablourilor asociate revine deci la verificarea dacă cele două grafe fac parte sau nu din aceeași clasă de echivalență a mulțimii tuturor grafelor după relația de izomorfism.

Pe lîngă această importanță de principiu, tabloul asociat unui graf prezintă avantajul față de matricea de incidență că realizează economie de memorie întrucît numărul coloanelor tabloului, egal cu gradul maxim al vîrfurilor, este în general mult mai mic decît numărul coloanelor matricii de incidență.

ANEXĂ

LISTA NOTAȚIILOR ÎN PROGRAMUL „IZOGRAF"

NR — gradul maxim al vîrfurilor grafelor (NR = 10);
NVGR1 (I), I = 1, 2, . . . , NR — numărul de vîrfuri I în graful 1;
NVGR2 (I), I = 1, 2, . . . , NR — numărul de vîrfuri I în graful 2;
NV1 — numărul total de vîrfuri la graful 1;
NV2 — numărul total de vîrfuri în graful 2;
VRF1 (I), I = 1, 2, . . . , NV1 — vîrfurile grafului 1;
VRF2 (I), I = 1, 2, . . . , NV2 — vîrfurile grafului 2;
GRADE (I, J), I = 1,2, . . . , NV1; J = 1,2, . . . , NR — gradele punctelor extreme ale muchiilor J incidente vîrfului *I*, pentru graful 1;
GRADE (I, J), I = 1,2, . . . , NV2 ; J = 1,2, . . . , NR — gradul punctelor extreme ale muchiilor J incidente vîrfului I, pentru graful 2;
NM1 — numărul de muchii din graful 1;
NM2 — numărul de muchii din graful 2;
I, J, K, L variabile de lucru și indici.

PROGRAMUL „IZOGRAF"

```
      INTEGER* 2 VIRF1 (1ØØ), VIRF2 (1ØØ), GRADE (1ØØ, 1Ø), GRADE2 (1ØØ, 1Ø)
                 NVGR1 (1Ø), NVGR2 (1Ø), VECT1 (1Ø), VECT2 (1Ø), NR.
      NR = 1Ø
      DO 1Ø1 I = 2, NR
      NVGR1 (I) = Ø
1Ø1   NVGR2 (I) = Ø
      (I) = Ø.
1Ø2   I = I + 1
      READ (1,1, END = 1Ø3) K, (GRADE1 (I, J), J = 1, NR)
      VIRF1 (I) = K
      NVGR1 (K) = NVGR1 (K) + 1
      GO TO 1Ø2
1Ø3   VN1 = I — 1.
      I = Ø
1Ø4   I = I + 1
      READ (1,1, END = 1Ø5)  K, (GRADE 2 (I, J), J = 1, NR)
      VIRF2 (I) = K.
      NVGR2 (K) = NVGR2 (K) + 1.
      GO TO 1Ø4
1Ø5   NV2 = I — 1
1     FORMAT (I2,1x,1ØI3)
C
C**** VERIFICARE EGALITATE NUMĂR VÎRFURI
C
      IF (NV1. EQ. NV2) GO TO 1Ø6
```

```
      WRITE (3,2) NV1, NV2.
2     FORMAT ('1 GRAFELE NU SÎNT IZOMORFE. DIFERĂ NUMĂRUL DE VÎRFURI'/
2               'Ø NUMĂR DE VÎRFURI GARAF 1 = ', I3/
2               'Ø NUMĂR DE VÎRFURI GARAF 2 = ', I3)
      STOP 1
1Ø6   NM 1 = Ø
      NM 2 = Ø
      DO 1Ø7 I = 2, NR
      NM1 = NM1 + NVGR1(I)*I
1Ø7   NM2 = NM2 + NVGR2(I)* I
      NM1 = NM1/2.
      NM2 = NM2/2
C
C**** VERIFICARE EGALITATE NUMĂR MUCHII
C
      IF (NM1. EQ. NM2) GO TO 1Ø8
      WRITE (3,3) NM1, NM2
3     FORMAT('1 GRAFELE NU SÎNT IZOMORFE. DIFERĂ NUMĂRUL DE MUCHII'/
3*      'Ø NUMĂR DE MUCHII GRAF1 = ', I3/
3*      'Ø NUMĂR DE MUCHII GRAF2 = ', I 3)
      STOP 2
C
C**** VERIFICARE EGALITATE NUMĂR VÎRFURI DE ACELAȘI GRAD.
C     1Ø8 DO 1Ø9 I = 2, NR
      IF (NVGR1 (I). NE. NVGR2 (I)) GO TO 11Ø
1Ø9   CONTINUE
      GO TO 111
11Ø   WRITE (3,4) I
4     FORMAT ('1 GRAFELE NU SÎNT IZOMORFE, DIFERĂ NUMĂRUL DE',
4*              'VÎRFURI DE GRADUL', I3)
      STOP 3
C
C**** ORDONAREA LINIILOR CELOR DOUĂ GRAFE
C
111   DO 113 I = 1, NV1
      DO 112 J = 1, NR
      VECT1 (J) = GRADE1 (I, J)
112   VECT2 (J) = GRADE2 (I, J)
      CALL ORD (VECT1, NR)
      CALL ORD (VECT2, NR)
      DO 113 J = 1, NR
      GRADE1 (I, J) = VECT 1 (J)
113   GRADE2 (I, J) = VECT 2 (J)
C
C**** VERIFICARE CORESPONDENTĂ VÎRFURI
C
      DO 116I = 1, NV1
      K = VIRF1 (I)
      DO 115 J = 1, NV2
```

```
      IF (K. NE. VIRF2 (J)) GO TO 115
      DO 114 L = 1, NR
      IF (GRADE1 (I, L). NE. GRADE2 (J. L)) GO TO 115
114   CONTINUE
      VIRF2 (J) = 0
      GO TO 116
115   CONTINUE
      WRITE (3,5) I
5     FORMAT ('1 GRAFELE NU SÎNT IZOMORFE. LINIA', I4, 'DIN GRAFUL1',
5*      'NU ARE LINIE ,,EGALĂ'' ÎN GRAFUL 2')
      STOP 4
116   CONTINUE
      WRITE (3,6)
6     FORMAT (1H1, 'GRAFELE SÎNT IZOMORFE')
      STOP 5
      END

      SUBROUTINE ORD (V, N)
      INTEGER* 2 V(1), N
C
C     ORDONAREA DESCRESCĂTOARE A UNUI VECTOR V DE N COMPONENTE
C
      N1 = N - 1
      DO 2Ø2 I = 1, N1
      MAX = V (I)
      K = I
      L = I + 1
      DO 2Ø1 J = L, N
      IF(MAX. GE. V (I)) GO TO 2Ø1
      MAX = V (J)
      K = J
2Ø1   CONTINUE
      V (K) = V (I)
      V (I) = MAX
2Ø2   CONTINUE
      RETURN
      END
```

Primită la redacție la 2 martie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. F. FREUDENSTEIN, L. DOBRJANSKYJ, *On a Theory of the type Synthesis of Mechanisms*, 11 th International Congress of Applied Mechanies Munich, Germany 1964.
2. N. I. MANOLESCU, *Une méthode unitaire pour la formation des chains cinematiques et des mécanisms plans articulés avec differents degrés de liberté et mobilité*, Mecanique appliquée, **9**, *6*, 1263—1313 (1964).
3. L. S. WOO, *Type Synthesis of Plane Linkages*, IBM Corporation New York Scientific Center New York, N. Y.
4. N. I. MANOLESCU, I. TEMPEA, *Sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane articulate cu* $e = 10$ elemente, $c_5 = 13$ *articulații și grad de mobilitate* $L_3 = 4$. Bul. Inst. politehnic București, **XXXII**, *1* (1970).

5. FAN Y CHEN, *On the Realizability of Permutational Synthesis of Mechanisms*, 11 th Mechanisms Conference, Columbus Ohio, November 1—4 1970. Paper 70 — Mech. 58 (an ASME publication).
6. I. TEMPEA, *Contribution to the Numerical and structural Sinthesis of the planar kinematik Chains using Graph Theory* (In Romanian), Docotor Thesis Polytechnic Institute Bucarest, Iune 1971.
7. F. R. E. CROSSLEY, *The Permutation of Kinematic Cains of Eight Members or Less From the Graph*, Theoretic Viewpoint, Developments in Theoretical and Applied Mechanies vol. 2, Pergamon Press, Oxford 1965 p. 467—486.
8. CHR. PELECUDI, *Bazele analizei mecanismelor*, Edit. Academiei Bucureşti, 1967.
9. BERGE CLAUDE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod Paris, 1967.
10. M. DRANGA, *Problema generală a enumerării şi aplicarea ei la grafe cinematice*, Lucrare de diplomă, Facultatea de matematică, Universitatea Bucureşti, iunie 1971.
11. N. I. MANOLESCU, *Criteria of forming the plane jointed Mechanisms with multiple Joints and simple Links with* $e = 11$ *links and* $M_3 = 2$ *degrees of Mobilities ,,partial'', ,,partial-total'' and ,,fractional''*, Proc. of the third World Congress for Mach. and Mech. Kupari Yugoslavia, Sept. 1971, Volume D. Paper. D—11, pp. 161—176.
12. N. I. MANOLESCU, I. TEMPEA, *Structural Synthesis of Plane Kinematic Chains with multiple joints and five degrees of Freedom* $L_3^p = 5$ *,,total''*, $L_3^p = 5$ *,,partial'' and* $L^f{}_3 = 5$ *,,fractional''*, Rev. Roum. Sci. Techn. Série Méc. Appliquée, **12**, *5* (1967).
13. J. L. DOBRAJANSKY, F. FREUDENSTEIN, *Some applications of Graph Theory to the Structural Analysis of Mechanisms*, Jnl. Engng. for Industry *89*, 153—158 (1964).

STUDIUL PARAMETRILOR MIŞCĂRII DE ROTAŢIE ÎN MECANISMELE PLANE, PRIN METODE MECANOELECTRICE*)

de O. MUNTEANU, GH. ILIESCU, C. DUCA, I. SIMIONESCU şi C. DRĂGAN
Institutul politehnic Iaşi

Lucrarea se referă la o metodă experimentală pentru obţinerea oscilogramelor parametrilor mişcării de rotaţie absolută şi relativă a elementelor mecanismelor plane.
La înscrierea diagramelor carteziene de variaţie a unghiurilor se utilizează un traductor rezistiv circular, iar la diagramele de viteze şi acceleraţii unghiulare se foloseşte un traductor inductiv de tip rotativ.
Erorile măsurătorilor efectuate nu depăşesc limitele admisibile.

1. Studiul traiectoriilor şi vitezelor punctelor aparţinînd mecanismelor plane, a fost efectuat în cadrul Institutului de mecanică aplicată al Academiei cu ajutorul unui traductor mecanoelectric polar [1] [2] [3].

Colectivul de Teoria mecanismelor şi dinamica maşinilor de la Institutul politehnic Iaşi, a utilizat într-o lucrare anterioară [4], un traductor inductiv de tip rotativ, pentru înscrierea diagramelor $s\,(t)$, $v\,(t)$, $a\,(t)$, $v\,(s)$ şi $a\,(s)$ pentru patina unui mecanism bielă-manivelă. De asemenea s-au făcut unele încercări pentru obţinerea diagramelor de variaţie a parametrilor cinematici, ai mecanismelor cu came, cu tachet de translaţie.

În continuarea lucrărilor menţionate, colectivul îşi propune o metodă pentru înscrierea pe ecranul osciloscopului catodic, a diagramelor carteziene $\varphi_n\,(t)$, $\varphi_{n,n+1}\,(t)$, $\omega_n\,(t)$ $\omega_{n,n+1}\,(t)$ cît şi a diagramelor $\varepsilon_n\,(t)$ şi $\varepsilon_{n,n+1}\,(t)$. Cunoaşterea variaţiei acestor parametri, sub forma unor diagrame, este necesară adeseori, în studiul cinematic şi dinamic al mecanismelor.

2. Diagrama de variaţie a unghiului de poziţie, funcţie de timp, se obţine cu ajutorul unui traductor rezistiv circular (fig. 1), format dintr-un disc pe care se montează firul rezistiv AB şi un cursor C. Tensiunea

*) Lucrarea a fost prezentată la Sesiunea de comunicări ştiinţifice a Centrului de mecanică a solidelor, 22—23 februarie 1971, Bucureşti.

culeasă de cursorul C, față de extremitatea A, variază proporțional cu arcul AC și, deci, cu unghiul de poziție relativă, dintre cele două elemente ale traductorului.

Pentru a studia variația unghiului de poziție între două elemente n și $n + 1$, legate între ele prin cuplă de rotație, se solidarizează fiecare element al cuplei cu cîte un element al traductorului, astfel încît axul cuplei de rotație să coincidă cu axul discului traductorului.

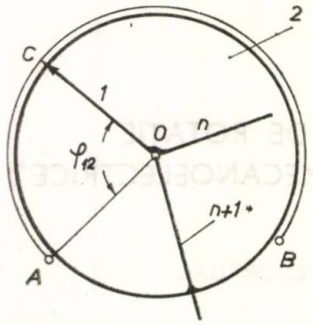


Fig. 1

Traductorul rezistiv este alimentat cu o tensiune alternativă cu frecvența de 10 kHz. Semnalul obținut este amplificat, detectat și filtrat, după care se introduce în osciloscop, conform schemei bloc din figura 2.

3. Diagrama de variație a vitezei unghiulare, se obține cu ajutorul unui traductor inductiv de tip rotativ (fig. 3 *a*, 3*b*) format dintr-o roată 1,care antrenează prin fricțiune roata 2, montată pe axul unui microgenerator de curent continuu. Tensiunea dată de microgenerator este proporțională cu vitezele unghiulare ale roților de fricțiune *1* și *2* și, deci, cu viteza unghiulară dintre cele două elemente studiate. Și aici,

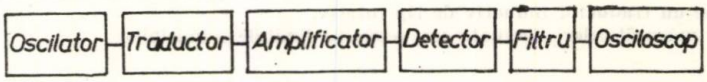
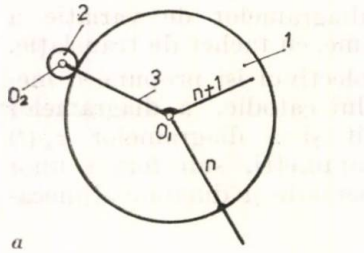
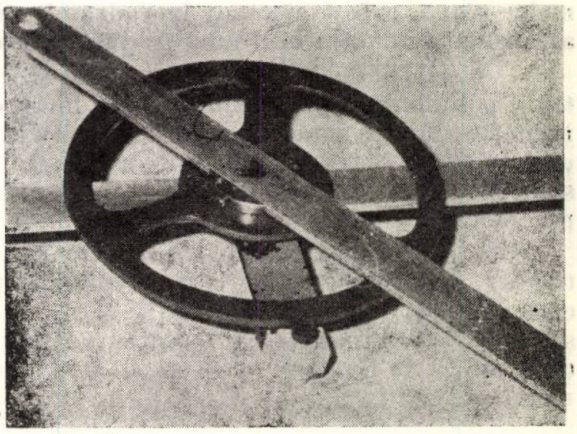


Fig. 2



a



b

Fig. 3

pentru aflarea vitezei unghiulare $\omega_{n,n+1}$, dintre elementele n și $n + 1$, legate prin cuplă de rotație, acestea se solidarizează cu elementele *1*, respectiv *3*, ale traductorului. Axul roții de fricțiune *1*, trebuie să coincidă cu axul cuplei de rotație.

Tensiunea generată de traductor este filtrată și apoi introdusă în osciloscop, conform schemei bloc din figura 4.

4. Diagrama de variație a accelerațiilor unghiulare se obține prin derivarea electronică a tensiunii date de traductorul inductiv amintit, după o prealabilă filtrare. Instalația folosită este reprezentată în schema bloc din figura 5.

Fig. 4

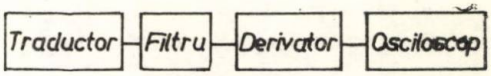


Fig. 5

5. Pentru a înscrie diagrama de variație a vitezei și accelerației unghiulare absolute a unui element nelegat direct la batiu s-a utilizat un lanț cinematic auxiliar, fixat de batiu, conținînd un element cu mișcare absolută de translație. Elementul a cărui viteză unghiulară se studiază se cuplează printr-o cuplă de rotație de elementul cu mișcare de translație al lanțului cinematic auxiliar. În cazul de față s-a montat o rigletă metalică la un mecanism dublu-paralelogram (fig. 6).

Se observă că diagramele accelerațiilor unghiulare ale elementelor, la o scară convenabilă ($K_{M_i} = -K_\varepsilon \cdot J_G$) reprezintă și variația momentului forțelor din inerție al elementului respectiv.

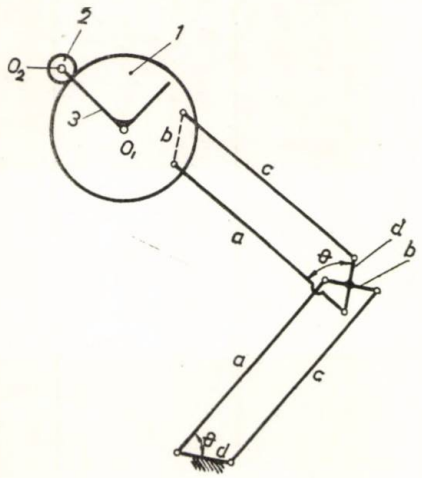


Fig. 6

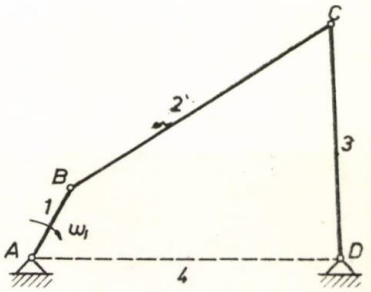
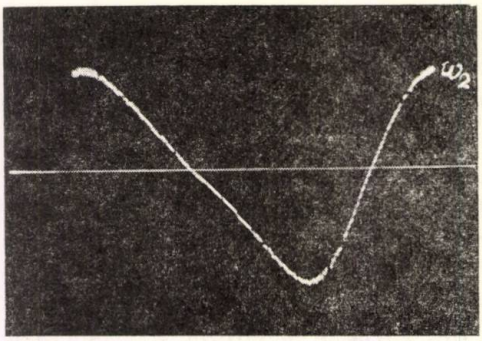
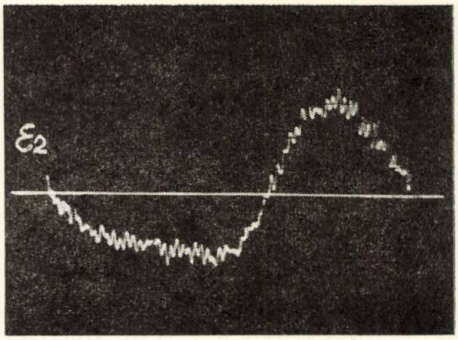


Fig. 7

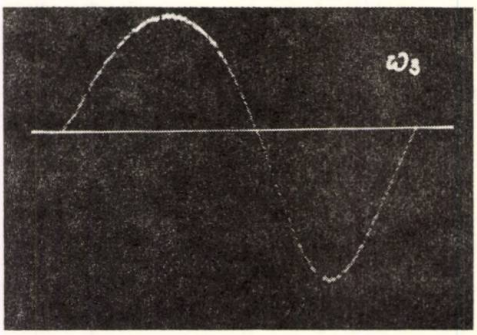
6. În figurile 8 și 9 se prezintă o serie de diagrame, realizate prin metodele expuse, pentru un mecanism patrulater manivelă-balansier (fig. 7) avînd : $l_1 = 0{,}1$ m, $l_2 = 0{,}4$ m, $l_3 = 0{,}3$ m, $l_4 = 0{,}4$ m, $\omega_1 = 2{,}5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Diagramele din figura 10 corespund unui mecanism patrulater manivelă-balansier, avînd coeficientul de viteză $k = 1$ și dimensiunile : $l_1 = 0{,}1$ m, $l_2 = 0{,}282$ m, $l_3 = 0{,}3$ m, $l_4 = 0{,}4$ m.



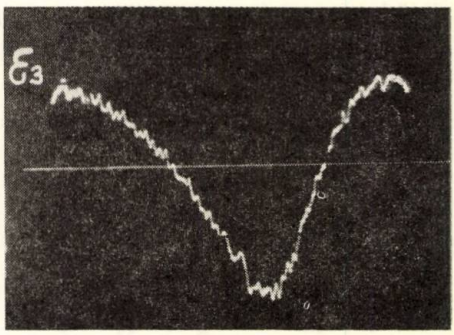
a



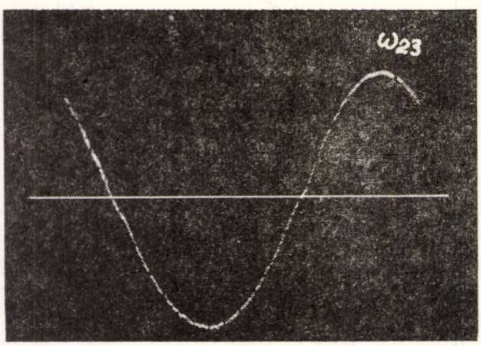
b



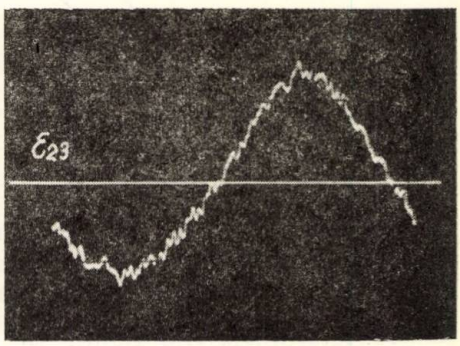
c



d

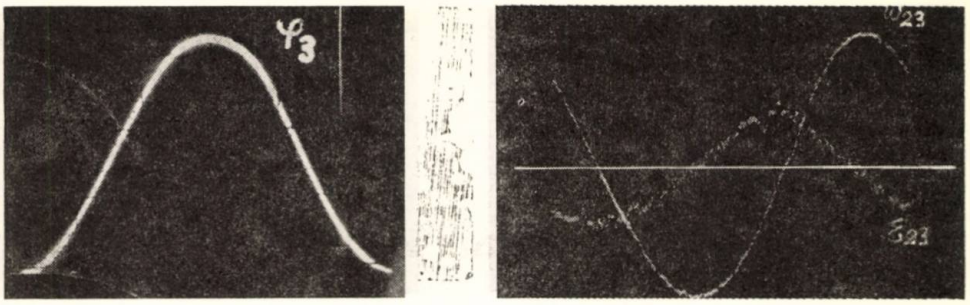


e

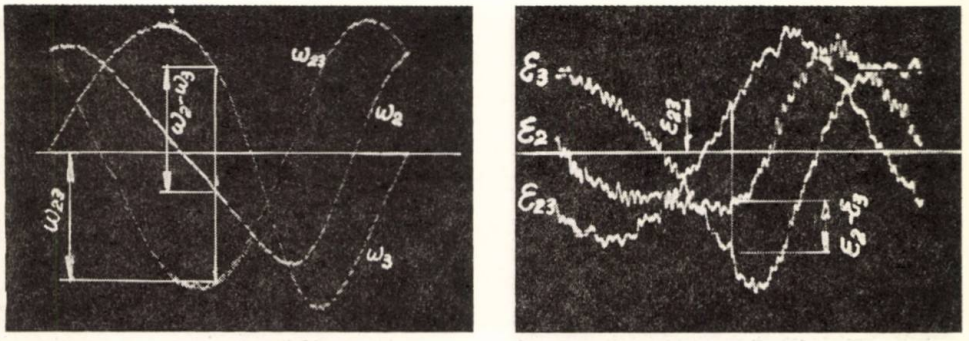


f

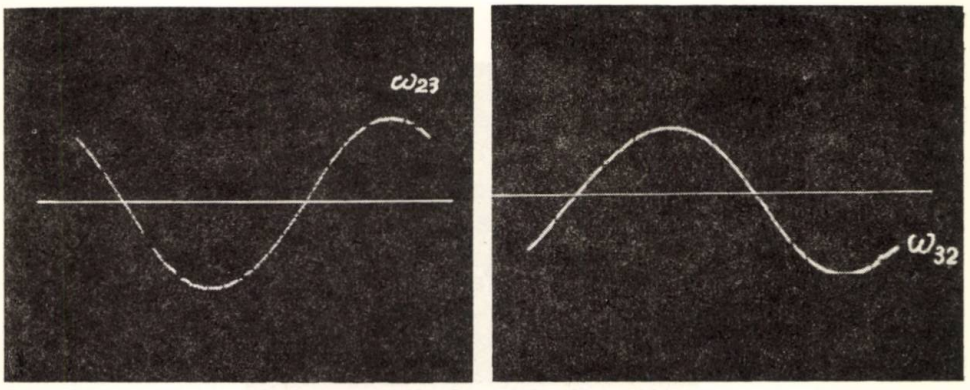
Fig. 8



a b

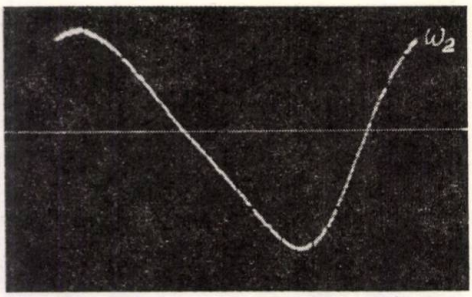


c d

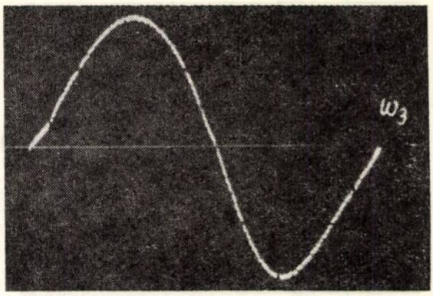


e f

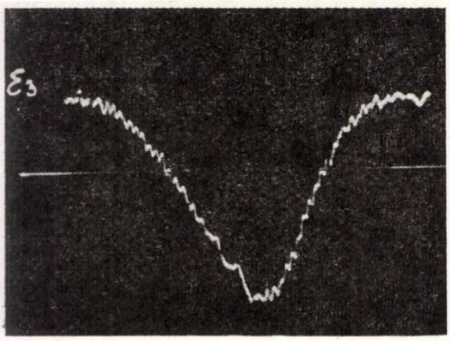
Fig. 9



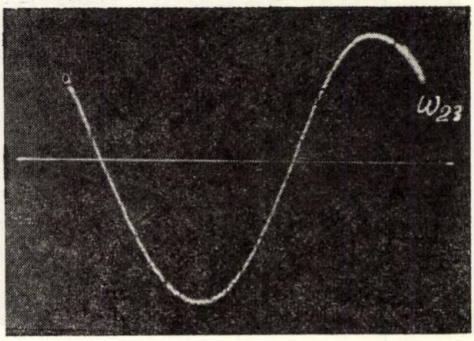
a



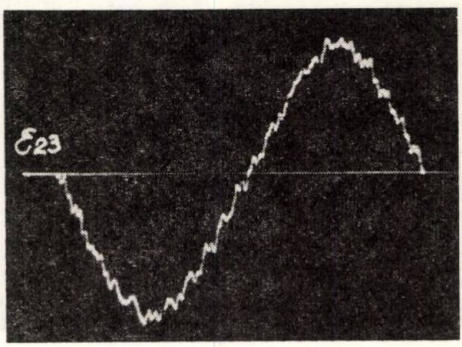
b



c



d



e

Fig. 10

Scările utilizate au valorile: $k_\varphi = 0{,}02 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$, $k_\omega = 0{,}05 \frac{\text{rad}}{\text{s}}/\text{mm}$, $k_\varepsilon = 0{,}2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}/\text{ mm}$, $k_t = 0{,}05 \frac{\text{s}}{\text{mm}}$. Dacă valorile scărilor diferă de cele indicate mai sus, sînt înscrise pe figură.

Etalonarea aparatului s-a făcut cu ajutorul valorilor extreme ale mărimilor studiate, calculate în prealabil pentru un mecanism dat. Ca origine a timpului s-a considerat momentul în care mecanismul trece printr-o poziţie extremă.

În figura 9*b* se remarcă corespondenţa dintre funcţie (ω_{23}) şi derivată (ε_{23}), iar în figura 9*c* şi 9*d* se observă respectarea riguroasă a relaţiilor $\omega_{23} = \omega_2 - \omega_3$ şi $\varepsilon_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$.

Prin schimbarea polarităţii traductorului se poate trece de la diagramele $\omega_{n,n+1}(t)$ sau $\varepsilon_{n,n+1}(t)$ la diagramele $\omega_{n+1,n}(t)$ sau $\varepsilon_{n+1,n}(t)$ (fig. 9*e*, 9*f*).

7. Traductorii mecanoelectrici utilizaţi introduc erori accidentale, mecanice şi electrice.

Erorile mecanice se datoresc abaterilor de la poziţia relativă a zonelor de contact, ale cuplelor cinematice, din acelaşi element, numite erori primare, precum şi abaterilor de la dimensiunile zonelor de contact, care dau naştere la jocuri.

Mai jos se indică modul de calcul şi se face o evaluare numerică a erorilor la unghiul de poziţie ($\Delta\varphi$), la viteza unghiulară ($\Delta\omega$) şi la acceleraţia unghiulară ($\Delta\varepsilon$), în funcţie de erorile primare şi de jocurile din cuplele cinematice.

a) Abaterea poziţiei centrului de rotaţie al cursorului, în raport cu centrul cercului traductorului rezistiv. $e = 0{,}1$ mm;

$$\Delta\varphi \cong \frac{e}{R}[\sin\theta - \sin(\varphi + \theta)]$$

$$|\Delta\varphi| \leqslant 2\frac{e}{R};\ R = 200 \text{ mm},$$

$$|\Delta\varphi| \leqslant 0{,}001 \text{ rad}.$$

b) Jocul din articulaţia cursorului traductorului rezistiv. $j = 0{,}1$ mm:

$$\Delta\varphi \cong \frac{j}{R}[\sin\theta - \sin(\varphi + \theta],$$

$$|\Delta\varphi| \leqslant 2\frac{j}{R},$$

$$|\Delta\varphi| \leqslant 0{,}001 \text{ rad}.$$

c) Abaterile lungimilor elementelor mecanismului dublu-paralelogram. $\Delta b = 0{,}1$ mm, $\Delta c = 0{,}1$ mm :

$$\Delta\omega = -\left(\frac{\dot\theta_1}{b\sin^2\theta_1} + \frac{\dot\theta_2}{b\sin^2\theta_2}\right)\Delta b + \left(\frac{\dot\theta_1}{b\sin\theta_1\operatorname{tg}\theta_1} + \frac{\dot\theta_2}{b\sin\theta_2\operatorname{tg}\theta_2)}\right)\Delta c,$$

$b = 100$ mm, $60^\circ \leqslant \theta_1 \leqslant 120^\circ$, $60^\circ \leqslant \theta_2 \leqslant 120^\circ$, $|\dot\theta_1| < 1$ rad/s, $|\dot\theta_2| < 1$ rad/s,

$$|\Delta\omega| \leqslant 2\left(\frac{|\Delta b|}{b\sin^2 60^\circ} + \frac{|\Delta c|}{b\sin 60^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ}\right),$$

$$|\Delta\omega| \leqslant 0{,}004 \text{ rad/s},$$

$$\Delta\varepsilon = \left(-\frac{\ddot\theta_1}{b\sin^2\theta_1} + \frac{2\dot\theta_1^2}{b\sin^2\theta_1\operatorname{tg}\theta_1} - \frac{\ddot\theta_2}{b\sin^2\theta_2} + \frac{2\dot\theta_2^2}{b\sin^2\theta_2\operatorname{tg}\theta_2}\right)\Delta b +$$

$$+ \frac{\ddot\theta_1}{b\sin\theta_1\operatorname{tg}\theta_1} - \frac{\dot\theta_1^2}{b\sin^3\theta_1} - \frac{\dot\theta_1^2}{b\sin\theta_1\operatorname{tg}^2\theta_1} + \frac{\ddot\theta_2}{b\sin\theta_2\operatorname{tg}\theta_2} -$$

$$- \frac{\dot\theta_2^2}{b\sin^3\theta_2} - \frac{\dot\theta_2^2}{b\sin\theta_2\operatorname{tg}^2\theta_2}\Delta c,$$

$$|\ddot\theta_1| < 2 \text{ rad/s}^2;\ |\ddot\theta_2| < 2 \text{ rad/s}^2,$$

$$|\Delta\varepsilon| \leqslant 4\left(\frac{1}{b\sin^2 60^\circ} + \frac{1}{b\sin^2 60^\circ\operatorname{tg}60^\circ}\right)|\Delta b| +$$

$$+ 2\left(\frac{2}{b\sin 60^\circ\operatorname{tg}60^\circ} + \frac{1}{b\sin^3 60^\circ} + \frac{1}{b\sin 60^\circ\operatorname{tg}^2 60^\circ}\right)|\Delta c|,$$

$$|\Delta\varepsilon| \leqslant 0{,}015 \text{ rad/s}^2.$$

d) Abaterile la razele roţilor de fricţiune. $\Delta r = 0{,}05$ mm, $\Delta R = 0{,}1$ mm :

$$\Delta\omega = \left(\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R}\right)\omega,$$

$$|\Delta\omega| = \left(\frac{|\Delta r|}{r} + \frac{|\Delta R|}{R}\right)|\omega \max|;\ r = 2 \text{ mm},\ R = 100 \text{ mm}$$

$$|\Delta\omega| \leqslant 0{,}026\,|\ \omega \max|,$$

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R}\right)\varepsilon,$$

$$|\Delta\varepsilon| \leqslant \left(\frac{|\Delta r|}{r} + \frac{|\Delta R|}{R}\right)|\varepsilon \max|,$$

$$|\Delta\varepsilon| \leqslant 0{,}026\ |\varepsilon \max|$$

Erorile electrice, introduse de traductori, se datoresc următoarelor cauze :

a) Contactul nepunctual dintre cursor și firul rezistiv. $g = 0{,}3$ mm

$$\Delta\varphi \leqslant \frac{g}{R} \; ; \; R = 200 \text{ mm},$$

$$|\Delta\varphi| \leqslant 0{,}0015 \text{ rad}.$$

b) Neomogenitatea firului rezistiv. $\frac{|\Delta k|}{k} = 0{,}1\ \%$:

$$|\Delta\varphi| \leqslant \frac{|\Delta k|}{k}\,\varphi \max,$$

$$|\Delta\varphi| \leqslant 0{,}001\ \varphi \max.$$

Raportînd erorile absolute la valorile maxime ale mărimilor reprezentate în diagrame, se obțin următoarele erori relative pentru traductoarele mecanoelectrice :

$$\delta\varphi \cong 0{,}8\%\,; \qquad \delta\omega \cong 3\%\,; \qquad \delta\varepsilon \cong 3\%.$$

Eroarea aparaturii electronice anexe nu depășește 5%, fapt atestat și de alte lucrări de specialitate.

Lucrarea a fost realizată în laboratorul de Teoria mecanismelor și dinamica mașinilor de la Institutul Politehnic Iași, în cadrul convenției de colaborare cu Centrul de mecanica solidelor al Ministerului Învățămîntului, București.

Primită la redacție la 23 februarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. R. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calmaciuc și Gr. Antonescu, *Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., **X**, *3*, (1959).
2. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calmaciuc și Gr. Antonescu, *Studiul vitezelor în mecanismele plane pe baze mecanoelectrice*, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4*, (1962).
3. Radu C. Bogdan, Dan Larionescu, *Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane*, București, Edit. Academiei, 1968.
4. O. Munteanu, Gh. Iliescu, C. Drăgan, I. Simionescu, C. Duca, *Construcții asupra utilizării unui traductor de inducție, de tip rotativ, pentru înscrierea diagramelor de variație a vitezelor și accelerațiilor pe ecranul oscilografului catodic*, Buletinul Institutului Politehnic Iași, **XVII (XXI)**, *1—2*, secția 4 (1971).
5. A. M. Turicin, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*, (trad. din l. rusă), Edit. tehnică București, 1957.
6. H. F. Grave, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*, (trad. din l. germană), Edit. tehnică, București, 1966.

ÎMBUNĂTĂȚIRI PRIVIND CALCULUL ÎMBINĂRILOR PRIN FLANȘE

de MAGDALENA POSEA
Institutul de construcții București

Pornind de la faptul că pentru determinarea eforturilor și deformațiilor ca și pentru dimensionarea elementelor de mașini, alegerea judicioasă a schemei de calcul contribuie la alcătuirea unui algoritm simplu și conduce în același timp la rezultate mai apropiate de realitate, lucrarea prezintă, pentru îmbinarea prin flanșe, o schemă sugestivă alcătuită din două plăci sau inele legate între ele prin două elemente elastice (șuruburile și garnitura) reprezentate sub forma unor arcuri.
Pe această schemă se dă o nouă formulare întregului calcul clasic al flanșelor. În această formulare, care păstrează ipotezele calculului clasic, relațiile finale de calcul se stabilesc mult mai simplu și necesită un volum mic de lucru. Referitor la ipoteza că talerul flanșei se rotește în jurul mijlocului garniturii, se arată că aceasta trebuie eliminată, deoarece nu poate fi realizată. De altfel, noua formulare a întregului calcul al flanșelor este atît de simplă încît face inutilă o astfel de ipoteză suplimentară, simplificatoare.
De asemenea, pe schema adoptată se evaluează exact ondularea circumferențială a flanșelor în ipoteza de inel. Ecuațiile diferențiale ale fibrei medii, care intervin în rezolvarea acestei probleme, deși cunoscute, au fost obținute printr-o metodologie de calcul originală, expeditivă și clară.
Adoptîndu-se o variantă corespunzătoare pentru integrarea sistemului de ecuații diferențiale, rezultatele calculului ondulării circumferențiale sînt finalizate în formule pentru determinarea eforturilor și deformațiilor, aplicabile direct în proiectarea îmbinărilor prin flanșe.

Pentru calculul eforturilor, deformațiilor și dimensionarea elementelor de mașini și utilaje se utilizează scheme de calcul. Acestea trebuie să fie pe de o parte cît mai apropiate de elementele reale, conținînd principalele caracteristici ale acestora și, pe de altă parte, cît mai simple pentru a putea fi calculate cu ușurință. Îndeplinirea acestor cerințe, oarecum contradictorii, și obținerea unor rezultate cît mai apropiate de realitate este posibilă, în multe cazuri printr-o alegere corespunzătoare a schemei și metodei de calcul.

Pentru abordarea acestei probleme în cazul flanșelor însă este necesară o structurare corespunzătoare a calculului eforturilor și deplasărilor ce apar într-un inel supus la sarcini normale pe plan.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1155—1172

1. DETERMINAREA EFORTURILOR ŞI DEPLASĂRILOR UNUI INEL PLAN CU SARCINI NORMALE PE PLAN

Se consideră un inel plan (fig. 1 *a*) acţionat de forţe normale pe plan p şi cuple distribuite m_t, cu sensurile pozitive ca în figură. Izolînd un element (fig. 1 *b*) se introduc eforturile care apar M_y, M_t, T pe fie-

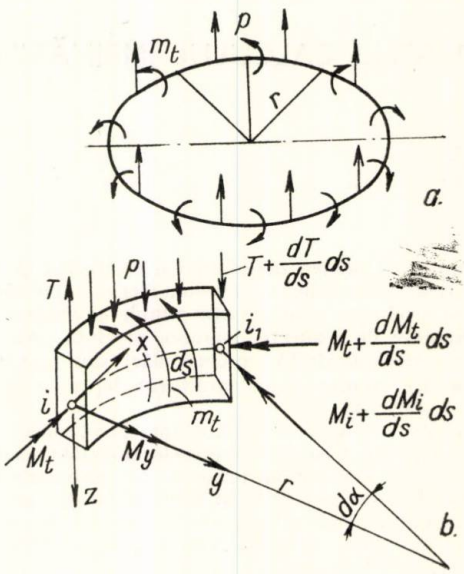


Fig. 1

care din cele două secţiuni i şi i_1. Arcul care leagă cele două centre de greutate $i\,i_1$, este $ds = r\,d\alpha$. Pe ambele secţiuni eforturile au fost reprezentate cu sensurile pozitive.

Din ecuaţiile de echilibru ale tuturor forţelor de pe elementul respectiv se obţin următoarele relaţii diferenţiale :

— din ecuaţia de proiecţie pe z :

$$\frac{dT}{d\alpha} = -pr; \tag{1}$$

— din ecuaţia de momente faţă de raza din secţiunea i_1 :

$$\frac{dM_y}{d\alpha} + M_t - Tr = 0; \tag{2}$$

— din ecuaţia de momente faţă de tangenta din i_1 :

$$\frac{dM_t}{d\alpha} - M_y - m_t r = 0. \tag{3}$$

Atunci cînd modul de încărcare și de rezemare al inelului permite să se cunoască condițiile la limită în eforturi, necesare pentru determinarea constantelor de integrare, cele trei relații diferențiale de mai sus sînt suficiente pentru determinarea eforturilor. În toate celelalte cazuri problema calculului eforturilor este nedeterminată și trebuie să se facă apel la relații de continuitate pe baza studierii modului de deformare.

În cazul inelului încărcat numai cu cuple m_t constant întîlnit în cazul flanșelor, datorită simetriei încărcării, forța tăietoare T și momentul de torsiune M_t sînt nule în toate secțiunile, iar M_y este constant și are valoarea rezultată din (3)

$$M_y = - m_t r_0 . \tag{4}$$

În această situație (fig. 2), în ipoteza indeformabilității secțiunii transversale, secțiunea se rotește față de tangentă (axa x) cu unghiul [1]

$$\theta = - \frac{M_y}{EI} \frac{b}{\ln \rho} = \frac{m_t r_0 b}{EI \ln \rho}, \tag{5}$$

unde $I = I_y = bh^3/12$ este momentul de inerție la încovoiere, iar

$$\rho = r_2/r_1 \tag{6}$$

raportul dintre raza exterioară și interioară a inelului.

Tensiunea pe secțiune se determină cu expresia

$$\sigma = - \frac{m_t r_0}{I} \frac{b}{\ln \rho} \cdot \frac{z}{r_0 - y} \tag{7}$$

și are valoarea maximă în punctul B (fig. 2)

$$\sigma_{max} = \frac{m_t r_0}{I} \frac{b}{\ln \rho} \frac{h}{2r_1} = \frac{6 m_t r_0}{h^2 r_1 \ln \rho} . \tag{7'}$$

În cazul general de încărcare al inelului și pentru o rezemare oarecare, cu legături numai normale pe planul inelului, o secțiune i curentă (fig. 1*b*) suferă o deplasare w după z, o rotire φ după y și o rotire θ după x (tangenta la arcul ds).

Pentru stabilirea relațiilor dintre aceste deplasări (săgeată și rotiri) și eforturi se consideră două secțiuni i, i_1 (fig. 3*a*), aflate la distanța $ds = r\, d\alpha$, în dreptul cărora s-au indicat vectorii care definesc rotirile pozitive ale secțiunilor respective.

Datorită eforturilor aplicate pe elementul ds (fig. 3*b*) între secțiunea i_1 și i, neglijînd cantitățile mici de ordinul doi și mai mare, apar rotirile relative

$$\Delta\varphi = - \frac{M_y\, ds}{EI}, \qquad \Delta\theta = - \frac{M_t\, ds}{GI_t}, \tag{8}$$

în care I, I_t sînt momentele de inerţie la încovoiere, respectiv la torsiune, ale secţiunii transversale. Semnul minus la ambele expresii provine din faptul că eforturile pozitive respective (fig. 3 *b*) produc rotiri relative de sensuri inverse cu rotirile pozitive ale secţiunii i_1, reprezentate în figura 3*a*.

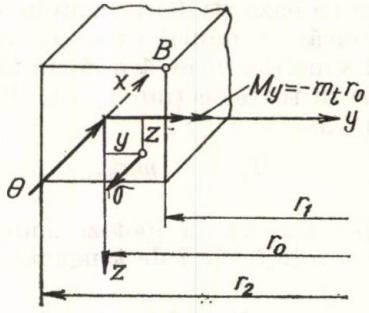


Fig. 2

Pe baza continuităţii elementului ds, rotirile secţiunii i_1 se obţin din rotirile secţiunii i şi rotirile relative (8).

$$\theta + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \theta\cos(\mathrm{d}\alpha) + \varphi\sin(\mathrm{d}\alpha) - \frac{M_t \mathrm{d}s}{EI_t},$$
$$\varphi + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \varphi\cos(\mathrm{d}\alpha) - \theta\sin(\mathrm{d}\alpha) - \frac{M_y \mathrm{d}s}{EI}. \qquad \text{(a)}$$

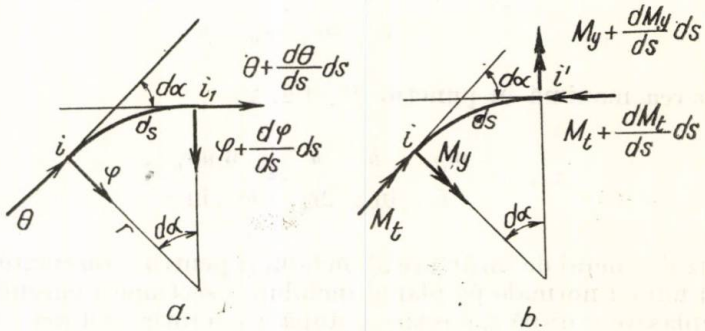


Fig. 3

Întrucît dα se consideră foarte mic, se ia $\cos(\mathrm{d}\alpha) \simeq 1$, $\sin(\mathrm{d}\alpha) \simeq \simeq \mathrm{d}\alpha$ şi relaţiile (a) se scriu sub forma

$$M_t = GI_t\left(\varphi\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{GI_t}{r}\left(\varphi - \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha}\right),$$
$$M_y = -EI\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + \theta\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right) = -\frac{EI}{r}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha} + \theta\right) \qquad (9)$$

sau, ținînd seama și de relația geometrică

$$\varphi = \frac{dw}{ds}, \tag{10}$$

sub forma

$$\frac{dw}{d\alpha} - r\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{r^2}{GI_t} M_t, \tag{11}$$

$$\frac{d^2w}{d\alpha^2} + r\,\theta = -\frac{r^2}{EI} M_y. \tag{12}$$

Relațiile (11), (12), alcătuiesc un sistem de ecuații diferențiale a cărei integrare, în situația că se cunosc momentele M_t, M_y, conduce la expresia săgeții w și a rotirii θ.

În cazul cînd expresiile M_t, M_y nu se cunosc din ecuațiile de echilibru, problema este static nedeterminată și atunci eforturile și deformațiile se determină concomitent din rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale alcătuit din (1), (2), (3), (11), (12). Rezolvarea acestuia poate fi efectuată după cazurile concrete de încărcare și rezemare, în mai multe variante.

Varianta 1. Este preferabilă pentru situațiile cînd majoritatea condițiilor la limită sînt cunoscute în w și M_t. După ce se aranjează ecuațiile (2) și (3) sub forma

$$\frac{d^2M_t}{d\alpha^2} + M_t = Tr + \frac{dm_t}{d\alpha} r, \tag{13}$$

iar ecuațiile (2), (11), (12) sub forma

$$\frac{d^3w}{d\alpha^3} + \frac{dw}{d\alpha} = r^2\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_t}\right) M_t - \frac{Tr^3}{EI}, \tag{14}$$

se procedează astfel:

— se determină T din (1), M_t din (13) și M_y din (3),

— se rezolvă (14) și apoi se scoate θ din (12).

Varianta 2. Este indicată cînd se cunosc anumite condiții în M_y și θ. Mai întîi se obțin ecuațiile diferențiale

$$\frac{d^2M_y}{d\alpha^2} + M_y = -pr^2 - m_t r \tag{15}$$

din (1), (2), (3) și

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} + \theta = -r\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_t}\right) M_y - \frac{m_t r^2}{GI_t} \tag{16}$$

din (11), (12), (3).

După aceasta se determină eforturile și deplasările în ordinea: M_y din (15); θ din (16); T din (1); M_t din (3) și w din (11).

2. O SCHEMĂ DE CALCUL SUGESTIVĂ

Izolînd talerele unei îmbinări prin flanșe (fig. 4 *a*) se constată că forțele exterioare alcătuiesc un sistem echilibrat de sarcini și că planul normal pe axul de rotație al îmbinării, care trece prin mijlocul grosimii garniturii, constituie un plan de simetrie. În consecință, acest plan nu are deplasări, iar deformațiile celor două elemente elastice — garnitura și șuruburile — care leagă între ele cele două talere ale îmbinării, pot fi evaluate de o parte și de alta începînd de la acest plan.

Schema de calcul a îmbinării (fig. 4 *b*) se reduce la două plăci sau inele legate între ele prin două elemente elastice, garnitura și șuruburile, reprezentate sub forma unor arcuri. Se înțelege că garnitura nu poate prelua decît eforturi de compresiune, iar șuruburile numai de întindere. Componentele eforturilor de legătură M_1', $Q_1'N_1'$ (fig. 4 *a*) dintre taler și manta, considerate reduse la mijlocul înălțimii talerului, împreună cu presiunea interioară pe înălțimea talerelor și eventual pe zona dintre marginile interioare ale talerului și garniturii constituie un sistem echilibrat de încărcări exterioare M_1, Q_1, N_1. În această situație sistemul static considerat (fig. 4*b*) nu are nevoie de rezemări exterioare.

Întrucît sistemul static (fig. 4 *b*) are două șiruri de legături elastice între inele, constituie un sistem static nedeterminat interior. Pentru rezolvarea acestuia, folosind metoda generală a eforturilor [2], se alege forma de bază din figura 4 *c*, în care necunoscuta X_1^* reprezintă intensitatea rezultantei presiunii pe lățimea garniturii. În calcule se va considera ca necunoscută X_1 rezultanta presiunii pe întreaga garnitură

$$X_1 = 2\pi r_g X_1^*. \tag{17}$$

Ecuația de condiție pentru determinarea necunoscutei, în conformitate cu teoria generală a sistemelor static nedeterminate, va fi

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{10} = \bar{1}\Delta_1 + \Sigma \bar{r}_{j1}\Delta_j. \tag{18}$$

Semnificațiile fizice ale coeficienților δ_{11}, Δ_{10}, Δ_1 și Δ_j sînt identice cu cele date în lucrarea [2]. Astfel, δ_{11} reprezintă lucrul mecanic produs de încărcarea virtuală $X_1 = 1$ prin deformațiile formei de bază încărcată numai cu $X_1 = 1$ (fig. 4 *b*); Δ_{10} reprezintă lucrul mecanic produs de încărcarea virtuală $X_1 = 1$ prin deformațiile produse pe forma de bază numai de sarcinile exterioare (fig. 4 *e*); Δ_1, Δ_j reprezintă cedări inițiale cunoscute după direcția lui X_1, respectiv după direcția efortului $\bar{r}_{j1}$ (prin $\bar{r}_{j1}$ se înțelege efortul în punctul j produs pe forma de bază de încărcarea $\bar{X}_1 = 1$). Încărcarea virtuală $\bar{X}_1 = 1$ se alege însă identică cu încărcarea $X_1 = 1$.

Deși pentru calculul coeficienților δ_{11}, Δ_{10} nu se pot aplica formulele din [2], expresiile lor se stabilesc cu ușurință datorită clarității formei de bază (fig. 4 *c*)

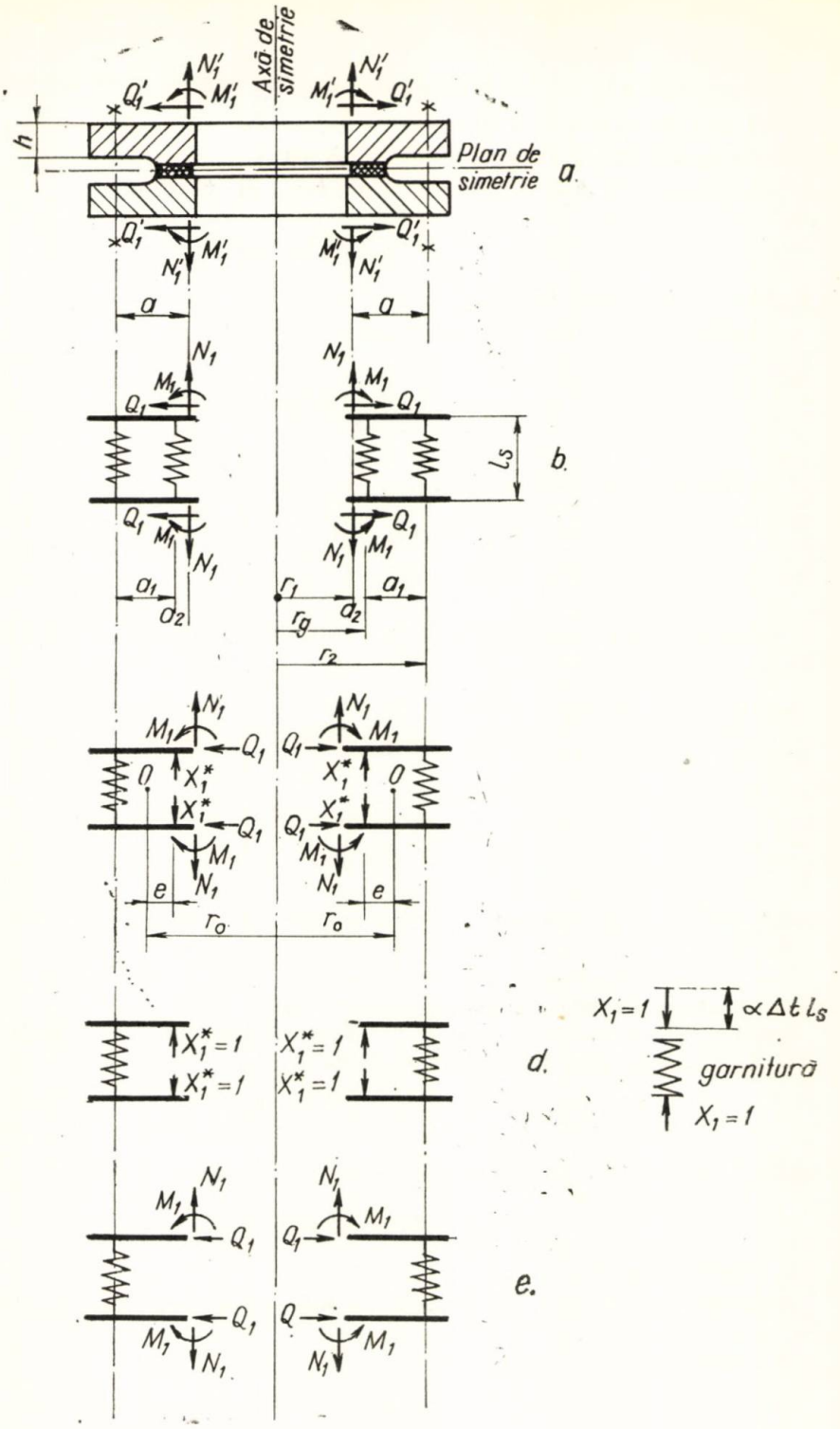


Fig. 4

a) *Calculul lui* δ_{11}

Din încărcarea $X_1 = 1$ pe forma de bază (fig. 4 *d*) se obțin eforturile :

— în șuruburi, o întindere egală cu $N_{1,1} = 1$,

— pe garnitură, o compresiune egală cu 1, (b)

— pe fiecare din talere, cîte un cuplu total de torsiune

$$\mathfrak{M}_{t,1} = m_{t,1} \cdot 2\pi r_0 = 1(r_2 - r_g).$$

Din aceste eforturi rezultă că

— fiecare dintre șuruburi se întinde cu

$$c_1' = \frac{1 \cdot l_s}{E_s \cdot A_s \cdot k} = 2c_1, \tag{19}$$

— garnitura se comprimă cu

$$c_2' = \frac{1 h_g}{E_g \cdot 2\pi r_g \cdot b} = 2c_2, \tag{20}$$

— fiecare dintre talere se rotește, conform formulei (5) și ținînd seama de (b), cu

$$\theta_{X_1=1} = \frac{m_{t,1} r_0 b}{EI \ln \rho} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b}{EI \ln \rho} \cdot (r_2 - r_g) = c_3(r_2 - r_g), \tag{c}$$

unde prin

$$c_3 = \frac{1}{2\pi} \frac{b}{EI \ln \rho} \tag{21}$$

s-a notat rotirea după tangentă a secțiunii inelului, sub acțiunea cuplului total $\mathfrak{M}_t = 1$,

c_1, c_2 reprezintă alungirea șurubului, respectiv comprimarea garniturii pe o singură parte a planului de simetrie al îmbinării.

Scriind lucrul mecanic produs de eforturile din $\overline{X}_1 = 1$ identic cu cele din $X_1 = 1$ (b), prin deplasările date de $X_1 = 1$

$$\delta_{11} = 1 \cdot c_1' + 1 \cdot c_2' + 1(r_2 - r_g)\theta_{X_1=1} \cdot 2$$

și folosind relația (c) și notația de pe figură $r_2 - r_g = a_1$, se obține

$$\delta_{11} = 2(c_1 + c_2 + c_3 a_1^2). \tag{22}$$

b) *Calculul lui* Δ_{10}

Încărcările exterioare M_1, Q_1, N_1 pe forma de bază (fig. 4) produc eforturile :

— o întindere în șuruburi

$$N_{s,0} = 2\pi r_1 N_1 = P_e, \tag{23}$$

— un cuplu de torsiune pentru fiecare taler

$$\mathfrak{M}_{t,0} = m_{t,0} \cdot 2\pi r_0 = 2\pi r_1 (M_1 + N_1 \cdot a) = M_1^* + P_e \cdot a, \tag{24}$$

unde s-a notat

$$M_1^* = 2\pi r_1 M_1 = 2\pi r_1 \left(M_1' + Q_1' \frac{h}{2} \right), \tag{25}$$

P_e, reprezentînd rezultanta forțelor exterioare după axul de simetrie al îmbinării se calculează cu expresia

$$P_e = P_i + Q_e, \tag{26}$$

în care P_i este rezultanta presiunii interioare pe toată secțiunea transversală a aparatului sau vasului, iar Q_e forța axială provenită din alte încărcări exterioare.

Scriind lucrul mecanic virtual produs de eforturile datorită încărcării exterioare prin deplasările produse de încărcarea virtuală $\overline{X}_1 = 1$ (vezi (19), (20) și (c)).

$$\overline{L}_{(0,1)} = P_e \cdot c_1' + \mathfrak{M}_{t,0} \cdot c_3 a_1 \cdot 2, \tag{d}$$

și folosind (19), (24), (26) și teorema reciprocității lucrului mecanic virtual, se obține

$$\Delta_{10} = 2c_1 P_e + 2c_3 a_1 (M_1^* + P_e a). \tag{27}$$

Pentru evaluarea părții drepte a ecuației (18), precizînd că nu există cedări inițiale decît între șuruburi și talere, rezultă

$$\Delta_1 = 0; \quad \Sigma \overline{r}_{j1} \Delta_j = \overline{1} \Delta_s, \tag{e}$$

unde Δ_s este cedarea inițială după direcția șuruburilor. În calcule Δ_s reprezintă valoarea teoretică cu care este mai scurtă tija șurubului față de distanța dintre talerele îmbinării. În realitate reprezintă suma alungirii tijei șurubului și deplășării inelului la contactul cu șuruburile, datorită strîngerii piulițelor la montaj.

Introducînd relațiile (22), (27) și (e) în (18) și notînd efortul inițial total din șuruburi

$$P_s^0 = \frac{\Delta_s}{2(c_1 + c_2 + c_3 a_1^2)} = P_g^0, \tag{28}$$

se obține forța totală pe garnitură (P_g)

$$P_g = X_1 = P_g^0 - \frac{(c_1 + c_3 a_1 a) P_e + c_3 a_1 M_1^*}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2}. \tag{29}$$

Efortul total din şuruburi P_s rezultă din suprapunerea eforturilor pe forma de bază (fig. 4*c*) produse de necunoscuta X_1 şi sarcinile exterioare

$$N_s = X_1 N_{s,1} + N_{s,0}. \tag{f}$$

Introducînd în (f) relaţiile (29), (23) şi (b) se obţine

$$P_s = P_S^0 + \frac{(c_2 - c_3\, a_1\, a_2)\; P_e - c_3\; a_1\, M_1^*}{c_1 + c_2 + c_3\; a_1^2}, \tag{30}$$

Procedînd la fel pentru talere rezultă cuplul de torsiune total

$$\mathfrak{M}_t = X_1 a_1 + \mathfrak{M}_{t,0} = P_g^0 a_1 + \frac{a c_2 P_e + (c_1 + c_2)\; M_1^*}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2}, \tag{31}$$

din care se calculează (vezi 4) momentul încovoietor al inelului

$$M_y = - m_t\, r_0 = - \frac{\mathfrak{M}_t}{2\pi}. \tag{32}$$

Folosind (21) şi (31) se obţine rotirea totală a talerului

$$\theta = \mathfrak{M}_t\, c_3. \tag{33}$$

Observaţii. 1. Eforturile stabilite (29), (30), (32) prin procedeul descris mai sus sînt identice cu cele din [3], dar modul lor de obţinere, datorită formei de bază adoptate, este mult mai simplu şi mai clar.

2. În cazul apariţiei unei diferenţe de temperatură $\Delta t^0 = t^0_{\text{taler}} - t^0_{\text{şurub}} > 0$ faţă de situaţia de la montaj, în elementele îmbinării apar eforturi suplimentare. Folosind aceeaşi formă de bază ca în cazul sarcinilor exterioare, necunoscuta $X_1^{t^0}$ se determină cu uşurinţă din ecuaţia de continuitate

$$X_1^{t^0}\; \delta_{11} + \Delta_{1t^0} = 0, \tag{34}$$

în care δ_{11} este dat de (22). Termenul Δ_{1t^0} reprezintă lucrul mecanic produs de încărcarea virtuală $\overline{X}_1 = 1$ prin deplasările pe forma de bază datorită variaţiei de temperatură. Întrucît variaţia de temperatură conduce la deplasarea relativă $\alpha \Delta t\, l_s$ (fig. 4) de semn contrar lui X_1, rezultă

$$\Delta_{1t^0} = - 1\; \alpha\; \Delta\; t^0 l_s \tag{35}$$

(l_s reprezintă distanţa între talerele îmbinării).

Introducînd (22) şi (35) în (34) se obţine necunoscuta

$$X_1^{t^0} = + \frac{\alpha\; \Delta\; t^0\; l_s}{2(c_1 + c_2 + c_3\; a_1^2)} = P_s^{t^0} = P_g^{t^0} \tag{36}$$

egală în valoare cu efortul total pe garnitură şi în şuruburi.

Aceste eforturi sînt identice cu cele calculate în [4] prin folosirea unui alt procedeu. Procedeul prezentat mai sus este mai expeditiv și în plus permite luarea în considerație și a variației de temperatură $\Delta_1^{t^0}$, între fețele talerului prin introducerea în Δ_{1t^0} a încă unui termen egal cu

$$- \alpha \Delta t_1^0 \frac{r}{h} a_1.$$

Secțiunea transversală a inelului încovoiată de cuplul

$$M_y^{t^0} = - \frac{\alpha \, \Delta t^0 \, l_s}{2 (c_1 + c_2 + c_3 a_1^2)} \cdot \frac{a_1}{2\pi}, \tag{37}$$

se rotește cu valoarea

$$\theta^{t^0} = \frac{\alpha \, \Delta t^0 \, l_s}{2 (c_1 + c_2 + c_3 a_1^2)} a_1 c_3. \tag{38}$$

3. Eforturile determinate în acest paragraf au presupus cunoscute eforturile de legătură dintre taler și manta. În realitate valorile acestora depind și de deformarea talerului, astfel încît ele nu pot fi determinate corect decît din ecuații de continuitate dintre manta și taler. În această situație talerele, garnitura și șuruburile vor fi considerare ca un ansamblu și formulele finale stabilite, referitoare la eforturile și deformațiile acestuia, vor putea fi utilizate în mod direct.

4. Din analiza prezentată rezultă că rotirea talerului, considerat ca inel liber, se produce în raport cu centrul său de greutate. Garnitura sub acțiunea forței P_g suferă o comprimare de fiecare parte a planului de simetrie egală cu

$$\Delta_g = P_g \, c_2. \tag{39}$$

Aceasta înseamnă că centrul de greutate al inelului are o deplasare (fig. 5) egală cu

$$\Delta = | P_g \, c_2 | + | \, \theta e | , \tag{40}$$

unde θ se calculează cu (33).

Întrucît θe reprezintă o destindere a garniturii (fig. 5) rezultă că trebuie produsă o astfel de comprimare inițială Δ a garniturii, încît mărimea Δg (39) să reprezinte totdeauna o turtire a garniturii. Aceasta corespunde condiției ca totdeauna $X_1 = P_g > 0$.

3. EFECTUL DE ROTIRE A TALERULUI FAȚĂ DE MIJLOCUL GARNITURII

În lucrarea [4] și alte lucrări de specialitate se face ipoteza că rotirea talerului flanșei considerat ca un inel, are loc în jurul circumferinței mijlocii a garniturii. Consecințele acestei ipoteze asupra eforturilor și deformațiilor inelului nu sînt însă analizate.

În scopul precizării efectului acestei rotiri se consideră secțiunea inelului (fig. 6) de dimensiuni $b \times h$ și punétul G, mijlocul graniturii, considerat ca fix. Față de axele y — z, cu originea în centrul de greutate al secțiunii, punctul G are coordonatele $y_G = e$ și $z_G = \frac{h}{2}$

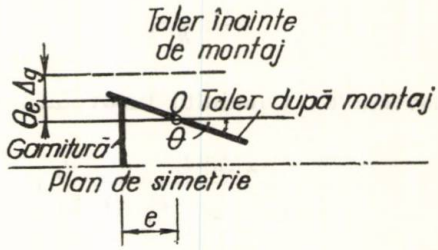


Fig. 5

Un punct curent B, de coordonate y, z ajunge după rotirea secțiunii cu unghiul θ în jurul lui G, în B'. Deplasările v (după y) și w (după z) vor fi

$$v = -\left(\frac{h}{2} - z\right)\theta \quad ; \quad w = -(y - e)\,\theta. \tag{g}$$

La deplasarea v a punctului B are loc deformația specifică inelară

$$\varepsilon = -\frac{v}{r_0 - y}, \tag{41}$$

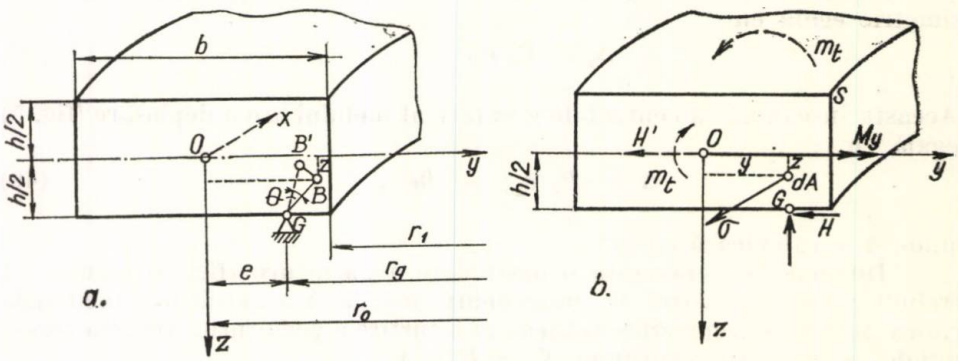


Fig. 6

care este negativă deoarece prin deplasarea v pozitivă, punctul B trece pe un cerc cu rază mai mică.

Folosind legea simplă a lui Hooke $\sigma = E \cdot \varepsilon$ relația (41) și (g) se obține

$$\sigma = E\frac{h - 2z}{2(r_0 - y)}\,\theta. \tag{42}$$

Înlocuind (42) în relațiile de echivalență dintre eforturi și eforturi unitare (fig. 6 *b*)

$$N = \iint \sigma \, dy \, dz \quad ; \quad M_y = \iint \sigma z dy \, dz \quad ; \quad M_z = -\iint \sigma y \, dy \, dz, \tag{h}$$

rezultă

$$N = E\theta \frac{h^2}{2} \ln \rho, \tag{43}$$

$$M_y = -E\theta \frac{h^3}{12} \ln \rho, \tag{44}$$

$$M_z = -E\theta \frac{h^2}{2} (r_0 \ln \rho - b), \tag{45}$$

în care $\ln \rho = \ln \frac{r_2}{r_1}$, dezvoltat în serie are expresia

$$\ln \rho = 2\left[\frac{\rho - 1}{\rho + 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right)^5 + \dots\right] = \tag{46}$$

$$= \frac{b}{r_0}\left[1 + \frac{1}{3.2^2}\left(\frac{b}{r_0}\right)^2 + \frac{1}{5.2^4}\left(\frac{b}{r_0}\right)^4 \dots\right].$$

Păstrînd numai primul termen din (46), relația (45), în care $M_z = 0$, este identic satisfăcută.

Valabilitatea ipotezei de inel este condiționată de valoarea lui ρ și poate fi admisă în toate cazurile în care se poate aproxima $\ln \rho \cong b/r_0$.

Întrucît din încărcările normale pe planul inelului nu apare în secțiunea transversală decît momentul încovoietor M_y (fig. 6 *b*), rezultă că echivalența (43) nu poate fi satisfăcută decît în cazul apariției unei forțe orizontale H în punctul G, față de care s-a presupus că se rotește secțiunea. Reducînd această forță, considerată uniformă pe centrul de rază r_g, în centrul de greutate al secțiunii se obțin componentele

$$H' = H \frac{r_g}{r},$$

$$m_i' = H \cdot h/2. \tag{i}$$

Din componenta H' apare în secțiunea inelului forța axială

$$N_i = H' r = H r_g. \tag{j}$$

Din echivalența relației (j) și (43) se obține valoarea forței H în funcție de θ.

$$H = E\theta \frac{h^2}{2r_g} \ln \rho. \tag{47}$$

Momentul încovoietor M_y în funcție de încărcările exterioare, inclusiv forțele H care dau momentul m_t' (i), este

$$M_y = -\left(m_t - m_t'\right) r_0 = -\left(m_t - H \cdot \frac{h}{2}\right) r_0. \qquad (k)$$

Egalînd valorile lui M_y date de (44) și (k) în care se introduce (47) se obține

$$\theta = \frac{m_t r_0}{E\frac{h^3}{12}\ln\rho}\,\frac{1}{1+3\frac{r_0}{r_a}} = \frac{m_t r_0 b}{EI\ln\rho}\,\frac{1}{1+3\frac{r_0}{r_0-e}}, \qquad (48)$$

care reprezintă rotirea inelului în situația că se produce față de punctul G. Se observă că primul termen al expresiei (48) este identic cu rotirea inelului față de centrul de greutate (5) și că ipoteza admisă face ca valoarea rotirii să fie cu mult mai mică decît în cazul inelului liber.

Introducînd (48) în (42) se obține expresia tensiunii într-un punct curent

$$\sigma = \frac{m_t r_0 b}{I\ln\rho}\,\frac{1}{1+3\frac{r_0}{r_0-e}} \cdot \frac{h-2z}{2(r_0-y)}. \qquad (49)$$

Valoarea maximă a tensiunii

$$\sigma_{max} = \frac{6m_t r_0}{h^2 r_1 \ln\rho}\,\frac{2}{1+3\frac{r_0}{r_0-e}} \qquad (50)$$

are loc în punctul S (fig. 6*b*) și este mai puțin de jumătate decît valoarea dată de (7') stabilită în cazul inelului liber.

Observații. 1. Ipoteza că rotirea inelului se face în jurul circumferinței mijlocii a garniturii este avantajoasă atît din punct de vedere al rotirii (48) care scade cu mai mult de 75% față de situația inelului liber, cît și din punct de vedere al eforturilor (50) care scad cu mai mult de 50%. Realizarea acestei ipoteze însă este incertă, deoarece presupune apariția forței H, care să împiedice deplasarea după rază a punctului G (fig. 6*b*). Valoarea acesteia se determină din (47) în care se introduce θ din (48)

$$H = \frac{6m_t r_0}{h(r_0-e)}\,\frac{1}{1+3\frac{r_0}{r_0-e}}. \qquad (51)$$

În cazul flanșelor apariția forței H este posibilă numai ca o forță de frecare între taler și garnitură dar în această situație trebuie verificată îndeplinirea condițiilor

$$f p_a > H \quad \text{și} \quad p_i h_a > 2H,$$

în care f este coeficientul de frecare; p_g, rezultanta presiunii pe lățimea garniturii, p_i, presiunea interioară și h_g, înălțimea garniturii.

Cum aceste condiții nu pot fi îndeplinite întotdeauna, mai ales în cazul garniturilor nemetalice, care prezintă o rigiditate inelară mică, ipoteza analizată trebuie eliminată. De altfel, ea a fost afirmată în cadrul literaturii de specialitate, dar expresiile eforturilor și deformațiilor folosite s-au stabilit fără a ține seama de efectul ei.

2. Metoda de calcul prezentată la punctul 2 pentru încărcări simetrice este o metodă exactă în ipoteza de inel a talerului și atît de simplă încît face inutilă o ipoteză suplimentară privind aspectul geometric al problemei analizate.

4. CALCULUL EXACT AL TALERULUI ÎN IPOTEZA DE INEL

Datorită faptului că eforturile din șuruburi sînt forțe concentrate pentru taler rezultă că deplasările w, normale pe planul inelului, variază pe circumferința acestuia în funcție de unghiul α (fig. 7 *a*), măsurat de la diametrul $B - B_1$ ce trece prin axele a două șuruburi.

Din cele prezentate în paragraful 2 rezultă că talerul este acționat de un sistem echilibrat de forțe astfel încît determinarea eforturilor și deplasărilor lui se poate reduce la calculul unui inel acționat de forțe normale pe plan și cuple de torsiune (fig. 7 *a*) Într-un astfel de sistem atunci cînd încărcările nu sînt constante pe circumferință, dar alcătuiesc

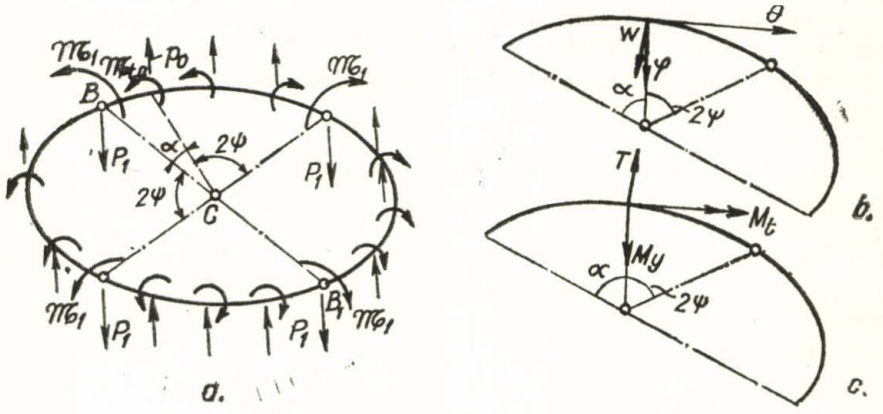


Fig. 7

un sistem echilibrat de forțe, apar deplasările w, φ, θ (fig. 7*b*) și eforturile M_y, M_z, T (fig. 7*c*).

Întrucît nu este necesar să se precizeze reazemele deplasările w care se calculează sînt deplasări relative.

Se consideră k șuruburi și se notează 2ψ unghiul dintre razele pe care se află două șuruburi alăturate.

Descompunînd în serie Fourier forţele concentrate P_1 şi cuplele $\mathfrak{M}_1$(fig. 7 *a*) ca în lucrarea [5] se obţine

$$p_1 = \frac{kP_1}{2\pi r} + \frac{kP_1}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \cos kn\alpha, \tag{52}$$

$$m_{t,1} = \frac{k\mathfrak{M}_1}{2\pi r} + \frac{k\mathfrak{M}_1}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \cos kn\alpha. \tag{53}$$

Din echilibrul forţelor exterioare de pe inel termenul constant din (52) se anulează cu p_0, conducînd la o deplasare constantă datorită comprimării garniturii. De asemenea partea constantă din $m_{t,1}$ (53) şi din $m_{t,0}$ conduce la o încărcare simetrică care produce o rotire a inelului ce se determină cu expresiile de la § 2.

Faţă de poziţia deformată din încărcările simetrice inelul se deformează sub acţiunea încărcărilor variabile

$$p = \frac{kP_1}{\pi r} \Sigma \cos kn\alpha, \tag{54}$$

$$m_t = \frac{k\mathfrak{M}_1}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \cos kn\alpha, \tag{55}$$

care constituie încărcări echilibrate deoarece totdeauna $kn > 2$ (de regulă numărul minim de şuruburi este 4).

Pentru calculul eforturilor şi deplasărilor produse de încărcările (54), (55) se aplică relaţiile stabilite la § 1.

Se vor determina eforturile şi deplasările pentru componentele

$$p = p_n \cos kn\,\alpha = \frac{k\,P_1}{\pi r} \cos kn\,\alpha, \tag{54'}$$

$$m_t = m_{t,n} \cos kn\,\alpha = \frac{k\mathfrak{M}_1}{\pi r} \cos kn\,\alpha, \tag{55'}$$

folosind varianta 1 (vezi 1).

Din ecuaţia (1) se obţine

$$T_r = -\,p_n r \frac{\sin kn\,\alpha}{kn} + C_1, \tag{a}$$

constanta C_1 din ecuaţia $T = 0$ la $\alpha = \frac{\pi}{kn}$ datorită simetriei încărcării (54') rezultă nulă şi deci (a) devine

$$T_n = -\,p_n r \frac{\sin kn\,\alpha}{kn} = -\,\frac{P_1}{\pi n} \sin kn\,\alpha. \tag{56}$$

Introducînd (55′) și (56) în (13) se obține ecuația diferențială

$$\frac{d^2 M_{t,n}}{d\alpha^2} + M_{t,n} = - p_n r^2 \frac{\sin kn\alpha}{kn} - m_{t,n} rkn \sin kn\alpha, \qquad (b)$$

a cărei soluție generală este

$$M_{t,n} = A \cos \alpha + B \sin \alpha + C_1 \sin kn\alpha. \qquad (c)$$

Constanta C_1 a soluției particulare se determină din condiția de verificare a ecuației diferențiale (b) și are valoarea

$$C_1 = \frac{p_n r^2}{kn(k^2 n^2 - 1)} + m_{t,n} r \frac{kn}{k^2 n^2 - 1}. \qquad (d)$$

Întrucît la $\alpha = 0$ și $\alpha = 2\psi = \frac{2\pi}{k}$, $M_{t,n} = 0$ (din considerente de simetrie) rezultă $A = B = 0$ și soluția (c) în care se introduce (d) devine

$$M_{t,n} = \left(\frac{p_n r^2}{kn(k^2 n^2 - 1)} + m_{t,n} r \frac{kn}{k^2 n^2 - 1} \right) \sin kn\alpha. \qquad (57)$$

Din (3), în care se introduce (55′) și (57), rezultă

$$M_{y,n} = \left(\frac{p_n r^2}{k^2 n^2 - 1} + \frac{m_{t,n} r}{k^2 n^2 - 1} \right) \cos kn\alpha. \qquad (58)$$

Introducînd (56) și (57) în (14), efectuînd integrarea acesteia și determinînd constantele din condițiile de rotire nulă în dreptul șuruburilor se obține expresia finală a deplasării normale pe plan.

$$w = \frac{p_n r^4}{(k^2 n^2 - 1)} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{k^2 n^2 GI_t} \right) \cos kn\alpha +$$

$$+ \frac{m_{t,n} r^3}{(k^2 n^2 - 1)^2} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_t} \right) \cos kn\alpha. \qquad (59)$$

Din (12), cunoscînd $M_{y,n}$ (58) și $\frac{d^2 w}{d\alpha^2}$ din (59), rezultă rotirea

$$\theta_n = \frac{p_n r^3}{(k^2 n^2 - 1)} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_t} \right) \cos kn\alpha +$$

$$+ \frac{m_{t,n} r^2}{(k^2 n^2 - 1)^2} \left(\frac{1}{EI} + \frac{k^2 n^2}{GI_t} \right) \cos kn\alpha. \qquad (60)$$

Pentru rotirea φ_n se foloseşte relaţia

$$\varphi_n = \frac{dw}{r\,d\alpha} = -\frac{p_n r^3 kn}{(k^2 n^2 - 1)}\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{k^2 n^2 GI_t}\right)\sin kn\alpha -$$

$$-\frac{m_{t,n} r^2 kn}{(k^2 n - 1)^2}\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_t}\right)\sin kn\alpha. \qquad (61)$$

Observaţii. 1. Pentru obţinerea eforturilor finale T, M_t, M_v din încărcarea echilibrată (54'), (55') se folosesc expresiile (56), (57), respectiv (58), făcîndu-se sumele corespunzătoare pentru mai multe valori ale parametrului n. Numărul de termeni ce trebuie luat, se stabileşte cu uşurinţă în funcţie de convergenţa seriei respective.

2. Expresia (59), însumată pentru mai multe valori ale lui n — în funcţie de convergenţa seriei — pune în evidenţă ondularea circumferenţială în ipoteza de inel a talerului. Ea dă valorile deplasărilor centrului de greutate al secţiunii inelului faţă de poziţia deformată din încărcarea simetrică analizată la § 2. Efectul de ondulare circumferenţială a fost observat experimental dar analitic el nu este cercetat în literatura de specialitate.

3. Eforturile finale în taler se obţin prin suprapunerea eforturilor obţinute în cazul încărcării simetrice (vezi § 2) cu eforturile determinate în cadrul acestui punct pentru încărcarea echilibrată (54'), (15').

Primită la redacţie la 14 aprilie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoşhenko, *Theorie des plaques et des coques*, Libraire polytechnique CH Beranger, Paris, 1951.
2. P. Mazilu, *Statica construcţiilor*, vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.
3. * * * *Calculul îmbinărilor prin flanşe*, Documente CAER, 1966.
4. M. Renert, G. Tănase, *Calculul şi construcţia utilajului chimic*, vol. I, ed. II, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1964.
5. M. Posea, *O metodă exactă pentru calculul ondulării circumferenţiale a flanşelor*. St. cerc. mec. aplic., *4* (1971).

STUDII ŞI CERCETĂRI TEORETICE-EXPERIMENTALE PRIVIND SECURITATEA TEHNICĂ A MANTALEI UNUI RECIPIENT CILINDRIC DE MARE PRESIUNE. I

de A. PAVEL
Institutul de petrol, gaze şi geologie Bucureşti

Se prezintă rezultatele principale ale unor studii, cercetări, determinări (măsurări) şi analize tehnice, efectuate în scopul precizării condiţiilor de exploatare în continuare a mantalei cilindrice a unui acumulator (recipient) de mare presiune din cadrul unei centrale hidropneumatice deservind o presă de mare capacitate. După precizarea principalelor caracteristici constructive, date de proiectare şi date de execuţie pentru agregatul acumulatorului hidropneumatic, sînt expuse cîteva consideraţii privind constatările controalelor tehnice periodice şi rezultatele mai importante ale examinărilor defectoscopice nedistructive.

1. INTRODUCERE

La solicitarea unei uzine constructoare de maşini, către sfîrşitul anului 1970, în cadrul catedrei de Maşini şi utilaj petrolier de la Institutul de petrol, gaze şi geologie din Bucureşti, au fost efectuate — prin persoana autorului — o serie de studii, cercetări, determinări (măsurări) şi analize tehnice privind precizarea condiţiilor de exploatare în continuare a unuia dintre acumulatoarele (recipientele) de mare presiune ale centralei hidropneumatice deservind o presă de mare capacitate, în concordanţă cu prevederile prescripţiilor tehnice oficiale ale I.S.C.I.R. În cele ce urmează vor fi prezentate principalele rezultate care au fost evidenţiate cu această ocazie pentru mantaua cilindrică a recipientului respectiv, rezultate aplicate neîntîrziat în activitatea practică şi confirmate în mod concludent prin exploatarea în continuare fără incidente.

2. PRINCIPALELE CARACTERISTICI CONSTRUCTIVE, DATE DE PROIECTARE ŞI DATE DE EXECUŢIE PENTRU AGREGATUL ACUMULATORULUI HIDROPNEUMATIC

Agregatul acumulatorului hidropneumatic, a cărui schemă principială este prezentată în figura 1, constituie parte componentă importantă a centralei hidropneumatice care asigură alimentarea cu fluid de lucru sub presiune ($p_{max} = 320$ kgf/cm^2) a presei de mare capacitate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1173—1189

Fluidul de lucru folosit este o emulsie, preparată prin adăugarea a 2 l de emulsol la 98 l de apă, în condițiile neutralizării complete a emulsolului utilizat.

Volumul de lucru (de manevră) real al agregatului acumulatorului hidropneumatic, cuprins între nivelul superior și cel inferior de lucru al recipientului nr. *3* (fig. 1) pentru emulsie, este de circa 1,86 m³, ceea ce

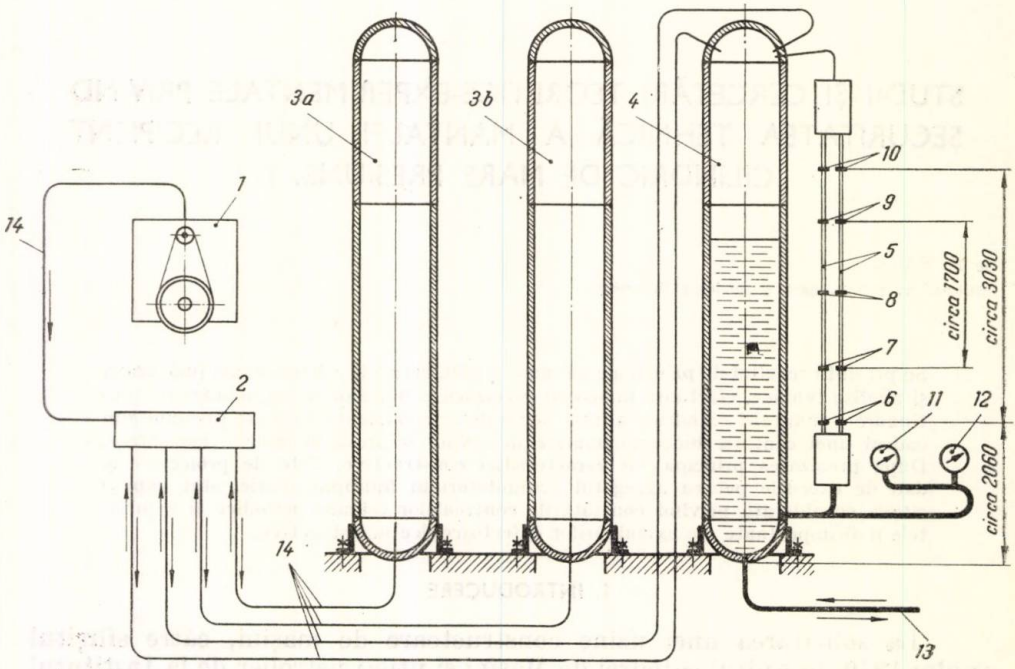


Fig. 1. — Schema principială a acumulatorului hidropneumatic:

1 — compresorul de aer, staționar; *2* — cutia cu cinci ventile; *3*, *a* și *b* — recipientele cilindrice verticale pentru aer comprimat; *4* — recipientul cilindric vertical pentru fluidul de lucru (emulsie); *5* — două coloane tubulare cu contacte electrice; *6* — contactele electrice ale nivelului inferior de avarie; *7* — contactele electrice ale nivelului inferior de lucru; *8* — contactele electrice ale nivelului intermediar de lucru; *9* — contactele electrice ale nivelului superior de lucru; *10* — contactele electrice ale nivelului superior de avarie; *11*, *12* — manometrele cu contacte electrice; *13* — circuitul conductelor de înaltă presiune pentru emulsie; *14* — circuitul conductelor de înaltă presiune pentru aer comprimat.

reprezintă circa 18,8% din capacitatea nominală ($V = 9{,}9$ m³) a recipientului respectiv.

Căderea de presiune maxim admisibilă Δp_{max} este de 11%, aceasta însemnînd că $\Delta p_{max} = 0{,}11\ p_{max} \cong 35$ kgf/cm². Presiunea maximă de lucru la care sînt reglate manometrele cu contacte electrice ca dispozitive de securitate tehnică și protecție finală este $p_{st} = p_{max} + \Delta p_{max} = 320 + 35 \cong 355$ kgf/cm².

Temperatura maximă a emulsiei la care este asigurată funcționarea normală a sistemului este $t_{max} = +50°C$.

Din punct de vedere constructiv, recipientele nr. *1* și nr. *2* pentru aer comprimat și recipientul nr. *3* pentru emulsie sînt recipiente cilindrice verticale identice (fig. 2), echipate cu o scară interioară, care asigură accesul pentru control.

Mantaua cilindrică a celor trei recipiente este realizată din două virole de lungimi diferite, fiecare virolă fiind executată din două semivirole forjate, asamblate între ele prin sudare în baie de zgură. Sudarea virolelor și a fundurilor, în vederea realizării corpului recipientelor respective, este

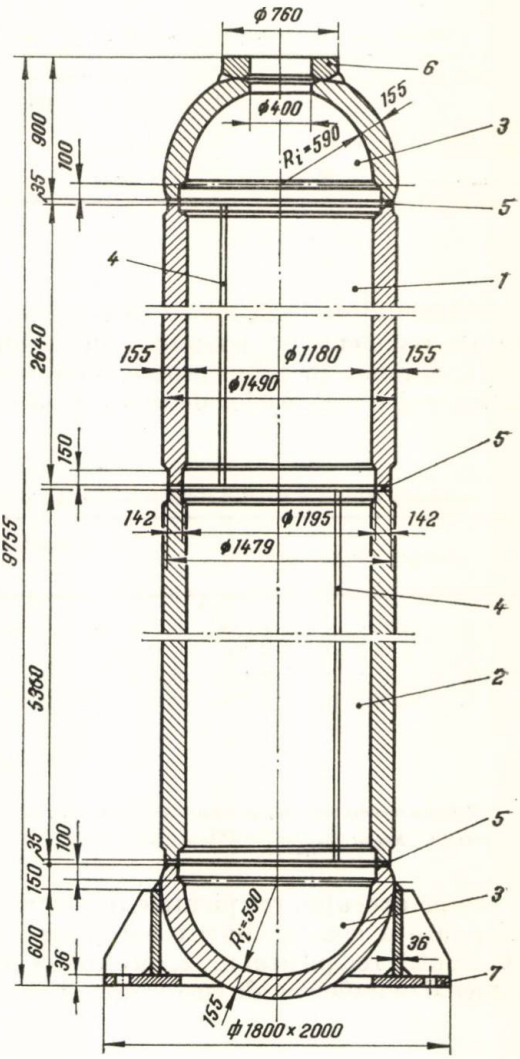


Fig. 2. — Schița constructivă a recipientului nr. 2 (secțiunea A — A în figura 5).

1 — virola superioară a mantalei cilindrice; *2* — virola inferioară a mantalei cilindrice; *3* — capacele (fundurile) semisferice cu parte cilindrică de trecere; *4* — cusăturile sudate longitudinale; *5* — cusăturile sudate inelare; *6* — inelul de consolidare al gurii de vizitare cu capac autoetanșat; *7* — sistemul de rezemare pe fundație.

executată, de asemenea, în baie de zgură. Toate celelalte suduri sînt executate fie automat sub un strat de fondant, fie manual (electric).

Fundurile semisferice sînt executate prin matrițare.

Valorile proiectate ale principalelor dimensiuni ale recipientelor sînt indicate în figura 2, în care se vede, de asemenea, că în dreptul cusăturilor sudate inelare, grosimea de perete proiectată se reduce de la 155 mm la 142 mm.

Valorile reale ale principalelor dimensiuni ale mantalei cilindrice a recipientului nr. 2, consemnate în cartea recipientului respectiv, sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Valorile reale ale principalelor dimensiuni ale mantalei cilindrice a recipientului nr. 2

Diametrul interior D_i, mm		Diametrul exterior D_e, mm		Grosimea de perete minimă s_{min}, mm
maxim $D_{i\,max}$	minim $D_{i\,min}$	maxim $D_{e\,max}$	minim $D_{e\,min}$	
1 184... 1 187	1 174... 1 183	1 487	—	150

Materialul de bază folosit în execuţia principalelor elemente componente ale recipientelor acumulatorului hidropneumatic a fost oţelul 22K (GOST), laminat în table groase. Compoziţia chimică şi caracteristicile fizico-mecanice ale şarjelor de oţel utilizate, sînt date în tabela 2.

Tabela 2

Compoziţia chimică şi caracteristicile fizico-mecanice ale oţelului 22K, laminat în table groase

Compoziţia chimică, %	Caracteristici fizico-mecanice la temperatura standard normală $t = +20°C$							
	σ_r, kgf mm²		$\sigma_{0,2}$, kgf/mm²		δ_{10}, %		KCU, kgf · m/cm²	
C = 0,22 ...0,25; S = 0,018...0,023 Mn = 0,76 ...1,03; Cr = 0,10 ...0,15 Si = 0,25 ...0,35; Ni = 0,17 ...0,24 P = 0,017...0,027; Cu = 0,09 ...0,15	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.
	48,4*)	52,0	28,6	33,1	23,4	26,0	7,5	11,9

*) Valoarea minimă normată, conform GOST (U.R.S.S.), este $\sigma_{r\,min}^{+20°C} = 44$ kgf/mm².

Observaţie. Aşadar $[\sigma_{0,2}/\sigma_r]^{+20°C} = 0,591...0,637$.

După execuţie, recipientele respective au fost supuse unui tratament termic, care a constat dintr-o normalizare la 920°C şi o revenire adîncă la 650°C. Pentru recipientul nr. 2, după acest tratament termic, caracteristicile mecanice şi tehnologice ale cusăturilor sudate au fost cele indicate în tabela 3,

Tabela 3

Caracteristicile mecanice şi tehnologice ale cusăturilor sudate după tratamentul termic

Caracteristici mecanice şi tehnologice la temperatura standard normală $t = +20°C$

σ_{rs}, kgf/mm²		KCU, kgf. m/cm²		Unghiul de îndoire α, grade
min.	max.	min.	max.	
44,5	45,0	14,4	15,9	180

rezultînd pentru coeficientul de rezistenţă φ al sudurilor următoarea valoare maximă :

$$\varphi_{max} = \frac{\sigma_{rs\ min}}{\sigma_{r\ min}} = \frac{44,5}{48,4} = 0,920 < 1,000 \qquad (1)$$

şi următoarea valoare minimă :

$$\varphi_{min} = \frac{\sigma_{rs\ max}}{\sigma_{r\ max}} = \frac{45,0}{52,0} = 0,865 < 1,000. \qquad (2)$$

Controlul defectoscopic nedistructiv de casă al cusăturilor sudate s-a făcut prin gammagrafiere în proporţie de 25% (în totalitate în nodurile de sudură şi prin sondaj în sudurile longitudinale) şi cu ultrasunete în proporţie de 100%, în certificatul de calitate al recipientului nr. *2* fiind consemnate numai rezultate pozitive. Controlul de casă de macrostructură şi de microstructură al cusăturilor sudate, efectuat pe sudurile plăcilor de control, a furnizat, de asemenea, numai rezultate pozitive, certificatul de calitate al recipientului nr. *2* cuprinzînd o menţiune expresă prin care se atestă inexistenţa defectelor (primare) de material sau de execuţie.

Calculul de rezistenţă al recipientelor acumulatorului hidropneumatic a fost făcut pentru o presiune de calcul $p_c = p_{max} = 320$ kgf/cm^2 şi pentru o temperatură maximă de calcul $t = +100$°C, temperatura de funcţionare în regim considerîndu-se egală cu $+ 8 \ldots + 100$°C. Calculul de dimensionare a fost elaborat şi prezentat în două variante, în tabela 4 indicîndu-se,

Tabela 4

Formule şi condiţii de calcul pentru mantaua cilindrică a recipientului nr. *2*

Varianta de calcul	Formula de calcul pentru grosimea de perete s, cm	Presiunea de calcul p_c, kgf/cm^2	Rezistenţa admisibilă a materialului de bază σ_a, kgf/cm^2	Coeficientul de rezistenţă al sudurii φ	Diametrul interior D_i, cm	Adaosul de grosime (pentru execuţie, coroziune etc.) c, cm
1 *) (1960)	$s = \frac{p_c D_i}{2{,}3\varphi\sigma_a - p_c} + c$	320	1 260	1,000	118,0	0,000
2 **) (1966)	$s = \frac{p_c D_i}{2\varphi\sigma_a - p_c} + c$	320	1 630	1,000	119,5	0,000

*) Riguros, formula de calcul pentru grosimea de perete *s*, care rezultă din condiţia de rezistenţă formulată în conformitate cu teoria a IV-a (energetică) de rezistenţă (teoria sau criteriul Mises-Huber), este valabilă numai pentru cazul particular (corespunzător corpurilor cilindrice cu perete subţire) cînd eforturile unitare principale $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ îndeplinesc condiţiile : $\sigma_1 = 2\sigma_2$ şi $\sigma_3 = 0$.

**) Riguros, formula de calcul pentru grosimea de perete *s*, care rezultă din condiţia de rezistenţă formulată în conformitate cu teoria I (teoria sau criteriul Galilei-Rankine) sau III (teoria sau criteriul Saint-Venant, pentru $\sigma_3 = 0$) de rezistenţă, este valabilă numai pentru cazul particular cînd eforturile unitare principale $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ sînt evaluate cu formulele corespunzătoare învelişurilor cilindrice cu perete subţire.

Observaţie. Aşa cum se va vedea în continuare, mantaua cilindrică a recipientului nr. *2* nu este de tipul „cu perete subţire", deci utilizarea (greşită a) formulelor de calcul menţionate nu poate fi justificată.

pentru fiecare variantă în parte, formulele şi condiţiile de calcul pentru mantaua cilindrică a recipientului nr. *2*. O sinteză a valorilor calculate şi a celor adoptate în final pentru grosimea de perete *s* a mantalei recipientului nr. *2* este prezentată în tabela 5.

Tabela 5

Grosimea de perete a mantalei cilindrice a recipientului nr. *2*

Varianta de calcul	Grosimea de perete *s*, mm	
	Calculată	Adoptată prin proiect
1 (1960)	146,5*)	155,0*)
2 (1966)	130,0	155,0*)

*) În zonele inelare prelucrate mecanic (strunjite), grosimea minimă a peretelui mantalei cilindrice este de 142,0 mm.

Recipientul nr. *2*, a cărui masă metalică totală este de 50 550 kg, a fost supus unei încercări hidraulice la rece de casă la suprapresiunea $p_p = 400$ kgf/cm², deci

$$\frac{p_p}{p_c} = \frac{400}{320} = 1{,}25. \tag{3}$$

Observaţii importante. 1. Întrucît pentru mantaua recipientului nr. *2* (fig. 2):

— în zona inelară prelucrată mecanic (strunjită)

$$\beta = \frac{D_e}{D_i} = \frac{1\,479}{1\,195} = 1{,}238 > 1{,}100; \tag{4}$$

— în celelalte zone inelare

$$\beta = \frac{D_e}{D_i} = \frac{1\,490}{1\,180} = 1{,}262 > 1{,}100, \tag{5}$$

mantaua cilindrică trebuia calculată ca un înveliş cilindric „cu perete gros", care, din punctul de vedere al calculului de rezistenţă, este definit prin condiţia *)

$$\beta = \frac{D_e}{D_i} > 1{,}100. \tag{6}$$

Dacă, în plus, se are în vedere că, pentru recipientul nr. *2*, condiţiile $\sigma_1 = 2\sigma_2$ şi $\sigma_3 = 0$ nu sînt şi nici nu pot fi îndeplinite, rezultă indiscutabil că s-a procedat *greşit* adoptîndu-se formulele de dimensionare menţionate în tabela 4.

*) Pavel A., Construcţia de maşini, **19**, *4*, 177—184 (1967).

2. Coeficientul real de rezistență φ_{real} al sudurilor este subunitar ($\varphi_{real} < \varphi = 1{,}000$), avînd valorile (vezi formulele 1 și 2):

$$\varphi_{min} = 0{,}865 \leqslant \varphi_{real} \leqslant \varphi_{max} = 0{,}920, \tag{7}$$

deși la proiectarea recipientului nr. *2* s-a considerat $\varphi = 1{,}000$ (tab. 4).

3. Cu toate că celei mai slăbite secțiuni a mantalei (în zona inelară subțiată prin strunjire) îi corespunde valoarea $D_i = 1\,195$ mm (fig. 2), este de neînțeles utilizarea în calculele de dimensionare (varianta 1) a diametrului interior $D_i = 1\,180$ mm.

4. Conform instrucțiunilor I.S.C.I.R. în vigoare, recipientul nr. *2* este un recipient de categoria III și pentru dimensionarea mantalei sale cilindrice trebuia folosită următoarea (și singura) rezistență admisibilă (tab. 6);

$$\sigma_a = \sigma_{a\,min} = 1\,290 \text{ kgf/cm}^2. \tag{8}$$

Tabela 6

Rezistența admisibilă a materialului de bază al mantalei cilindrice a recipientului nr. *2*

Mărimea de referință σ_{ref} / Valorile coeficienților globali de siguranță c *)	$\sigma_{ref} = \sigma_{r\,min} =$ $= 4\,840$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{0,2\,min} =$ $= 2\,860$ kgf/cm²
În raport cu rezistența de rupere, $c = c_r = 3{,}75$	$\sigma_a = \sigma_{a\,min} =$ $= 1\,290$ kgf/cm²	—
În raport cu limita tehnică de curgere, $c = c_c = 1{,}70$	—	$\sigma_a = 1\,682$ kgf/cm²

*) Pavel A., Materiale și rezistențe admisibile folosite în construcția de utilaje pentru industria petrolieră prelucrătoare și petrochimică. București, Editura didactică și pedagogică, 1967, p. 107.

5. În ambele variante de calcul (tab. 4) nu au fost date nici un fel de indicații, justificări sau precizări cu privire la valorile adoptate pentru coeficienții globali de siguranță c_r și c_c. Valorile efective minime, cele mai restrictive, ale coeficienților globali de siguranță, sub care nu este recomandabil să se coboare în condițiile unei exploatări normale, au fost evaluate de către autor și sînt indicate în tabela 7 pentru fiecare variantă de calcul în parte. Se precizează însă că valoarea $\sigma_a = 1\,630$ kgf/cm² nu este corect determinată, dacă pentru calculul rezistenței admisibile respective se are în vedere metoda*) la care s-a făcut referirea în varianta de calcul 2 (tab. 4).

6. Durata de serviciu τ_s a recipientului nr. *2* și deci a mantalei sale cilindrice nu a constituit un criteriu de calcul (dimensionare sau verificare), din care motiv nu s-au putut prezenta nici un fel de date care să permită aprecierea valorii acesteia în funcție de condițiile de exploatare specifice.

*) Metoda sovietică, oficializată în 1965 prin normele ȚKTI.

Tabela 7

Valorile efective minime $c_{r\,min}$ și $c_{c\,min}$ ale coeficienților globali de siguranță pentru mantaua cilindrică a recipientului nr. 2

Mărimea de referință σ_{ref} / Rezistența admisibilă σ_a		Varianta 1 (1960)			Varianta 2 (1966)		
		Materialul de bază		Suduri	Materialul de bază		Suduri
		$\sigma_{ref} = \sigma_{r\,min} = 4\,840$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{0,2\,min} = 2\,860$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{rs\,max} = 4\,500$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{r\,min} = 4\,840$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{0,2\,min} = 2\,860$ kgf/cm²	$\sigma_{ref} = \sigma_{rs\,max} = 4\,500$ kgf/cm²
Pentru materialul de bază	$\sigma_a = 1\,260$ kgf/cm²	$c_r = 3,840$	$c_c = 2,265$	—	—	—	—
	$\sigma_a = 1\,630$ kgf/cm²	—	—	—	$c_r = 2,970$	$c_c = 1,755$	—
Pentru suduri *)	$\sigma_{as} = \varphi_{min}\sigma_a = 0,855 \cdot 1\,260$ kgf/cm²	—	—	$c_r = 4,180$	—	—	—
	$\sigma_{as} = \varphi_{min}\sigma_a = 0,855 \cdot 1\,630$ kgf/cm²	—	—	—	—	—	$c_r = 3,220$

*) $\varphi_{min} = \dfrac{\sigma_{rs\,min}}{\sigma_{r\,max}} = \dfrac{44,5}{52,0} = 0,855$ (vezi tabelele 2 și 3).

Observație. Coeficientul global de siguranță s-a calculat, corespunzător, cu formula generală

$$c = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_a} \quad \text{sau} \quad c = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_{as}}.$$

3. CONSIDERAȚII PRIVIND CONSTATĂRILE CONTROALELOR TEHNICE PERIODICE *) ȘI PRINCIPALELE REZULTATE ALE EXAMINĂRILOR DEFECTOSCOPICE NEDISTRUCTIVE **)

Controalele tehnice periodice, efectuate pentru mantaua cilindrică a recipientului nr. *2* în conformitate cu prevederile normelor oficiale românești de supraveghere tehnică, au evidențiat următoarele :

— existența unei neconcordanțe flagrante între grosimea de perete calculată în varianta 1 și grosimea de perete adoptată în final pentru zona inelară strunjită (tab. 5), această din urmă grosime de perete nefiind justificată prin calcul ;

— existența unor neconcordanțe îngrijorătoare între grosimea de perete calculată, cea menționată în documentația tehnică însoțitoare ca rezultată în urma execuției și cea măsurată în mod efectiv cu ajutorul ultrasunetelor (tab. 8) ;

Tabela 8

Grosimea de perete *s*, în mm, a mantalei cilindrice a recipientului nr. *2*

Grosimea de perete *s* este cea / Zona de manta	Calculată		Adoptată prin proiect		Rezultată în urma execuției (valori minime)	Măsurată	
	Varianta 1 (1960)	Varianta 2 (1966)	Varianta 1 (1960)	Varianta 2 (1966)		de către I.S.C.I.R.	de către uzina beneficiară
Zonele inelare subțiate prin strunjire	146,5	130,0	142,0	142,0	142,0	140,0	130,0
Celelalte zone	146,5	130,0	155,0	155,0	150,0	149,0	150,0

— existența pe suprafața interioară a unor amprente izolate adînci, rezultate din laminare, cu adîncimi de pînă la 5...6 mm ;

— existența pe suprafața interioară a unor amprente liniare de direcții și lungimi diferite, rezultate de asemenea din laminare, cu adîncimi de pînă la 2 mm ;

— reducerea față de $s = 155$ mm a grosimii de perete în zonele inelare subțiate prin strunjire cu 6...10 mm pe fiecare parte (interioară și exterioară) a peretelui ;

— existența pe toată grosimea de perete a unor defecte de material (incluziuni și suprapuneri), care, în general, pornesc de la marginea cusăturilor sudate și se extind — cu frecvență variabilă — pe aproape întreaga suprafață a mantalei ; prin natura lor, defectele de material, descoperite abia la începutul anului 1970 (?!?), sînt defecte primare, de fabricație, deci mantaua recipientului nr. *2* a prezentat vicii ascunse de material și de execuție înainte de a părăsi uzina constructoare.

*) Efectuate de către organele oficiale de supraveghere tehnică I.S.C.I.R.

**) Examinarea defectoscopică nedistructivă sistematică și prin sondaj s-a făcut cu ajutorul ultrasunetelor de către colective de operatori conduse de ing. Ioan Bălan și fizician Mihai N. Vlădescu din București. La interpretarea finală a rezultatelor obținute a contribuit de asemenea ing. A. Bernath din Timișoara.

În aceste condiţii, rezultatele calculelor de proiectare (varianta 1) şi menţiunile favorabile din certificatul de calitate al recipientului nr. 2 nu s-au mai putut — în mod serios — lua în consideraţie şi la cererea expresă şi pe deplin justificată a organelor oficiale de supraveghere tehnică I.S.C.I.R., uzina constructoare a elaborat un calcul de rezistenţă „aranjat" (varianta 2), prin care, în mod formal, a fost înlocuit calculul de rezistenţă anterior (varianta 1), fără să fi fost elucidate problemele de fond aflate în suspensie.

Se precizează că, dacă prezenţa defectelor respective ar fi fost cunoscută de la bun început, atunci s-ar fi putut urmări în timp, în mod organizat, comportarea îndelungată sub sarcină a recipientului nr. 2 şi în prezent s-ar fi ştiut dacă defectele respective sînt staţionare sau evolutive. În acest din urmă caz s-ar fi putut face, de asemenea, o apreciere a ritmului în care şi a direcţiilor preferenţiale după care se produce amplificarea şi extinderea defectelor primare, ceea ce ar fi fost extrem de util pentru evaluarea şi precizarea cît mai certă a condiţiilor de exploatare în continuare a recipientului nr. 2 şi deci a acumulatorului hidropneumatic în discuţie.

O observaţie aparte se impune cu privire la orientarea greşită, în raport cu direcţia eforturilor unitare (inelare) maxime, a „fibrajului" tablelor groase din care s-au executat cele două virole ale mantalei cilindrice.

În baza observaţiilor şi a consideraţiilor expuse anterior, pentru a se putea preciza condiţiile de exploatare în continuare a recipientului nr. 2, în concordanţă cu prevederile prescripţiilor tehnice oficiale privind supravegherea tehnică, la sugestia autorului, s-au considerat necesare următoarele :

— elaborarea de către un institut de proiectări, autorizat în acest sens, a unui studiu tehnic privind calculul de rezistenţă al corpului recipientului respectiv ;

— examinarea defectoscopică 100%, cu ajutorul ultrasunetelor, pe suprafeţele accesibile şi interpretarea competentă a rezultatelor obţinute, în scopul precizării certe a formei şi caracterului defectelor, al întocmirii unei situaţii concludente a răspîndirii defectelor, al delimitării zonelor cu defectele cele mai mari şi mai numeroase, al determinării — în raport cu suprafeţele interioară şi exterioară — a adîncimii la care se găsesc defectele cele mai importante şi al executării de fotooscilograme pe defecte şi zone semnificative ;

— elaborarea unui studiu tensometric în condiţiile încercării (hidraulice) de presiune la rece a recipientului nr. 2, urmată de prelucrarea şi interpretarea competentă a rezultatelor obţinute ;

— precizarea şi interpretarea condiţiilor concrete, cvasistatice, de lucru ale agregatului acumulatorului hidropneumatic şi deci ale recipientului nr. 2, în scopul orientării asupra limitei periculoase a duratei de serviciu ;

— urmărirea sistematică, în timp, a situaţiei (staţionare sau evolutive a) defectelor, cunoscute şi localizate, prin organizarea unui control defectoscopic nedistructiv concludent, periodic şi exigent ;

— consolidarea cu bandaje (inele) fretate a mantalei cilindrice sau coborîrea în mod corespunzător a presiunii maxime de lucru a sistemului, în caz de necesitate.

În cele ce urmează vor fi prezentate numai principalele rezultate în baza cărora au putut fi precizate condiţiile deplinei securităţi tehnice a funcţionării în continuare a mantalei recipientului nr. *2*.

4. DETERMINAREA PRIN CALCUL A EFORTURILOR UNITARE DIN MANTAUA CILINDRICĂ ŞI A COEFICIENŢILOR DE SIGURANŢĂ CORESPUNZĂTORI

Determinarea prin calcul a eforturilor unitare din mantaua cilindrică s-a făcut pentru următoarele grosimi de perete, considerate concludente :

$s = s_0 = 155$ mm, reprezentînd valoarea *maximă* a grosimii de perete proiectate (fig. 2) ;

$s = 142$ mm, reprezentînd valoarea *minimă* a grosimii de perete proiectate (fig. 2) ;

$s = 100$ mm, reprezentînd valoarea *ipotetică* (presupusă) *maximă* a grosimii de perete (eventual) reduse (slăbite) prin existenţa defectelor (de material şi de execuţie) menţionate anterior ;

$s = 50$ mm, reprezentînd valoarea *ipotetică* (presupusă) *minimă* a grosimii de perete (eventual) reduse (slăbite) prin existenţa defectelor menţionate anterior.

În scopul evaluării maximale a eforturilor unitare, s-au adoptat schemele de calcul cele mai defavorabile, indicate în figura 3, corespun-

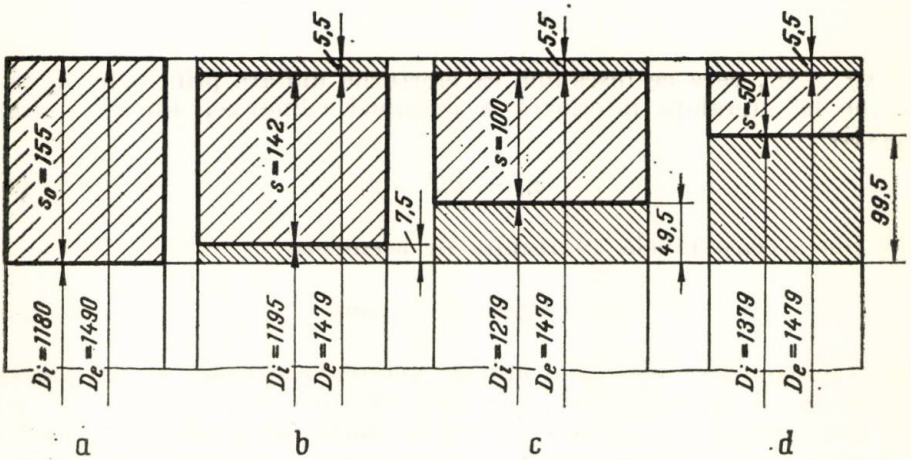


Fig. 3. — Scheme de calcul pentru mantaua cilindrică a recipientului nr. *2* : *a* — $s = s_0 = 155$ mm ; *b* — $s = 142$ mm ; *c* — $s = 100$ mm ; *d* — $s = 50$ mm.

zătoare grosimilor de perete precizate. În vederea efectuării unor studii comparative şi a formulării unor precizări convingătoare, calculul eforturilor unitare s-a făcut atît în ipoteza învelişului cilindric cu perete subţire, cît şi în ipoteza învelişului cilindric cu perete gros.

Pentru stabilirea eforturilor unitare echivalente σ_{ech} s-au folosit următoarele teorii (criterii) de rezistență:

— teoria I (teoria Galilei-Rankine), în conformitate cu care

$$\sigma_{ech\ I} = \sigma_1, \tag{9}$$

utilizarea acestei teorii se justifică prin existența unor pericole potențiale de rupere *fragilă* în alternativa unei eventuale explodări a recipientului nr. *2*;

— teoria III (teoria Coulomb-Guest), în conformitate cu care

$$\sigma_{ech\ III} = \sigma_1 - \sigma_3, \tag{10}$$

utilizarea acestei teorii se justifică prin posibilitatea efectuării unor calcule *acoperitoare* *);

— teoria IV (teoria Mises-Huber), în conformitate cu care

$$\sigma_{ech\ IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \tag{11}$$

utilizarea acestei teorii se justifică prin aceea că, pentru materialele tenace (oțeluri etc.), ea este foarte bine *confirmată* de rezultatele experimentale.

Formulele de calcul folosite pentru determinarea eforturilor unitare în cazul mantalei cilindrice a recipientului nr. *2* sînt prezentate, centralizat și comparativ, în tabelele 9 și 10.

Din tabela 10 rezultă

$$k_{li}^{pg} - k_{le}^{pg} = 1, \tag{12}$$

deci $k_{li}^{pg} > k_{le}^{pg}$, ceea ce înseamnă că eforturile unitare principale σ_1 sînt maxime la suprafața interioară a mantalei cilindrice, adică $\sigma_{li}^{pg} > \sigma_{le}^{pg}$, respectiv

$$\sigma_{li}^{pg} - \sigma_{le}^{pg} = p. \tag{13}$$

Din aceeași tabelă 10 rezultă de asemenea

$$k_{mi}^{pg} = k_{me}^{pg} = k_m^{pg} = \text{const.}, \tag{14}$$

ceea ce înseamnă că eforturile unitare meridiane (axiale) σ_m^{pg} nu variază cu grosimea de perete în cazul mantalei cilindrice.

Din tabelele 9 și 10 se constată că eforturile unitare principale σ_3 sînt maxime (în valoare absolută) la suprafața interioară a mantalei cilindrice cu perete gros și sînt nule la suprafața exterioară a acesteia, rezultînd

$$\sigma_{ri}^{pg} - \sigma_{re}^{pg} = -p. \tag{15}$$

*) După Seely și Smith, teoria III dă o eroare în plus de circa 15% (Seely F. B., Smith J. O. — Advanced mechanics of materials. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1955).

Tabela 9

Formule de calcul folosite pentru determinarea eforturilor unitare în cazul mantalei cilindrice a recipientului nr. 2 **în domeniul** $\sigma < \sigma_{0,2}$

Ipoteza de calcul		Eforturile unitare, kgf/cm²								
		Inelare σ_t	Meridiane (axiale) σ_m	Radiale σ_r	Principale			Echivalente		
					σ_1	σ_2	σ_3	Teoria I	Teoria III	Teoria IV
Înveliș cilindric cu perete subțire *) $\left(\beta = \frac{D_e}{D_i} \leqslant 1{,}1\right)$		$k_t^{ps} p$	$k_m^{ps} p$	$-k_r^{ps} p$	σ_t^{ps}	σ_m^{ps}	σ_r^{ps}	$k_{\text{ech I}}^{ps} p$	$k_{\text{ech III}}^{ps} p$	$k_{\text{ech IV}}^{ps} p$
Înveliș cilindric cu perete gros $\left(\beta = \frac{D_e}{D_i} > 1{,}1\right)$	la suprafața interioară **)	$k_{ti}^{pg} p$	$k_m^{pg} p$	$-k_{ri}^{pg} p$	σ_{ti}^{pg}	σ_{mi}^{pg}	σ_{ri}^{pg}	$k_{\text{ech } i\text{ I}}^{pg} p$	$k_{\text{ech } i\text{ III}}^{pg} p$	$k_{\text{ech } i\text{ IV}}^{pg} p$
	la suprafața exterioară ***)	$k_{te}^{pg} p$	$k_m^{pg} p$	$k_{re}^{pg} p$	σ_{te}^{pg}	σ_{me}^{pg}	σ_{re}^{pg}	$k_{\text{ech } e\text{ I}}^{pg} p$	$k_{\text{ech } e\text{ III}}^{pg} p$	$k_{\text{ech } e\text{ IV}}^{pg} p$

*) În acest caz, $\sigma_t = \sigma_t^{ps}$, $\sigma_m = \sigma_m^{ps}$, $\sigma_r = \sigma_r^{ps}$, $\sigma_{\text{ech I}} = \sigma_{\text{ech I}}^{ps}$, $\sigma_{\text{ech III}} = \sigma_{\text{ech III}}^{ps}$ și $\sigma_{\text{ech IV}} = \sigma_{\text{ech IV}}^{ps}$

**) În acest caz, $\sigma_t = \sigma_{ti}^{pg}$, $\sigma_m = \sigma_{mi}^{pg}$, $\sigma_r = \sigma_{ri}^{pg}$, $\sigma_{\text{ech I}} = \sigma_{\text{ech } i\text{ I}}^{pg}$, $\sigma_{\text{ech III}} = \sigma_{\text{ech } i\text{ III}}^{pg}$ și $\sigma_{\text{ech IV}} = \sigma_{\text{ech } i\text{ IV}}^{pg}$

***) În acest caz, $\sigma_t = \sigma_{te}^{pg}$, $\sigma_m = \sigma_{me}^{pg}$, $\sigma_r = \sigma_{re}^{pg}$, $\sigma_{\text{ech I}} = \sigma_{\text{ech } e\text{ I}}^{pg}$, $\sigma_{\text{ech III}} = \sigma_{\text{ech } e\text{ III}}^{pg}$ și $\sigma_{\text{ech IV}} = \sigma_{\text{ech } e\text{ IV}}^{pg}$.

Tabela 10

Formule de calcul folosite pentru determinarea coeficienților de proporționalitate k incluși în expresiile din tabela 9

Ipoteza de calcul		Coeficienții de proporționalitate k					
		k_t	k_m	k_r	$k_{\text{ech I}}$	$k_{\text{ech III}}$	$k_{\text{ech IV}}$
Înveliș cilindric cu perete subțire *) $\left(\beta = \frac{D_e}{D_i} \leqslant 1{,}1\right)$		$\frac{D_m}{2s}$	$\frac{D_m}{4s} = \frac{1}{2} k_t^{ps}$	1	k_t^{ps}	$k_t^{ps} + k_r^{ps}$	$[(k_t^{ps})^2 + (k_m^{ps})^2 + (k_r^{ps})^2 - (k_t^{ps} k_m^{ps} - k_m^{ps} k_r^{ps} - k_r^{ps} k_t^{ps}]^{1/2}$
Înveliș cilindric cu perete gros $\left(\beta = \frac{D_e}{D_i} > 1{,}1\right)$	la suprafața interioară **)	$\frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1}$	$\frac{1}{\beta^2 - 1}$	1	k_{ti}^{pg}	$k_{ti}^{pg} + k_{ri}^{pg}$	$[(k_{ti}^{pg})^2 + (k_{mi}^{pg})^2 + (k_{ri}^{pg})^2 - (k_{ti}^{pg} k_{mi}^{pg} - k_{mi}^{pg} k_{ri}^{pg} - k_{ri}^{pg} k_{ti}^{pg}]^{1/2}$
	la suprafața exterioară ***)	$\frac{2}{\beta^2 - 1}$	$\frac{1}{\beta^2 - 1}$	0	k_{te}^{pg}	k_{te}^{pg}	$[(k_{te}^{pg})^2 + (k_{me}^{pg})^2 - k_{te}^{pg} k_{me}^{pg}]^{1/2}$

*) În acest caz, $k_t = k_t^{ps}$, $k_m = k_m^{ps}$, $k_r = k_r^{ps}$, $k_{\text{ech I}} = k_{\text{ech I}}^{ps}$, $k_{\text{ech III}} = k_{\text{ech III}}^{ps}$ și $k_{\text{ech IV}} = k_{\text{ech IV}}^{ps}$

**) În acest caz, $k_t = k_{ti}^{pg}$, $k_m = k_{mi}^{pg}$, $k_r = k_{ri}^{pg}$, $k_{\text{ech I}} = k_{\text{ech } i \text{ I}}^{pg}$, $k_{\text{ech III}} = k_{\text{ech } i \text{ III}}^{pg}$ și $k_{\text{ech IV}} = k_{\text{ech } i \text{ IV}}^{pg}$

***) În acest caz, $k_t = k_{te}^{pg}$, $k_m = k_{me}^{pg}$, $k_r = k_{re}^{pg}$, $k_{\text{ech I}} = k_{\text{ech } e \text{ I}}^{pg}$, $k_{\text{ech III}} = k_{\text{ech } e \text{ III}}^{pg}$ și $k_{\text{ech IV}} = k_{\text{ech } e \text{ IV}}^{pg}$

Observație. Diametrul mediu D_m al mantalei cilindrice s-a calculat cu următoarea formulă evidentă:

$$D_m = \frac{1}{2}(D_e + D_i) .$$

Întrucît $k^{pg}_{\text{ech } e\,\text{I}} = k^{pg}_{\text{ech } e\,\text{III}} = k^{pg}_{te}$ (tab. 10), eforturile unitare echivalente la suprafaţa exterioară a mantalei cilindrice cu perete gros sînt aceleaşi după teoriile de rezistenţă I şi III.

Aşa cum rezultă din tabelele 9 şi 10, cele mai mari eforturi unitare echivalente sînt cele calculate la suprafaţa interioară a mantalei în ipoteza învelişului cilindric cu perete gros, din care motiv în continuare se va considera că

$$\sigma_{\max} = \sigma^{pg}_{\max} > \sigma^{ps}_{\max}. \tag{16}$$

Fără dificultăţi deosebite se poate observa, de asemenea, că eforturile unitare echivalente $\sigma^{pg}_{\text{ech } e}$ sînt *cu mult mai mici* decît eforturile unitare echivalente σ^{ps}_{ech}, ceea ce permite să se conchidă apriori că, întrucît mantaua cilindrică a recipientului nr. *2* a fost dimensionată ca un înveliş cilindric cu perete subţire, în mod teoretic ea trebuie să prezinte o apreciabilă rezervă din punctul de vedere al capacităţii sale portante.

Formulele prezentate în tabela 9 atestă fără echivoc că dependenţa (în domeniul comportării elastice a materialului) dintre eforturile unitare σ şi presiunea interioară $p = p_c$ este o *dependenţă liniară* (fig. 4).

În tabela 11 sînt date valorile calculate (teoretice) ale coeficienţilor de proporţionalitate k^{ps} şi k^{pg} pentru diferitele scheme de calcul adoptate (fig. 3).

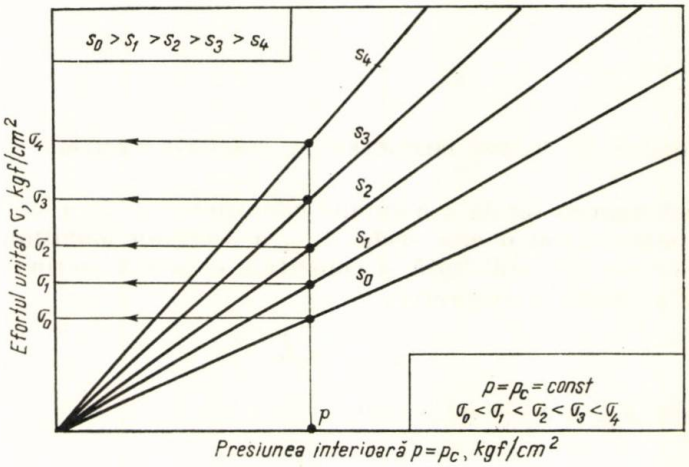


Fig. 4. — Dependenţa generală dintre eforturile unitare σ şi presiunea interioară $p = p_c$.

Coeficienţii globali de siguranţă c_r şi c_c s-au calculat, în mod corespunzător, cu următoarele formule generale :

$$c_r = \frac{\sigma_{r\,\min}}{\sigma_{\max}}; \quad c_c = \frac{\sigma_{0,2\,\min}}{\sigma_{\max}}. \tag{17}$$

Tabela 11

Valorile teoretice (calculate) ale coeficienților de proporționalitate k (vezi tabela 10 și fig. 3)

Coeficientul de proporționalitate k \ Grosimea peretelui mantalei cilindrice s, mm			155*)	142	100	50
În ipoteza învelișului cilindric cu perete subțire	k_t^{ps}		4,306	4,708	6,894	14,290
	k_m^{ps}		2,153	2,354	3,447	7,145
	k_r^{ps}		1,000	1,000	1,000	1,000
În ipoteza învelișului cilindric cu perete gros	k_t^{pg}	la suprafața interioară, k_{ti}^{pg}	4,340	4,756	6,950	14,240
		la suprafața exterioară, k_{te}^{pg}	3,340	3,756	5,950	13,240
	$k_{mi}^{pg} = k_{me}^{pg} = k_m^{pg}$		1,670	1,878	2,975	6,610
	k_r^{pg}	la suprafața interioară, k_{ri}^{pg}	1,000	1,000	1,000	1,000
		la suprafața exterioară k_{re}^{pg}	0,000	0,000	0,000	0,000

*) $s_0 = 155$ mm.

5. COEFICIENTUL DE SLĂBIRE (REDUCERE) AL PERETELUI MANTALEI CILINDRICE

Dacă lungimea totală a mantalei cilindrice (fig. 2) se notează cu L, atunci se poate defini o *arie brută* A_{brut} a secțiunii longitudinale (care, evident, este cea mai solicitată și constituie o primă secțiune probabilă de rupere) a mantalei respective

$$A_{\text{brut}} = s_0 L \tag{18}$$

și o *arie netă* A_{net} a aceleiași secțiuni

$$A_{\text{net}} = sL. \tag{19}$$

Coeficientul de slăbire (reducere) ψ al peretelui mantalei cilindrice, prin intermediul căruia se poate aprecia sau caracteriza capacitatea portantă reală a mantalei respective, se poate defini, în aceste condiții, ca fiind

$$\psi = \frac{A_{\text{net}}}{A_{\text{brut}}} = \frac{s}{s_0} \leqslant 1{,}00. \tag{20}$$

Valorile teoretice ale acestui coeficient, corespunzătoare diferitelor valori ale grosimii de perete s a mantalei cilindrice, sînt date în tabela 12.

Tabela 12

Valorile teoretice ale coeficientului de slăbire ψ al peretelui mantalei cilindrice a recipientului nr. 2

Grosimea de perete s (fig. 3), mm	155*)	142	100	50
Valorile teoretice ale coeficientului de slăbire ψ	1,000	0,916	0,645	0,323
	100,0 %	91,6 %	64,5 %	32,3 %

*) $s_0 = 155$ mm

Primită la redacție la 10 ianuarie 1972

NOTE

CONSIDERAȚII PRIVIND ORTOGONALITATEA FORMELOR PROPRII DE OSCILAȚIE LA SISTEME ELASTICE CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

de D. COȘA
Institutul de construcții București

Lucrarea studiază o particularitate de exprimare a relațiilor de ortogonalitate a formelor proprii de oscilație pentru un sistem cu mai multe grade de libertate. Condițiile rezultate sînt două și exprimă ortogonalitatea a două forme proprii atît prin intermediul matricei reacțiunilor, cît și prin intermediul matricei maselor.

Studierea oscilațiilor libere ale sistemelor elastice cu mase concentrate cu ajutorul formelor proprii de oscilație constituie una din problemele clasice ale dinamicii construcțiilor, problemă care sub multiplele ei aspecte se bucură de o bogată reprezentare în literatura de specialitate.

În aceste condiții apare cu atît mai surprinzător faptul că în nici una din lucrările consultate nu există referiri cu privire la ansamblul de proprietăți ale formelor proprii care să permită determinarea lor completă (cu aproximația unui factor constant) fără rezolvarea prealabilă a ecuației pulsațiilor.

Rîndurile de față își propun să enunțe aceste proprietăți, cu care ocazie va rezulta că noțiunii de „ortogonalitate" a formelor proprii trebuie să i se dea o semnificație mai amplă decît cea care i se atribuie curent în problemele de vibrații.

Fie un sistem elastic purtător a p mase m_i și cărora le permite un număr de n posibilități distincte de mișcare j, k.

Cele n posibilități distincte de mișcare ale maselor definesc spațiul n-dimensional al deplasărilor maselor.

Să presupunem că ne-am fixat asupra unei baze oarecare în acest spațiu, bază față de care mișcarea sistemului este descrisă cu ajutorul vectorului q ale cărui componente după direcțiile alese ale spațiului sînt q_1; q_2, $\cdots$, q_n.

Corespunzător acestor direcții definim proprietățile elastice și de inerție ale sistemului cu ajutorul matricelor R_q și M_q.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1191–1194

Matricea $R_q = \| r_{jk} \|_1^n$ este matricea „reacțiunilor" elastice; un element r_{jk} al acestei matrice reprezintă lucrul mecanic virtual al reacțiunilor elastice produse de încărcarea sistemului cu $q_k = 1$ parcurgînd deplasările corespunzătoare lor pentru $q_j = 1$. În cazul particular, cînd fiecare posibilitate de mișcare rezultă prin manifestarea individuală a legăturilor fictive adăugate sistemului, r_{jk} reprezintă chiar reacțiunea din legătura pentru sistemul încărcat cu deplasarea $q_k = 1$.

Matricea $M_q = \| m_{jk} \|_1^n$ este matricea „maselor"; un element m_{jk} reprezintă coeficientul inerțial corespunzător diverselor posibilități de mișcare și în cazul maselor punctuale are expresia

$$m_{jk} = \sum_{i=1}^{p} m_i \, (a_{ij} \, a_{ik} + b_{ij} \cdot b_{ik} + c_{ij} \cdot c_{ik}),$$

unde a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} și a_{ik}, l_{ik}, c_{jk} sînt deplasările masei i după trei direcții ortogonale pentru $q_j = 1$ și, respectiv, $q_k = 1$. În cazul particular, cînd fiecare masă are cîte o singură posibilitate de mișcare independentă de a celorlalte, rezultă $i = j$, k, precum și $m_{ij} = m_j$; $m_{jk} = 0$.

Studiul mișcării se face cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange; în acest scop este necesară exprimarea energiilor cinetică și potențială ale sistemului în funcție de parametrii de mișcare aleși.

Se știe că energia cinetică T precum și energia de deformație (potențială) U sînt forme pătratice în componentele vectorilor $\dot{q}$ și, respectiv, q, generate de matricele M_q și R_q

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2} \, \dot{q}^* \, M_q \, \dot{q}, \tag{1}$$

$$U(q) = \frac{1}{2} \, q^* \, R_q \, q. \tag{2}$$

Prin simbolul (*) am notat operația de transpoziție.

Aceeași mișcare poate fi descrisă și cu ajutorul vectorului ξ în altă bază a spațiului. Între vectorii q și ξ există o relație de forma $q = V \, \xi$, unde V este o matrice patrată nesingulară de rang n ale cărei elemente sînt deocamdată neprecizate.

Exprimate în parametrii noii baze T și U vor fi

$$T(\dot{\xi}) = \frac{1}{2} \, \dot{\xi}^* \, V^* \, M_q V \dot{\xi} = \frac{1}{2} \, \dot{\xi}^* \, M_\xi \, \dot{\xi}, \tag{1'}$$

$$U(\xi) = \frac{1}{2} \, \xi^* \, V^* \, R_q \, V \xi = \frac{1}{2} \, \xi^* \, R_\xi \, \xi. \tag{2'}$$

Pentru ca transformarea $q = V \xi$ să permită studierea independentă în raport cu noii parametrii aleși a fiecăreia din cele n posibilități dis-

tinete de mișcare, este necesar ca $T(\dot{\xi})$ și $U(\xi)$ să fie forme pătratice canonice

$$T(\dot{\xi}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{M}_j \dot{\xi}_j^2, \tag{1''}$$

$$U(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_j \xi_j^2. \tag{2''}$$

Dat fiind faptul că singurele matrice generatoare de forme pătratice canonice sînt cele diagonale, rezultă că matricile M_ξ și R_ξ vor fi de acest tip.

Dacă notăm cu $V_1, V_2, \ldots, V_n$ coloanele matricei V avem

$$V = \| V_1\, V_2, \ldots V_n \|,$$
$$q = \sum_{j=1}^{n} \xi_j V_j. \tag{3'}$$

Relația (3') ne arată că elementele coloanei V_j sînt componentele în baza q ale deplasării $\xi_j = 1$.

Matricele M_ξ și R_ξ vor fi diagonale dacă, pentru oricare pereche de indici $j \neq K$, sînt îndeplinite condițiile

$$V_j^* M_q V_k = 0\,; \quad \frac{1}{2} n(n-1) \text{ relații}, \tag{4'}$$

$$V_j^* R_q V_k = 0\,; \quad \frac{1}{2} n(n-1) \text{ relații} \tag{4''}$$

Relațiile (4) ne pun la dispoziție $n(n-1)$ condiții, suficiente pentru determinarea cu aproximația unor factori-scară a vectorilor V_j ce alcătuiesc matricea V.

Odată determinați vectorii V_j, studiul celor n moduri de oscilație se poate face independent unul de celălalt.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_j}\right) + \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\mathcal{M}_j \ddot{\xi}_j + \mathcal{R}_j \xi_j = 0 \quad ; \quad \omega_j^2 = \frac{\mathcal{R}_j}{\mathcal{M}_j},$$

$$\mathcal{M}_j = V_j^* M_q V_j \quad ; \quad \mathcal{R}_j = V_j^* R_q V_j.$$

Permițînd găsirea configurației geometrice a tuturor formelor proprii, totalitatea condițiilor (4) constituie pentru acestea un sistem complet de proprietăți.

Relațiile (4) reprezintă transcrierea matriceală a faptului că două forme proprii j și k date prin componentele lor V_j și V_k într-o bază oarecare q sînt ortogonale între ele, avînd ca pondere atît matricea M, cît și matricea R determinate în aceeași bază.

Toate enunțurile întîlnite de noi în literatura de specialitate relativ la ortogonalitatea formelor proprii se referă, în exclusivitate, la ortogonalitatea prin intermediul lui M. Este adevărat că în statica construcțiilor se demonstrează posibilitatea aplicării pe o structură elastică a unor sisteme complexe de legături, astfel ca $\gamma_{jk} = 0$ și că există în general o infinitate de astfel de posibilități; existența unei astfel de posibilități nu subînțelege însă faptul că ea se impune ca necesară în definirea formelor proprii.

Ortogonalitatea prin R constituie una din cele două proprietăți fundamentale ale formelor proprii; o astfel de proprietate, chiar dacă uneori este neconvenabilă pentru a fi utilizată în diverse raționamente sau calcule, se cere totuși măcar enunțată.

Primită la redacție la 10 ianuarie 1972

NOTE

ANALIZA SPECTRALĂ A VIBRAȚIILOR SISTEMELOR MECANICE CU MASĂ CONTINUĂ, AVÎND ATAȘATE UN NUMĂR FINIT DE MASE CONCENTRATE

de ALEX. DARABONT
Institutul de cercetări științifice pentru protecția muncii

În lucrare se studiază pe cale analitică și experimentală vibrațiile transversale, libere și forțate ale plăcilor dreptunghiulare avînd un număr finit de mase concentrate atașate. Pentru exprimarea matematică a maselor concentrate se utilizează distribuția lui Dirac.
Aparatajul experimental utilizat a permis să se ridice spectrogramele accelerației, vitezei și deplasării în punctul de la mijlocul plăcii în cazul unei excitații cu șocuri repetate și unui șoc izolat, de asemenea variația în timp a nivelului global al accelerației, vitezei și deplasării.

1. CALCULUL VIBRAȚIILOR LIBERE ȘI FORȚATE

Teoria distribuțiilor reprezintă un instrument matematic adecvat pentru studiul unei clase largi de probleme, care nu pot fi rezolvate cu ajutorul analizei clasice; ea permite să se justifice procedee și rezultate, care pot fi tratate astfel într-o formă unitară.

În prezent sînt cunoscute o serie de aplicații ale teoriei distribuțiilor la studiul problemelor mecanicii newtoniene și a solidelor deformabile, punîndu-se în evidență efectul discontinuităților în mișcarea acestor sisteme.

Una din problemele importante pe care le ridică practica proiectării în construcția de mașini este influența geometriei maselor atașate, asupra vibrațiilor diferitelor organe de mașini (arbori cu roți dințate, cu rotoare ș. a.).

Un aspect foarte important al acestei probleme a fost studiat în lucrarea [4] și se referă la vibrațiile corpurilor cu masă continuă, avînd atașate un număr finit de mase concentrate.

Printre altele, s-au abordat vibrațiile transversale ale plăcilor, avînd un număr finit de mase concentrate. Fie o placă plană cu masa specifică ρ, avînd un număr arbitrar de mase concentrate atașate m_1, $m_2, \ldots, m_k$ în punctele $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \ldots, A_k(x_k, y_k)$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, 1972, P. 1195–1204

Ecuația diferențială a deformării plăcii este de forma

$$N \nabla^4 w + \left[\rho h + \sum_{i=1}^{k} m_i \delta(x - x_i, y - y_i)\right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \qquad (1)$$

unde $E = \dfrac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$ este rigiditatea la încovoiere a plăcii plane, h — grosimea plăcii; ν — coeficientul lui Poisson; $\delta(x - x_i, y - y_i)$ — distribuția lui Dirac, $q(x,y,t)$ — sarcina excitatoare.

Pentru a studia vibrațiile libere, admitem o soluție de forma

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n}^{\infty} W_{m,n}(x, y,) e^{i\omega_{mn} t} = \sum_{m,n}^{\infty} X_n(x) Y_m(y) e^{i\omega_{mn} t}. \qquad (2)$$

În cazul unei plăci dreptunghiulare simplu rezemată pe laturile $y = 0$, b putem scrie

$$Y_m(y) = C \sin \beta_m y; \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b} \quad (m = 1, 2, \ldots, \infty), \qquad (3)$$

iar pentru $X_n(x)$ rezultă

$$X_n(x) = X_n(0)\,\Phi_1(x) + X_n'(0)\,\Phi_2(x) + X_n''(0)\,\Phi_3(x) +$$

$$+ X_n'''(0)\,\Phi_4(x) - \gamma_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} m_i X_n(x_i)\,\Phi_5(x) \sin^2 \beta_m y_i\, H(x - x_i), \qquad (4)$$

unde:

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\lambda_{mn}^2}(\varepsilon_{mn}^2 \operatorname{ch} \delta_{mn} x + \delta_{mn}^2 \cos \varepsilon_{mn} x),$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2\lambda_{mn}^2}\left(\frac{\varepsilon_{mn}^2}{\delta_{mn}}\right) \operatorname{sh} \delta_{mn} x + \frac{\delta_{mn}^2}{\varepsilon_{mn}} \sin \varepsilon_{mn} x),$$

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{2\lambda_{mn}^2}(\operatorname{ch} \delta_{mn} x - \cos \varepsilon_{mn} x),$$

$$\Phi_4(x) = \frac{1}{2\lambda_{mn}^2}\left(\frac{1}{\delta_{mn}} \operatorname{sh} \delta_{mn} x - \frac{1}{\varepsilon_{mn}} \sin \varepsilon_{mn} x\right),$$

$$\Phi_5(x) = \frac{1}{2\lambda_{mn}^2}\left[\frac{1}{\delta_{mn}} \operatorname{sh} \delta_{mn}(x - x_i) - \frac{1}{\varepsilon_{mn}} \sin \varepsilon_{mn}(x - x_i)\right],$$

$$\lambda_{mn}^4 = \frac{\omega_{mn}^2}{c^2}; \quad \gamma_{mn}^2 = \frac{2\omega_{mn}^2}{N b \beta_m}; \quad \varepsilon_{mn}^2 = \lambda_{mn}^2 - \beta_m^2,$$

$$\delta_{mn}^2 = \lambda_{mn}^2 + \beta_m^2.$$

Pentru a studia vibrațiile forțate, admitem o soluție de forma

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n}^{\infty} X_n(x)\, Y_m(y)\, T_{mn}(t), \tag{5}$$

unde $X_n(x)$ și $Y_m(y)$ se determină cu relația (3) și (4), iar în cazul în care $q(x,y,t) = \varphi(x,y)\, F(t)$, pentru $T_{mn}(t)$ se utilizează expresia

$$T_{mn}(t) = T_{mn}(0)\cos\omega_{mn}t + \frac{\dot{T}_{mn}(0)}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t + \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{\omega_{mn}A_{mn}}\int_0^a\int_0^b \varphi(u,v)\, W_{mn}(u,v)\,du\,dv\int_0^t F(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)\,d\tau.$$

În multe cazuri studiul pe cale analitică a vibrațiilor plăcilor cu mase atașate concentrate devine complicat, de aceea în cele ce urmează se prezintă unele metode de cercetare experimentală.

2. MĂSURĂRI DE VIBRAȚII EFECTUATE PE O PLACĂ DREPTUNGHIULARĂ, CU DOUĂ MASE CONCENTRATE

Măsurările de vibrații s-au efectuat folosindu-se aparatajul corespunzător, produs de firmele Brüel-Kjaer (Naerum-Danemarca) și San'ei Instrument Co. Ltd. (Tokio-Japonia) și utilizîndu-se schema principială reprezentată în figura 1.

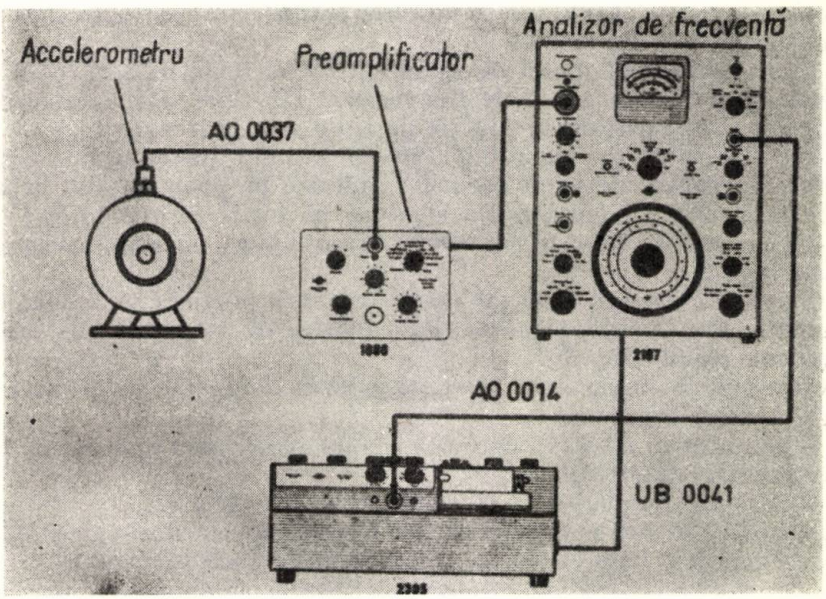


Fig. 1

Elementele care intră în componența acestei scheme sînt :

— acceleratorul piezoelectric tip 4335 (Brüel-Kjaer) cu ajutorul căruia s-au măsurat accelerațiile, vitezele și deplasările în punctul în care a fost montat ;

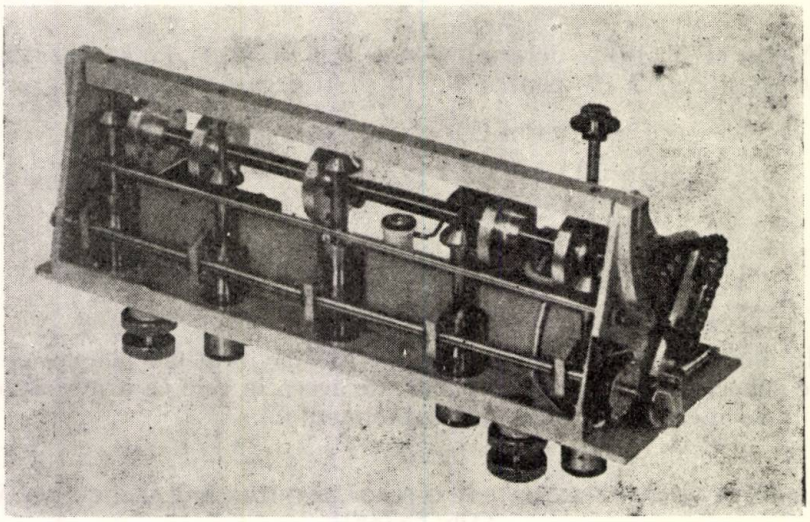


Fig. 2

— preamplificatorul tip 1606 (Brüel-Kjaer) utilizat ca amplificator de sarcină ;

— analizorul de frecvențe tip 2112 (Brüel-Kjaer) care este prevăzut cu 11 filtre de octavă, avînd frecvențele centrale de la 31,5 Hz la 31,5 KHz. Controlul electronic al schimbării de filtre permite înregistrarea automată a spectrogramelor de vibrații ;

— înregistratorul mobil de nivel tip 2305 (Brüel-Kjaer), care înregistrează semnalele în gama de frecvențe 2 Hz—200 Hz. Nivelurile de vibrații pot fi înregistrate în funcție de timp sau de frecvență ;

— oscilograful cu bucle tip 100—A (San'ei Instrument), utilizat la măsurarea caracteristicilor șocurilor aplicate pe placa supusă la încercări. Înregistrarea semnalelor s-a efectuat pe hîrtie fotosensibilă ;

— ciocanul de impact tip 3204 (Brüel-Kjaer), utilizat ca sursă de excitație (fig. 2).

Placa pe care s-au efectuat măsurările, era prevăzută cu două mase concentrate, încastrată pe contur, iar captorul de vibrații a fost montat la mijlocul plăcii (fig. 3).

Ciocanul de impact tip 3204, care avea rolul de excitator, a fost utilizat în două regimuri :

— conectat la rețea, în care caz asupra plăcii erau aplicate 10 lov/s, cu caracteristici cunoscute ;

— acționat manual cînd se efectuau șocuri izolate.

În cazul aplicării excitației cu toate cele cinci ciocănele ale dispozitivului de excitație (10 lov/s), s-au efectuat următoarele măsurări :

— analiza spectrală a accelerației, vitezei și deplasării pe 1/3 de octavă, în punctul de la mijlocul plăcii ;

— variația în timp a nivelului global al accelerației, vitezei și deplasării;

— analiza spectrală a accelerației în două puncte diferite ale plăcii; un punct situat la mijlocul plăcii, iar celălalt la 20 mm de latura încastrată.

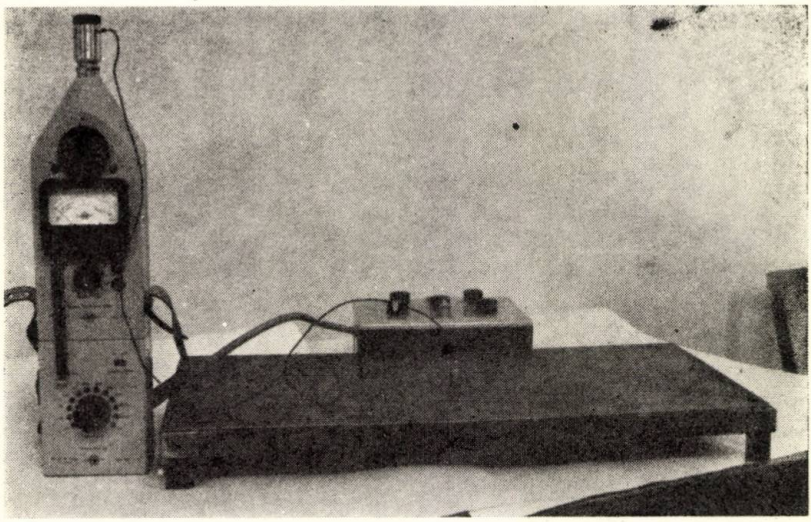


Fig. 3

Toate aceste măsurări s-au efectuat cu montajul reprezentat în figura 4, unde *1* reprezintă piesa supusă încercărilor; *2*—ciocanul de impact 3204; *3* — preamplificatorul 1606; *4* — analizorul de frecvență 2112 și *5* — înregistratorul rapid de nivel 2305.

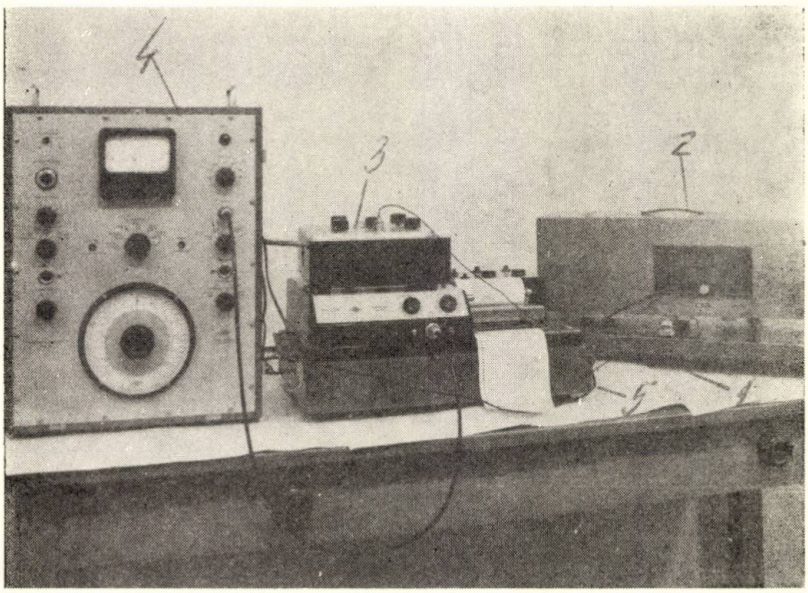


Fig. 4

În cazul aplicării excitației prin șoc individual, s-a efectuat analiza spectrală a accelerației și a deplasării sub efectul șocului. Aceste măsurări s-au efectuat tot cu montajul reprezentat în figura 4.

Variația în timp a deplasării sub efectul unui șoc, s-a înregistrat cu oscilograful cu bucle tip 100-A, utilizîndu-se montajul din figura 5

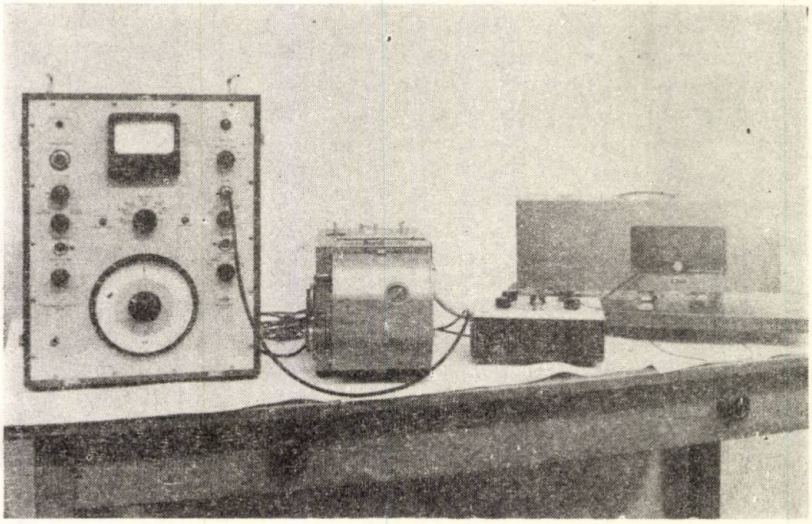


Fig. 5

care diferă de cel de la figura 4 prin aceea că înregistratorul rapid de nivel 3205 a fost înlocuit cu oscilograful cu bucle 100-A.

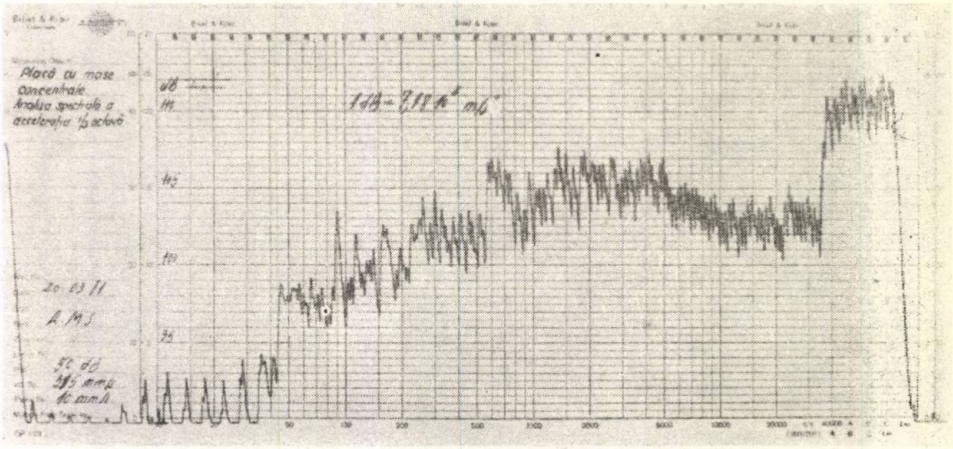


Fig. 6

Din studiul spectrogramelor de accelerații (fig. 6), viteze (fig. 7) și deplasări (fig. 8) rezultă :

— nivelul accelerației cu care se deformează placa (fig. 6), crește odată cu creșterea frecvenței, atingînd valoarea maximă la componenta de 1000 Hz unde are valoarea de 7,05 m/s² și se menține constantă pînă la componenta de 5 000 Hz, apoi scade. Nivelul global al accelerației este de 8 m/s²;

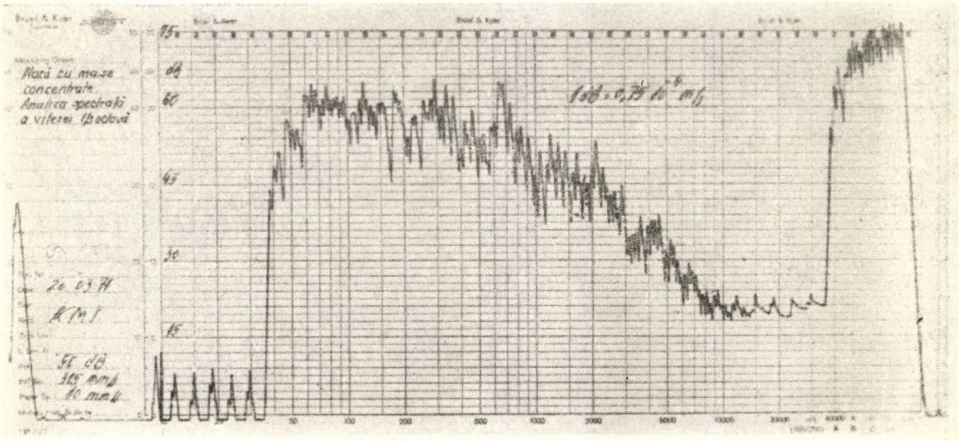


Fig. 7

— spectrul vitezei de deformare a plăcii (fig. 7) se menține aproape constant în gama de frecvențe 60...700 Hz, valoarea vitezei fiind de $0{,}45 \cdot 10^{-2}$ m/s, apoi scade pînă la valoarea de $0{,}14 \cdot 10^{-2}$ m/s la frecvența de 20.000 Hz.

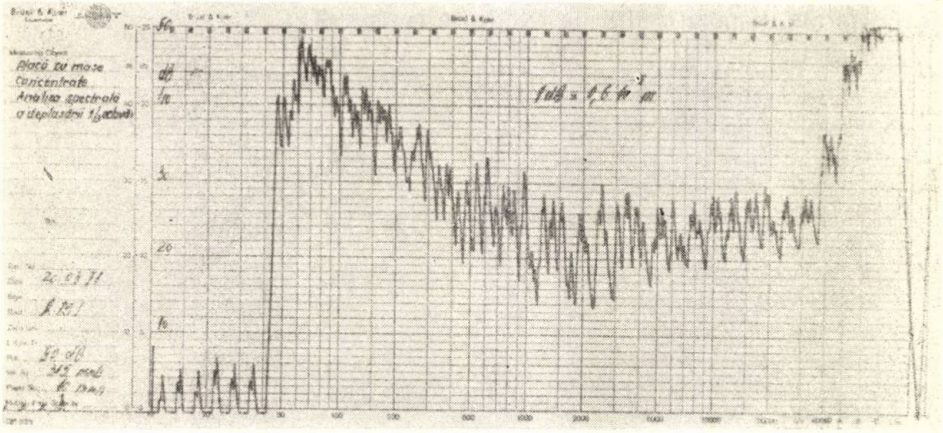


Fig. 8

Nivelul global al vitezei este de $0{,}56 \cdot 10^{-2}$ m/s;

— spectrograma deplasării (fig. 8) are valoarea maximă de $0{,}29 \cdot 10^{-4}$ m, pentru componenta de 60 Hz, urmînd apoi o scădere continuă pînă la

componenta de 1 000 Hz, după care se menține aproape constantă la valoarea de $0{,}13 \cdot 10^{-4}$ m. Nivelul global al deplasării este de $0{,}315 \cdot 10^{-4}$ m.

Din studiul spectrogramelor de accelerații ridicate în două puncte diferite ale plăcii (fig. 9) se pot distinge clar diferențele de nivel pentru

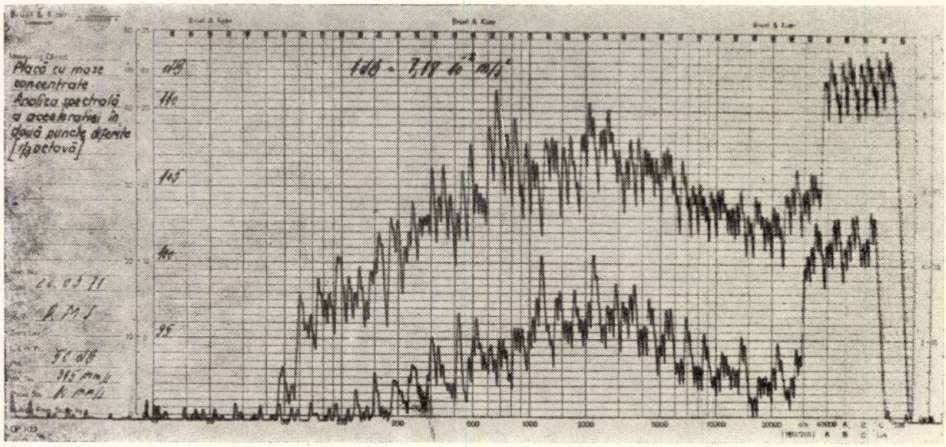


Fig. 9

toate componentele spectrului. Astfel pentru componenta de 2 000 Hz diferența de accelerații este de 0,8 m/s^2.

Pe diagrama care indică variația în timp a nivelului global al vitezei de deformare a plăcii (fig. 10), se pot distinge șocurile aplicate de cele cinci ciocănele ale dispozitivului de excitație (punctele 1, 2,...,5).

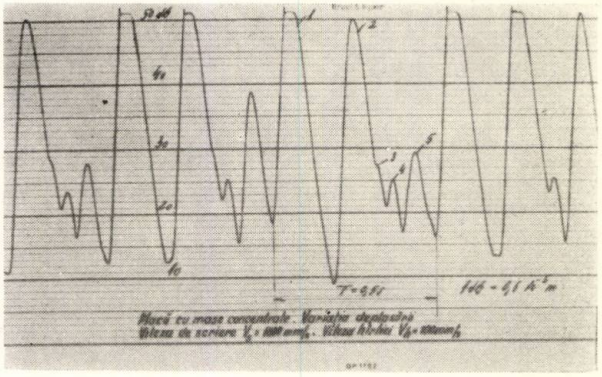


Fig. 10

Conform acestei diagrame, ciocanul cel mai apropiat de captorul de vibrații, imprimă plăcii o viteză de $0{,}56 \cdot 10^{-2}$ m/s.

Din diagrama din figura 11 care reprezintă spectrograma deplasării, rezultă că odată cu creşterea frecvenţei, nivelul deplasării scade, de la valoarea maximă de $0{,}45 \cdot 10^{-3}$ m pentru frecvenţa de 100 Hz, la valoarea

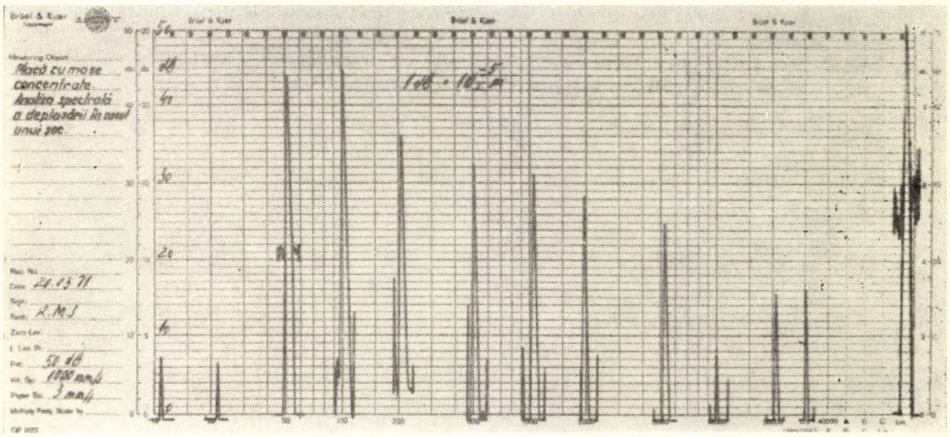


Fig. 11

minimă de $0{,}08 \cdot 10^{-3}$ m pentru frecvenţa de 10.000 Hz. Nivelul global al deplasării este de $0{,}52 \cdot 10^{-3}$ m.

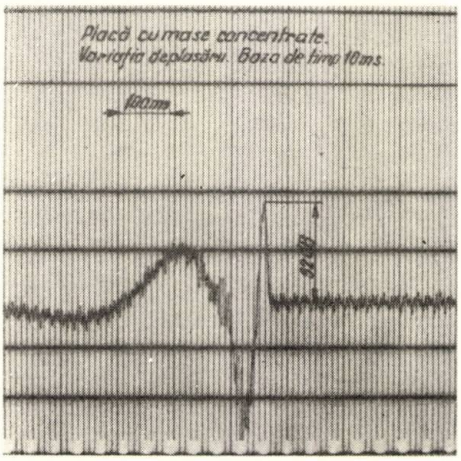


Fig. 12

În figura 12 este reprezentată variaţia deplasării în funcţie de timp, măsurată cu ajutorul oscilografului cu bucle 100-A.

Valoarea maximă a deplasării este de 52 dB, respectiv $0{,}52 \cdot 10^{-3}$ m, iar timpul necesar amortizării complete a vibraţiilor plăcii este de 360 ms.

BIBLIOGRAFIE

1. W. Nowacki, *Dinamica sistemelor elastice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1969.
2. W. Kecs, P. P. Teodorescu, *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1970.
3. I. T. Broch, *Mechanical vibration and shock measurements*, Brüel-Kjaer, Naerum, Denmark, 1970.
4. A. Darabont, *Contribuţii la mecanica sistemelor cu caracteristici discontinuu variabile*, Teză de doctorat, Institutul politehnic Bucureşti, 1971.

Primită la redacţie la 6 octombrie 1971

METODE ŞI MODELE FOLOSITE ÎN STUDIUL RĂSPUNSULUI DINAMIC AL CORPURILOR REZEMATE PE MEDII DEFORMABILE

de M. RADEŞ
Institutul politehnic Bucureşti

Se prezintă o sinteză a principalelor metode şi modele utilizate în analiza răspunsului dinamic al unui corp solid (rigid sau elastic) aşezat pe suprafaţa liberă a unui mediu deformabil, subliniind aproximaţiile introduse de fiecare dintre acestea. Se schiţează stadiul actual de rezolvare a problemei, indicîndu-se cîteva tendinţe şi posibilităţi de orientare a cercetărilor viitoare.

1. INTRODUCERE

Problema determinării răspunsului dinamic al unui corp solid aşezat pe suprafaţa liberă a unui mediu deformabil interesează domenii variate ale practicii inginereşti, printre care se pot cita: dinamica fundaţiilor de maşini, dinamica construcţiilor, geotehnica şi mecanica pămînturilor, biomecanica. Dintre aplicaţiile recente se pot enumera: izolarea vibraţiilor utilizînd straturi de elastomeri, amplasarea antenelor radar şi a construcţiilor din regiunile seismice, montarea liniilor de metrou şi chiar a clădirilor pe reazeme deformabile amortizante, dezvoltarea motoarelor rachetă cu combustibil solid, măsurarea impedanţei mecanice a corpului omenesc etc.

Un studiu complet al problemei trebuie să conţină trei părţi principale [1]:

a) dezvoltarea unei teorii matematice care să furnizeze expresii analitice pentru evaluarea numerică a frecvenţelor de rezonanţă, a amplitudinilor de mişcare şi a eforturilor unitare dinamice, luînd în considerare cît mai mulţi dintre factorii care guvernează mişcarea; b) determinarea experimentală a mărimilor fizice conţinute în aceste formule şi, în primul rînd, a proprietăţilor dinamice ale mediului de rezemare; c) stabilirea unor criterii realiste şi reliabile pentru proiectare. În articol sînt tratate numai primele două aspecte enunţate mai sus.

În scopul elaborării unei teorii pentru evaluarea răspunsului dinamic al unui *corp rezemat continuu pe un mediu deformabil* este necesară

introducerea a trei tipuri de ipoteze : a) un model pentru corpul care se reazemă (corp rigid, bară, placă, înveliş etc.) ; b) un model pentru mediul deformabil de suport (continuumul elastic izotrop sau un „model de fundaţie" ca cele propuse de Winkler, Pasternak, Reissner, Kerr etc. [2]), împreună cu specificări privind adîncimea (infinită sau finită) şi proprietăţile reologice ale materialului acestuia ; c) o condiţie de contact (unilateral sau bilateral, frecări tangenţiale, existenţa de tasări iniţiale sau pretensionări) care să definească interacţiunea dintre acestea.

În continuare, este necesară determinarea gradelor de libertate semnificante ale corpului în mişcare şi definirea completă a parametrilor sursei de energie vibratorie. Perturbaţiile pot fi periodice, tranzitorii sau aleatoare, provenind de la sarcini aplicate direct corpului sau transmise de la alte surse, sub formă de unde elastice, prin mediul de rezemare.

În cazul corpurilor rigide rezemate elastic, studiul practic se face de obicei pe modele cu parametri concentraţi, răspunsul mediului de rezemare fiind caracterizat prin coeficienţi globali, cu ajutorul cărora se exprimă forţele de readucere (elastice) şi cele disipative ce intră în compunerea ecuaţiilor diferenţiale de mişcare.

În cazul corpurilor deformabile rezemate elastic, studiul se face pe sisteme cu parametri distribuiţi. Aici problema matematică formală se reduce la includerea reacţiunii mediului de rezemare ca sarcină exterioară în ecuaţia diferenţială corespunzătoare a corpului deformabil. Mediul de rezemare poate fi înlocuit printr-un model de fundaţie şi, cum de obicei interesează numai răspunsul acestuia la suprafaţa de contact (şi nu tensiunile sau deplasările în interior), problema principală constă în găsirea unei expresii matematice care să descrie cu cît mai mare acurateţe răspunsul fundaţiei la presiunea de contact *).

În cele ce urmează se face o prezentare a principalelor metode şi modele utilizate în soluţionarea problemei, insistînd asupra răspunsului dinamic al corpului rigid rezemat elastic. Lista referirilor bibliografice, departe de a fi completă, conţine doar lucrările care au jucat un rol determinant în dezvoltarea cunoştinţelor asupra dinamicii mediilor de rezemare şi a răspunsului corpurilor cu rezemare elastică continuă.

2. VIBRAŢIILE CORPURILOR RIGIDE REZEMATE ELASTIC

2.1. VIBRAŢIILE UNUI CORP RIGID PE UN MEDIU DEFORMABIL SEMI-INFINIT

Legată în special de problemele ridicate în studiul vibraţiilor blocurilor de fundaţie aşezate pe sol, analiza dinamică a sistemului „corp rigid — mediu de rezemare", bazată pe teoria continuumului elastic omogen şi izotrop, a fost dezvoltată pînă la un nivel la care rezultatele ei pot fi utilizate cu încredere. Lucrările lui Grootenhuis [3], Gladwell [4], Ehrler [5], Novak [6] şi recenta monografie de Richart, Hall şi Woods [7] oferă o perspectivă largă a progreselor efectuate în acest domeniu.

În general se consideră că elementul care se reazemă are o bază rigidă plană, aşezată pe suprafaţa orizontală liberă a unui semispaţiu

*) Se va folosi termenul „fundaţie" pentru „mediu deformabil de rezemare continuă".

elastic, omogen şi izotrop, în condiţii de contact permanent şi fără frecări tangenţiale. Deoarece mediul de rezemare este semi-infinit, energia vibratorie aplicată pe suprafaţa de contact se propagă la infinit prin unde elastice, nefiind retransmisă înapoi corpului ale cărui vibraţii forţate sînt amortizate, chiar atunci cînd se neglijează frecările interne în materialul terenului de fundaţie.

Continuumul elastic este definit prin trei parametri : doi parametri elastici — deobicei modulul de elasticitate transversal G şi coeficientul lui Poisson ν şi un parametru inerţial — masa specifică ρ. Corpul care se reazemă este caracterizat prin masa totală M şi raza bazei circulare R sau dimensiunile bazei dreptunghiulare. În mod uzual se introduc doi parametri adimensionali : factorul masic $b = \frac{M}{\rho R^3}$ şi factorul de frecvenţă $a = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{G}}$, ultimul reprezentînd produsul dintre pulsaţia excitatoare ω şi timpul necesar undelor transversale să se propage pe distanţa R în mediul de rezemare.

2.1.1 *Corpuri cu baza circulară.* Datorită dificultăţilor matematice ce apar în studiul problemelor fără simetrie axială, majoritatea lucrărilor teoretice tratează numai cazul corpurilor cu baza circulară rigidă. O soluţie aproximativă pentru problema vibraţiilor verticale forţate staţionare ale unui astfel de corp a fost dată de Reissner [8] încă din 1936. Presupunînd o distribuţie uniformă a presiunii de contact sub corpul rigid, deplasările verticale ale punctelor suprafeţei de contact au rezultat neuniforme (nefiind deci respectată condiţia la limită la interfaţă). Deplasarea corpului a fost considerată egală cu cea a centrului suprafeţei de contact.

Reexaminînd soluţia lui Reissner şi atrăgînd atenţia asupra unei greşeli de semn, Şehter [9] a rezolvat problema analog, considerînd însă deplasarea corpului egală cu media deplasărilor din mijlocul şi de pe conturul suprafeţei de contact. Quinlan [10] şi Sung [11] au extins teoria lui Reissner, considerînd trei tipuri de distribuţie a presiunii de contact : uniformă, parabolică şi cea corespunzătoare unei baze rigide, în cazul static (Boussinesq), calculînd deplasarea corpului rigid la fel ca Reissner. Miller şi Pursey [12] au considerat o distribuţie uniformă a presiunii de contact în cazul translaţiei verticale, dar au ales media deplasărilor suprafeţei semispaţiului de sub corpul rigid pentru a reprezenta deplasarea reală a acestuia din urmă. Arnold, Bycroft şi Warburton [13] şi Bycroft [14] au admis o distribuţie a presiunii de contact similară celei din cazul static, calculînd o medie ponderată a deplasărilor punctelor suprafeţei semispaţiului sub corpul rigid, pentru a reprezenta deplasarea acestuia. Funcţia de ponderare pentru deplasări a fost aleasă proporţională cu distribuţia impusă a presiunii de contact. Ei au arătat că deplasarea reală a corpului este cuprinsă între media deplasărilor suprafeţei de contact şi deplasarea punctelor de pe perimetru.

Referindu-ne tot numai la problema vibraţiilor de translaţie pe verticală, au urmat apoi lucrările lui Borodacev [15, 16, 17], Awojobi şi Grootenhuis [18] şi Robertson [19] în care s-a formulat problema corectă, avînd condiţii la limită de tip mixt, cu deplasări impuse sub

corpul rigid şi tensiuni date (presiune exterioară nulă) la suprafaţa semispaţiului în afara zonei de contact. Sistemul de ecuaţii integrale duale ce guvernează mişcarea a fost rezolvat tot aproximativ, prin dezvoltarea soluţiei în serie pînă la 15 termeni. Novak [6] a arătat totuşi că diferenţele dintre soluţiile lui Şehter şi Borodacev sînt mici.

Dezvoltarea tehnicii de lucru pe calculatoarele electronice a permis relativ recent soluţionarea numerică a problemei, pe baza teoriei lui Reissner. Lysmer [20] a împărţit baza circulară rigidă într-un număr de inele concentrice, de grosime suficient de mică pentru a putea presupune o distribuţie uniformă a presiunii de contact pe fiecare inel. Uniformitatea presiunii de contact pe toată baza ar conduce la deplasări diferite ale inelelor. Invers, condiţia de rigiditate a bazei, tradusă în condiţie de egală deplasare verticală a tuturor inelelor, a condus la distribuţia reală de presiune de contact, avînd o componentă în fază şi una în cvadratură cu excitaţia. Soluţia lui Lysmer a fost verificată experimental, iar metoda lui — modelată de Chae, Hall şi Richart [21], care însă au pus în evidenţă o distribuţie statică parabolică a presiunii de contact în cazul anumitor pămînturi nisipoase, problemă nerezolvată cu modelele elastice de fundaţie.

Deşi rezultatele experienţelor lui Arnold, Bycroft şi Warburton [13] şi parţial cele obţinute la Waterways Experiment Station (S.U.A.) şi publicate de Weissmann [22] concordă cu teoria, trebuie subliniat faptul că orice coincidenţă între rezultatele teoretice, bazate pe folosirea semispaţiului elastic drept model de fundaţie, şi rezultatele experimentale, depinde de gradul de aproximare cu care acest model descrie comportarea reală a mediului de rezemare considerat. Astfel, fundaţia de cauciuc buretos folosită de Arnold şi colab. [13] a dat rezultate mai apropiate de teorie decît cele obţinute în sistemele reale „bloc de fundaţie — masiv de pămînt" [6]. Pentru acestea din urmă, Girard şi Picard [23] au propus relaţii de similitudine cu ajutorul cărora, pe baza rezultatelor experienţelor efectuate pe un model la scară, chiar pe terenul unde se instalează fundaţia, să se poată calcula răspunsul blocului de fundaţie real. Aceeaşi orientare o are lucrarea lui Holzlöhner [24].

Precizia care se obţine, folosind o teorie bazată pe orice model de fundaţie şi în special pe modelul semispaţiului elastic, depinde de acurateţea determinării proprietăţilor dinamice ale mediului de rezemare. Deoarece măsurarea acestora se face în procesul de deformare a materialului respectiv, valorile obţinute depind de parametrii acestui proces: frecvenţa şi amplitudinea vibraţiilor, condiţiile geometrice şi fizice la contactul cu alte corpuri, condiţiile mediului ambiant etc. Măsurările la scară redusă, efectuate în laborator pe mostre de pămînt, fie prin „metoda barei rezonante" [25], fie prin „metoda raportului amplitudinilor" [26], duc la rezultate neconcludente, deoarece se lucrează pe epruvete de pămînt turburat, lucrînd în condiţii diferite de cele reale de pe teren. Se preferă deci metoda „propagării undelor", în varianta recentă propusă de Maxwell şi Fry [27] sau metoda „de rezonanţă" utilizată de Jones [28] şi îmbunătăţită de Grootenhuis şi Awojobi [29], bazate pe folosirea unor vibratori dispuşi pe teren chiar în zona de amplasare a fundaţiei. Lucrări de sinteză asupra metodelor de determinare a proprietăţilor dinamice ale pămînturilor au fost publicate de Chae [30] şi Duke [31].

În cazul unor medii de rezemare de altă natură, de exemplu cauciuc sau mase plastice, proprietăţile dinamice se pot determina pe epruvete mici, folosind una din metodele prezentate sintetic în lucrările [32], [33], [34].

Printre problemele rezolvate în ultimul timp trebuie amintite: studiul lui Gutzwiller [35] asupra impactului unui disc circular rigid pe suprafaţa semispaţiului, lucrarea lui Richardson, Webster şi Warburton [36] asupra deplasărilor semispaţiului, produse de un corp rigid în vibraţie armonică pe suprafaţa acestuia şi teza de doctorat a lui Richardson asupra interacţiunii dinamice între două corpuri rigide rezemate pe semispaţiul elastic, parţial publicată şi în lucrarea [27]. Richardson consideră două discuri circulare rigide avînd aceeaşi rază, dispuse la o distanţă egală cu de zece ori raza. Vibraţiile verticale forţate ale unuia dintre discuri produc vibraţii orizontale de aproximativ aceeaşi amplitudine ale celuilalt disc, atunci cînd frecvenţa excitaţiei aplicate primului disc egalează frecvenţa de rezonanţă a mişcării orizontale a celui de-al doilea. În continuare, mişcarea orizontală a discului al doilea se reflectă spre primul disc, determinînd un răspuns în modul de translaţie orizontală, deşi nici o excitaţie în această direcţie nu a fost aplicată niciunuia dintre corpuri. Acelaşi lucru se poate întîmpla pentru mişcări în alte direcţii.

Problema generală a cuplării diferitelor moduri de vibraţie forţată ale unui corp rigid rezemat pe semispaţiu nu a fost rezolvată. În cazul vibraţiilor de rotaţie în jurul unei axe perpendiculare pe baza corpului cu baza circulară rigidă, o soluţie exactă corectă a fost dată de Reissner şi Sagoci [38] încă din 1944. Ulterior, soluţii analitice exacte au fost obţinute de Collins [39], Awojobi şi Grootenhuis [18] şi Robertson [40]. Recent, Gladwell şi Low [41] au rezolvat problema vibraţiilor libere (de rotaţie în jurul unei axe verticale) ale unui corp rigid circular, cementat de suprafaţa semispaţiului elastic.

Vibraţiile de translaţie orizontală şi de rotaţie în jurul unei axe orizontale ale corpului cu baza circulară au fost mai puţin studiate datorită în special dificultăţilor matematice. Bycroft [14] a dat soluţii aproximative pentru ambele moduri necuplate, considerînd o distribuţie a presiunii de contact identică cu cea statică. Gladwell [42] a dedus distribuţia dinamică corectă a presiunii de contact, pornind de la condiţiile la limită de tip mixt ale problemei, sugerînd şi o rezolvare numerică a ecuaţiilor propuse, pentru cazul valorilor mici ale factorului de frecvenţă a. El a studiat şi efectul frecării tangenţiale pe suprafaţa de contact, factor ce determină cuplarea celor două moduri.

Concluzia generală este că, în cazul vibraţiilor de translaţie, amortizarea datorită radiaţiei de energie este preponderentă, în timp ce în cazul vibraţiilor de rotaţie, disiparea prin radiaţie este relativ mică, iar amplitudinile de mişcare sînt „controlate" de amortizarea internă — a cărei influenţă a fost puţin studiată.

2.1.2 *Corpuri cu baza dreptunghiulară.* Deşi mai frecvente în practică, vibraţiile corpurilor cu baza dreptunghiulară au fost mult mai puţin tratate analitic. De obicei se recurge la teoria dezvoltată pentru corpurile cu bază circulară, introducîndu-se conceptul de *rază echivalentă* bazat fie pe egalitatea ariilor [43], fie pe egalitatea perimetrelor [44].

Analog soluţiei lui Reissner, Kobori şi col. [45], [46] au dat relaţii analitice pentru calculul „complianţei dinamice a terenului" (raportul între deplasarea corpului rigid şi amplitudinea forţei armonice perturbatoare) în patru moduri de vibraţie ale corpului cu bază dreptunghiulară, pentru distribuţie uniformă (translaţie verticală şi orizontală) şi liniară (rotaţie în jurul unei axe verticale, respectiv orizontale) a presiunii de contact pe suprafaţa de rezemare.

O soluţie îmbunătăţită, similară rezolvării lui Lysmer [20] pentru baza circulară, a fost dată de Elorduy, Nieto şi Szekely [47]. Aceştia au împărţit suprafaţa de contact în elemente pătrate suficient de mici pentru a putea fi considerate ca fiind solicitate de presiuni de contact uniform distribuite, a căror intensitate a fost astfel aleasă încît să se obţină condiţia de deplasare constantă, impusă de rigiditatea bazei. A rezultat o distribuţie a presiunii de contact dependentă de frecvenţa excitatoare, iar rezultatele teoretice au fost comparate cu o lucrare anterioară a lui Kobori [48].

Cazul limită al vibraţiilor armonice ale unei benzi rigide de lungime infinită, rezemată pe semispaţiul elastic, a fost considerat de Awojobi şi Grootenhuis [18], Awojobi [49], Karasudhi, Kerr şi Lee [50]. Alte detalii sînt prezentate în monografia lui Richart, Hall şi Woods [7].

2.1.3 *Modele cu parametri concentraţi.* Problemele practice legate de instalarea fundaţiilor de maşini pe teren au dus la dezvoltarea unor modele simplificate, ce fac apel la un aparat matematic simplu şi ai căror parametri pot fi uşor determinaţi experimental. Sistemul „bloc de fundaţie — masiv de pămînt" a fost modelat printr-un sistem masă-arc-amortizor cu un grad de libertate.

La început, parametrii acestui model au fost determinaţi prin metode semi-empirice, considerîndu-se o „masă echivalentă" a mediului de rezemare, deplasîndu-se în fază cu corpul rigid, şi „coeficienţi elastici" ai terenului de fundaţie. Reguli pentru estimarea acestora au fost date de Lorenz [51], Crockett şi Hammond [52], Eastwood [53], Jacobson şi Ayre [54], Balakrishna Rao şi Nagarai [55], Terzaghi [56], Weissmann [57], Pauw [58], Srinivasan şi col. [59], dar nimeni nu a reuşit să facă o evaluare satisfăcătoare a acestor coeficienţi, în funcţie de dimensiunile şi forma bazei corpului rigid, de modul său de vibraţie şi de proprietăţile dinamice ale mediului de rezemare. Totuşi, aceste metode s-au impus prin folosirea lor în practica de proiectare, unde au dat rezultate satisfăcătoare. Valori numerice ale coeficienţilor respectivi sînt publicate în monografiile [60 — 63], iar în limba română — în cartea prof. Gh. Buzdugan „Dinamica fundaţiilor de maşini" [64].

Reconsiderînd lucrările lui Reissner, Sung, Arnold şi colab., Lysmer şi Richart [65] au arătat că dezvoltarea unor modele complexe ca cel al continuumului elastic este utilă din motive care depăşesc simplul interes de ordin matematic. Acestea contribuie la elucidarea fenomenului de contact, estimează influenţa fiecărui factor ce determină mişcarea vibratorie a corpului rezemat şi reduc la minimum numărul de ipoteze arbitrare ce se fac atunci cînd se apelează la modele cu parametri concentraţi. Astfel, ei au prezentat metodologia formării acestor modele

cu parametri concentraţi, care să aproximeze soluţia obţinută în cazul semispaţiului, în limitele de precizie necesare în calculele inginereşti. Folosind metoda lor, Hall [66] a studiat cuplarea vibraţiilor de translaţie orizontală şi de rotaţie în jurul unei axe orizontale ale unui corp rigid rezemat pe semispaţiul elastic, recurgînd la un sistem analog cu parametri concentraţi. În acelaşi mod se pot folosi şi ecuaţiile ce guvernează vibraţiile cuplate ale unui bloc de fundaţie rezemat elastic, publicate de Hsieh [67].

Experienţele efectuate cu blocuri de fundaţie rezemate pe pămînt au relevat o serie de neajunsuri ale teoriei. Neglijarea unor factori ca neliniaritatea, îngroparea parţială, amortizarea internă, tasările permanente, variaţia proprietăţilor dinamice ale terenurilor de fundaţie cu frecvenţa, presiunea şi gradul de saturaţie — duce la abateri importante de la rezultatele teoretice. De asemenea, încă nu s-a dat o descriere satisfăcătoare a distribuţiei dinamice a presiunii de contact sub corpul rigid şi a variaţiei acesteia cu frecvenţa excitatorie. Efectul tuturor acestor factori a fost studiat analitic, utilizînd modele cu parametri concentraţi [68] — [70].

2.2. VIBRAŢIILE UNUI CORP RIGID PE UN STRAT DEFORMABIL

Folosirea straturilor deformabile ca elemente de izolare în montajele antivibratoare impune studiul detaliat al problemei răspunsului unui corp rigid rezemat pe un astfel de strat. Mai mult, Novak [6] a arătat că amplitudinile vibraţiilor verticale ale unui bloc aşezat pe pămînt sînt mult mai mari decît valorile analitice deduse pe baza teoriei semispaţiului elastic, remarcînd că solul are o comportare mai apropiată de cea a unui strat elastic de grosime finită, concluzie întărită şi de modul de variaţie a frecvenţei de rezonanţă cu creşterea bazei blocului de fundaţie.

Analiza răspunsului dinamic al unui corp aşezat pe suprafaţa unui strat deformabil, de grosime finită, este mult mai complicată, deoarece frecvenţele de rezonanţă ale stratului însuşi intervin în problemă (datorită undelor reflectate spre corpul rezemat), iar amortizarea internă joacă un rol mult mai important decît în cazul semispaţiului. Datorită acestor dificultăţi, problema a fost mult mai puţin tratată şi, deşi au fost propuse unele soluţii analitice, lipsa de date experimentale care să verifice diferitele aproximaţii introduse în calcule face ca şi în prezent fenomenele să fie puţin elucidate. O expunere succintă a stadiului actual de rezolvare a problemei se găseşte în lucrarea lui Whitman [71]. Stratul de rezemare este modelat fie prin continuumul omogen şi izotrop, fie prin modele cu parametri concentraţi, fie prin modele anizotrope, formate prin distribuţia continuă a unor elemente discrete, cu parametri concentraţi.

2.2.1 *Modelul continuumului elastic.* Bycroft [14] a studiat vibraţiile forţate armonice ale unui corp rigid cu baza circulară, aşezat pe un strat elastic de suprafaţă infinită şi grosime constantă H, rezemat la rîndul lui pe o bază plană rigidă (primele rezultate le-a publicat în [13]). Răspunsul depinde de patru parametri; trei dintre aceştia a, b şi ν,

sînt aceeaşi ca la semispaţiul elastic, al patrulea fiind raportul H/R între grosimea stratului şi raza bazei corpului rigid. Ca şi în articolul de mai tîrziu al lui Warburton [72], condiţiile la limită de tip mixt ale problemei sînt enunţate corect, dar nu sînt satisfăcute riguros. Se presupune că distribuţia presiunii de contact este similară cu cea obţinută pentru semispaţiu în condiţii statice de încărcare, iar deplasarea corpului rigid se calculează ca o medie ponderată a deplasărilor punctelor suprafeţei de contact. Pentru vibraţii de translaţie verticală, rezultatele experienţelor efectuate de Arnold şi colab. [13] şi ulterior de către Warburton [73] au dat o bună coincidenţă cu curbele $b - a$ stabilite teoretic. Bycroft a arătat că pentru un disc de greutate specifică neglijabilă, frecvenţele de rezonanţă ale vibraţiilor de translaţie verticală sînt egale cu cele ale vibraţiilor longitudinale ale unei bare de lungime H (egală cu grosimea stratului), fixă la un capăt, liberă la celălalt şi constrînsă lateral. Această observaţie pare să fi inspirat mai tîrziu formarea mai multor modele de fundaţii inerţiale [74] — [76]. În lucrările [13] şi [14] sînt prezentate şi alte moduri de vibraţie ale discului circular aşezat pe un strat elastic, arătîndu-se că în cazul modurilor de rotaţie nu apar rezonanţe, fapt confirmat experimental.

Soluţii recente pentru vibraţiile de rotaţie în jurul unei axe orizontale au fost date de Awojobi [77] şi Gladwell [78]. Vibraţiile verticale ale unui corp rigid cu baza dreptunghiulară rezemat pe un strat elastic au fost studiate de Kobori şi colab. [79], iar răspunsul dinamic al unui corp parţial îngropat într-un strat elastic a fost tratat de Tajimi [80]. Totuşi, problema rămîne încă larg deschisă cercetărilor, influenţa amortizării interne în materialul stratului, precum şi cea a raportului H/R asupra răspunsului corpului fiind puţin studiate.

2.2.2 *Modele cu parametri concentraţi.* Într-un articol relativ recent Whitman [81] a scos în evidenţă utilitatea folosirii modelelor cu parametri concentraţi în studiul analitic al răspunsului straturilor deformabile, la sarcini dinamice. El a considerat un bloc rigid, aşezat pe un strat elastic izotrop, rezemat la rîndul lui pe o bază rigidă avînd o mişcare armonică în plan orizontal (în ipoteza că blocul rigid nu execută vibraţii de rotaţie în jurul unei axe orizontale).

În cazul unui strat relativ subţire ($H/R<0{,}5$), răspunsul dinamic al blocului rezemat elastic poate fi descris de un sistem masă-arc echivalent, cu un singur grad de libertate. Pentru valori intermediare $0{,}5<H/R<4{,}0$, răspunsul sistemului poate fi descris de un model echivalent avînd două grade de libertate (două sisteme masă-arc, legate în serie), în care subsistemul masă-arc ataşat direct bazei rigide descrie aşa-numita „amplificare a stratului", iar subsistemul legat de acesta descrie „interacţiunea strat-structură". Pentru valori $H/R>4{,}0$, Whitman consideră că amplificarea stratului şi interacţiunea strat-structură pot fi tratate separat, cea de-a doua putînd fi analizată folosind ecuaţiile deduse pentru semispaţiu.

În cazul vibraţiilor de translaţie pe verticală, Whitman [82] a propus un model format din două subsisteme masă-arc pentru reprezentarea stratului, un al treilea arc pentru modelarea interacţiunii strat-structură şi o a treia masă egală cu cea a corpului rigid rezemat pe strat.

Frecvențele de rezonanță deduse pe baza acestei scheme de echivalență sînt în bună corelație cu rezultatele experimentale ale lui Arnold și colab. [13], metoda arătîndu-se a fi promițătoare în special pentru calculele inginerești.

Desigur, folosirea modelelor cu parametri concentrați este justificată doar atunci cînd interesează exclusiv răspunsul dinamic al corpului rezemat. Probleme legate de distribuția presiunii de contact sub corp, de propagare a undelor în stratul elastic și de interacțiunea între răspunsurile a două corpuri rezemate pe un strat deformabil nu pot fi rezolvate decît prin folosirea unor „modele de fundații" mai complexe, construite din elemente elastice, disipative și inerțiale distribuite continuu.

2.2.3 *Modele continue formate din elemente discrete, cu parametri concentrați.*

Cea mai simplă reprezentare a unei fundații elastice (mediu de rezemare elastic) a fost dată de Winkler [83] și Zimmermann [84], care au presupus mediul de rezemare constînd din arcuri liniare, independente, dispuse unul lîngă altul și așezate pe un suport rigid plan. Acest model neinerțial și discontinuu a jucat un rol important în dezvoltarea studiilor asupra corpurilor rezemate pe medii elastice, fiind și în prezent folosit ca o primă aproximație în rezolvarea multor probleme practice. Modelul este descris de o „relație constitutivă" liniară între presiunea normală exterioară și tasarea suprafeței fundației, fiind caracterizat de un singur parametru elastic — coeficientul de deformație la tasare uniformă. Caracterul său discontinuu permite stabilirea unei corelații directe cu modelele cu parametri concentrați [85].

Ulterior, ca o primă îmbunătățire a modelului Winkler-Zimmermann, au fost create modelele definite de doi parametri elastici, cele mai cunoscute fiind propuse de către Filonenko-Borodici, Pasternak, Wieghardt, Favre, Reissner, Vlasov și Leontiev. O descriere succintă a acestora a fost făcută de Kerr [86] și Hetényi [2].

La modelul Filonenko-Borodici, capetele arcurilor modelului Winkler sînt unite printr-un fir extensibil sau o membrană elastică. În cazul modelului Pasternak, se iau în considerare tensiunile tangențiale dintre elementele ce formează modelul Winkler. Capetele superioare ale arcurilor sînt unite printr-un „strat forfecat", adică o „bară" sau o „placă" formate din elemente verticale incompresibile, care se deformează numai prin forfecare transversală. Presiunea de contact este proporțională cu tasarea suprafeței fundației și cu curbura acesteia în punctul respectiv (considerată cu semnul minus).

Este important de subliniat faptul că prin folosirea unui astfel de model de fundație, în rezolvarea problemei se impune o relație diferențială între presiunea de contact și tasarea suprafeței, condițiile la limită de tip mixt fiind îndeplinite riguros. Metoda folosită diferă de cea utilizată în lucrările bazate pe teoria continuumului omogen și izotrop, în care se impune o lege de distribuție a presiunii de contact la suprafața stratului deformabil — independentă de frecvența perturbatoare — și în care condițiile la limită sub corp nu sînt satisfăcute.

Vibrațiile verticale ale unui corp rigid rezemat pe o fundație cu doi parametri elastici au fost studiate de Vlasov și Leontiev [87] și Muravski [88, 89], neglijînd deci inerția fundației. Spre deosebire de modelul Win-

kler, răspunsul dinamic al corpului rigid depinde de dimensiunile suprafeţei de rezemare. Presiunea de contact are o distribuţie discontinuă, fiind compusă dintr-o reacţiune uniform distribuită pe suprafaţa de contact şi o reacţiune liniară pe contur. Suprafaţa fundaţiei are o discontinuitate de pantă în dreptul marginilor corpului rezemat, deplasîndu-se în fază cu acesta.

În lucrarea [90] autorul a propus un model inerţial de tip Pasternak, studiat în detaliu în lucrarea [91] pentru cazul bidimensional. Inerţia fundaţiei este introdusă în calcule prin considerarea unei mase distribuite a stratului forfecat. Fundaţia inerţială transmite unde de suprafaţă. La frecvenţe de excitaţie superioare celei de rezonanţă a stratului, se poate vorbi de o distribuţie dinamică a presiunii de contact, variaţia celor două componente — în fază si în cvadratură — depinzînd de frecvenţa perturbatoare. Dacă se defineşte un factor masic (egal cu raportul între masa pe unitatea de suprafaţă a corpului în vibraţie şi masa distribuită a stratului forfecat) şi un factor de frecvenţă (egal cu produsul între pulsaţia excitatoare şi timpul necesar undelor transversale din stratul forfecat nerezemat să parcurgă o distanţă egală cu raza suprafeţei de contact), curbele care stabilesc dependenţa între aceşti doi factori, în condiţii de rezonanţă, au aceeaşi alură cu cele trasate de Warburton [72] pentru un material cu $\nu = 0$, folosind modelul continuumului. De asemenea, curbele care arată variaţia frecvenţei de rezonanţă cu factorul masic, converg spre frecvenţa de rezonanţă a stratului, explicînd alura curbelor ridicate experimental de Arnold şi colab. [13].

Inconsistenţele principale ale modelelor cu doi parametri elastici — distribuţie discontinuă a reacţiunii de contact în cazul încărcării prin intermediul unui corp cu bază plană rigidă şi lipsa discontinuităţii tasării suprafeţei fundaţiei la marginile corpului rezemat (observată experimental de Soldini [92]) — au fost înlăturate prin formarea modelelor cu trei parametri elastici. Modelul lui Kerr [93], propus ca o dezvoltare directă a modelului Pasternak, constă din două straturi de arcuri interconectate printr-un strat elastic de forfecare. Este deci un model Pasternak peste care s-a adăugat încă un strat de arcuri. Datorită acestuia, presiunea de contact sub corpul rigid rezemat pe fundaţie Kerr nu are nici valori infinite pe contur (ca în cazul semispaţiului), nici reacţiuni concentrate (ca în cazul fundaţiilor cu doi parametri elastici), fiind relativ constantă în centru şi crescînd spre o valoare finită pe contur. Răspunsul corpului rigid depinde de dimensiunile suprafeţei de rezemare. Modelul fiind neinerţial, deplasările fundaţiei sînt în fază, neexistînd o propagare de unde (şi deci nici amortizare prin radiaţie).

Modelul lui Kerr este tot anizotrop — permiţînd doar tasări verticale şi presiuni de contact normale la suprafaţă — astfel că la un corp rigid rezemat elastic se pot considera doar vibraţii de translaţie pe verticală şi de rotaţie în jurul unei axe orizontale [94] — [96]. Ca şi restul modelelor constituite din elemente discrete distribuite continuu, acesta descrie răspunsul unor straturi deformabile de grosime finită, rezemate pe o bază rigidă, fiind aplicabil fie unor tipuri speciale de carpete cu proeminenţe sau cu caneluri, folosite în izolarea vibraţiilor, fie unor straturi

subțiri, din materiale cu coeficientul lui Poisson apropiat de zero, avînd de preferință inserții sau cruste superficiale.

Autorul a dezvoltat un model inerțial de tip Kerr, considerînd inerția stratului forfecat [97]. Modelul este definit de patru parametri, trei elastici și unul inerțial, același număr ca la stratul elastic continuu izotrop. În cazul vibrațiilor de translație verticală ale unui corp rigid rezemat pe această fundație, au rezultat două frecvențe de rezonanță. La cea mai mică dintre acestea, amplitudinile deplasărilor sînt infinite în absența amortizării interne, în timp ce la cea de-a doua, determinată de stratul forfecat inerțial, disiparea de energie prin propagarea de unde (amortizarea geometrică) produce amplitudini de deplasare finite chiar în cazul neglijării amortizării interne.

La frecvențe superioare primei frecvențe de rezonanță a fundației libere, distribuția presiunii de contact variază de la centru spre conturul suprafeței de contact atît în fază cît și în amplitudine. Se pot considera deci două componente — una în fază cu excitația, alta în cvadratură cu aceasta — astfel că fundația inerțială propusă este cel mai simplu model care descrie distribuții dinamice de presiune de contact similare cu cele determinate experimental de Chae și colab. [21].

Trebuie remarcat că la toate aceste modele, parametrii elastici și cei inerțiali depind de grosimea stratului deformabil modelat. Studiul vibrațiilor amortizate se face ușor, introducînd elemente viscoelastice în locul celor elastice sau folosind parametrii complecși ai fundației, cu ajutorul cărora se poate considera amortizarea histeretică în materialul de suport [90, 98].

3. VIBRAȚIILE CORPURILOR DEFORMABILE REZEMATE ELASTIC

De multe ori, ipoteza rigidității bazei structurii rezemate elastic se dovedește a se îndepărta mult de condițiile reale de rezemare. Necesitatea înțelegerii interacțiunii „structură elastică — mediu de rezemare" a condus la numeroase studii teoretice asupra comportării barelor, plăcilor și învelișurilor așezate pe diferite modele de fundație. Sinteze documentare asupra lucrărilor ce tratează aspectul *static* al problemei au fost publicate de Ișkova și Korenev [99], Kerr [86] și Hetényi [2].

Studiul răspunsului *dinamic* al elementelor de structură rezemate elastic a fost abordat mai tîrziu, sfera problemelor tratate fiind incomparabil mai redusă. Lucrările lui Korenev și colab. [100], [101] și Muravski [102], completate de seria mare de articole publicate în revistele „Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii" și „Osnovania, Fundamentî i Mehanika Gruntov" în ultimii 15 ani, oferă o sinteză cuprinzătoare a problemelor studiate de școala sovietică. În cele ce urmează sînt prezentate foarte succint direcțiile de cercetare și sfera problemelor studiate pînă în prezent, pentru a pune în evidență avantajul folosirii modelelor de fundații formate din elemente deformabile discrete distribuite continuu, acolo unde alte modele nu au dat rezultate.

3.1. VIBRAŢIILE GRINZILOR PE MEDIU ELASTIC

În general, studiile de dinamica grinzilor rezemate pe o fundaţie deformabilă tratează trei categorii de probleme : a) răspunsul la sarcini mobile ; b) răspunsul tranzitoriu la sarcini cu variaţii rapide în timp ; c) răspunsul staţionar la sarcini periodice armonice. După cum s-a mai amintit, abordarea acestora se face prin includerea reacţiunii fundaţiei în ecuaţia diferenţială de mişcare a grinzii şi stabilirea unor condiţii la limită corespunzătoare.

3.1.1 *Grinzi infinite.* Primele cercetări au fost legate de studiul răspunsului dinamic al căii ferate. Hovey [103], Ludwig [104] şi Dörr [105] au analizat răspunsul staţionar al unei grinzi Bernoulli-Euler de lungime infinită, rezemată pe o fundaţie de tip Winkler şi solicitată de o sarcină mobilă de amplitudine constantă. Soluţii puţin diferite au fost date ulterior de Criner şi Mc Cann [109], Ponomariov şi colab. [107]. În lucrările lui Mathews [108] şi Kenney [109] elementele elastice de tip Hooke din fundaţia Winkler sînt înlocuite prin elemente viscoelastice de tip Kelvin, studiindu-se în special fenomenul de rezonanţă ce apare la o anumită viteză „critică" de deplasare a sarcinii pe grindă.

Ulterior, Achenbach şi Sun [110] au introdus elemente de tipul solidului viscoelastic standard liniar, realizînd o fundaţie avînd atît răspuns elastic instantaneu, cît şi elasticitate întîrziată (postacţiune elastică). Ei au arătat că pentru aprofundarea problemei este mai utilă renunţarea la modelul simplificat Winkler, decît introducerea unui model mai complicat de fundaţie viscoelastică. Achenbach şi Sun [111] au studiat apoi ce aduce nou înlocuirea grinzii Bernoulli-Euler printr-o grindă Timoshenko, în special în cazul vitezelor mari de deplasare a sarcinilor, atrăgînd atenţia asupra a încă două rezonanţe.

Reluînd problema într-un cadru mai general, ţinînd cont de neliniarităţile de ordin fizic şi de cele de ordin geometric, Steele [112] a demonstrat inexistenţa „vitezei critice", semnalată pentru cazul pur elastic. Problema neliniară a mai fost studiată de Han [113] şi Bondari [114]. Korenev [115] şi Filippov [116] au analizat răspunsul grinzii infinite rezemate pe semispaţiul elastic, iar Siniţîn [117] a prezentat o soluţie pentru răspunsul grinzii infinite pe fundaţia Winkler, în condiţii de contact unilateral. Iakovlev [74], [118] şi Viksne [76] au introdus modele de fundaţii inerţiale. În toate cazurile menţionate, sarcinile mobile sînt forţe concentrate normale pe grindă, de amplitudine constantă sau variabilă armonic în timp. Pentru alte tipuri de sarcini mobile nu există lucrări publicate.

Vibraţiile libere ale unei grinzi infinite rezemate pe o fundaţie Pasternak au fost studiate într-un mod cu totul general de Menditto [119]. Vibraţiile forţate în regim staţionar au fost analizate de Gerşunov [120] — [123] şi Glazîrin [124], [125] folosind fundaţii Winkler, Pasternak şi continuumul elastic. O soluţie detaliată a vibraţiilor forţate ale unei grinzi Bernoulli-Euler rezemată pe o fundaţie Pasternak, produse de o forţă concentrată (sau un cuplu) armonică, a fost publicată de autor [126].

Hoppmann [127 şi Ţeitlin [128] au dat rezolvări analitice pentru răspunsul la şoc al grinzii infinite pe fundaţie Winkler. Korenev [129], [130] şi Ţeitlin [131] au analizat apoi influenţa stratului forfecat din modelul Pasternak asupra răspunsului la şoc al grinzii infinite.

3.1.2 *Grinzi finite.* Numărul lucrărilor dedicate studiului răspunsului dinamic al grinzilor de lungime finită, rezemate pe un mediu deformabil, este mult mai mic decît cel al lucrărilor ce tratează grinda infinită. Aceasta se datoreşte, probabil, dificultăţilor de ordin analitic întîmpinate în special în cazul grinzilor libere la capete. O tratare generală a problemei se găseşte în cartea lui Snitko [132] şi în majoritatea manualelor de Dinamica construcţiilor. O menţiune specială pentru articolul lui Steele [133] despre răspunsul grinzii finite rezemate elastic, sub acţiunea unei sarcini mobile.

În cadrul catedrei de Rezistenţa materialelor din Institutul politehnic Bucureşti, un colectiv condus de prof. Gh. Buzdugan a elaborat un studiu teoretic şi experimental asupra vibraţiilor libere ale grinzii finite pe două reazeme lungi [134]. Reazemele au fost modelate printr-o fundaţie elastică Winkler. Autorul a studiat vibraţiile forţate în regim staţionar ale unei grinzi Bernoulli-Euler de lungime finită, rezemată pe o fundaţie amortizantă de tip Winkler [85, 98] şi pe o fundaţie de tip Pasternak [90], semnalînd diferenţe importante în ceea ce priveşte solicitările din grindă.

3.2. VIBRAŢIILE PLĂCILOR PE MEDIU ELASTIC

Răspunsul dinamic al plăcilor rezemate elastic a interesat în primul rînd pe inginerii de drumuri şi şosele, în legătură cu calculul pavajelor, al suprastructurii aerodroamelor şi autostrăzilor, al trecerilor peste ape cu crustă de gheaţă etc. Există o vastă literatură în acest domeniu, ce nu va fi citată aici. Sînt amintite doar cîteva lucrări care au deschis noi direcţii de cercetare, cu o menţiune specială pentru cartea lui Korenev, Rucimski şi Nikolaenko [101] şi culegerile de articole „Dinamika sooruJenii" care oferă o sinteză a cercetărilor şcolii sovietice în acest domeniu.

3.2.1 *Plăci infinite.* Korenev [135], Bliahman [136], Zyszko [137], Achenbach, Keshava şi Herrmann [138] au studiat vibraţiile transversale ale plăcii infinite rezemate elastic, sub acţiunea unor sarcini mobile. Nikolaenko [75] şi Glazîrin [139], [140] au cercetat răspunsul staţionar al plăcii infinite, aşezate pe diferite tipuri de medii de rezemare, iar în cartea lui Vlasov şi Leontiev [87] se rezolvă problema impactului asupra plăcii rezemate pe modelul de fundaţie cu doi coeficienţi elastici, propus de autori.

3.2.2 *Plăci finite.* Stafford [141] a determinat frecvenţele proprii de vibraţie ale unei plăci rezemate pe fundaţie Winkler. Gajendar [142] a studiat vibraţiile neliniare ale unei plăci subţiri, rezemate pe fundaţie Winkler. Menditto [143] şi Gomulinski [144] au rezolvat problema vibraţiilor libere ale plăcilor rezemate pe fundaţie Pasternak. Sharma [145] şi Kundu [146] au studiat vibraţiile plăcilor dreptunghiulare rezemate elastic, iar Kundu [146] s-a ocupat şi de plăci eliptice şi anizotrope.

MÚZEUM EGYETEMI NYOMDA BUDAPEST 1848

4. CONCLUZII

În general, este foarte dificil a dezvolta un model matematic care să descrie exact comportarea matematică a unui mediu de rezemare. Pe de altă parte, datorită naturii fizice extrem de diferite a terenurilor reale şi a materialelor de suport, un model nu poate descrie singur răspunsul tuturor acestora, fapt care a condus la dezvoltarea multor modele de fundaţii, în special pentru straturi elastice de grosime finită.

Totuşi, problema vibraţiilor unui corp rigid rezemat pe un strat deformabil continuu nu a fost rezolvată pînă în prezent. Modelul continuumului conduce la dificultăţi matematice ce nu au putut fi depăşite, ca în cazul semispaţiului elastic, iar celelalte modele au fost foarte puţin studiate dinamic. Se impune deci crearea şi studierea unui număr cît mai mare de modele de fundaţii diferite, din punct de vedere ingineresc fiind convenabile cele ai căror parametri pot fi uşor determinaţi experimental, urmînd ca experienţele şi practica să confirme care dintre acestea este cel mai adecvat pentru fiecare caz particular de teren sau material de suport. Promiţător pare a fi studiul unor modele de medii discontinue, ca cel propus de Morgan şi Ziman [147], precum şi folosirea metodei elementelor finite, utilizată deja cu succes în studii dinamice de Duns [148], Lysmer şi Kuhlemeyer [149].

Modelele de fundaţii propuse pînă în prezent pot fi folosite cu succes la abordarea celor mai diverse probleme privind vibraţiile corpurilor rezemate elastic, cu condiţia ca parametrii dinamici ai acestora să fie determinaţi prin experienţe a căror fundamentare analitică să se bazeze pe acelaşi model. Astfel, este dificilă evaluarea parametrilor unei fundaţii de tip Kerr pe baza valorilor numerice ale parametrilor ce definesc modelul continuumului. Lipsa unor date experimentale obţinute din determinări în care să se fi folosit chiar relaţiile de calcul introduse în studiul modelului de fundaţie respectiv face încă incertă şi dificilă folosirea practică a acestor modele. Cît despre experienţele pentru determinarea acestor parametri, din varietatea de metode folosite în prezent, cele mai corecte valori se obţin la măsurările pe teren (in-situ), efectuate chiar în zona de amplasare a fundaţiei sau pe stratul pe care se va monta aparatul izolat contra vibraţiilor.

Primită la redacţie la 7 ianuarie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. M. Radeş, *The dynamics of bases and foundations*, Environmental Pollution Management, **1**, 85—89 (1971).
2. M. Hetényi, *Beams and plates on elastic foundations and related problems*, Applied Mechanics Reviews, **19**, 95—102 (1966).
3. P. Grootenhuis, *The dynamics of foundation blocks*, International Conference „Dynamics and Waves", Swansea, 1970, 77—87.
4. G. M. L. Gladwell, *The calculation of mechanical impedances relating to an indenter vibrating on the surface of a semi-infinite elastic body*, Journal of Sound and Vibration, **8**, 215—228 (1968).
5. Ch. Ehrler, *Nonlinear parameters of vibrating foundations*, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E., **94**, *SM6*, 1199—1213 (1968).

6. M. Novak, *Prediction of footing vibrations*, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E., **96**, *SM3*, 837–861 (1970).
7. F. E. Richart Jr., J. R. Hall Jr., R. D. Woods, *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, N. J., 1970.
8. E. Reissner, *Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes*, Ingenieur-Archiv, **7**, 381–396 (1936).
9. O. Ia. Şehter, *Ob ucete inerţionnîh svoistv grunta pri rascete vertikalnîh vînujdennîh kolebanii massivnîh fundamentov*, Sbornik „Vibraţii soorujenii i fundamentov", Moskva, Stroivoenmorizdat, *12*, 72–89 (1948).
10. P. M. Quinlan, *The elastic theory of soil dynamics*, Symposium on Dynamic Testing of Soils A.S.T.M. Special Technical Public. *156*, 3–33 (1954).
11. T. Y. Sung, *Vibrations in semi-infinite solids due to periodic surface loading*, Symposium on Dynamic Testing of Soils, A.S.T.M. Spec. Tech. Publ. *156*, 35–63 (1954).
12. G. F. Miller, H. Pursey, *The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid*, Proceedings of the Royal Society, **A223**, 521–541 (1954).
13. R. N. Arnold, G. N. Bycroft, G. B. Warburton, *Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid*, Journal of Applid Mechanics, **22**, 391–401 (1955).
14. G. N. Bycroft, *Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **248**, *A*948, 327–368 (1956).
15. N. M. Borodacev, *O reşenii dinamiceskoi kontaktnoi zadacii dlia poluprostranstva v sluciae osevoi simetrii*, Izvestia Akademii Nauk S.S.S.R., Otdel tehniceskih nauk A. Mehanika i maşinostroenie, Moskva, *4*, 141–144 (1960).
16. N. M. Borodacev, *Ob opredelenii napriajenii pod kolebliuşcimsia fundamentom*, Osnovania Fundamentî i Mehanika Gruntov, *4*, 4–7 (1962).
17. — *Dinamiceskaia kontaktnaia zadacia dlia ştampa s ploskim krugovîm osnovaniem, lejaşcego na uprugom poluprostranstve*, Izvestia Akad. Nauk S.S.S.R., Otdel tehn. nauk A, Mehanika i maşinostroenie, *2*, 81–90 (1964).
18. A. O. Awojobi, P. Grootenhuis, *Vibration of rigid bodies on semi-infinite elastic media*, Proc. of Royal Society London, **A287**, 27–63 (1965).
19. I. A. Robertson, *Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid*, Proc. Cambridge Philos. Society, **62**, 547–553 (1966).
20. J. Lysmer, *Vertical motion of rigid footings*, Contract Report nr. 3–115, University of Michigan, Ann Arbor, Mich., 1965.
21. Y. S. Chae, J. R. Hall Jr., F. E. Richart Jr., *Dynamic pressure distribution beneath a vibrating footing*, Proc. 6th Int. Conf. Soil Mechanics and Foundations Engineering, **2**, 22–26 (1965).
22. G. F. Weissmann, *A mathematical model of a vibrating soil-foundation system*, The Bell System Technical Journal, **45**, 177–228 (1966).
23. J. Girard, J. Picard, *Étude experimentale de comportement dynamique des massifs de fondation de machine*, Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, **23**, 142–156 (1970).
24. U. Holzlöhner, *Modellbeziehungen der lotrecht schwingenden Masse auf dem Baugrund und deren praktische Anwendung*, Bautechnik, **46**, 217–227 (1969).
25. B. O. Hardin, J. Music, *Apparatus for vibration during the triaxial test*, A.S.T.M. Special Technical Publication, *392*, 55–74 (1965).
26. B. O. Hardin, *The nature of damping in sands*, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E., **92**, *SM2*, 27–42 (1965).
27. A. A. Maxwell, Z. B. Fry, *A procedure for determining elastic moduli of in-situ soils by dynamic techniques*, Proc. Internat. Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, 1967, 913–919.
28. R. Jones, *In-situ measurement of the dynamic properties of soil by vibration methods*, Géotechnique, **8**, 1–21 (1958).
29. P. Grootenhuis, A. O. Awojobi, *The in-situ measurement of the dynamic properties of soils*, *Vibration in Civil Engineering*, Butterworths, London, 1966, 181–187.
30. Y. S. Chae, *The material constants of soils as determined from dynamic testing*, Proc. Internat. Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, 759–769 (1967).
31. C. M. Duke, *Techniques for field measurement of shear wave velocity in soils*, Proc. 4 th World Conference on Earthquake Engineering, Chile, 39–54 (1969).

34. Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeş, *Sensul fizic şi metodele de determinare ale modului de elasticitate dinamic*, Zbornik Radova IX Jugoslovenskog Kongresa za Racionalnu i Primenjenu Mehaniku, Split, 1968, 349–365.
35. M. C. Gutzwiller , *The impact of a rigid circular cylinder on an elastic solid*, Phil. Trans. of the Royal Society London, **255A**, *1053*, 153–191 (1962).
36. J. D. Richardson, J. J. Webster, G. B. Warburton, *The response on the surface of an elastic half-space near to a harmonically excited mass*, Journal of Sound and Vibration, **14**, 307–316 (1971).
37. G. B. Warburton, J. D. Richardson, J. J. Webster, *Forced vibrations of two masses on an elastic half-space*, Journal of Applied Mechanics, **38**, 148–156 (1971).
38. E. Reissner, H. F. Sagoci, *Forced torsional oscillations of an elastic half-space*, Journal of Applied Physics, **15**, 652–662 (1944).
39. W. D. Collins, Proc. London Mathematical Society, **12**, 226–244 (1962).
40. I. A. Robertson, *On a proposed determination of shear modulus of an isotropic elastic half-space by the forced torsional oscillations of a circular disc*, Applied Scientific Research, **17**, 305–312 (1967).
41. G. M. L. Gladwell, R. D. Low, *On an initial value Reissner-Sagoci problem*, International, Journal of Engineering Sciences, **8**, 447–456 (1970).
42. G. M. L. Gladwel, *Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid*, International Journal of Engineering Sciences, **6**, 591–607 (1968).
43. F. E. Jr. Richart, *Foundation vibrations*, Transactions A.S.C.E., **127**, I, 863–898 (1962).
44. Y. S. Chae, *Vibration of noncircular foundations*, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E., **95**, *SM6*, 1411–1429, 1969.
45. T. Kobori, R. Minai T. Suzuki, K. Kusakabe, *Dynamical ground compliance of rectangular foundation*. Proc. 16th Japan National Congress for Applied Mechanics, 301–306 (1966).
46. T. Kobori, R. Minai, T. Suzuki, *Dynamical ground compliance of a rectangular foundation on a semi-infinite visco-elastic medium*, Annual Report, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, **11A**, 349–367 (1968).
47. J. Elorduy, J. A. Nieto, E. M. Szekely, *Dynamic response of bases of arbitrary shape subjected to periodic vertical loading*, Proc. Internat. Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, 1967, 105–121.
48. T. Kobori, *Dynamical response of rectangular foundations on an elastic space*, Proc. Japan National Symposium on Earthquake Engineering, 81–87 (1962).
49. A. O . Awojobi , *Harmonic rocking of a rigid rectangular body on a semi- infinite elastic medium*, Journal of Applied Mechanics, **33**, 547–552 (1966).
50. P. Karasudhi, L. M. Keer, S. L. Lee, *Vibratory motion of a body on an elastic half-space*, Journal of Applied Mechanics, **35**, 697–705 (1968).
51. H. Lorenz, *Der Baugrund als Federung und Dämpfung schwingender Körper*, Der Bauingenieur, **25**, 10–16 (1950).
52. J. H. A. Crockett, R. E. R. Hammond, *Natural oscillation of ground and industrial foundations*, Proc. 2nd Internat. Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, **3**, 88–93 (1948).
53. W. Eastwood, *Vibrations in foundations*, The Structural Engineer, **31**, 82–98 (1953).
54. L. S. Jacobson, R. S. Ayre, *Engineering vibrations with applications to structures and machinery*, Mc Graw-Hill, New York, 1958.
55. H. A. Balakrishna Rao, C. N. Nagaraj, *A new method for predicting the natural frequency of foundation-soil systems*, The Structural Engineer, **38**, 310–316 (1960).
56. K. Terzaghi, *Theoretical Soil Mechanics*, 1942.
57. G. F. Weissmann, *Measuring the modulus of subgrade soil reaction*, Materials Research and Standards, **5**, 71–75 (1965).
58. A. Pauw, *A dynamic analogy for foundation-soil systems*, Symposium on Dynamic Testing, of Soils, A.S.T.M. Special Technical Publ., *156*, 90–112 (1953).
59. R. J. Srinivasan, Siva Reddy, N. Ramanujam, *Coefficient of dynamic subgrade reaction*, Journal of Institution of Engineers, India, **48**, 1424–1430 (1968).
60. E. Rausch , *Maschinenfundamente und andere dynamisch beanspruchte Baukonstruktionen*, 3 Auflage, Düsseldorf, V. D. I. Verlag, 1959.
61. V. A. Florin, *Osnovi mehaniki gruntov*, Gosstroiizdat, Moskva, Vol. 1 (1959), vol. 2 (1961).
62. A. Major, *Berechnung und Planung von Maschinen — und Turbinenfundamenten*, Verlag des Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1961.
63. D. D. Barkan, *Dynamics of Bases and Foundations*, Mc Graw-Hill, New York, 1962.

64. Gh. Buzdugan, *Dinamica fundațiilor de mașini*, București, Edit. Academiei, 1968
65. J. Lysmer, F. E. Richart Jr., *Dynamic response of footings to vertical loading*, Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E., **92**, 65—91 (1966).
66. J. R. Hall Jr., *Coupled rocking and sliding oscillations of rigid circular footings*, Proc. Internat. Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, 139—148 (1967).
67. T. K. Hsieh, *Foundation vibrations*, Proceedings of Institution of Civil Engineers, **22**, 211—225 (1962).
68. N. E. Funston, W. J. Hall, *Footing vibration with nonlinear subgrade support*, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E., **93**, *SM5*, 191—211 (1967).
69. R. V. Whitman, *Analysis of foundation vibrations*, Symposium „*Vibration in Civil Engineering*", Butterworths, London, 159—179(1966).
70. M. Novak, *Über die Nichtlinearität der Vertikalschwingungen von starren Körpern auf dem Baugrunde*, Acta Technica, **2**, 365—384 (1957).
71. R. V. Whitman, *The current status of soil dynamics*, Applied Mechanics Reviews, **22**, 1—8 (1969).
72. G. B. Warburton, *Forced vibration of a body on an elastic stratum*, Journal of Applied Mechanics, **24**, 55—58 (1957).
73. — *Forced vibration of a body on a stratum of soil*, Proc. 9th Internat. Congress on Applied Mechanics, Bruxelles, **7**, 137—142 (1956).
74. A. Ș. Iakovlev, *Ucet inerții uprugovo osnovania v zadaciah o vinujdennih kolebaniah plit i bolok*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *1*, 34—38 (1967).
75. N. A. Nikolaenko, *Kolebania neogranicennoi pliti, lejașcei na uprugom poluprostranstve i uprugom sloe*, Sbornik „Voprosî rasceta plit na uprugom osnovanii", Moskva, Gosstroiizdat, 1958.
76. V. P. Viksne, *O kolebaniah balok lejașcih na uprugo-massivnom osnovanii*, Voprosî dinamiki i dinamiceskoi procinosti", Izdat. Akad. Nauk Latv. S.S.R., *2* (1954).
77. A. O. Awojobi, *Torsional vibration of a rigid circular body on an infinite elastic stratum*, International Journal of Solids and Structures, **5**, 369—378 (1969).
78. G. M. L. Gladwell, *The forced torsional vibration of an elastic stratum*, International Journal of Engineering Sciences, **7**, 1011—1024 (1969).
79. T. Kobori, R. Minai, T. Suzuki, *Dynamic ground compliance of rectangular foundation on an elastic stratum over a semi-infinite rigid medium*, Annual Report, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, **10A**, 315—341 (1967).
80. H. Tajimi, *Dynamic analysis of a structure embedded in an elastic stratum*, Proc. 4 th World Conf. on Earthquake Engineering, Santiago de Chile, **3**, 53—69 (1969).
81. R. V. Whitman, *Equivalent lumped system for structure founded upon stratum of soil*, Proc. 4th World Conf. Earthquake Engng., Santiago de Chile, **3**, 133—142 (1969).
82. R. V. Whitman, *Discuție în Proc. Internat.* Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, 157—158 (1967).
83. E. Winkler, *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*, Prag, Dominicus, 1867.
84. H. Zimmermann, *Calculation of the Upper Surface Construction of Railway Tracks* (în l. germană), Ernst & Korn Verlag, Berlin, 1888.
85. M. Radeș, *Izolații antivibratoare din straturi viscoelastice*, Buletinul Institutului Politehnic București, **3**, 71—79 (1969).
86. A. D. Kerr, *Elastic and viscoelastic foundation models*, Journal of Applied Mechanics **31**, 491—498 (1964).
87. V. Z. Vlasov, N. N. Leontiev, *Balki, plitî i obolociki na uprugom osnovanii*, Fizmatghiz, Moskva, 1960.
88. G. B. Muravski, *O kolebaniah ștampa na uprugom osnovanii*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *4*, 23—27 (1965).
89. — *K rascetu vînujdennîh vertikalnîh kolebanii kruglovo ștampa, opiraiușcegosia na uprugoe osnovanie*, Osnovania, Fundamenti i Mehanika Gruntov, *1*, 7—8(1966).
90. M. Radeș, *Steady-state response of a finite beam on a Pasternak-type foundation*, International Journal of Solids and Structures, **6**, 739—756 (1970).
91. — *Dynamic analysis of a Pasternak-type inertial foundation*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Mécanique Appliquée, **16**, 1107—1134 (1971).
92. M. Soldini, *Contribution a l'étude théorique et expériementale des déformations d'un sol horizontal élastique à l'aide d'une loi de seconde approximation*, Public. Laboratoire de Photoélasticité, École Polytech. Federale Zürich, *9* (1965).
93. A. D. Kerr, *A study of a new foundation model*, Acta Mechanica, **1**, 135—147 (1965).

94. M. Radeş, *Free vibrations of a rigid body on a Kerr foundation*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Mécanique Appliquée, **16**, 1363—1367 (1971).
95. — *Forced vibrations of a rigid body on a three-parameter foundation*, International Journal of Mechanical Sciences, **13**, 573—583 (1971).
96. — *Dynamic response of a rigid circular plate on a Kerr-type foundation model*, International Journal of Engineering Sciences, **9**, 1061—1073 (1971).
97. — *Dynamic analysis of an inertial foundation model*, International Journal of Solids and Structures (sub tipar).
98. — *Vibraţiile transversale forţate ale grinzilor finite, rezemate pe fundaţie deformabilă amortizantă*, St. cerc. mec. apl., **28**, 677—696 (1969).
99. A. G. Işkova, B. G. Korenev, *Izghib plastinok na uprugom i uprugoplasticeskom osnovanii*, Trudî zovo Vsesoiuznogo siezda po teoreticeskoi i prikladnoi mehanike, Obzornîe dokladî, **3**, 157—176 (1964).
100. B. G. Korenev, M. N. Rucimski, *Nekotorîe zadaci dinamiki balok na uprugom osnovanii*, Moskva, Gosstroiizdat, 1955.
101. B. G. Korenev, M. N. Rucimski, N. A. Nikolaenko, *Dinamika balok i plit na uprugom osnovanii*, Sbornik Naucinîh Rabot Ţ.N.I.S.K., 1955.
102. G. B. Muravski, *O modeli uprugovo osnovania*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, **6**, 14—17 (1967).
103. B. K. Hovey, *Beitrag zur Dynamic des geraden Eisenbahngleises*, Dissertation, Göttingen, 1933.
104. K. Ludwig, *Deformation of a rail elastically supported and of infinite length by loads moving at a constant horizontal velocity*, Proc. 5th International Congress on Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 650—654 (1938).
105. J. Dörr, *Der unendliche, grundgebettete Balken unter dem Einfluss einer gleichförmig bewegten Last*, Ingenieur-Archiv, **14**, 167—192 (1943).
106. H. E. Criner, G. D. Cann, *Rails on elastic foundation under the influence of high-speed traveling loads*, Journal of Applied Mechanics, **20**, 13—22 (1953).
107. S. D. Ponomariov şi colab., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini* (trad. din l. rusă), Bucureşti, Editura tehnică, 1960.
108. P. M. Mathews, *Vibrations of a beam on elastic foundation*, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, **38**, 105—115 (1958); **39**, 13—19 (1959).
109. J. T. Kenney, *Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load*, Journal of Applied Mechanics, **21**, 359—364 (1954).
110. J. D. Achenbach, Chin-Teh Sun, *Dynamic response of beam on viscoelastic subgrade*, Journal of Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., **91**, *EM5*, 61—76 (1965).
111. — *Moving load on a flexibly supported Timoshenko beam*, International Journal of Solids and Structures, **1**, 353—370 (1965).
112. C. R. Steele, *Nonlinear effects in the problem of the beam on a foundation with a moving load*, Internat. Journal of Solids and Structures, **3**, 565—585 (1967).
113. S. L. Han, *On the free vibration of a beam on a nonlinear elastic foundation*, Journal of Applied Mechanics, **32**, 445—447 (1965).
114. N. G. Bondari, *Nelineinîe svobodnîe kolebania balok, lejaşcih na vesovom uprugom osnovanii*, Sbornik „Dinamika osnovanii i fundamentov", **3**, 33—44 (1969).
115. B. G. Korenev, *Dvijenie sili po beskonecino dlinnoi balke, lejaşcei na uprugom osnovanii*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *3*, 27—32 (1967).
116. A. P. Filippov, *Ustanovivşiesia kolebania beskonecino dlinnoi balki, lejaşcei na uprogom poluprostranstve pod deistviem dvijuşceisia sili*, Izvestia AN SSSR, Otdel tehniceskih nauk, Mehanika i maşinostroenie, *6* (1961).
117. A. P. Siniţîn, *Kolebania balki na uprugom osnovanii s odnostoronnîmi sviazami*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *1*, 19—25 (1962).
118. A. S. Iakovlev, *Vînujdennîe kolebania beskonecinoi balki s ucetom inerţii uprugovo osnovania*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *1*, 42—46 (1965).
119. G. Menditto, *Su alcuni problemi di elementi di fondazione riposanti su un suolo alla „Pasternak"*, Tecnica Italiana, **32**, 865—874 (1967).
120. Z. M. Gerşunov, *Vînujdennîe ustanovivşiesia kolebania beskonecinoi balki, lejaşcei na uprugoi poluploskosti*, Sbornik „Issledovania po dinamike soorujenii i rascetu konstrukţii na uprugom osnovanii", Gosstroiizdat, Moskva, **2**, 51—71(1961).
121. — *Vînujdennîe ustanovivşiesia kolebania beskonecinoi balki lejaşcei na uprugom poluprostranstve*, Sbornik „Issledovania po dinamike soorujenii i rascetu konstrukţii na uprugom osnovanii", **2**, 90—104 (1961).

122. Z. M. GERŞUNOV, *Vînujdennîe kolebania bezkonecinoi balki na uprugom osnovanii*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *1*, 41—43 (1961).
123. — *O kolebaniah balki na uprugom osnovanii*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Sorujenii, *3*, 33—36 (1964).
124. V. S. GLAZÎRIN, *Poperecinîe kolebania beskonecinoi balki na uprugom osnovanii*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *4*, 30—34 (1968).
125. — *Peperecinîe kolebania beskonecinoi balki lejaşcei na uprugom osnovanii*, Sbornik „Dinamika soorujenii", Stroiizdat, 1968, 77—99.
126. M. RADEŞ, *Dynamic response of an infinite beam on a Pasternak-type foundation*, Lucrările, A 2a Conferinţă de Mecanică Tehnică, Bucureşti, 231—244 (1970).
127. W. H. HOPPMANN II, *Impact of a mass on a damped, elastically supported beam*, Journal of Applied Mechanics, **15**, 125—129 (1948).
128. A. I. ŢEITLIN, *Udarnoe zagrujenie bezkonecinoi balki, lejaşcei na uprugom osnovanii*, Sbornik „Issledovania po dinamike soorujenii i rascetu konstrukţii na uprugom osnovanii", Gosstroiizdat, Moskva, **2**, 5—32 (1961).
129. B. G. KORENEV, M. N. RUCIMSKI *Vozdeistvie impulsivnîh nagruzok na balku, lejaşciuiu na osnovanii s dvumia uprughimi harakteristikami*, Izvestia A.N.S.S.S.R., Otdel tehniceskih nauk, Mehanika, 6 (1956).
130. B. G. KORENEV, A. I. ŢEITLIN, *Rascet balki na uprugom osnovanii na deistvie kratkovremennoi i vnezapno prilojennoi nagruzki*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, 3, 25—30 (1962).
131. A. I. ŢEITLIN, *Impulsivnoe zagrujenie balki, lejaşcei na osnovanii s dvumia uprughimi haracteristikami*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *1*, 43—46 (1961).
132. N. K. SNITKO, *Dinamika soorujenii*, Gosstroiizdat, Kiev, 1960.
133. C. R. STEELE, *The finite beam with a moving load*, Jnl. Appl. Mechanics, **34**, 111—118 (1967).
134. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, L. STOICESCU, L. FETCU, *Vibraţiile transversale libere ale grinzii pe două reazeme elastice lungi*, St. cerc. mec. apl., **25**, 853—861 (1967).
135. B. G. KORENEV , *Nekotorîe zadaci teorii uprugosti i teploprovodnosti reşaemîe v besselevîh funkţiah*, Fizmatghiz, Moskva, 1960.
136. R. I. BLIAHMAN, *Kolebania beskonecinoi plastinki na uprugom poluprostranstve pod deistviem podvijnoi nagruzke*, Stroit. Mehanika Rascet Sooruj., *3*, 30—33 (1967).
137. M. ZYSZKO, *Kolebaniia neogranicennoi plastinî na uprugom osnovanii pod vliianiem dvijuşcihsia nagruzok*, Archivum Inzynierii Ladovej, **14**, 187—211 (1968).
138. J. D. ACHENBACH, S. P. KESHAVA, G. HERRMAN, *Moving load on a plate resting on an elastic half-space*, Journal of Applied Mechanics, **34**, 910—914 (1967).
139. V. S. GLAZÎRIN, *Poperecinîe kolebania neogranicennoi plitî lejaşcei na osnovanii s dvumia uprughimi harakteristikami*, Osnovania, Fundamentî i Mehanika Gruntov, *4*, 12—16 (1967).
140. — *Poperecinie osesimetricinîe kolebania plitî na uprugom osnovanii*, Stroitelnaia Mehanika i Rascet Soorujenii, *2*, 40—44 (1967).
141. J. W. STAFFORD , *Natural frequencies of beams and plates on an elastic foundation with constant modulus*, Journal of the Franklin Institute, **284**, 262—264 (1967).
142. N. GAJENDAR, *Large amplitude vibrations of plates on elastic foundations*, International Journal of Non-linear Mechanics, **2**, 163—172 (1967).
143. G. MENDITTO, *Su alcuni problemi di vibrazioni tranversali flessionali libere di piastre sottili, omogenee, isotrope su suolo alla* „Pasternak", Giornale del Genio Civile, **104**, 652—667 (1966).
144. A. GOMULINSKI, *Determination of eigenvalues for circular plates resting on elastic foundation with two moduli*, Archivum Inzynierii Ladovej, **13**, 183—203 (1967).
145. P. C. SHARMA, *Dynamic response of rectangular plates on elastic foundation*, Bulletin of Indian Society of Earthquake Technology, **2**, 51—58 (1965).
146. B. B. KUNDU, *The transverse vibration of an anisotropic plate of rectangular and elliptic boundaries resting on elastic foundation*, Journal of Science and Engineering Research, India, **11**, 107—112 (1967).
147. G. J. MORGAN, J. M. ZIMAN, *Wave propagation through an assembly of spheres*, part V, Proceedings of the Physical Society, London, **91**, 689—700 (1967).
148. C. S. DUNS, *Vertical response of a rigid body to dynamic loading*, Civil Engineering Public Works Review, **64**, 1091—1095 (1969).
149. J. LYSMER, R. L. KUHLEMEYER, *Finite dynamic model for infinite media*, Journal of the Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., **95**, *EM 4*, 859—877 (1969).

RECENZII

CHR. PELECUDI ,,*Teoria mecanismelor spațiale*''. Edit. Academiei, 1972, p. 511.

Monografia *Teoria mecanismelor spațiale* de prof. dr. doc. Chr. Pelecudi constituie un eveniment editorial important și răspunde unei cerințe acute manifestată în acest domeniu. Dezvoltarea, relativ recentă, a cercetărilor de mecanisme spațiale a impus autorului o amplă muncă de a sintetiza și de a exprima într-un mod unitar cele mai importante probleme și rezolvări ale acestor mecanisme. Rezultatele ce se cunosc din literatura de specialitate, bogat redată în bibliografia monografiei, sînt îmbinate într-un mod cu totul original și completate cu cercetările autorului, recunoscute în țară și pe plan mondial.

Atît expunerile de structură cît și de analiză vectorială și matriceală a mecanismelor spațiale, au la bază concluziile, în mare parte originale, sau tratate original, prezentate în prima jumătate a monografiei, în care s-au aprofundat cinematica și geometria mișcării atît a particulei materiale cît și a solidului rigid. Astfel, primul capitol cuprinde proprietățile mișcării uni- bi- și tridimensionale ale particulei cu referire specială la aplicarea metodei generale de rotație la studiul proprietăților diferențiale legate de diverse triedre de referință: Frennet, Darboux, locale, mobile, ortonormate etc. În capitolul al doilea sînt analizate mișcările solidului rigid și sînt dezvoltate formulele vectorial-fundamentale ale vitezelor, accelerațiilor și supraaccelerațiilor în mișcările relative înlănțuite. Aplicații importante se referă la mișcările de contact care generalizează mișcările obținute cu ajutorul cuplelor cinematice. Pentru cuplele formate prin contactul a două suprafețe, contactul curbă-suprafață și contactul a două curbe sînt deduse vitezele de alunecare, de pivotare și de rostogolire.

Un capitol deosebit de frumos prezentat este capitolul al treilea care cuprinde teoria mișcărilor instantanee succesive. Datorită importanței suprafețelor axiodale pentru mișcarea spațială sînt expuse proprietățile diferențiale ale suprafețelor riglate și desfășurabile, cu determinarea triedrelor locale și a triedrului central. La schimbarea axei de înșurubare instantanee *ASI* se studiază mișcările barei, ale plăcii și ale cubului *ASI*, care dau o analiză profundă a mișcării elicoidale spațiale. Sînt de remarcat dezvoltările date determinărilor de viteze și de accelerații, dar mai ales pentru supraaccelerații, atît în mișcarea absolută, cît și în mișcarea relativă, contribuind astfel la o mai bună apreciere a caracteristicilor mișcărilor tridimensionale.

În capitolul următor ,,structura mecanismelor spațiale'' sînt cuprinse analiza și sinteza numerică și structurală a lanțurilor fundamentale și generale. Este introdusă formațiunea de multicuplă sau cuplă compusă precum și metoda originală a contururilor pentru sinteza schemelor structurale, semistructurale, sau simbolice ale mecanismelor. Pe de altă parte au fost sistematizate cuplele multiaxe și lanțurile mono- și bicontururi.

Analiza vectorială a mecanismelor spațiale formează subiectul capitolului al cincilea. Cu ajutorul a două metode, prima denumită metoda barelor sau a coordonatelor carteziene absolute, iar a doua denumită metoda contururilor sau a coordonatelor relative polare, autorul prezintă ecuațiile pozițiilor, vitezelor și accelerațiilor pentru toate mecanismele monocontur.

Utilizarea triedrelor oblice, inspirate din formaţiunea fizică a elementelor, ca şi secţionarea mecanismului monocontur în două multiplete cu elementul de bază comun, a permis autorului determinarea unui număr minim de ecuaţii independente esenţiale pentru analiza şi sinteza cinematică a mecanismelor spaţiale. Problema principală şi cea mai dificilă este determinarea poziţiilor care este modelată printr-o serie de 5 — φ (φ familia) ecuaţii cu mulţi termeni şi cu un mare grad de neliniaritate, fapt care necesită rezolvarea prin aproximaţii succesive, fie sub forma iteraţiei, fie prin liniarizare. În legătură cu determinarea vitezelor şi acceleraţiilor, care sînt parametrii cinematici guvernaţi de ecuaţii liniare, la metoda barelor este dată o rezolvare prin relaţii de recurenţă, iar la metoda contururilor relaţiile obţinute sînt puse în corespondenţă cu metoda torsorului cinematic. Trebuie subliniat paragraful care se ocupă de condiţiile de compatibilitate şi dependenţă liniară între ecuaţiile mecanismelor spaţiale necesare pentru stabilirea familiei.

Ultimul capitol de „Analiza matriceală a mecanismelor spaţiale" întruneşte ecuaţiile de poziţii, viteze, acceleraţii într-o formă compactă accesibile uşor programării la calculatoare. Tot aici s-a dat o importanţă deosebită stabilirii matricelor de transmitere ale multicuplelor şi echivalării cuplelor superioare cu cuple compuse inferioare. În teoria matriceală a deplasărilor sînt prezentate matricele deplasărilor finite de rotaţie, translaţie sau elicoidale care pot servi şi ca matrice de poziţie. De asemenea, cu ajutorul matricelor deplasărilor elementare se pun în evidenţă matricele vitezelor, elementele matriceale ale tensorului rotaţiei, formulele matriceale ale triedrelor mobile şi se determină matriceal distribuţiile de viteze şi acceleraţii.

O grijă deosebită a depus autorul în privinţa notaţiilor ca şi în alegerea triedrelor de referinţă. Datorită complicaţiilor ecuaţiilor vectoriale sau matriceale monografia cuprinde stabilirea acestora în mai multe moduri încercînd să redea comparativ avantajele sau dezavantajele respective. Lucrarea se remarcă printr-un bogat material preţios cercetărilor de mecanisme spaţiale şi o fundamentare geometrică şi cinematică de cea mai înaltă valoare, utilă mecanicii teoretice şi tehnice. Problemele şi rezolvările sînt expuse cu deosebită claritate.

Fără îndoială, această monografie reprezintă o contribuţie de seamă la dezvoltarea mecanismelor spaţiale, atît în partea teoretică, cît şi pentru amplificarea introducerii lor în construcţia maşinilor.

Corneliu Drăgan

E. CARAFOLI, I. PARASCHIVOIU

STUDIU ASUPRA UNEI SERII DE ARIPI CU GEOMETRIE VARIABILĂ DERIVATE DIN ARIPILE DELTA DE DIFERITE ALUNGIRI

I. CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPILOR DELTA

Lucrarea se ocupă cu determinarea caracteristicilor aerodinamice ale aripilor delta în regim subsonic, ca regim de tranziţie pentru decolarea şi aterizarea avioanelor supersonice.
Pentru studiul experimental, în sufleria aerodinamică s-a considerat un set de patru aripi delta cu alungirile respective : $\lambda_0 = 1{,}25$; 1,50 ; 1,75 ; 2, domeniu în care se situează în mod aproximativ aripile avioanelor supersonice.
Se constată o bună concordanţă între rezultatele teoretice şi cele experimentale.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1025—1039
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

I. SETEANU

STUDIUL CURGERII PLANE A FLUIDULUI VÎSCOS ÎN JURUL UNUI CORP

Se studiază mişcarea plană a fluidului vîscos newtonian incompresibil în jurul unui corp mărginit de o curbă netedă pe porţiuni, folosindu-se metoda dezvoltării în serie după funcţii de coordonate. Se foloseşte o transformare conformă adecvată prin care condiţiile la limită se pot satisface automat. Soluţia se obţine prin compararea cu soluţia aproximativă obţinută prin metoda dezvoltărilor asimptotice racordate.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1041—1049
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

VALERIU PANAITESCU

STUDIUL ACŢIUNII RUGOZITĂŢII SUPRAFEŢEI ASUPRA TRANZIŢIEI STRATULUI-LIMITĂ LAMINAR ÎN STRAT-LIMITĂ TURBULENT

Se expune o metodă de studiu a tranziţiei stratului-limită laminar în turbulent, într-un fluid incompresibil, sub acţiunea rugozităţii suprafeţei corpului.
Se examinează cazul curgerii în jurul plăcii plane cu ajutorul metodei propuse şi se stabileşte o schemă de calcul practic.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1051—1064
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

N. MACOVEI

FILTRAREA FLUIDELOR DE FORAJ ÎN FORMAŢIILE PERMEABILE DIN JURUL UNEI SONDE

I. FILTRAREA LINIARĂ

În lucrare se studiază filtrarea fluidelor de foraj în formaţiile permeabile traversate de o gaură de sondă, luîndu-se în consideraţie atît rezistenţa la filtrare a turtei de colmatare depuse pe peretele sondei, cît şi cea a mediului filtrant. S-au dezvoltat relaţii cu ajutorul cărora se pot evalua : viteza de filtrare, volumul şi adîncimea de invazie a filtratului în formaţiile poroase. În prima parte a lucrării se examinează aproximaţia liniară a filtrării fazei lichide pentru două situaţii : a) grosimea depunerilor solide creşte continu, ceea ce are loc în absenţa circulaţiei axiale a fluidului de foraj, şi b) depunerile solide au atins o grosime de echilibru, datorită efectului circulaţiei. Aşa cum va rezulta din partea a doua a lucrării, aproximaţia liniară este valabilă numai pentru durate relativ mici de filtrare şi pentru medii poroase cu permeabilitate scăzută (apropiată de cea a turtei de colmatare).

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1065—1080
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ST. PETRESCU

STUDIUL EXPERIMENTAL AL INTERACȚIUNII GAZ-PISTON MOBIL, ÎN CAZUL UNUI SISTEM DESCHIS

Lucrarea își propune verificarea experimentală a ecuației presiunii pe un piston, P_p, ce se deplasează cu viteza medie w

$$P_p = P_{mg}\left(1 \pm \frac{aw}{c}\right),$$

în care P_{mg} este presiunea medie din gaz, c — viteza medie moleculară, a — coeficientul ce depinde de natura gazului și configurația sistemului. Se prezintă instalația experimentală, considerațiile teoretice care conduc la determinarea experimentală a lui a, precum și rezultatele experimentale obținute pentru un sistem deschis (piston în cădere liberă printr-un tub, $a = 0{,}985$).

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1081—1086
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

GH. HOBEANU

ASUPRA UNOR IPOTEZE ÎN DINAMICA ROTOARELOR

În lucrare se examinează modele matematice ale unui rotor cu arbore elastic, în regim nestaționar.
Considerînd principalii factori care determină mișcarea se stabilește modul în care poziția de așezare (verticală sau orizontală), punctul supus cercetării (centru elastic sau centru de greutate) și ipoteza referitoare la forța de amortizare externă influențează configurația modelului matematic.
Se scot în evidență neconcordanțele care rezultă din formularea incompletă a ipotezelor adoptate, dezvăluindu-se originea lor.
Pentru amortizări mici, la rezonanță, pot fi luate în considerare anumite egalități aproximative.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1087—1097
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

EUGEN BUGAJEWSKI

ASUPRA DETERMINĂRII EFORTURILOR ÎN ELEMENTELE STÎLPILOR ANCORAȚI PARȚIAL SIMETRIC

În lucrare se stabilesc relații generale de calcul pentru eforturile dintre anocre și stîlp în cazul general al unui stîlp așezat înclinat și ancorat într-un punct după direcții simetrice, ce față de planul vertical în care se află. Se dau, de asemenea, expresiile particularizate pentru pozițiile ancorelor și cazurile de încărcare mai des întîlnite.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1099—1117
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CH. VASILIU, I. GHIȚĂ

CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND COEFICIENTUL DE ADERENȚĂ LA ALUNECARE

Coeficientul de aderență la alunecare are o deosebită importanță în fenomenul de frînare a automobilului.
Determinarea valorilor acestuia pentru diferitele căi de circulație rutieră, precum și prezentarea analitică a funcției de variație în raport cu viteza de deplasare, fiind de un real folos în cercetare, proiectare și exploatare, autorii prezintă în lucrare rezultatele unor experimentări proprii din acest domeniu, pentru două din cele mai întîlnite căi de circulație din țara noastră.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1119—1131
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. I. MANOLESCU, I. DRANGA

COMPARAREA STRUCTURALĂ A LANȚURILOR CINEMATICE PLANE ARTICULATE (CLp) CU AJUTORUL TEORIEI GRAFELOR

În enumerarea lanțurilor cinematice plane cu anumite proprietăți, o problemă esențială o constituie identificarea structurilor echivalente de lanțuri dintr-o mulțime dată. Pentru rezolvarea acestor probleme, în literatura de specialitate se indică utilizarea teoriei grafelor prin stabilirea unei corespondențe între mulțimea de lanțuri și o mulțime de grafe (grafe cinematice) la lanțuri echivalente structural corespunzînd o clasă de grafe izomorfe.
Lucrarea tratează din punct de vedere algebric problema izomorfismului grafelor în legătură cu problema enunțată, și pe baza rezultatelor stabilite se propune un algoritm pentru verificarea izomorfismului la un calculator numeric.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1133—1144
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

O. MUNTEANU, I. ILIESCU, C. DUCA, I. SIMIONESCU, C. DRĂGAN

STUDIUL PARAMETRILOR MIȘCĂRII DE ROTAȚIE ÎN MECANISMELE PLANE PRIN METODE MECANOELECTRICE

Lucrarea se referă la o metodă experimentală pentru obținerea oscilogramelor parametrilor mișcării de rotație absolută și relativă a elementelor mecanismelor plane.
La înscrierea diagramelor carteziene de variație a unghiurilor se utilizează un traductor rezistiv circular, iar la diagramele de viteze și accelerații unghiulare se folosește un traductor inductiv de tip rotativ.
Erorile măsurătorilor efectuate nu depășesc limitele admisibile.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1145—1153
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15.

MAGDALENA POSEA

ÎMBUNĂTĂȚIRI PRIVIND CALCULUL ÎMBINĂRILOR PRIN FLANȘE

Se prezintă o nouă schemă pentru îmbinarea prin flanșe și pe baza acesteia se dă o nouă formulare întregului calcul clasic al flanșelor. Se ajunge astfel la o stabilire mai simplă a relațiilor de calcul, cu un volum mai mic de lucru. Rezultatele sînt direct aplicabile în proiectare.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1155—1172
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

A. PAVEL

STUDII ȘI CERCETĂRI TEORETICE-EXPERIMENTALE PRIVIND SECURITATEA TEHNICĂ A MANTALEI UNUI RECIPIENT CILINDRIC DE MARE PRESIUNE. I

Se prezintă rezultatele principale ale unor studii, cercetări, determinări (măsurări) și analize tehnice, efectuate în scopul precizării condițiilor de exploatare în continuare a mantalei cilindrice a unui recipient de mare presiune din cadrul unei centrale hidropneumatice.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1173—1189
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

D. COȘA

CONSIDERAȚII PRIVIND „ORTOGONALITATEA" FORMELOR PROPRII DE OSCILAȚIE LA SISTEME ELASTICE CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

Lucrarea studiază o particularitate de exprimare a relațiilor de ortogonalitate a formelor proprii de oscilație pentru un sistem cu mai multe grade de libertate. Condițiile rezultate sînt două și exprimă ortogonalitatea a două forme proprii atît prin intermediul matricei reacțiunilor, cît și prin intermediul matricei maselor.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1191—1194
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ALEX. DARABONT

ANALIZA SPECTRALĂ A VIBRAȚIILOR SISTEMELOR MECANICE CU MASĂ CONTINUĂ, AVÎND ATAȘATE UN NUMĂR FINIT DE MASE CONCENTRATE

În lucrare se studiază pe cale analitică și experimentală vibrațiile transversale, libere și forțate ale plăcilor dreptunghiulare avînd un număr finit de mase concentrate atașate. Pentru exprimarea matematică a maselor concentrate se utilizează distribuția lui Dirac. Aparatajul experimental utilizat a permis să se ridice spectrogramele accelerației, vitezei și deplasării în punctul de la mijlocul plăcii în cazul unei excitații cu șocuri repetate și unui șoc izolat, de asemenea variația în timp a nivelului global al accelerației, vitezei și deplasării.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1195—1204
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M. RADEȘ

METODE ȘI MODELE FOLOSITE ÎN STUDIUL RĂSPUNSULUI DINAMIC AL CORPURILOR REZEMATE PE MEDII DEFORMABILE

Se prezintă o sinteză a principalelor metode și modele utilizate în analiza răspunsului dinamic al unui corp solid (rigid sau elastic) așezat pe suprafața liberă a unui mediu deformabil, subliniind aproximațiile introduse de fiecare din acestea. Se schițează stadiul actual de rezolvare a problemei, indicîndu-se cîteva tendințe și posibilități de orientare a cercetărilor viitoare.

St. cerc. mec. apl., tom. 31, nr. 5, 1972, p. 1205—1223
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
MŰSZAKI EGYETEM

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRII DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialiate ale revistei sînt :
- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).
- Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

- Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

GH. VASILIEV, **Torsiunea structurilor elastice cu pereți subțiri**, 1970, 240 p., 11,50 lei.
I. S. GHEORGHIU, AL. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice, vol. II: Transformatoare electrice**, 1970, 464 p., 30 lei.
AL. MARINESCU, **Metode, aparate și instalații de măsură în aeromecanică**, 1970, 356 p., 24,50 lei.
AL. VAICUM, **Fundații încastrate**, 1970, 303 p., 21,50 lei.
LUIGI DOBRESCU, **Fenomene de suprafață la metale și aliaje**, 1970, 444 p., 29 lei.
M. GR. NĂSTASE, **Bazele defectoscopiei radiologice**, 1970, 260 p., 14 lei.
C. HAIDUC, **Optimizarea parametrilor centralelor nucleare-electrice**, 1970, 323 p. 17,50 lei.
C. PUPĂZAN, **Acustica în construcții**, 1970, 262 p., 13 lei.
EUG. DIMITRIU-VÂLCEA, **Termotehnica în construcții**, 1970, 284 p., 15 lei.
I. S. GHEORGHIU, AL. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. III. Mașini asincrone, 1971, 534 p., 33 lei.
EDMOND NICOLAU, **Sinteza sistemelor radiante**, 1971, 376 p., 22 lei.
C. I. PENESCU, **Sisteme de protecție de distanță**, 1971, 624 p., 41 lei.
ENE MARIN, **Metoda mărimilor determinante**, 1971, 228 p., 13 lei.
GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria matematicilor aplicate clasice din România, mecanică și astronomie**, 1971, 633 p., 48 lei.
B. POPA, V. CASIAN, **Teoria și calculul injectoarelor mecanice cu cameră de turbionare**, 1971, 311 p., 21 lei.
DAN PAVELESCU, **Concepții noi, calcul și aplicații în frecarea și uzarea solidelor deformabile**, 1971, 330 p., 26 lei.
N. REUS, **Tratarea simbolică a schemelor de comutație**, 1971, 270 p., 11 lei.
I. S. GHEORGHIU, ALEXANDRU S. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. IV, mașini sincrone, 1972, 482 p., 30 lei.
P. P. TEODORESCU, **Dinamica corpurilor liniar elastice**, 1972, 392 p., 24,50 lei.
M. MIȘICU, **Teoria mobilității elastice**, 1972, 428 p., 23,50 lei.
EDMOND NICOLAU, **Cîmpuri și unde electromagnetice**, 1972, 350 p., 21,50 lei.
C. A. VASILESCU, S. FAUR, V. PIMSNER, GH. RĂDULESCU, **Corelațiile dintre combustibilul lichid și motorul cu ardere internă**, 1972, 336 p., 23,50 lei.
CHRISTIAN PELECUDI, **Teoria mecanismelor spațiale**, 1972, 512 p., 30 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, NR. 5, P. 1023–1226, BUCUREȘTI, 1972

I. P. „Informația" — c. 1609

43 832

Lei 40. —